Conjuntos regulares do círculo e minimalidade

Aldo Portela Almada

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

Sumário

1 Introdução **4**

1.1 Preliminares 5

1.2 Resultados 8

2 A condição de p-separação **10**

2.1 Espectro de um conjunto de Cantor e a condição de p-separação 11

2.2 Demonstração do teorema 2.1 13

2.3 Exemplos de conjuntos de Cantor que satisfazem a condição de p-separação 14

2.3.1 Construção do espectro do conjunto de Cantor 14

2.3.2 Construção do conjunto de Cantor 15

2.3.3 Condição de p-separação para K 16

2.3.4 O conjunto K não satisfaz a condição de McDuff 16

3 Conjuntos de Cantor regulares e rigidez geométrica **18**

3.1 Generalidades 18

3.2 Conjuntos de Cantor regulares 20

3.3 Propriedades geométricas dos conjuntos de Cantor regulares 22

3.4 Rigidez geométrica (I) 23

3.5 Prova do teorema 3.1 28

4 Não-minimalidade $C^{1+\varepsilon}$ dos conjuntos regulares **32**

4.1 Recobrimentos e níveis 32

4.2 Prova do teorema 4.1 34

5 Conjuntos regulares de medida positiva **37**

5.1 Rigidez geométrica (II) 37

5.2 Prova do teorema 5.1 40

5.3 Prova do teorema 5.3 40

6 Conjuntos de Cantor quase-regulares **44**

6.1 Conjuntos de Cantor quase-regulares 44

6.2 Demonstração do teorema 6.1. 46

6.3 Demonstração do teorema 6.2. 46

Resumo

Ainda que qualquer conjunto de Cantor do círculo seja o conjunto minimal de algum homeomorfismo de S^1, nem sempre tal conjunto é minimal para um *difeomorfismo* de classe C^1 do círculo. Nesta tese, provamos que nenhum elemento de uma certa família dos chamados conjuntos de Cantor *regulares* é C^1-minimal. Também provamos em geral que nenhum conjunto de Cantor regular é $C^{1+\varepsilon}$-minimal para nenhum $\varepsilon > 0$, e generalizamos este último resultado para uma classe ainda maior de conjuntos de Cantor que chamamos conjuntos de Cantor *quase-regulares*.

Capítulo 1

Introdução

Para estudar a dinâmica de um homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ (onde $S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ é o círculo unitario), é importante estudar os conjuntos invariantes para f. É muito simples determinar os conjuntos invariantes uma vez conhecidos os conjuntos minimais. Dizemos que um conjunto K é um conjunto minimal para f se K é compacto, não vazio, invariante e minimal (relativo à inclusão) com respeito a estas três propriedades. Exemplos simples de conjuntos minimais são os pontos fixos e as órbitas periódicas de um homeomorfismo em S^1, e em geral o ω-limite de qualquer ponto. O lema de Zorn implica que todo homeomorfismo de S^1 tem pelo menos um conjunto minimal. Se f tem pontos periódicos (por exemplo quando f não preserva orientação) então todos os conjuntos minimais são finitos (as próprias órbitas periódicas). Por outro lado, se f não tem pontos periódicos o conjunto minimal é único e infinito. Neste último caso o minimal é um conjunto de Cantor (caso intransitivo) ou todo S^1 (caso transitivo). No caso transitivo f é conjugado a uma rotação irracional e no caso intransitivo é semiconjugado a uma rotação irracional. O seguinte teorema permite afirmar que o caso intransitivo não pode acontecer quando f é de classe C^2.

Teorema 1.1 (Denjoy). Se f é um difeomorfismo de classe C^1 em S^1 sem pontos periódicos e com derivada de variação limitada então f é topologicamente conjugado a uma rotação irracional.

Podemos encontrar uma demonstração deste teorema em [2]. Nesse trabalho, Denjoy também construiu difeomorfismos de classe C^1 para os quais o conjunto errante é um conjunto de Cantor (os chamados exemplos de Denjoy). Foi Denjoy quem construiu pela primeira vez este tipo de difeomorfismos intransitivos. Existem exemplos de difeomorfismos intransitivos de classe $C^{1+\alpha}$ para $\alpha < 1$, construídos por Herman em [4]. Da existência de difeomorfismos intransitivos e pelo

fato de que dados dois conjuntos de Cantor em S^1 existe um homeomorfismo de S^1 que leva um no outro, deduzimos que todo conjunto de Cantor é minimal para algum homeomorfismo. Resumindo, os conjuntos minimais para homeomorfismos são qualquer conjunto finito, qualquer conjunto de Cantor e S^1. Isto não é assim quando f é um difeomorfismo de classe C^1. É fácil verificar que todo subconjunto finito de S^1 é C^1-minimal (ou seja é minimal para algum difeomorfismo de classe C^1) mas nem todo conjunto de Cantor é C^1-minimal. Em [3] McDuff demonstrou em particular que o conjunto triádico usual de Cantor não é C^1-minimal e em [5] Norton demonstrou que os conjuntos afins não são C^1-minimais. Se $T_1, ..., T_n$ são intervalos fechados dois a dois disjuntos contidos no intervalo $[0,1]$, $f_i : T_i \to [0,1]$ são funções lineares sobrejetivas com $i = 1, ..., n$ e a função $F : \bigcup T_i \to [0,1]$ é tal que $F(x) = f_i(x)$ se $x \in T_i$, então $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}[0,1]$ é um conjunto de Cantor. Todo conjunto construído desta forma é chamado conjunto de Cantor afim.
Aqui demonstramos que os conjuntos de Cantor regulares não são $C^{1+\varepsilon}$-minimais para nenhum $\varepsilon > 0$ e em particular que uma subfamília de tais conjuntos não são C^1-minimais. A construção dos conjuntos de Cantor regulares é similar á construção do conjunto triádico usual de Cantor. Em cada etapa da construção de um conjunto de Cantor regular, retiramos uma quantidade finita de intervalos abertos igualmente distribuídos (na construção do conjunto de Cantor usual em cada etapa só retiramos um intervalo). Os conjuntos regulares de Cantor podem ter qualquer medida menor que 2π enquanto os conjuntos afins de Cantor têm medida zero. Isto mostra que a família que consideramos difere da família considerada por Norton. No último capítulo generalizamos alguns dos resultados para uma família de conjuntos de Cantor um pouco maior que chamamos conjuntos de Cantor quase-regulares.

1.1 Preliminares

Consideramos homeomorfismos $f : S^1 \to S^1$ sem pontos periódicos. Se x é um ponto de S^1, denotaremos por $o^-(x)$, $o^+(x)$ e $o(x)$ as órbitas passada, futura e total de x para f. Denotaremos por $\alpha(x)$ e por $\omega(x)$ o conjunto dos pontos de acumulação de $o^-(x)$ e $o^+(x)$ respectivamente. Não é difícil provar que os conjuntos $\alpha(x)$ e $\omega(x)$ e o conjunto errante $\Omega(f)$ coincidem e não dependem de x. O conjunto $\Omega(f)$ é fechado, não-vazio e f-invariante.

Proposição 1.2. O conjunto $\Omega(f)$ é o único conjunto minimal para f.

Demonstração. Seja Γ um conjunto minimal para f. Se $y \in \Gamma$ então $\alpha(y) = \omega(y) = \Omega(f) \subset \Gamma$, logo $\Omega(f) = \Gamma$. $\square$

Proposição 1.3. As possibilidades para $\Omega(f)$ são S^1 ou um conjunto de Cantor.

Demonstração. Suponhamos que $\Omega(f)$ não é S^1. Vamos demonstrar que $\Omega(f)$ é um conjunto de Cantor. Seja I uma componente conexa de $\Omega(f)$. Como f não tem pontos periódicos, $f^m(I) \bigcap f^n(I) = \phi$ para $m \neq n$. Daqui temos que se existe x interior a I então $x \notin \alpha(x)$, que é uma contradição. Logo $\Omega(f)$ é totalmente desconexo. Se x é um ponto de $\Omega(f)$, então x é um ponto de acumulação de sua órbita, logo $\Omega(f)$ não tem pontos isolados. Então temos que $\Omega(f)$ é um conjunto de Cantor. □

Para o caso em que f é uma rotação de ângulo irracional, é fácil provar que o conjunto $\Omega(f)$ é S^1. Para ver exemplos em que $\Omega(f)$ é um conjunto de Cantor, veremos primeiramente um pouco da teoria de Poincaré (ver por exemplo [7]). Sejam $f : S^1 \to S^1$ um homeomorfismo e $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o levantamento de f tal que $\widehat{f}(0) \in [0, 1)$. Se g é uma rotação então $\widehat{g}(x) = x + \widehat{g}(0)$.

Proposição 1.4. Se f é um homeomorfismo de S^1 que preserva orientação, então para todo ponto x o limite $\rho(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\widehat{f}^n(x)-x}{n}$ existe e não depende de x.

□

Para a demonstração veja [7].

Definição 1.5. O número $\rho(f)$ é denominado **número de rotação** de f.

Proposição 1.6. Se f é um homeomorfismo de S^1 que preserva orientação então, f tem pontos periódicos se e só se α é racional.

□

Para a demonstração veja [7].

Teorema 1.7. Se f é um homeomorfismo sem pontos periódicos (ou seja, se α é irracional) então existem uma única rotação g e uma função contínua, sobrejetiva e monótona $h : S^1 \to S^1$ tais que

$$h \circ f = g \circ h.$$

□

Para a demonstração veja [7]. Nestas condições os homeomorfismos f e g têm o mesmo número de rotação. No caso em que $\Omega(f) = S^1$ então h é um homeomorfismo (f e g são conjugados por h) e quando $\Omega(f)$ é um conjunto de Cantor h não é um homeomorfismo (f e g são semiconjugados por h) e $h(\Omega(f)) = S^1$. Em [8] podemos encontrar uma construção bem clara de um conjunto de Cantor C^1–minimal. A construção é feita da seguinte maneira. Dada uma rotação irracional $R_\alpha(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i(t+\alpha)}$, corta–se o círculo S^1 em todos os pontos de uma órbita $\{\theta_n : n \in \mathbb{Z}\}$ de R_α e em cada corte insere–se um segmento I_n que finalmente será um intervalo errante. Para obter exemplos com infinitas órbitas de intervalos errantes devemos cortar S^1 nos pontos de infinitas órbitas de R_α. Basicamente, os exemplos de Denjoy conhecidos são os antes mencionados e seus conjugados.

Proposição 1.8. Todo conjunto de Cantor em S^1 é minimal para algum homeomorfismo.

Demonstração. Sejam K um conjunto de Cantor contido em S^1 e $f : S^1 \to S^1$ um dos exemplos de Denjoy. Seja Ω o conjunto minimal para f. Sabemos que existe um homeomorfismo $h : S^1 \to S^1$ tal que $h(K) = \Omega$. Consideremos $F = h^{-1} \circ f \circ h : S^1 \to S^1$. Claramente F é um homeomorfismo, tem o mesmo número de rotação que f e $F(K) = K$. Como o conjunto minimal de um homeomorfismo sem pontos periódicos é único, temos que o conjunto K é o conjunto minimal de F. $\square$

O teorema de Denjoy 1.1 permite afirmar que se f é um homeomorfismo de classe C^2 que preserva orientação então $\Omega(f) = S^1$. Em outras palavras temos que os conjuntos de Cantor de S^1 não são C^2-minimais e que todo conjunto de Cantor de S^1 é C^0-minimal. Gostaríamos saber quando um conjunto de Cantor de S^1 é C^1-minimal. Sabemos que nem todo conjunto de Cantor de S^1 é C^1-minimal. Em [3] McDuff demonstrou que o conjunto triádico usual de Cantor não é C^1-minimal. Também sabemos que os conjuntos de Cantor afins não são C^1-minimais, fato que demonstrou Norton em [5]. Em [3] McDuff também conjecturou sobre os conjuntos de Cantor C^1-minimais. Para enunciar tal conjectura, McDuff define o espectro de um conjunto de Cantor (ver seção 2.1) como o conjunto $\{\lambda_n\}$ dos comprimentos das componentes conexas do complementar de K ordenados em forma decrescente ($\lambda_{n+1} < \lambda_n$). Precisamente, McDuff conjecturou que se o conjunto de Cantor K é C^1-minimal então $\lambda_n/\lambda_{n+1} \to 1$ quando $n \to \infty$. Neste trabalho McDuff demonstrou um teorema que enunciaremos utilizando uma condição que chamamos condição de p-separação. Esta condição será explicada no próximo capítulo.

Teorema 1.9 (McDuff). Se um conjunto de Cantor K satisfaz a condição de p-separação para $p = 0$ então K não é C^1–minimal.

No que segue a condição de p-separação para $p = 0$ será chamada de condição de McDuff. Como corolário deste teorema McDuff demonstra que o conjunto triádico usual de Cantor não é C^1-minimal.

1.2 Resultados

No capítulo a seguir generalizamos o teorema de McDuff demonstrando o seguinte.

Teorema 1. Se o conjunto de Cantor K satisfaz a condição de p-separação para algum inteiro p não negativo, então K não é C^1-minimal.

Para a demonstração veja seção 2.2. Nos capítulos 3, 4 e 5 trabalhamos com uma família de conjuntos de Cantor que chamamos regulares. No lema 3.7 mostramos que para os conjuntos de Cantor regulares $\lambda_n/\lambda_{n+1} \nrightarrow 1$, portanto se for verdade a conjectura McDuff, tais conjuntos não são C^1-minimais. Na tentativa de provar isto último, obtemos alguns resultados parciais.

Teorema 2. Se K é um conjunto de Cantor C^1-minimal para f que tem uma única órbita de intervalos errantes, então K não é regular.

Para a demonstração veja seção 3.5. Como resultado geral provamos o seguinte.

Teorema 3. Se K é um conjunto de Cantor regular, então K não é $C^{1+\varepsilon}$–minimal para nenhum $\varepsilon > 0$.

Para a demonstração veja seção 4.2. Para obter este resultado, provamos que se um conjunto de Cantor regular fosse $C^{1+\varepsilon}$-minimal então satisfaria a condição de p-separação para $p = 0$, o que contradiz o teorema de McDuff. No caso em que o conjunto de Cantor regular K é de medida positiva, supondo que é C^1-minimal para um difeomorfismo f, obtemos condições bastantes rígidas para f'. Se a seqüência $\{m_i\}$ é tal que m_i é a quantidade de intervalos retirados na etapa i da construção de K, temos o seguinte resultado.

Teorema 4. Se K é um conjunto de Cantor regular de medida positiva e a seqüência $\{m_i\}$ não é limitada, então K não é C^1–minimal.

Para a demonstração veja seção 5.2. No último capítulo generalizamos alguns dos resultados anteriores trabalhando com uma família de conjuntos de Cantor maior que chamamos conjuntos de Cantor quase-regulares. Para tais conjuntos definimos sua regularidade que é um número entre 0 e 1. No caso em que a regularidade não é nula (o conjunto não é muito irregular) é possível generalizar alguns dos resultados obtidos nos capítulos anteriores. Em particular, temos os o seguinte resultados.

Teorema 5. Se um conjunto de Cantor K é C^1–minimal para um difeomorfismo f, e se no complementar de K existe uma única órbita de intervalos errantes, então K não é quase-regular.

Para a demonstração veja seção 6.2.

Teorema 6. Se K é um conjunto de Cantor quase-regular de regularidade não nula, então K não é $C^{1+\varepsilon}$-minimal para nenhum $\varepsilon > 0$.

Para a demonstração veja seção 6.3. Em [5] Norton da outros exemplos de conjuntos de Cantor que não são C^1-minimais. Naquele trabalho, ele demonstra que os conjuntos de Cantor afins não são C^1-minimais. Se temos um conjunto de Cantor afim tal que $\lambda_n/\lambda_{n+1} \nrightarrow 1$ então o conjunto satisfaz a condição de p-separação para $p = 0$, logo pelo teorema de McDuff concluímos que o conjunto não é C^1-minimal. Se $\lambda_n/\lambda_{n+1} \to 1$ o conjunto de Cantor afim não verifica a condição de p-separação, logo não está nas hipóteses do teorema de McDuff nem nas do teorema 2.1.

Capítulo 2

A condição de p-separação

Como já dissemos, os exemplos conhecidos de conjuntos de Cantor C^1-minimais são os exemplos de Danjoy e seu conjugados. Nesses exemplos sempre se tem que $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$ tende a 1 quando $n \to \infty$, onde $\{\lambda_n\}$ é o conjunto dos comprimentos das componentes conexas do complementar de K ordenadas em forma decrescente (ver seção 2.1). Seria muito bom se tivéssemos alguma condição geométrica sobre o conjunto K mediante a qual pudéssemos decidir se K é ou não C^1-minimal. Por exemplo, em [3] McDuff demonstrou que se um conjunto de Cantor K satisfaz a condição de p-separação para $p = 0$ (ver seção 2.1) então K não é C^1-minimal. Basicamente, a condição de p-separação para $p = 0$ indica que existe um recobrimento fechado do conjunto $\{\log \lambda_n\}$ tal que toda componente conexa do complementar do recobrimento é maior que toda componente conexa do recobrimento. Em particular, a condição de p-separação implica que $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$ não tem limite 1. Naquele mesmo trabalho, McDuff conjecturou que se $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$ não tem limite 1, então K não é C^1-minimal. Tal conjectura permanece aberta até hoje. Neste capítulo obtemos uma generalização do resultado estabelecido por McDuff em [3]. O resultado obtido é o seguinte.

Teorema 2.1. Se o conjunto de Cantor K satisfaz a condição de p-separação para algum inteiro não negativo p então K não é C^1-minimal.

Em particular, na seção 2.3 exibiremos uma família de conjuntos de Cantor para os quais o teorema 2.1 permite afirmar que não são C^1-minimais. Também mostraremos que a condição de McDuff [3] não é satisfeita para tais conjuntos de Cantor.

2.1 Espectro de um conjunto de Cantor e a condição de p-separação

Se K é um conjunto de Cantor em S^1, chamamos espectro de K $((E)_K)$ ao conjunto dos comprimentos das componentes conexas do complementar de K ordenados em forma decrescente ($\lambda_i > \lambda_{i+1}$). Chamamos recobrimento do espectro de K a toda família de intervalos fechados disjuntos $J_i = [\alpha_i, \beta_i]$, $i \geqslant 1$ tais que $(E)_K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ e $\alpha_{i+1} \leqslant \beta_{i+1} < \alpha_i$ para $i \geqslant 1$. Nestas condições, para cada componente conexa I do complementar de K temos associado um inteiro positivo $n(I)$ tal que $|I| \in J_{n(I)}$. Dizemos que o conjunto de Cantor K satisfaz a condição de p-separação para um recobrimento $\{J_j\}$ do espectro de K se existe p inteiro não negativo tal que para todo $N > 0$ existe $\eta(N) > 0$ tal que

$$\frac{\alpha_{j+n-1}}{\beta_{j+p+n}} \geqslant (1 + \eta(N)) \frac{\beta_j}{\alpha_{j+p}} \tag{2.1}$$

para todo n inteiro, $|n| \leqslant N$, e para todo j suficientemente grande. Para $n = 1$ temos figura a seguir.

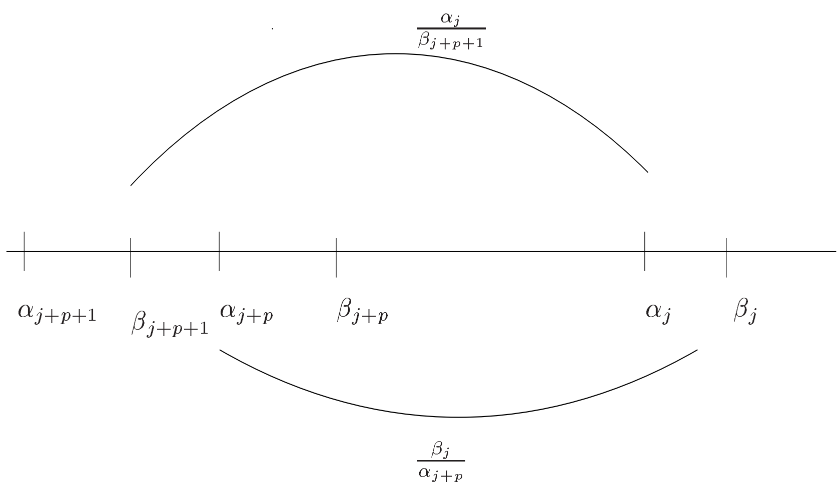

Figura 2.1:

Lema 2.2. Se o conjunto de Cantor K é C^1-minimal e $\{J_i\}$ é um recobrimento do espectro de K então $\frac{\alpha_i}{\beta_{i+1}}$ é limitado.

Demonstração. Para demonstrar este lema podemos supor que todo intervalo do recobrimento do espectro de K contem algum elemento do espectro de K. Suponhamos que K é C^1-minimal para um difeomorfismo f. Sejam M e m o máximo e o mínimo de f' respectivamente. Portanto, se I é uma componente conexa do complementar de K e $\{|f^n(I)| : n \in \mathbb{N}\} = \{\gamma_1, ..., \gamma_j, ...\}$ com $\gamma_{j+1} < \gamma_j$, temos

$$\frac{\gamma_j}{\gamma_{j+1}} \leqslant \max\{M, 1/m\}. \tag{2.2}$$

Seja $\{J_i\}$ é o recobrimento do espectro de K, então para todo i existe j_i tal que $\gamma_{j_i} \in J_i$ e $\gamma_{j_i+1} \in J_{i+1}$. Então

$$\frac{\alpha_i}{\beta_{i+1}} \leqslant \frac{\gamma_{j_i}}{\gamma_{j_i+1}}. \tag{2.3}$$

Portanto utilizando 2.2 e 2.3 temos

$$\frac{\alpha_i}{\beta_{i+1}} \leqslant \max\{M, 1/m\},$$

logo segue a tese. □

Lema 2.3. Se o conjunto de Cantor K é C^1-minimal e satisfaz a condição de p-separação para $\{J_j\}$ então $\frac{\beta_j}{\alpha_j}$ é limitado.

Demonstração. Tomando $N = n = 1$ em 2.1 temos

$$\frac{\alpha_j}{\beta_{j+p+1}} \geqslant (1 + \eta(1))\frac{\beta_j}{\alpha_{j+p}}$$

para todo j suficientemente grande. Logo

$$\frac{\beta_j}{\alpha_j} \leqslant \frac{1}{1 + \eta(1)} \frac{\alpha_{j+p}}{\beta_{j+p+1}},$$

e portanto o resultado desejado se segue do lema anterior.

□

As seguintes propriedades são de fácil verificação.

1. Se o conjunto de Cantor K é C^1–minimal para f, então para todo $r > 1$ existe um recobrimento finito de K formado por intervalos T_i fechados e disjuntos dois a dois tais que, se x, y pertencem a um mesmo T_i,
$$\frac{1}{r} \leqslant \frac{f^{'}(x)}{f^{'}(y)} \leqslant r$$
2. Se o conjunto de Cantor K satisfaz a condição de p-separação para $\{J_j\}$ então
$$\frac{\alpha_j}{\beta_{j+1}} \geqslant 1 + \eta(1)$$
para todo j suficientemente grande.

Lema 2.4. Se o conjunto de Cantor K é C^1–minimal para f e verifica a condição de separação então para toda componente I do complementar de K, $|n(I) - n(f(I))|$ é limitado.

Demonstração. Se m e M são o mínimo e o máximo de f' respectivamente então $m|I| \leqslant |f(I)| \leqslant M|I|$.
Se $n(f(I)) \geqslant n(I)$, utilizando a propriedade 2 temos

$$(1+\eta(1))^{n(f(I))-n(I)} \leqslant \frac{\alpha_{n(I)}}{\beta_{n(f(I))}} \leqslant \frac{|I|}{|f(I)|} \leqslant \frac{1}{m}$$

e se $n(f(I)) < n(I)$ então

$$(1+\eta(1))^{n(I)-n(f(I))} \leqslant \frac{\alpha_{n(f(I))}}{\beta_{n(I)}} \leqslant \frac{|f(I)|}{|I|} \leqslant M.$$

Em ambos dos casos concluímos que $|n(I) - n(f(I))|$ é limitado. □

2.2 Demonstração do teorema 2.1

Demonstração. Suponhamos por contradição que o conjunto de Cantor K é C^1–minimal para f e satisfaz a condição de p-separação para $\{J_j\}$. Pelo lema 2.4 existe N_0 inteiro positivo tal que $|n(I) - n(f(I))| < N_0$ para toda componente conexa I do complementar de K. Consideremos um recobrimento de K formado por intervalos abertos $T_1, ..., T_k$ dois a dois disjuntos tais que se x e y pertencem a um mesmo T_i, então

$$\frac{f'(x)}{f'(y)} < \frac{1+\eta(N_0)}{3}. \tag{2.4}$$

Tal recobrimento existe pela propriedade 1. Sejam I e J dois intervalos do complementar de K contidos num mesmo T_i tais que $n(I) - n(J) \leqslant p$ (p é o inteiro dado pela condição de separação). Provaremos agora que $n(f(I)) - n(f(J)) \leqslant p$. Suponhamos por contradição que $n(f(J)) < n(f(I)) - p$. Então

$$\frac{|f(J)|}{|f(I)|} \geqslant \frac{\alpha_{n(f(J))}}{\beta_{n(f(I))}} \geqslant \frac{\alpha_{n(f(J))}}{\beta_{n(f(J))+p+1}}.$$

Utilizando a condição de p-separação e que $|n(J) - n(f(J))| < N_0$, obtemos

$$\frac{|f(J)|}{|f(I)|} \geqslant (1+\eta(N_0))\frac{\beta_{n(J)}}{\alpha_{n(J)+p}}.$$

Por outro lado, utilizando 2.4, temos

$$\frac{|f(J)|}{|f(I)|} \leqslant \frac{|J|}{|I|}\frac{(1+\eta(N_0))}{3} \leqslant \frac{(1+\eta(N_0))}{3}\frac{\beta_{n(J)}}{\alpha_{n(I)}} \leqslant \frac{(1+\eta(N_0))}{3}\frac{\beta_{n(J)}}{\alpha_{n(J)+p}}$$

que é uma contradição. Então temos que se I e J estão contidos numa mesma componente T_i tais que $n(I)-n(J)\leqslant p$ então $n(f(I))-n(f(J))\leqslant p$. Para cada componente do complementar de $\bigcup T_i$ existe uma componente do complementar de K que a contém. Sejam ditas componentes $L_1,...,L_k$. Seja I uma componente qualquer do complementar de K. Como $|f^j(I)|\to 0$ quando $j\to\infty$ então existe j_0 tal que para todo $j>j_0$

$$n(f^j(I))>p+\max\{n(L_i):i=1,...,k\}.$$

Nestas condições existe i_0 tal que $f^{j_0}(I)=(a_{j_0},b_{j_0})$ está contido em T_{i_0}. Seja c_{j_0} um ponto de K contido em T_{i_0} tal que $|(c_{j_0},a_{j_0})|<|f^{j_0}(I)|$. Daqui, se J é uma componente conexa do complementar de K contida em (c_{j_0},a_{j_0}) então $n(f^{j_0}(I))-n(J)\leqslant p$, logo $n(f^{j_0+1}(I))-n(f(J))\leqslant p$. Pela escolha de j_0 temos que $n(f(J))>\max\{n(L_i):i=1,...,k\}$ ou seja $f(J)\neq L_i$ para $i=1,...,k$. Isto mostra que $f^{j_0+1}(I)$ e $f((c_{j_0},a_{j_0}))$ estão em um mesmo T_i. Procedendo indutivamente temos que para todo intervalo J do complementar de K contido em (c_{j_0},a_{j_0}), $f^n(J)\neq L_i$ para todo inteiro positivo n e $i=1,...,k$. Isto é uma contradição, já que no intervalo (c_{j_0},a_{j_0}) existem intervalos do passado dos intervalos L_i.

□

2.3 Exemplos de conjuntos de Cantor que satisfazem a condição de p-separação

Nesta seção construímos uma família de conjuntos de Cantor que satisfazem a condição de separação para $p=1$ mas não satisfazem a condição de McDuff [3] (condição de separação para $p=0$).

2.3.1 Construção do espectro do conjunto de Cantor

Primeiramente determinamos um conjunto de números reais que a menos de uma reordenação coincide com o espectro do conjunto de Cantor procurado. Seja γ um número positivo tal que $\gamma<3$ e $\gamma^{3/2}>3$. Para cada inteiro positivo n consideramos o conjunto

$$A(n)=\{\eta_{nj}=\frac{\gamma^{\frac{j}{2n}}}{3^{4n+2}}:j=-n,...,n\}.$$

Se $S(n)$ é a soma dos elementos de $A(n)$ temos que

$$S(n)=\sum_{j=-n}^{n}\eta_{nj}\leqslant\frac{2n+1}{3^{4n+2}}\gamma^{1/2}\leqslant\frac{\gamma^{1/2}}{3^{2n}}.$$

Então $\sum_{n=1}^{\infty} S(n)$ é convergente, logo a soma dos elementos do conjunto

$$B = \left\{ \eta_i = \frac{1}{3^i} : i \in \mathbb{N} \right\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} A(i)$$

também é finita (chamemos μ a dita soma). Para o conjunto B temos a seguinte figura.

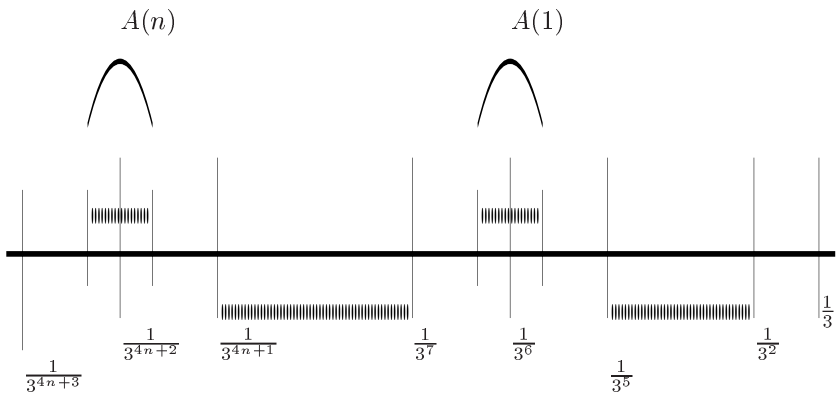

Figura 2.2:

O conjunto que vamos considerar como espectro é

$$C = \{ \frac{2\pi x}{\mu} : x \in B \}.$$

A soma dos elementos do conjunto C é 2π.

2.3.2 Construção do conjunto de Cantor

Vamos determinar um conjunto de Cantor que tem o conjunto C como espectro (a menos da ordem). Sejam R_θ a rotação de ângulo irracional θ em S^1 e x um ponto fixo de S^1. Seja $m : \mathbb{Z} \to C$ uma bijeção. Definamos a família de intervalos abertos (a_j, b_j), $j \in \mathbb{Z}$ como segue.

$$a_0 = 0, \quad b_0 = m(0)$$

e para todo inteiro j não nulo

$$a_j = b_0 + \sum_{R_\theta^k(x) \in (x, R_\theta^j(x))} m(k), \qquad b_j = a_j + m(j).$$

Definimos $K = S^1 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}(e^{ia_j}, e^{ib_j}))$. Vejamos que K é um conjunto de Cantor. Como a medida de K é zero então, K é totalmente desconexo. No conjunto K estão os extremos dos intervalos (e^{ia_j}, e^{ib_j}) e os pontos que são de acumulação de extremos. Então, se K tem um ponto isolado deve ser extremo de dois intervalos consecutivos, coisa que é uma contradição porque tais intervalos se ordenam segundo a órbita de um ponto em R_θ. Então temos que o conjunto fechado K é um conjunto de Cantor que tem como espectro o conjunto C.

2.3.3 Condição de p-separação para K

Mostraremos que o conjunto K construído na seção anterior satisfaz a condição de separação para $p = 1$. Os elementos de C são da forma

$$\omega_i = \frac{2\pi}{\mu 3^i}, \qquad \omega_{ij} = \frac{2\pi\gamma^{\frac{j}{2i}}}{\mu 3^{4i+2}}$$

com $i \in \mathbb{N}$ e $j = -i, ..., i$. Portanto

$$\frac{2\pi\gamma^{-\frac{1}{2}}}{\mu 3^{4i+2}} \leqslant \omega_{ij} = \frac{2\pi\gamma^{\frac{j}{2i}}}{\mu 3^{4i+2}} \leqslant \frac{2\pi\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu 3^{4i+2}}.$$

Então a família $J_j = [\alpha_j, \beta_j]$, com j inteiro positivo, que determinamos a seguir é um recobrimento de C. Se existe um inteiro positivo k tal que $j = 4k + 2$ então definimos

$$\alpha_j = \frac{2\pi\gamma^{-\frac{1}{2}}}{\mu 3^j}, \qquad \beta_j = \frac{2\pi\gamma^{\frac{1}{2}}}{\mu 3^j}.$$

Caso contrário

$$\alpha_j = \beta_j = \frac{2\pi}{\mu 3^j}.$$

Daqui temos que para todo inteiro n

$$\frac{\alpha_{j+n-1}}{\beta_{j+n+1}} \geqslant \frac{9}{\gamma^{\frac{1}{2}}}$$

bem como

$$\frac{\beta_j}{\alpha_{j+1}} \leqslant 3\gamma^{\frac{1}{2}}.$$

Como $\gamma < 3$, vemos que K satisfaz a condição de separação para $p = 1$. Por tanto, utilizando o teorema 2.1 temos que o conjunto K não é C^1-minimal.

2.3.4 O conjunto K não satisfaz a condição de McDuff

Suponhamos por contradição que K satisfaz a condição de McDuff para um recobrimento $\{L_i = [\alpha_i, \beta_i]\}$ com $i \in \mathbb{N}$. Em particular, a condição de McDuff implica que todo 'gap' $\frac{\alpha_i}{\beta_{i+1}}$ é maior que todo ‘não gap’ $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$. Fixado k temos

$$\frac{\omega_{kj}}{\omega_{k,j-1}} = \frac{\gamma^{\frac{j}{2k}}}{\gamma^{\frac{j-1}{2k}}} = \gamma^{\frac{1}{2k}}$$

que tem limite 1 quando $i \to \infty$. Então se k é suficientemente grande os ω_{kj} pertencem ao mesmo intervalo que chamamos $L_{i_k} = [\alpha_{i_k}, \beta_{i_k}]$, logo $\frac{\beta_{i_k}}{\alpha_{i_k}} \geqslant \gamma$. Temos as seguintes possibilidades.

1. Se $\beta_{i_k} < \frac{2\pi}{\mu 3^{4k+1}}$ então existe α_r com $r < i_k$ tal que

   $$\beta_{i_k} < \alpha_r \leqslant \frac{2\pi}{\mu 3^{4k+1}},$$

   logo

   $$\frac{\alpha_r}{\beta_{i_k}} \leqslant \frac{\frac{2\pi}{\mu 3^{4k+1}}}{\frac{2\pi\gamma^{1/2}}{\mu 3^{4k+2}}} = \frac{3}{\gamma^{1/2}} < \gamma \leqslant \frac{\beta_{i_k}}{\alpha_{i_k}}.$$

   Então temos que existe um ‘gap‘ menor que α_r/β_{i_k} que é menor que o ‘não gap‘ $\frac{\beta_{i_k}}{\alpha_{i_k}}$, que é uma contradição.

2. Se $\alpha_{i_k} > \frac{2\pi}{\mu 3^{4k+3}}$, também temos uma contradição (análogo ao caso anterior).

3. Se $\beta_{i_k} \geqslant \frac{2\pi}{\mu 3^{4k+1}}$ e $\alpha_{i_k} \leqslant \frac{2\pi}{\mu 3^{4k+3}}$ então

   $$\frac{\beta_{i_k}}{\alpha_{i_k}} \geqslant 9.$$

   Portanto temos que o ‘gap‘ β_{i_k}/α_{i_k} é maior que todo ‘não gap‘ (todo não ‘gap‘ é menor ou igual que 3) que é uma contradição.

Então o conjunto K não satisfaz a condição de McDuff.

Capítulo 3

Conjuntos de Cantor regulares e rigidez geométrica

Neste capítulo obtemos certos resultados gerais sobre conjuntos de Cantor C^1-minimais. Em breve demonstraremos que sob certas condições os chamados conjuntos de Cantor regulares (ver seção 3.2) não são C^1-minimais. A construção dos conjuntos de Cantor regulares é similar á construção do conjunto triádico usual de Cantor. Em cada etapa da construção de um conjunto de Cantor regular, retiramos uma quantidade finita de intervalos abertos igualmente distribuídos (na construção do conjunto de Cantor usual em cada etapa só retiramos um intervalo). Para os conjuntos de Cantor regulares, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1. Se um conjunto de Cantor K é C^1–minimal para um difeomorfismo f, e se no complementar de K existe apenas uma órbita de intervalos errantes, então K não é regular.

3.1 Generalidades

Os lemas a seguir, ainda que gerais, são de muita utilidade nas demonstrações dos resultados principais.

Definição 3.2. Se $f : S^1 \to S^1$ é um difeomorfismo, então para cada ponto x em S^1 e para cada inteiro não negativo n definimos $F(x, n) = \sum_{i=0}^{n-1} \log f'(f^i(x)) = \log(f^n)'(x)$

Lema 3.3. Se um conjunto de Cantor K é C^1–minimal para f, então existe um ponto x em K tal que $F(x,n) \geqslant 0$ para todo inteiro não negativo n.

Demonstração. Suponhamos por contradição que para todo ponto x em K existe m_x tal que $F(x, m_x) < 0$. Pela continuidade de f', para cada x em K existe $\delta_x > 0$ tal que para todo ponto y no intervalo $(x - \delta_x, x + \delta_x)$, temos $F(y, m_x) < 0$. Como a família de intervalos $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ com x em K é um recobrimento de K, e K é um conjunto de Cantor, então existe um refinamento finito $\{I_i,\, i = 1, ..., p\}$ deste recobrimento formado por intervalos abertos dois a dois disjuntos que cobrem K. Pela escolha do recobrimento, sabemos que para cada I_i existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que para todo $y \in I_i$, temos $F(y, m_i) < 0$. Além disso, $S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^{p} I_i$ é uma reunião finita de intervalos fechados. Cada um deles está contido numa componente conexa do complementar de K que chamaremos J_i com $i = 1, ..., p$. Sejam $m = \max\{m_i : i = 1, ..., p\}$ e $M \geqslant 1$ o máximo de f' em S^1. Consideremos um intervalo errante T do passado de J_1 tal que $|T|M^m < \min\{|J_1|, ..., |J_p|\}$. Agora demonstraremos que para todo j inteiro positivo $|f^j(T)| < |J_1|$, o que conduz a uma contradição. Pela escolha de T, sabemos T está contido em I_i para algum i. Pelo teorema do valor médio, existe $\theta \in I_i$ tal que

$$|f^{m_i}(T)| = |T|(f^{m_i})'(\theta).$$

Como $F(\theta, m_i) < 0$, temos $(f^{m_i})'(\theta) < 1$ e por tanto

$$|f^{m_i}(T)| < |T|.$$

Podemos repetir este processo com $f^{m_i}(T)$ no lugar de T. Procedendo indutivamente desta forma concluímos que existe uma seqüência $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_k, ...$ com $\nu_k \in \{m_1, ..., m_p\}$ tal que para todo inteiro positivo r vale

$$|f^{\sum_{k=1}^{r} \nu_k}(T)| < |T|.$$

Como para todo j existe $r_0 \geqslant 0$ tal que $\sum_{k=1}^{r_0} \nu_k \leqslant j < \sum_{k=1}^{r_0+1} \nu_k$, temos

$$|f^j(T)| = |f^{j - \sum_{k=1}^{r_0} \nu_k}(f^{\sum_{k=1}^{r_0} \nu_k}(T))| \leqslant M^m |T| < |J_1|.$$

□

Lema 3.4. Se o conjunto de Cantor K é C^1–minimal para f e $\lambda_n/\lambda_{n+1} \nrightarrow 1$ então existem $\eta > 0$ e $x \in K$ tais que $F(x, m) \leqslant -\eta$ para todo inteiro positivo m.

Demonstração. Como $\lambda_n/\lambda_{n+1} \nrightarrow 1$, existem $\varepsilon_0 > 0$ e uma seqüência crescente $\{n_k\}$ tais que $1 + \varepsilon_0 \leqslant \frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k+1}}$. Seja I_{n_k} uma componente conexa do complementar de K tal que $|I_{n_k}| \geqslant \lambda_{n_k}$ e para todo $j > 1$, $|f^j(I_{n_k})| \leqslant \lambda_{n_k+1}$. Pela escolha de I_{n_k} temos que $|I_{n_k}| \to 0$ quando $k \to \infty$.

Sejam x um ponto de acumulação do conjunto dos intervalos I_{n_k} $(x \in K)$ e a seqüência $\{k_i\}$ tais que $d(x, I_{n_{k_i}}) \to 0$ quando $i \to \infty$. Portanto, para todo n, existe i suficientemente grande tal que

$$1 + \varepsilon_0 \leqslant \frac{\lambda_{n_{k_i}}}{\lambda_{n_{k_i}+1}} \leqslant \frac{|I_{n_{k_i}}|}{|f^n(I_{n_{k_i}})|}.$$

Então

$$F(x,m) = \log(f^m)'(x) = \log\left(\lim_{i\to\infty} \frac{|f^n(I_{n_{k_i}})|}{|(I_{n_{k_i}})|}\right) \leqslant -\log(1+\varepsilon_0).$$

□

Lema 3.5. Se um conjunto de Cantor K é C^1–minimal para f e $\lambda_n/\lambda_{n+1} \nrightarrow 1$ então para todo ponto x de K, $F(x,m)$ não é limitado.

Demonstração. Pela transitividade de K, basta demonstrar a propriedade para um ponto qualquer de K. Sejam o ponto x e o número η dados pelo lema 3.4 e suponhamos por contradição que $F(x,m)$ é limitado. Portanto se $y = \inf\{F(x,m) : m \in \mathbb{N}\}$, existe um inteiro positivo p tal que $|F(x,p) - y| < \eta/2$. Logo

$$F(f^p(x),m) = F(x,m+p) - F(x,p) = F(x,m+p) - y - (F(x,p) - y) > \frac{-\eta}{2} \tag{3.1}$$

para todo inteiro positivo m. Seja $\{n_k\}$ tal que $f^{p+n_k}(x)$ tem limite x quando $k \to \infty$. Pela continuidade uniforme de f' temos que

$$|F(f^p(x), p+n_k) - F(x, p+n_k)| \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} |\log f'(f^{p+n_k+i}(x)) - \log f'(f^i(x))| = \delta(n_k) \to 0$$

quando $k \to \infty$. Então

$$F(f^p(x), p+n_k) < F(x, p+n_k) + \delta(n_k) < -\eta + \delta(n_k),$$

logo utilizando 3.1 temos uma contradição. □

3.2 Conjuntos de Cantor regulares

A construção dos conjuntos de Cantor regulares imita o procedimento utilizado para se obter o conjunto triádico usual de Cantor.

Dadas duas seqüências $\{m_i\}$ e $\{\theta_i\}$ com m_i inteiro positivo e $0 < \theta_i < 1$, procedemos como segue. Na primeira etapa retiramos do círculo m_1 intervalos abertos de igual comprimento, igualmente distribuídos, obtendo o conjunto fechado $K_1 = \bigcup \Delta_{i_1}$ $(i_1 = 1, ..., m_1)$ com medida de Lebesgue $|K_1| = \theta_1$, onde Δ_{i_1} são as componentes conexas de K_1. Na segunda etapa, de cada componente conexa Δ_{i_1} retiramos m_2 intervalos abertos de igual comprimento, igualmente distribuídos, obtendo o conjunto fechado $K_2 = \bigcup \Delta_{i_1 i_2}$ $(i_2 = 1, ..., m_2 + 1)$ com medida $|K_2| = \theta_2 |K_1|$, onde $\Delta_{i_1 i_2}$ são as componentes conexas de K_2. Procedendo indutivamente, obtemos para cada n um conjunto fechado $K_n \subset S^1$, contido em K_{n-1}, com medida $|K_n| = \theta_n |K_{n-1}|$, e escrevemos $K_n = \bigcup \Delta_{i_1 \dots i_n}$ $(i_n = 1, 2, ..., m_n + 1)$ onde $\Delta_{i_1 \dots i_n}$ são as componentes conexas de K_n $(\Delta_{i_1 \dots i_n} \subset \Delta_{i_1 \dots i_{n-1}})$. Definimos $K = \bigcap K_n$. Note que K é fechado, sem pontos isolados e totalmente desconexo. A todo conjunto K construído desta forma chamaremos *conjunto de Cantor regular*. A figura 3.1 mostra sucessivas etapas da construção de um conjunto de Cantor regular.

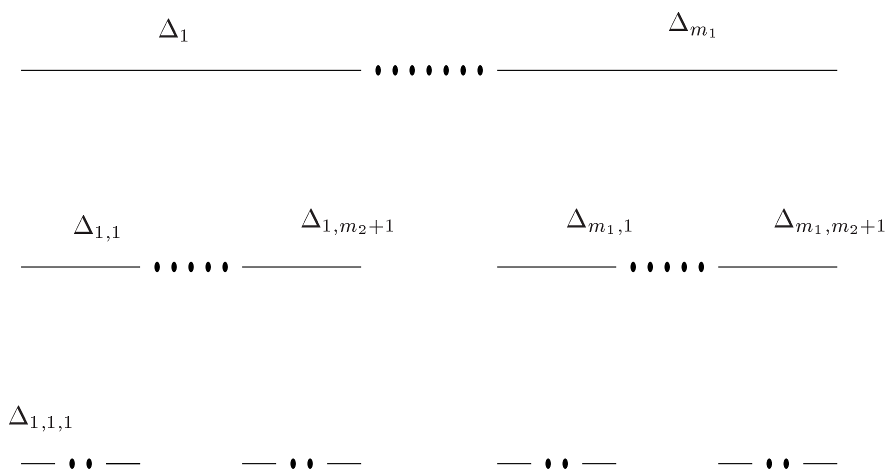

Figura 3.1:

Seja agora $\{\lambda_i\}$ o conjunto dos comprimentos das componentes conexas de $S^1 \setminus K$ ordenados de forma decrescente, ou seja $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_n > ....$ Este conjunto de comprimentos é denominado o *espectro* de K.

As seguintes propriedades são de fácil verificação.

1. Para todo $n \geqslant 1$, temos $K_{n+1} \subset K_n$.

2. Para quaisquer $r, s \in \{1, 2, ..., m_{k+1} + 1\}$, temos $|\Delta_{i_1 \dots i_k r}| = |\Delta_{i_1 \dots i_k s}|$ e $|K \cap \Delta_{i_1 \dots i_k r}| = |K \cap \Delta_{i_1 \dots i_k s}|$.

3. Temos $|K| = \lim_{n\to\infty} \theta_1 ... \theta_n$; em particular, para todo número real ν com $0 \leqslant \nu < 1$ existe um conjunto de Cantor regular de medida de Lebesgue ν (para verificar isto, quando $\nu = 0$ tome θ_n constante, e para $\nu > 0$ tome $\theta_n = \nu^{1/2^n}$, por exemplo).

4. Toda componente conexa de $S^1 \setminus K$ é componente conexa de $S^1 \setminus K_n$ para algum n.

5. Se fixamos n, temos que para toda componente conexa I de $S^1 \setminus K$, contida em uma das componentes conexas de K_n, existe em cada uma das outras componentes conexas de K_n, uma componente conexa de $S^1 \setminus K$ de comprimento $|I|$.

3.3 Propriedades geométricas dos conjuntos de Cantor regulares

Nesta seção provaremos duas propriedades geométricas dos conjuntos de Cantor regulares.

Lema 3.6. Os comprimentos das componentes conexas de K_n são menores que $2\pi/2^{n-1}$ para todo inteiro positivo n.

Demonstração. A afirmação é trivial se $n = 1$. Por outro lado, pela construção de K_n sabemos que para todo $n \geqslant 2$

$$|\Delta_{i_1 \ldots i_n}| = \frac{\theta_n}{m_n + 1} |\Delta_{i_1 \ldots i_{n-1}}|.$$

Portanto, para todo $n \geqslant 2$ temos

$$|\Delta_{i_1 \ldots i_n}| = \prod_{j=2}^{n} \theta_j (1 + m_j)^{-1} |\Delta_{i_1}| < \frac{2\pi}{2^{n-1}}.$$

□

Lema 3.7. Se K é um conjunto de Cantor regular e $\{\lambda_i\}$ é o espectro de K, então λ_n/λ_{n+1} não converge a 1 quando $n \to \infty$.

Demonstração. Seja a seqüência $\{l_i\}$ onde l_i é o comprimento dos intervalos abertos que foram retirados na i–ésima etapa da construção do conjunto K. Da construção de K temos que os intervalos abertos retirados na etapa $n > 2$ estão contidos em K_{n-1}, portanto l_n é menor que o comprimento de cada uma das componentes conexas de K_{n-1}, logo utilizando o lema 2.1 temos $l_n < 2\pi/2^{n-2}$ para $n > 2$. Então, para $n > 2$ temos

$$\#\left(\{\log \lambda_i\} \cap [-(n-2)\log 2 + \log 2\pi, 0]\right) < n. \tag{3.2}$$

Suponhamos por contradição que λ_n/λ_{n+1} tem limite 1. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$0 < \log \lambda_{n_0+n-i} - \log \lambda_{n_0+n+1-i} < \log(1+\varepsilon)$$

com $i = 0, ..., n$, logo

$$0 > \log \lambda_{n_0+n} > \log \lambda_{n_0} - n \log(1+\varepsilon).$$

Então

$$\#(\{\log \lambda_i\} \cap [\log \lambda_{n_0} - n \log(1+\varepsilon), 0]) \geqslant n_0 + n. \tag{3.3}$$

Utilizando as desigualdades (3.2) e (3.3) temos que

$$\#(\{\log \lambda_i\} \cap [-(n-2)\log 2 + \log 2\pi, 0]) < n < n_0 + n \leqslant \#(\{\log \lambda_i\} \cap [\log \lambda_{n_0} - n \log(1+\varepsilon), 0]).$$

Portanto

$$-(n-2)\log 2 + \log 2\pi \geqslant \log \lambda_{n_0} - n \log(1+\varepsilon).$$

Como esta desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $\varepsilon > 0$, tomando ε tal que $\log(1+\varepsilon) < \log 2$ obtemos uma contradição. $\square$

3.4 Rigidez geométrica (I)

Nesta seção estabelecemos uma idéia de *rigidez geométrica* para os conjuntos regulares de Cantor. Em outras palavras, se $K \subset S^1$ é um conjunto de Cantor regular minimal para um difeomorfismo f, então o fato de K ser *regular* impõe condições bastantes rígidas sobre a restrição de f' a K.

Como é bem conhecido, a construção clássica dos exemplos de Denjoy apresentada na literatura (veja [1], [4] e [8] por exemplo) produz, via de regra, minimais excepcionais ao longo dos quais o difeomorfismo correspondente tem derivada constante igual a 1. O lema a seguir mostra, em particular, que tal construção jamais pode produzir um conjunto *regular*.

Lema 3.8. Se um conjunto de Cantor regular K é C^1–minimal para um difeomorfismo f, então existe $x \in K$ tal que $f'(x) > 1$.

Demonstração. Pelo lema 3.7, sabemos que existem $\varepsilon_0 > 0$ e uma seqüência crescente de números naturais $\{n_j\}$ tal que $\lambda_{n_j}/\lambda_{n_j+1} > 1 + \varepsilon_0$ para todo n_j. Seja I uma componente conexa qualquer do complementar de K. Então a família $\{f^{-n}(I)\}$ com $i \in \mathbb{N}$ é uma família de intervalos abertos dois a dois disjuntos, logo $|f^{-n}(I)| \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto se j é suficientemente grande existe $p(j) \in \mathbb{N}$ tal que $|f^{-p(j)}(I)| \leqslant \lambda_{n_j+1}$ e $|f^{-p(j)+1}(I)| \geqslant \lambda_{n_j}$. Então temos

$$\frac{|f^{-p(j)+1}(I)|}{|f^{-p(j)}(I)|} \geqslant \frac{\lambda_{n_j}}{\lambda_{n_j+1}} > 1 + \varepsilon_0. \tag{3.4}$$

Utilizando o teorema do valor médio, sabemos que existe um ponto $\theta_{p(j)} \in f^{-p(j)}(I)$ tal que

$$|f^{-p(j)+1}(I)| = f'(\theta_{p(j)})|f^{-p(j)}(I)|$$

ou seja

$$\frac{|f^{-p(j)+1}(I)|}{|f^{-p(j)}(I)|} = f'(\theta_{p(j)}). \tag{3.5}$$

De (3.4) e (3.5) temos

$$f'(\theta_p) > 1 + \varepsilon_0. \tag{3.6}$$

Se x é ponto de acumulação do conjunto $\{f^{-p(j)}(I)\}$, também é ponto de acumulação do conjunto $\{\theta_{p(j)}\}$ e como $f \in C^1$, temos que $f'(\theta_p) \to f'(x)$ quando $j \to \infty$, logo usando (3.6) obtemos que $f'(x) > 1$. $\square$

No que segue, se $y \in K_n$, notaremos por K_n^y a componente conexa de K_n que contém y. As seguintes observações serão de utilidade nas demonstrações dos lemas a seguir.

1. Se K é um conjunto de Cantor regular C^1-minimal para f, utilizando o lema 3.6 e a continuidade uniforme de f' temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n(\varepsilon)$ inteiro positivo tal que se $n > n(\varepsilon)$ e x_1, x_2 pertencem a uma mesma componente conexa de K_n vale

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{f'(x_1)}{f'(x_2)} < 1 + \varepsilon.$$

2. Para todo inteiro positivo n e todo ponto x de K existe um número positivo μ tal que se λ é um elemento do espectro de K menor que μ, então existe uma componente conexa do complementar de K de comprimento λ contida em $K_n^{f(x)}$ tal que sua preimagem está contida em K_n^x.

   Demonstração. Seja $J = f(K_n^x) \cap K_n^{f(x)}$. O conjunto J é fechado, não–vazio e conexo, logo J é um intervalo fechado. Portanto, pelo lema 3.6, existe um inteiro positivo m tal que $K_m^{f(x)} \subset J$. Tomando $\mu = \min\{|I|\colon I$ componente conexa do complementar de K_n, $n \leqslant m\}$ e os intervalos do complementar de K que estão contidos em $K_m^{f(x)}$ temos demonstrada a propriedade. $\square$

Lema 3.9. Se o conjunto de Cantor regular K é C^1-minimal para um difeomorfismo f e x é um ponto qualquer de K, então para todo $\varepsilon > 0$ e para todo inteiro m (positivo ou negativo) se I é uma componente conexa do complementar de K de comprimento suficientemente pequeno, existe I^* também componente conexa do complementar de K tal que

$$\frac{(f'(x))^m}{1+\varepsilon} < \frac{|I^*|}{|I|} < (f'(x))^m(1+\varepsilon).$$

Demonstração. Suponhamos primeiro que $m \geqslant 0$. Sejam $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno e $n = n(\varepsilon_1)$ como na observação 1. Seja K_n como na construção de K. Se I é uma componente conexa do complementar de K de comprimento suficientemente pequeno, então existe I_1 também componente conexa do complementar de K contida em K_n^x e de comprimento $|I|$. Pelo teorema do valor médio temos que existe $\theta \in I_1$ tal que

$$|f(I_1)| = f'(\theta)|I_1| = f'(\theta)|I|.$$

Como $\theta \in K_n^x$, utilizando a observação 1 temos

$$\frac{f'(x)}{1+\varepsilon_1} < \frac{|f(I_1)|}{|I|} < f'(x)(1+\varepsilon_1).$$

Se I é suficientemente pequena podemos repetir este processo com $f(I_1)$ em lugar de I. Então existe I_2, componente conexa do complementar de K tal que

$$\frac{f'(x)}{1+\varepsilon_1} < \frac{|f(I_2)|}{|f(I_1)|} < f'(x)(1+\varepsilon_1).$$

Procedendo indutivamente desta forma concluímos que existem $I_3, ..., I_{m-1}$ componentes conexas do complementar de K tais que

$$\frac{f'(x)}{1+\varepsilon_1} < \frac{|f(I_{i+1})|}{|f(I_i)|} < f'(x)(1+\varepsilon_1),$$

com $i = 1, ..., m-1$. Logo temos

$$\frac{(f'(x))^m}{(1+\varepsilon_1)^m} < \frac{|f(I_m)|}{|I|} < (f'(x))^m(1+\varepsilon_1)^m. \tag{3.7}$$

Dado $\varepsilon > 0$, de (3.7) escolhendo $\varepsilon_1 > 0$ tal que $(1+\varepsilon_1)^m < \varepsilon$ segue a tese. No caso em que $m < 0$ procedemos como segue. Se I é uma componente conexa do complementar de K suficientemente pequena, existe I_1, também componente conexa do complementar de K, de comprimento $|I|$, contida em $K_n^{f(x)}$ tal que $f^{-1}(I_1)$ está contida em K_n^x. Portanto existe $\theta \in I_1$ tal que

$$|f^{-1}(I_1)| = (f^{-1})'(\theta)|I_1| = \frac{|I_1|}{f'(f^{-1}(\theta))}.$$

Como $f^{-1}(\theta) \in K_n^x$, utilizando a observação 1 temos

$$\frac{1}{(1+\varepsilon_1)f'(x)} < \frac{|f^{-1}(I_1)|}{|I_1|} = \frac{1}{f'(\theta)} < \frac{1+\varepsilon_1}{f'(x)}.$$

Logo procedendo de forma similar ao caso em que $m \geqslant 0$, obtemos o resultado desejado. $\square$

Lema 3.10. Se o conjunto de Cantor regular K é C^1–minimal para f então f' restrito a K é constante por partes. Mais ainda, se o conjunto de valores que toma f' restrito a K é $\{a_1, ..., a_n\}$ então $\log a_i / \log a_j \in \mathbb{Q}$ $(a_j \neq 1)$.

Demonstração. Sejam ε_0 e $\{n_j\}$ como na prova do lema 3.8. Temos que demonstrar que o conjunto $A = \{f'(x) : x \in K\}$ é finito. Por contradição, suponhamos que A é infinito. Como f' é contínua e limitada em S^1, o conjunto A tem um ponto de acumulação. Deste fato concluímos que existem $a, b \in K$, distintos tais que

$$\frac{1}{1+\varepsilon_0} < \frac{f'(a)}{f'(b)} < 1. \tag{3.8}$$

Consideremos um número positivo ε_1 tal que

$$1+\varepsilon_1 < \min\left\{\sqrt{\frac{f'(b)}{f'(a)}}, \sqrt{(1+\varepsilon_0)\frac{f'(a)}{f'(b)}}\right\}$$

(o motivo de tal escolha ficará claro ao longo da prova).

Pela observação 1 temos que existe $n(\varepsilon_1)$ tal que se x_1 e x_2 estão em uma mesma componente conexa de $K_{n(\varepsilon_1)}$ então

$$\frac{1}{1+\varepsilon_1} < \frac{f'(x_1)}{f'(x_2)} < 1+\varepsilon_1. \tag{3.9}$$

Seja I_1 componente conexa de $S^1 \setminus K$ contida na componente conexa de $K_{n(\varepsilon_1)}$ que contém o ponto a. Da construção de K temos que fora de $K_{n(\varepsilon_1)}$ só existem uma quantidade finita de componentes conexas do complementar de K. Pelo teorema do valor médio existe $\theta_1 \in I_1$ tal que

$$|f(I_1)| = |I_1| f'(\theta_1).$$

Utilizando 3.9 e que θ_1 e a estão numa mesma componente conexa de $K_{n(\varepsilon_1)}$ temos

$$\frac{|I_1| f'(a)}{1+\varepsilon_1} < |f(I_1)| < |I_1|(1+\varepsilon_1) f'(a). \tag{3.10}$$

Se $|I_1|$ é suficientemente pequeno existe I_2 componente conexa de $S^1 \setminus K$ de comprimento $|f(I_1)|$ tal que $f^{-1}(I_2)$ está na componente conexa de $K_{n(\varepsilon_1)}$ que contém b (observação 2). Utilizando o teorema do valor médio sabemos que existe $\theta_2 \in I_2$ tal que

$$|f^{-1}(I_2)| = |I_2|(f^{-1})'(\theta_2) = \frac{|I_2|}{f'(f^{-1}(\theta_2))}.$$

Pela escolha de I_2 temos que $f^{-1}(\theta_2)$ e b estão em uma mesma componente conexa de $K_{n(\varepsilon_1)}$; assim, aplicando (3.9) obtemos

$$\frac{|f(I_1)|}{f'(b)}\frac{1}{1+\varepsilon_1} \leqslant |f^{-1}(I_2)| \leqslant \frac{|f(I_1)|}{f'(b)}(1+\varepsilon_1).$$

Desta última desigualdade e de (3.10) temos

$$\frac{|I_1|}{(1+\varepsilon_1)^2}\frac{f'(a)}{f'(b)} \leqslant |f^{-1}(I_2)| \leqslant |I_1|(1+\varepsilon_1)^2\frac{f'(a)}{f'(b)},$$

e portanto, pela escolha de ε_1 temos

$$1 < \frac{|I_1|}{|f^{-1}(I_2)|} < 1+\varepsilon_0.$$

Em outras palavras, provamos que se I é uma componente conexa de $S^1 \setminus K$ de comprimento suficientemente pequeno, existe uma outra componente conexa I^* do complementar de K tal que

$$1 < |I|/|I^*| < 1+\varepsilon_0.$$

Tomando I de comprimento λ_{n_j} suficientemente pequeno temos

$$1+\varepsilon_0 > \frac{|I|}{|I^*|} \geqslant \frac{\lambda_{n_j}}{\lambda_{n_j+1}} > 1+\varepsilon_0$$

que é uma contradição. Logo A é finito, como queríamos demonstrar.

Agora, suponhamos por contradição que existem i e j tais que $\log a_i/\log a_j \notin \mathbb{Q}$. Vamos mostrar (como no caso anterior) que se I é uma componente conexa de $S^1 \setminus K$ de comprimento suficientemente pequeno, existe uma outra componente conexa I^* do complementar de K tal que

$$1 < |I|/|I^*| < 1+\varepsilon_0$$

o que novamente conduz a uma contradição. Como $\log a_i/\log a_j \notin \mathbb{Q}$ então para todo $\varepsilon_1 > 0$ existem m e n inteiros tais que

$$-\varepsilon_1 < m\log a_i - n\log a_j < 0,$$

ou seja existem $x, y \in K$ tais que

$$e^{-\varepsilon_1} < (f'(x))^m(f'(y))^{-n} < 1. \tag{3.11}$$

Do lema 3.9 temos que dados $\varepsilon_2 > 0$ e I componente conexa do complementar de K suficientemente pequena, existem I^* e I^{**} tais que

$$\frac{(f'(x))^m}{1+\varepsilon_2} < \frac{|I^{**}|}{|I|} < (f'(x))^m(1+\varepsilon_2) \tag{3.12}$$

e

$$\frac{(f'(x))^{-n}}{1+\varepsilon_2} < \frac{|I^*|}{|I^{**}|} < (f'(x))^{-n}(1+\varepsilon_2) \tag{3.13}$$

Utilizando 3.11, 3.12 e 3.13 temos

$$\frac{(f'(x))^{-m}(f'(y))^n}{(1+\varepsilon_2)^2} < \frac{|I|}{|I^*|} < \frac{(1+\varepsilon_2)^2}{e^{-\varepsilon_1}}. \tag{3.14}$$

Escolhemos ε_2 tal que

$$\frac{(f'(x))^{-m}(f'(y))^n}{(1+\varepsilon_2)^2} > 1,$$

e a seguer ε_1 tal que

$$\frac{(1+\varepsilon_2)^2}{e^{-\varepsilon_1}} < 1+\varepsilon_0.$$

Logo, utilizando 3.14 temos que se que se I é suficientemente pequena existe I^* tal que

$$1 < |I|/|I^*| < 1+\varepsilon_0,$$

como queríamos provar. □

3.5 Prova do teorema 3.1

Para a prova do resultado principal necessitaremos dos dois lemas a seguir.

Lema 3.11. Sejam x um ponto de S^1 e $R_\theta : S^1 \to S^1$ a rotação de ângulo θ (irracional em π). Então para todo inteiro positivo m existe $n > m$ tal que o conjunto $A_n = \{R_\theta^i(x) : i = 0, ..., n\}$ determina uma partição de S^1 em intervalos com dois possíveis comprimentos.

Demonstração. Vamos construir indutivamente uma seqüência $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ tal que A_{n_k} tem as propriedades desejadas para todo k. Podemos tomar $n_1 = 1$. Suponhamos que n_k já é conhecido. Denotemos $x_j = R_\theta^j(x)$. Sejam $T_1, ..., T_p$ (de mesmo comprimento) e $J_1, ..., J_q$ (de mesmo comprimento) os intervalos abertos da partição que A_{n_k} determina em S^1. Sempre podemos ordenar os intervalos de modo que $f(T_i) = T_{i+1}$ e $f(J_j) = J_{j+1}$. Consideremos agora o ponto x_{n_k+1}. Se assumimos que $|T_i| < |J_j|$ o ponto x_{n_k+1} pertence a J_1. Mais ainda, este ponto determina com o extremo de J_1 que não é o ponto x, um intervalo de comprimento igual a $|T_1|$. Isto mostra que em geral o ponto x_{n_k+j} pertence a J_j $(j = 1, ..., q)$, determinando com um dos extremos do J_k um intervalo de comprimento $|T_1|$. Portanto podemos tomar $n_{k+1} = n_k + q$, de modo que $A_{n_{k+1}}$ tem as propriedades desejadas. $\square$

Lema 3.12. Se $f : S^1 \to S^1$ é contínua e R_θ é a rotação de ângulo irracional θ então para todo ponto $x \in S^1$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} f(R_\theta^i(x)) = \int_{S^1} f\, dx.$$

Demonstração. Pelo teorema de Birkhoff (ver [6]) a afirmacão é valida para quase todo ponto (com respeito à medida de Lebesgue em S^1). Portanto, utilizando a continuidade uniforme de f, para todo $x \in S^1$ e $\varepsilon > 0$ existe y tal que

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} f(R_\theta^i(y)) = \int_{S^1} f\, dx.$
2. $|f(R_\theta^i(x)) - f(R_\theta^i(y))| < \varepsilon.$

Somando obtemos

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} f(R_\theta^i(x)) - \frac{1}{n} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} f(R_\theta^i(y)) \right| < \varepsilon,$$

logo segue a afirmação. $\square$

A seguir damos a prova do teorema 3.1

Demonstração. Suponhamos por contradição, que existe um conjunto de Cantor regular K, C^1-minimal para um difeomorfismo f, e que no complementar de K só existe uma órbita de intervalos errantes. Seja $h : S^1 \to S^1$ a semiconjugação tal que $h \circ f = R_\theta \circ h$ com $R_\theta : S^1 \to S^1$ rotação de ângulo θ (irracional em π).

Pelo lema 3.10 temos que existem $H_1, ..., H_r$ intervalos fechados disjuntos dois a dois que cobrem K tais que $f'/H_i \bigcap K = a_i$. E possível escolher os H_i de tal modo que cada componente conexa do complementar de $\bigcup_{i=1}^r H_i$ seja uma componente conexa do complementar de K. Se $L_1, ..., L_r$ são as componentes conexas do complementar de $\bigcup_{i=1}^r H_i$, então a imagem de cada L_i segundo h é um ponto y_i. Como f só tem uma órbita de intervalos errantes no complementar de K, então os pontos y_i estão numa mesma órbita na rotação R_θ. Sejam A_m, $T_1, ..., T_p$, $J_1, ..., J_q$ como no lema 3.11 tais que $\{y_1, ..., y_r\} \subset A_m$. Definamos agora

$$g : \bigcup_1^p T_i \cup \bigcup_1^q J_j \to \mathbb{R}$$

tal que $g(x) = f'(h^{-1}(x))$ (observar que g está bem definida mesmo no caso que $h^{-1}(x)$ é um intervalo). Pela escolha dos intervalos T_i e J_j temos que g é constante em cada um deles. Ainda mais, se y é um ponto de S^1 tal que $h(y)$ não pertence a $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_\theta^{-j}(A_m)$ (preórbita dos extremos dos intervalos T_i e J_j) então

$$F(y,n) = \sum_{i=0}^{n-1} \log(g(R_\theta^i(h(y)))).$$

Afirmacão:

$$\int_{(\bigcup T_i)\cup(\bigcup J_j)} \log g\, dx = 0.$$

Suponhamos por contradição que $\int_{(\bigcup T_i)\cup(\bigcup J_j)} \log g\, dx \neq 0$. Supondo que

$$\int_{(\bigcup T_i)\cup(\bigcup J_j)} \log g\, dx > 0,$$

vemos que existe uma função $g_1 : S^1 \to S^1$, contínua e menor que g tal que $\int_{S^1} \log g_1 dx > 0$. Utilizando 3.12 temos que dados $x \in S^1$ e $k > 0$ existe $n = n(y,k)$ tal que $\sum_{i=0}^{n-1} \log(g_1(R_\theta^i(x)))$. Portanto, se $x \in K$ e $h(x) \notin \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_\theta^{-j}(A_m)$ temos que para todo $k > 0$ existe um inteiro positivo n tal que

$$F(x,n) = \sum_{i=0}^{n-1} \log(g(f^i(x))) \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} \log(g_1(R_\theta^i(h(x)))) > k. \tag{3.15}$$

Como para todo ponto $x \in K$ existe um inteiro positivo s tal que $h(f^s(x))$ não pertence $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_\theta^{-j}(A_m)$ então tomando k suficientemente grande e aplicando (3.15) para o ponto $h(f^s(x))$ temos que existe um inteiro positivo n tal que

$$F(x,n) > 0.$$

Portanto o resultado obtido contradiz o lema 3.4. Se

$$\int_{S^1} \log g\, dx < 0,$$

trabalhando analogamente temos que para todo $x \in K$ existe um inteiro positivo n tal que $F(x,n) < 0$. Esse resultado contradiz o lema 3.3. Então temos provada a afirmação. Agora provaremos que

$$\int_{\bigcup T_i} \log g\, dx = \int_{\bigcup J_j} \log g\, dx = 0. \tag{3.16}$$

Denotemos $a_i = g/T_i$ e $b_j = g/J_j$. Então

$$\int_{(\bigcup T_i)\cup(\bigcup J_j)} \log g\, dx = \sum |T_i| \log a_i + \sum |J_j| \log b_j = |T_1| \sum \log a_i + |J_1| \sum \log b_j = 0. \tag{3.17}$$

Se $\sum \log a_i \neq 0$, do lema 3.10 temos $\sum \log b_j / \sum \log a_i \in \mathbb{Q}$. Logo utilizando 3.17 temos $|T_1|/|J_1| \in \mathbb{Q}$ que é uma contradição já que os extremos dos intervalos T_i e J_j estão numa mesma órbita da rotação irracional R_θ. Então

$$\sum \log b_j = \sum \log a_i = 0.$$

Seja agora um ponto $y \in K$ tal que $x = h(y) \in T_1$. Da construção dos intervalos T_i e J_j temos que $R_\theta^{p+1}(x)$ pertence a T_1 ou J_1. Se $R_\theta^{p+1}(x)$ pertence a T_1, então $R_\theta^{2p+1}(x)$ pertence a T_1 ou J_1. Se $R_\theta^{p+1}(x)$ pertence a J_1, então $R_\theta^{p+q+1}(x)$ pertence a T_1 ou J_1. Procedendo indutivamente temos que existe uma seqüencia crescente n_k tal que $n_{k+1} - n_k$ só toma os valores p e q e $R_\theta^{n_k+1}(x)$ pertence a T_1 ou J_1. Portanto, utilizando 3.16 temos que $F(y, n_k) = 0$ para todo k. Finalmente, dado um inteiro positivo n existe k_0 tal que $n_{k_0} \leqslant n < n_{k_0+1}$, e portanto

$$F(y,n) = F(y, n_{k_0}) + F(f^{n_{k_0}}(y), n - n_{k_0}) = F(f^{n_{k_0}}(y), n - n_{k_0}).$$

Como $n - n_{k_0}$ é limitado, segue-se que $F(y,n)$ é limitado o que contradiz o lema 3.5. Isto conclui a demonstração do teorema 3.1.

$\square$

Capítulo 4

Não-minimalidade $C^{1+\varepsilon}$ dos conjuntos regulares

Como já observamos anteriormente, se a conjectura de McDuff é verdadeira então os conjuntos de Cantor regulares não são C^1-minimais. Obtivemos um resultado um pouco mais fraco. Precisamente, provamos o seguinte teorema.

Teorema 4.1. Se K é um conjunto de Cantor regular, então K não é $C^{1+\varepsilon}$–minimal para nenhum $\varepsilon > 0$. No último capítulo generalizamos este teorema para uma família maior de conjuntos de Cantor que chamamos conjuntos de Cantor quase-regulares.

4.1 Recobrimentos e níveis

A seguinte observação será de utilidade na demonstração do teorema 4.1. Se o conjunto de Cantor regular K é C^1-minimal para f então para cada inteiro positivo n temos que se I é uma componente conexa do complementar de K suficientemente pequena, I e $f(I)$ estão contidas em K_n.

Demonstração. Denotaremos por ν_n o mínimo dos comprimentos das componentes conexas do complementar de K_n. Se M é o máximo de f', então para toda componente conexa do complementar de K temos $|f(I)| \leqslant M|I|$. Portanto se escolhemos I tal que $|I| < \frac{\nu_n}{M}$, temos que $\max\{|f(I)|, |I|\} < \nu_n$, logo $f(I)$ e I estão contidos em K_n. $\square$

Para a prova do teorema 4.1, ainda precisamos de uma definição e de dois lemas.

Definição 4.2. Dizemos que o inteiro positivo s é o nível de um intervalo I contido em S^1, se I foi retirado na etapa s da construção de K (denotaremos $s = \mathcal{L}(I)$).

O primeiro dos lemas é o seguinte lema de recobrimento.

Lema 4.3. Se $\{\mathcal{T}_{ij}\}$ com $j \in \mathbb{N}$ e $i = 1, ..., n$ é uma família de intervalos fechados contidos em S^1 tal que $\nu_j = \max\{|\mathcal{T}_{ij}|; i = 1, .., n\}$ tem limite 0 quando $j \to \infty$, então existe um número natural k e um conjunto finito de intervalos $\{\mathcal{J}_t\}$ dois a dois disjuntos, contidos em S^1, tais que $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{J}_t \supset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{T}_{ik}$ e todo intervalo do complementar de $\mathcal{A}$ tem medida maior que a medida de $\mathcal{A}$.

Demonstração. Para a demonstração usaremos indução finita em n. Se $n = 1$ a demonstração é imediata. Suponhamos agora que a propriedade é válida para $n \geqslant 1$ e provaremos que é válida para $n+1$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{B}_j = \bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{T}_{ij}$ e por $\mathcal{Y}_{sj}$ $(s = 1, ..., n_j$, com $n_j \leqslant n+1)$ as componentes conexas do complementar de $\mathcal{B}_j$. Dividiremos a demonstração em dois casos. Primeiro, suponhamos que $a_j = \min\{|\mathcal{Y}_{kj}|; k = 1, ..., n_j\}$ não tem limite 0 quando $j \to \infty$. Então existem $\varepsilon > 0$ e uma seqüência crescente $\{j_t\}$ tais que $a_{j_t} > \varepsilon$ para todo t. Por hipótese sabemos que $\nu_j \to 0$ quando $j \to \infty$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\nu_{j_r} < \varepsilon/(n+1)$, logo

$$|\mathcal{B}_{j_r}| \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} |\mathcal{T}_{ij_r}| < (n+1)\frac{\varepsilon}{n+1} = \varepsilon.$$

Como $a_{j_r} > \varepsilon$ temos que todo intervalo do complementar de $\mathcal{B}_{j_r}$ tem medida maior que $|\mathcal{B}_{j_r}|$. Definindo os intervalos $\mathcal{J}_t$ como as componentes conexas de $\mathcal{B}_{j_r}$, temos provado o passo da indução neste caso. Suponhamos agora que $a_j \to 0$ quando $j \to \infty$. Denotemos por $\mathcal{Y}_j^*$ uma das componentes conexas do complementar de $\mathcal{B}_j$ que tem comprimento igual a a_j. Podemos supor sem perda de generalidade que $\mathcal{Y}_j^*$ é o intervalo $Arc(\mathcal{T}_{1j}, \mathcal{T}_{2j}) \setminus (\mathcal{T}_{1j} \cup \mathcal{T}_{2j})$ (considerando j suficientemente grande e reordenando os intervalos $\mathcal{T}_{ij}$ se necessário). Consideremos agora a família de intervalos $\mathcal{T}_{ij}^*$ definida como segue. Tome

$$\mathcal{T}_{1j}^* = \mathcal{T}_{1j} \cup \mathcal{Y}_j^* \cup \mathcal{T}_{2j}$$

e para $i = 2, ..., n$

$$\mathcal{T}_{i,j}^* = \mathcal{T}_{i+1,j}.$$

Então pela hipótese indutiva existem um número k e uma família de intervalos $\mathcal{J}_t$ que verificam o lema para os intervalos $\mathcal{T}_{ij}^*$. O número k e a família de intervalos $\mathcal{J}_t$ obtidos para a família de intervalos $\mathcal{T}_{ij}^*$ também verificam a conclusão do lema para a família de intervalos $\mathcal{T}_{ij}$. Isto estabelece o passo da indução e conclui a prova . $\square$

Se x é extremo de uma componente conexa de K de nível s_0 então para cada inteiro $s > s_0$ denotamos por I_s á componente conexa de K mais próxima de x.

Definição 4.4. Seja x extremo de uma componente conexa do complementar de K de nível s_0. Para cada s inteiro, $s > s_0$ definimos

$$\varphi_x(s) = s - \mathcal{L}(f(I_s))$$

.

Lema 4.5. Se K é um conjunto de Cantor regular C^1-minimal para f e x é extremo de uma componente conexa do complementar de K de nível s_0, então φ_x é limitada superiormente.

Demonstração. Chamaremos η_n a medida das componentes conexas de K_n. Suponhamos por contradição que para cada $k > 0$ existe s_k inteiro positivo tal que $\varphi_x(s_k) = s_k - \mathcal{L}(f(I_{s_k})) > k$. Portanto se denotamos $r_k = \mathcal{L}(f(I_{s_k}))$ temos

$$\eta_{s_k} \leqslant 2^{-k+1}\eta_{r_k+1}.$$

Se $I_{s_k} = (a_k, b_k)$ com a_k entre x e b_k, temos que existe $\theta_k \in [x, a_k]$ tal que $d(f(x), f(a_k)) = f'(\theta_k)d(x, a_k)$. Logo

$$d(f(x), f(a_k)) = f'(\theta_k)\eta_{s_k} \leqslant f'(\theta_k)2^{-k+1}\eta_{r_k+1} \leqslant f'(\theta_k)2^{-k+1}d(f(x), f(a_k)).$$

Daqui temos que $f'(\theta_k) \to \infty$ quando $k \to +\infty$ que é uma contradição. ☐

4.2 Prova do teorema 4.1

Demonstração. Por contradição suponhamos que existe $\varepsilon > 0$ e um difeomorfismo f de classe $C^{1+\varepsilon}$ que tem K como conjunto minimal. Pelos lemas 3.10 e 3.8 temos que existe n_0 inteiro positivo e um ponto x extremo de uma componente conexa do complementar de K que satisfazem o seguinte.

1. A restrição de f' a K é constante em cada uma das componentes conexas de K_{n_0}.

2. $f'(x) = \nu > 1$.

3. Pela continuidade de f' temos que se n_0 é suficientemente grande então para toda componente conexa I do complementar de K contida em $K_{n_0}^x$ (componente conexa de K_{n_0} que contem x) vale $|f(I)| > |I|$, logo $f(I)$ e I são de diferente nível.

Dado o inteiro positivo n denotamos $I_n = (a_n, b_n)$ o segmento de nível $n + n_0$ contido em $K^x_{n_0}$ que fica mais próximo de x. Fixemos m e para cada inteiro $n > m$ consideramos a família de intervalos $\{I^j_n\}_{j\in\mathbb{N}}$ com as seguintes propriedades.

1. O intervalo $I^0_n = I_n$.
2. O intervalo I^j_n é a componente conexa do complementar de K de igual nível que $f(I^{j-1}_n)$ que fica mais próxima de x (na demonstração só vamos trabalhar com uma quantidade finita destes intervalos).

Seja $q = \max\{\mathcal{L}(I) - \mathcal{L}(f(I))\}$ o inteiro dado pelo lema 4.5. Definimos $p_n = \min\{j : \mathcal{L}(I^j_n) \leqslant \mathcal{L}(I_{m+q-1}) = n_0 + m + q - 1\}$. Para ver que p_n está bem definido, devemos provar que o conjunto $D_n = \{j : \mathcal{L}(I^j_n) \leqslant \mathcal{L}(I_{m+q-1})\}$ é não vazio. Suponhamos por contradição que D_n é vazio. Então para todo j vale $|I^{j-1}_n| < |I^j_n|$ e que I^j_n está entre x e I_{m+q-1} que é uma contradição. Logo D_n não é vazio. Consideremos agora a família finita $\{I^j_n\}$ com $j = 1, ..., p_n$. Do lema 4.5 temos

$$n_0 + m + q > \mathcal{L}(I^{p_n}_n) \geqslant n_0 + m.$$

Pelo teorema do valor médio sabemos que existem pontos $\theta_j \in I^j_n$, $j = 0, ..., p_n - 1$ tais que

$$|f(I^j_n)| = f'(\theta_j)|I^j_n| = |I^{j+1}_n|.$$

Portanto

$$|I_n| = \frac{|I^{p_n}_n|}{f'(\theta_0)...f'(\theta_{p_n-1})}. \tag{4.1}$$

Denotemos $r_j = \mathcal{L}(I^j_n)$ com $j = 0, ..., p_n - 1$. Observe o leitor que se $i \neq j$ então $r_i \neq r_j$ e que $r_j \geqslant m + n_0$ para todo j. Para todo j, temos que θ_j e x estão numa mesma componente conexa de K_{r_j-1}, logo utilizando o lema 3.6 temos

$$|\theta_j - x| < \frac{1}{2^{r_j-2}}.$$

Portanto, como f é de classe $C^{1+\varepsilon}$ (i.e $|f'(x) - f'(y)| \leqslant k|x - y|^{\varepsilon}$) temos

$$1 - \frac{k}{\nu}\frac{1}{2^{(r_j-2)\varepsilon}} < \frac{f'(\theta_j)}{\nu} < 1 + \frac{k}{\nu}\frac{1}{2^{(r_j-2)\varepsilon}}. \tag{4.2}$$

Utilizando (4.1) e (4.2) temos

$$\frac{|I^{p_n}_n|}{\nu^{p_n}}\prod_{i=0}^{p_n-1}\left\{1 + \frac{k}{\nu}\left(\frac{1}{2^{r_i-2}}\right)^{\varepsilon}\right\}^{-1} \leqslant |I_n| \leqslant \frac{|I^{p_n}_n|}{\nu^{p_n}}\prod_{i=0}^{p_n-1}\left\{1 - \frac{k}{\nu}\left(\frac{1}{2^{r_i-2}}\right)^{\varepsilon}\right\}^{-1}.$$

Assim, concluímos que

$$\log|I_n^{p_n}| - p_n \log\nu - P_2(m) \leqslant \log|I_n| \leqslant \log|I_n^{p_n}| - p_n\log\nu - P_1(m) \tag{4.3}$$

onde

$$P_1(m) = \sum_{j=m+n_0}^{\infty} \log\left\{1 - \frac{k}{\nu}\left(\frac{1}{2^{j-2}}\right)^{\varepsilon}\right\} \leqslant \log\prod_{i=0}^{p_n-1}\left\{1 - \frac{k}{\nu}\left(\frac{1}{2^{r_i-2}}\right)^{\varepsilon}\right\} < 0$$

bem como

$$P_2(m) = \sum_{j=m+n_0}^{\infty} \log\left\{1 + \frac{k}{\nu}\left(\frac{1}{2^{j-2}}\right)^{\varepsilon}\right\} \geqslant \log\prod_{i=0}^{p_n-1}\left\{1 + \frac{k}{\nu}\left(\frac{1}{2^{r_i-2}}\right)^{\varepsilon}\right\} > 0.$$

Para cada m definimos o conjunto $A_m = \{\log|I_r|; r > m\}$ (este conjunto difere do conjunto $\{\log\lambda_i\}$ só numa quantidade finita de elementos). Consideremos agora o quociente $A_m/\log\nu.\mathbb{R} = \mathcal{A}_m$ como subconjunto da variedade afim $\mathcal{S} = \mathbb{R}/\log\nu.\mathbb{R}$ que é isomorfa a S^1. Da desigualdade (4.3) temos que para cada m existe uma quantidade finita de intervalos fechados $\mathcal{T}_{mj}$, $j = 1, ..., q$, contidos em $\mathcal{S}$ tais que

$$\bigcup_{j=1}^{q} \mathcal{T}_{mj} \supset \mathcal{A}_m$$

e

$$a_m = \max\{|\mathcal{T}_{mj}|; j = 1, ..., q\} = P_2(m) - P_1(m).$$

Das definições de $P_1(m)$ e $P_2(m)$ temos que a_m tem limite 0 quando $m \to \infty$. Aplicando o lema 3.1 sabemos que existem m_0 e uma família de intervalos $\mathcal{J}_k$ contidos em $\mathcal{S}$, com $k = 1, ..., h$, tais que

$$\mathcal{A}_{m_0} \subset \bigcup_{j=1}^{q} \mathcal{T}_{m_0 j} \subset \bigcup \mathcal{J}_k = \mathcal{M}$$

e toda componente conexa do complementar de $\mathcal{M}$ tem medida maior que $|\mathcal{M}|$. Se consideramos o levantamento dos conjuntos anteriores temos que existem um número $\delta > 0$ e uma família de intervalos $[\alpha_s, \beta_s]$, com $\alpha_s \leqslant \beta_s$ e $\beta_{s+1} < \alpha_s$, $s = 1, ..., \infty$ (que são os levantados dos intervalos $\mathcal{J}_t$) tais que

$$A_{m_0} \subset \bigcup_{s=1}^{\infty} [\alpha_s, \beta_s]$$

bem como

$$\alpha_s - \beta_{s+1} < \beta_s - \alpha_s + \delta.$$

E fácil verificar que esta condição implica que K satisfaz a condição de McDuff (condição de separação para $p = 0$) que é uma contradição. □

Capítulo 5

Conjuntos regulares de medida positiva

Neste capítulo provamos dois teoremas. Provamos que sob certas condições os conjuntos de Cantor regulares não são C^1-minimais. O primeiro dos resultados é o seguinte.

Teorema 5.1. Se K é um conjunto de Cantor regular de medida positiva e a seqüência $\{m_i\}$ não é limitada, então K não é C^1–minimal.

Para enunciar o segundo teorema ainda precisamos de uma definição.

Definição 5.2. Se K é um conjunto de Cantor regular, para cada inteiro primo q definimos $A_q = \{i \in \mathbb{N} : m_i + 1 = 0 \pmod{q}\}$.

Para o caso em que A_q é infinito denotamos seus elementos por t_n ($n \in \mathbb{N}$) com $t_n < t_{n+1}$ para todo inteiro positivo n.

Teorema 5.3. Se K é um conjunto de Cantor regular de medida positiva e existe um inteiro primo q tal que A_q é infinito e $t_{n+1} - t_n \to \infty$ então K não é C^1-minimal.

5.1 Rigidez geométrica (II)

Começaremos provando certos lemas que serão de utilidade na demonstração dos teoremas acima. Observemos que utilizando o lema 2.1 e a continuidade uniforme de f', temos que para todo $\varepsilon > 0$

existe $n(\varepsilon)$ inteiro positivo tal que se $n > n(\varepsilon)$ e x_1, x_2 pertencem à mesma componente conexa de K_n, vale

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{f'(x_1)}{f'(x_2)} < 1+\varepsilon.$$

Se I e J são conjuntos contidos em $S^1 \setminus K$, denotaremos por $Arc(I,J)$ o menor arco de S^1 que contém I e J.

Lema 5.4. Sejam I_1, I_2, I_3 e I_4 componentes conexas de $S^1 \setminus K$ duas a duas distintas que foram retiradas nas etapas n_1, n_2, n_3 e n_4 da construção de K, respectivamente. Se $n_4 \geqslant \max\{n_1, n_2, n_3\}$ e $Arc(I_3, I_4) \setminus (I_3 \cup I_4)$ é uma componente conexa de K_{n_4}, então existe um inteiro positivo m tal que

$$|K \cap Arc(I_1, I_2)| = m|K \cap Arc(I_3, I_4)|.$$

Demonstração. Das propriedades 4 e 1 temos que $I_1, I_2, I_3, I_4 \subset S^1 \setminus K_{n_4}$, logo $Arc(I_1, I_2) \cap K_{n_4}$ é uma reunião de m componentes conexas de K_{n_4} que denotaremos por $K^1_{n_4}, ..., K^m_{n_4}$. Então

$$Arc(I_1, I_2) \cap K = (Arc(I_1, I_2) \cap K_{n_4}) \cap K = (\bigcup_{i=1}^{m} K^i_{n_4}) \cap K.$$

Segue que

$$|Arc(I_1, I_2) \cap K| = \sum_{i=1}^{m} |K^i_{n_4} \cap K|.$$

Logo, da propriedade 2 da seção 3.2 temos

$$|Arc(I_1, I_2) \cap K| = m|K^1_{n_4} \cap K|. \tag{5.1}$$

Por hipótese sabemos que $Arc(I_3, I_4) \setminus (I_3 \cup I_4)$ é uma componente conexa de K_{n_4} então

$$|K^1_{n_4} \cap K| = |(Arc(I_3, I_4) \setminus (I_3 \cup I_4)) \cap K| = |Arc(I_3, I_4) \cap K|. \tag{5.2}$$

Então de (5.1) e (5.2) temos

$$|K \cap Arc(I_1, I_2)| = m|K \cap Arc(I_3, I_4)|.$$

□

Lema 5.5. Se o conjunto de Cantor regular K, de medida positiva, é C^1–minimal para um difeomorfismo f e $f'(x) > 1$ para $x \in K$, então $f'(x)$ é um número natural.

Demonstração. Sejam ε_0, $\{n_j\}$ e $\{\lambda_{n_j}\}$ como no lema 3.1, e seja $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_0, f'(x)-1\}$. Utilizando o lema 3.2 e as propriedades 4 e 1 da seção 3.2, sabemos que existe um inteiro positivo n tal que a função f' é constante na intersecção de K com cada uma das componentes conexas de K_n e a desigualdade da observação 1 da seção 3.4 é satisfeita para $\varepsilon = \varepsilon_1$. Sem perda de generalidade, podemos supor que o ponto x é extremo de uma componente conexa I do complementar de K tal que I e $f(I)$ estão contidas em $S^1 \setminus K_n$. Seja j_0 tal que $\lambda_{n_{j_0}}$ é menor que o comprimento de alguma das componentes conexas do complementar de K que está contida em K_n. Para cada $j > j_0$ consideremos I_j a componente conexa do complementar de K contida em K_n^x (componente conexa de K_n que contém x) que está mais próximo de x e que $|I_j| \geqslant \lambda_{n_j}$. Então temos que $|I_j| \to 0$ e $d(x, I_j) \to 0$ quando $j \to \infty$. Este fato implica que existe um inteiro positivo j_1 tal que se $j \geqslant j_1$ então $f(I_j)$ está contida em $K_n^{f(x)}$. Pela escolha de ε_1 temos que

$$d(f(x), f(I_j)) > \frac{f'(x)}{1+\varepsilon_1} d(x, I_j) \geqslant d(x, I_j). \tag{5.3}$$

Agora demonstraremos que se $j \geqslant j_1$ não existe uma outra componente conexa do complementar de K de comprimento igual ao de $f(I_j)$, contida em $K_n^{f(x)}$ e que esteja entre $f(x)$ e $f(I_j)$. Por contradição, suponha que existe I^* nas condições anteriores. Então $f^{-1}(I^*)$ está entre x e I_j. Pelo teorema do valor médio sabemos que existem $\theta^* \in f^{-1}(I^*)$ e $\theta_j \in I_j$ tais que

$$|f^{-1}(I^*)| \;=\; \frac{|I^*|}{f'(\theta^*)}$$

e

$$|f(I_j)| \;=\; f'(\theta_j)|I_j|$$

logo

$$|f^{-1}(I^*)| \;=\; \frac{f'(\theta_j)}{f'(\theta^*)}|I_j|.$$

Como θ^* e θ_j estão em uma mesma componente conexa de K_n, temos

$$\frac{|I_j|}{1+\varepsilon_1} \;<\; |f^{-1}(I^*)| \;<\; |I_j|(1+\varepsilon_1)$$

logo

$$|f^{-1}(I^*)| \;>\; \frac{|I_j|}{1+\varepsilon_1} \;>\; \frac{|I_j|}{1+\varepsilon_0} \;\geqslant\; \frac{\lambda_{n_j}}{1+\varepsilon_0} \;>\; \lambda_{n_j+1}.$$

Deste fato concluímos que $|f^{-1}(I^*)| \geqslant \lambda_{n_j}$ o que contradiz a definição de I_j. Além disso utilizando (5.3) temos que se $f(I_j)$ foi retirado em uma etapa n_1 e I_j na etapa n_2 então $n < n_1 < n_2$. Estas observações permitem aplicar o lema 5.4, logo existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$|K \cap Arc(f(x), f(I_j))| = p|K \cap Arc(x, I_j)|. \tag{5.4}$$

Como f' restrito a $K \cap Arc(x, I_j)$ é constante, então temos que

$$|f(K \cap Arc(x, I_j))| = f'(x)|K \cap Arc(x, I_j)| = |K \cap Arc(f(x), f(I_j)|. \tag{5.5}$$

Portanto de (5.4) e (5.5) e usando que $|K| > 0$ temos que $1 < f'(x) = p \in \mathbb{N}$. □

5.2 Prova do teorema 5.1

Demonstração. Por contradição, suponhamos que K é C^1–minimal para f e $\{m_i\}$ é não limitada. Pelos lemas 3.8 e 5.5 sabemos que existe x extremo de um intervalo errante I, tal que $f'(x) = p$ com p inteiro maior que 1. Portanto, pela continuidade uniforme de f' e o lema 3.6 sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f'/(K \cap K_{n_0}^x) = p$ onde $K_{n_0}^x$ é a componente conexa de K_{n_0} que contem x. Como $\{m_i\}$ não é limitada, então existe i_0 suficientemente grande tal que $m_{i_0} > p + 2$. Sejam J_{i_0} o intervalo de nível i_0 mais próximo de x e $K_{i_0}^x = [x, y_{i_0}]$ (componente conexa de K_{i_0} que contem x). Como f' restrita a $K \cap K_{n_0}^x$ é p, então

$$|f(K \cap K_{i_0}^x)| = |K \cap [f(x), f(y_{i_0})]| = p|K \cap K_{i_0}^x|.$$

Utilizando que K é de medida positiva temos que o intervalo $[f(x), f(y_{i_0})]$ contém exatamente p componentes conexas de K_{i_0}. Como $f(x)$ é extremo de $f(I)$ (que é de nível maior que i_0 se i_0 é suficientemente grande) e na etapa i_0 retiramos mais de $p + 2$ intervalos, então o nível de $f(J_{i_0})$ é i_0. Portanto

$$|J_{i_0}| = |f(J_{i_0})|.$$

Por outro lado, temos que $J_{i_0} \subset K_{i_0-1}$ e $|K_{i_0-1}| \to 0$ quando $i_0 \to \infty$. Mas então, utilizando a continuidade de f', sabemos que se i_0 é suficientemente grande

$$|J_{i_0}| < |f(J_{i_0})|,$$

que é uma contradição. □

5.3 Prova do teorema 5.3

A seguir demonstraremos dois lemas que serão utilizados na demonstração do teorema 5.3.

Lema 5.6. Se K é um conjunto de Cantor regular de medida positiva, C^1-minimal para f, e existem $x \in K$ e um inteiro positivo p ($p > 1$) tais que $f'(x) = p$, então p é múltiplo de $m_i + 1$ para i suficientemente grande.

Demonstração. Do lema 3.10 podemos supor que x é extremo de uma componente conexa do complementar de K. Denotemos por $I_i = (a_i, b_i)$ a componente conexa do complementar de K de nível i mas próxima de x (se i é suficientemente grande a componente I_i está bem determinada). Então $f([x, a_i])$ contem exatamente p componentes conexas de K_i, logo o nível de $f(I_i)$ é menor ou igual que i. Se i é suficientemente grande temos que $|f(I_i)| > |I_i|$, logo o nível de $f(I_i)$ é menor que i. Portanto a quantidade de componentes conexas de K_i que contem $f([x, a_i])$ é múltiplo de $m_i + 1$, logo segue a tese.

□

Lema 5.7. Se K é um conjunto de Cantor regular de medida positiva então $\frac{l_n}{\sigma_n} \to 0$ quando $n \to \infty$, onde σ_n é o comprimento das componentes conexas de K_n e l_n é o comprimento dos segmentos abertos que foram retirados na n–ésima etapa da construção de K.

Demonstração. Da construção de K temos que

$$|K| = \lim_{n\to\infty} \theta_1 \ldots\theta_n > 0,$$

logo $\theta_n \to 1$. Se x é extremo de algum dos intervalos abertos retirados na etapa j da construção de K, então para todo $n > j + 1$ temos

$$\theta_n = \frac{|K_n|}{|K_{n-1}|} = \frac{|K_n^x|(m_n + 1)}{|K_{n-1}^x|} = \frac{|K_n^x|(m_n + 1)}{|K_n^x|(m_n + 1) + m_n l_n},$$

logo

$$\frac{l_n}{|K_n^x|} \to 0$$

quando $n \to +\infty$. □

A seguir apresentaremos a prova do teorema 5.3

Demonstração. Por contradição suponhamos que K é C^1-minimal para f. Sejam x, I, p e n_0 como na prova do teorema 5.1. Para cada $i > n_0$, denotaremos por $J_i = (y_i, z_i)$ o intervalo errante de nível i mais próximo de $f(x)$. Por hipótese, existe um inteiro positivo n_0 tal que se $n \geqslant n_0$ então $t_{n+1} - t_n > 3p$.

Afirmação 1: Para todo $i > t_{n_0}$, se $f^{-1}(J_i)$ é o intervalo de nível j mais próximo de x então

$f^{-1}(J_j)$ não é o intervalo de nível $k = \mathcal{L}(f^{-1}(J_j))$ mais próximo de x. Suponhamos por contradição que $f^{-1}(J_j)$ é o intervalo de nível $k = \mathcal{L}(f^{-1}(J_j))$ mais próximo de x. Portanto $[x, f^{-1}(y_i)]$ é uma componente conexa de K_j e $[x, f^{-1}(y_j)]$ é uma componente conexa de K_k. Então

$$(m_{i+1}+1)...(m_j+1) = p$$

e

$$(m_{j+1}+1)...(m_k+1) = p.$$

Utilizando o lema 5.6 e que q é um número primo temos que existem pelo menos dois elementos do conjunto $\{(m_{i+1}+1), ..., (m_j+1), ..., (m_k+1)\}$ que são múltiplos de q. Como este conjunto não tem mais de $2p$ elementos se i é suficientemente grande temos uma contradição. Então temos demonstrada a afirmação 1.

Afirmação 2: Se i é suficientemente grande, existe $k > i$ tal que

$$\frac{|J_k|}{|K_k^{f(x)}|} > \frac{3}{2}\frac{|J_i|}{|K_i^{f(x)}|}.$$

Pelo teorema do valor médio, para todo i, existem θ_1 e θ_2 (que dependem de i) contidos em $[x, f^{-1}(z_i)]$ tais que

$$|J_i| = |f^{-1}(J_i)|f'(\theta_1)$$

e

$$|(f(x), y_i)| = |(x, f^{-1}(y_i))|f'(\theta_2).$$

Então

$$\frac{|J_i|}{|K_i^{f(x)}|} = \frac{|J_i|}{|(f(x), y_i)|} = \frac{f'(\theta_1)}{f'(\theta_2)}\frac{|f^{-1}(J_i)|}{|(x, f^{-1}(y_i))|} \to \frac{|f^{-1}(J_i)|}{|(x, f^{-1}(y_i))|}, \tag{5.6}$$

quando $i \to \infty$. Temos duas possibilidades.

1. Se $f^{-1}(J_i)$ é o intervalo mais próximo de x de nível $j = \mathcal{L}(f^{-1}(J_i))$, da afirmação 1, temos que $f^{-1}(J_j)$ não é o intervalo de nível $k = \mathcal{L}(f^{-1}(J_j))$ mais próximo de x, portanto

$$|(x, f^{-1}(y_j))| > 2.|K_k^x|.$$

Então, utilizando 5.6,

$$\frac{|J_i|}{|K_i^{f(x)}|} \to \frac{|J_j|}{|K_j^{f(x)}|} \to \frac{|J_k|}{|(x, f^{-1}(y_j))|} < \frac{|J_k|}{2|K_k^{f(x)}|},$$

quando $i \to \infty$. Logo segue a afirmação 2.

2. Se $f^{-1}(J_i)$ não é o intervalo mais próximo de x de nível $k = \mathcal{L}(f^{-1}(J_i))$, então

$$|(x, f^{-1}(y_i))| > 2.|K_k^x|.$$

Logo a demonstração segue de forma análoga ao item anterior.

Da afirmação 2 temos que

$$\frac{|J_n|}{|K_n^{f(x)}|} \nrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$ que contradiz o lema 5.7.

$\square$

Capítulo 6

Conjuntos de Cantor quase-regulares

As técnicas expostas nos capítulos anteriores permitem-nos obter generalizações dos teoremas 3.1 e 4.1 para uma família ainda mais ampla de conjuntos de Cantor que chamaremos conjuntos de Cantor *quase-regulares*. Para esta família de conjuntos de Cantor (que contém a família dos conjuntos de Cantor regulares) provaremos os seguintes resultados.

Teorema 6.1. Se um conjunto de Cantor K é C^1–minimal para um difeomorfismo f, e se no complementar de K existe uma única órbita de intervalos errantes, então K não é quase-regular.

Teorema 6.2. Se K é um conjunto de Cantor quase-regular de regularidade não nula então K não é $C^{1+\varepsilon}$–minimal para nenhum $\varepsilon > 0$.

6.1 Conjuntos de Cantor quase-regulares

Dada uma seqüência de inteiros positivos $\{n_i\}$ com $\sum_{i<j} n_i \leqslant n_j$, procedemos como segue. Na primeira etapa retiramos de S^1, n_1 intervalos abertos de igual comprimento, obtendo o conjunto fechado $K_1 = \bigcup \Delta_{1i_1}$ $(i_1 = 1, ..., n_1)$, onde Δ_{1i_1} são as componentes conexas de K_1. Na segunda etapa, de K_1 retiramos n_2 intervalos abertos de igual comprimento, retirando de cada componente conexa de K_1 pelo menos um intervalo, obtendo o conjunto fechado $K_2 = \bigcup \Delta_{2i_2}$ $(i_2 = 1, ..., n_2)$, onde Δ_{1i_2} são as componentes conexas de K_2. Não exigimos que os intervalos retirados estejam

igualmente distribuídos. Procedendo indutivamente, obtemos para cada m um conjunto fechado $K_m \subset S^1$, contido em K_{m-1} e escrevemos $K_m = \bigcup \Delta_{mi_m}$ $(i_m = 1, ..., n_m)$ onde Δ_{mi_m} são as componentes conexas de K_m. Definimos então $K = \bigcap K_m$. Se $\nu_m = \max\{|\Delta_{mi_m}| : i_m = 1, ..., n_m\} \to 0$ quando $m \to \infty$ então K é um conjunto de Cantor. A todo conjunto de Cantor K construído desta forma chamaremos conjunto de Cantor quase-regular. Observar que com este procedimento não obtemos todos os conjuntos de Cantor de S^1. Se $\mu_m = \min\{|\Delta_{m,i_m}| : i_m = 1, ...n_m\}$, o número $\delta = \inf\{\mu_m/\nu_m : m \in \mathbb{N}\}$ dá uma idéia da irregularidade do conjunto K. Esse número depende do conjunto de Cantor K e do procedimento dado para obter K. Então definimos a regularidade de K como o supremo do conjunto dos δ tomando todos os procedimentos possíveis para obter K. Por exemplo, se o conjunto K é um conjunto de Cantor regular temos que sua regularidade é 1 (que é o maior valor possível). Tanto mais irregular é o conjunto quanto menor a sua regularidade.

Lema 6.3. Se K é um conjunto de Cantor quase-regular, então $\mu_n < \frac{2\pi}{2^{n-1}}$ para todo inteiro $n > 1$.

Demonstração. Vamos demonstrar que se $\mu_n < \frac{2\pi}{2^{n-1}}$ então $\mu_{n+1} < \frac{2\pi}{2^n}$. Provado isto, como $\mu_1 < 2\pi$ temos demonstrado o lema. Temos que existe j_1 tal que $\Delta_{n,j_1} < \frac{2\pi}{2^{n-1}}$. Da construção de K sabemos que existem j_2 e j_3 tais que Δ_{n+1,j_2} e Δ_{n+1,j_3} estão contidos em Δ_{n,j_1}. Por tanto

$$\min\{|\Delta_{n+1,j_2}|, |\Delta_{n+1,j_3}|\} \leqslant \frac{|\Delta_{n,j_1}|}{2} < \frac{2\pi}{2^n},$$

logo segue a tese. □

Lema 6.4. Se K é um conjunto de Cantor quase-regular, então λ_n/λ_{n+1} não converge a 1 quando $n \to \infty$.

Demonstração. Seja a seqüência $\{l_i\}$ como no lema 3.7. Utilizando o lema 6.3 temos que

$$l_i < \frac{2\pi}{2^{i-2}},$$

logo, a prova segue como no lema 3.7. □

Lema 6.5. Se um conjunto de Cantor quase-regular K é C^1-minimal para f, então existe $x \in K$ tal que $f'(x) > 1$.

Demonstração. A prova é análoga a prova do lema 3.8 (segue do lema 6.4). □

6.2 Demonstração do teorema 6.1.

A propriedade dos conjuntos de Cantor regulares que permite provar os lemas 3.9 e 3.10 é a que segue. Se K é um conjunto de Cantor regular então para todo $\varepsilon > 0$ existe um inteiro n tal que cada componente conexa de K_n é de comprimento menor que ε e se I é uma componente conexa do complementar de K suficientemente pequena então existe em cada uma das outras componentes conexas de K_n uma componente conexa do complementar de K de comprimento $|I|$. Esta propriedade também é válida para conjuntos de Cantor quase-regulares. Isto é porque $\nu_m \to 0$ e porque no passo $n+1$ retiramos pelo menos um intervalo aberto de cada uma das componentes conexas de K_n. Utilizando esta propriedade, temos que são válidos os lemas 3.9 e 3.10 no caso que o conjunto de Cantor K é quase-regular. Logo, a prova do teorema 6.1 é análoga à prova do teorema 3.1.

6.3 Demonstração do teorema 6.2.

A prova deste teorema é análoga á prova do teorema 4.1. Antes devemos provar um lema análogo ao lema 4.5. Provado isso segue que é válido o teorema 6.2. Se o conjunto de Cantor quase-regular K é de regularidade não nula, existe um procedimento que determina K tal que $\delta = \inf\{\mu_m/\nu_m : m \in \mathbb{N}\} > 0$. No caso em que K é C^1-minimal para um difeomorfismo f, pelo lema 6.5, existe x extremo de uma componente conexa do complementar de K tal que $f'(x) > 1$. Para cada inteiro positivo s consideramos a componente conexa do complementar de K de nível s mais próxima de x (I_s). Se s é suficientemente grande, I_s está determinada. Definimos então

$$\varphi(s) = s - \mathcal{L}(f(I_s)).$$

Esta função depende do procedimento considerado e do ponto x. Provemos agora o lema a seguir.

Lema 6.6. Se o conjunto de Cantor quasi-regular K de regularidade não nula é C^1-minimal para f, então $\sup\{\varphi(s) : s \in \mathbb{N}\} < +\infty$.

Demonstração. Suponhamos por contradição que para cada $k > 0$ existe s_k, inteiro positivo, tal que $\varphi(s_k) = s_k - \mathcal{L}(f(I_{s_k})) > k$. Denotemos $r_k = \mathcal{L}(f(I_{s_k}))$. Pela construção de K temos

$$\mu_{s_k} \leqslant 2^{-k}\mu_{r_k}.$$

Se $I_{s_k} = (a_k, b_k)$ com a_k entre x e b_k, temos que existe $\theta_k \in [x, a_k]$ tal que $d(f(x), f(a_k)) =$

$f'(\theta_k)d(x, a_k)$. Logo

$$d(f(x), f(a_k)) \leqslant f'(\theta_k)\nu_{s_k} \leqslant f'(\theta_k)\frac{\mu_{s_k}}{\delta} \leqslant \frac{f'(\theta_k)}{\delta}2^{-k}\mu_{r_k} \leqslant \frac{f'(\theta_k)}{\delta}2^{-k}d(f(x), f(a_k)).$$

Daqui obtemos que $f'(\theta_k) \to \infty$ quando $k \to +\infty$ que é uma contradição. $\square$

Mediante a aplicação deste lema, a prova do teorema 6.2 é inteiramente análoga à do teorema 4.1.

Referências Bibliográficas

[1] A. Katok; B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[2] A. Denjoy, Sur les courbes défines par les équations différentielles à la surface du tore, *J. de Math Pure et Appl., (9), 11 (1932), p.333-375.*

[3] D. McDuff. C^1-minimal subset of the circle. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 31 (1981), 177-193.*

[4] M.R. Herman, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Publ. Math. I.H.E.S., 49 (1979), 5-234.*

[5] A. Norton. Denjoy minimal sets are far from affine. *Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2002), 22, 1803-1812.*

[6] R. Mañé. *Introdução à teoria ergódica.* Projeto Euclides, 14. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1983.

[7] W. de Melo; S. van Strien. *One-dimensional dynamics.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 25. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[8] C. Camacho; A. Lins Neto. *Teoria geométrica das folheações.* Projeto Euclides, 9. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.