Trabajo Monográfico

# Sobre la métrica de Jacobi-Maupertuis de ciertos problemas gravitacionales


Por: José Fernández

Orientador: Dr. Ezequiel Maderna

Licenciatura en Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad de la República

Uruguay



Octubre 2016

# Índice

# Capítulo 1

# Introducción

Sea $(M, g)$ una variedad riemanniana $C^\infty$ compacta sin borde de dimensión $n$. Designaremos como $\pi : TM \longrightarrow M$ a su fibrado tangente que es una variedad de dimensión $2n$ no compacta. Sea $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2$ que denominaremos el *lagrangiano*.

Consideramos, para cada par de puntos $x, y \in M$ y tiempo positivo $\tau > 0$, el conjunto de curvas con extremos y tiempo fijos

$$\mathcal{C}^1(x, y, \tau) = \{\gamma : [a, b] \longrightarrow M \text{ de clase } C^1 \text{ por partes, con } b - a = \tau,\ \gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y\,\}$$

en el cual se define $\mathbb{A}_L$, la *acción* del lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_L : \mathcal{C}^1(x, y, \tau) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto \int_a^b L\big(\gamma(s), \dot\gamma(s)\big)\, ds\,. \end{aligned}$$

Nos interesaremos especialmente en las curvas que son mínimos de este funcional, que serán puntos críticos en el espacio de curvas, en un sentido que definiremos más adelante. A estas curvas las llamaremos *extremales* de la acción.

Como veremos, si se cumple que $L$ es un lagrangiano de clase $C^2$ estríctamente convexo, esto es, si $\big(\partial^2 L/\partial v^2\big)(x, v)$ es definida positiva como forma cuadrática para todo $(x, v) \in TM$, entonces las curvas extremales de la acción cumplirán las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) - \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial \mathbb{A}_L(\gamma) = 0\,.$$

Veremos también que las ecuaciones de Euler-Lagrange definen un flujo local $\phi_L^t$ en $TM$, cuyas órbitas son exactamente las curvas velocidades de las extremales, es decir

$$\big(x(t), v(t)\big) = \phi_L^t(x_0, v_0) \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t)\,. \\ x(t) \text{ curva extremal}\,. \\ \big(x(0), v(0)\big) = (x_0, v_0)\,. \end{cases}$$

A priori este flujo local no es completo, es decir, sus órbitas no están necesariamente definidas para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.

En el fibrado cotangente $\pi : T^*M \to M$ introducimos la función $H$, el dual convexo de $L$, llamada el *hamiltoniano* del sistema:

$$H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$H(x, p) = \sup\{p(v) - L(x, v) \mid v \in T_xM\}\ .$$

El fibrado cotangente tiene una estructura natural de variedad simpléctica, donde el gradiente simpléctico del hamiltoniano es un campo $X_H : M \to T^*M$ con un flujo local $\phi_H^t$ asociado que resulta conjugado, mediante la transformada de Legendre, al flujo langrangiano $\phi_L^t$. Por como se define el gradiente simpléctico, el hamiltoniano $H$ es constante en las trayectorias de $\phi_H^t$.

Bajo ciertas condiciones sobre $L$ se logra que los conjuntos de nivel $H^{-1}(c) \subset T^*M$ con $c \in \mathbb{R}$ sean compactos, con lo cual el flujo hamiltoniano $\phi_H^t$ estará definido para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$. Por ser su conjugado, el flujo lagrangiano $\phi_L^t$ también será completo y entonces se puede estudiar su dinámica.

La segunda condición que se le pedirá a $L$ será la superlinearidad sobre compactos de $M$: para todo $K \subset M$ compacto y todo $c > 0$ existe una constante $A(K, c) \in \mathbb{R}$ tal que

$$L(x, v) \geq c\,\|\,v\,\| + A(K, c) \quad \text{ para todo } (x, v) \in TK.$$

Esto en particular implica que

$$\lim_{\|\,v\,\| \to +\infty} \frac{L(x, v)}{\|\,v\,\|} = \infty \qquad \text{para todo } x \in M.$$

El hamiltoniano correspondiente $H$ también es superlineal sobre compactos de $M$ (con la norma dual). En el caso que $M$ sea compacta, esto implica que $H$ es propia (la preimágen de un compacto es compacta) con lo cual tendremos que $H^{-1}(c)$ es compacto para todo $c \in \mathbb{R}$.

## 1.1 Ejemplo

Sea $(M, g)$ una variedad riemanniana y $V : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, tomando el lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ definido por

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \| v \|^2 - V(x).$$

Entonces, una curva $\gamma : (a, b) \to M$ es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, si cumple que

$$\ddot{\gamma} = -\nabla V(x)$$

y esta es la ecuación de Newton del sistema mecánico definido por el potencial $V$.

Siendo más explícitos, recordar que $\ddot{\gamma}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ es la derivada covariante de $\dot{\gamma}(t)$, campo vectorial a lo largo de la curva $\gamma(t)$, respecto a la conexión de Levi-Civita dada por la métrica riemanniana $g$. A su vez, $\nabla V(x)$ es el gradiente de $V$ respecto a la métrica $g$, es decir, el único vector que verifica

$$d_x V(u) = g_x\big(\nabla V(x), u\big) = \langle\, \nabla V(x), u \,\rangle_x \qquad \forall\, x \in M,\ \forall\, u \in T_x M\,.$$

Cabe destacar que el caso particular $V \equiv 0$ corresponde al flujo geodésico $\ddot{\gamma} = 0$ en la variedad $(M, g)$, cuyas trayectorias son las curvas de $M$ (con parámetro proporcional a la longitud de arco) que son minimizantes locales de la distancia generada por la métrica.

Veremos que el hamiltoniano correspondiente a estos sistemas mecánicos es

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \| p \|^2 + V(x)$$

que, como todo hamiltoniano, es una integral primera del movimiento asociado.

## 1.2 Objetivo

Partiendo de una variedad riemanniana $(M, g)$, con un lagrangiano dado por un potencial $U$, de la forma $L(x, v) = \frac{1}{2} \| v \|^2 + U(x)$. El objetivo de este trabajo es identificar las órbitas del flujo de Euler-Lagrange (de un nivel de energía $H = c$ dado) con las geodésicas de una métrica $g_J$ conforme a $g$, la denominada métrica de Jacobi-Maupertuis. Esta construcción es debida inicialmente a Maupertuis, desarrollada en parte por Euler y luego por Jacobi.

# Capítulo 2

# Preliminares

## 2.1 Cálculo de variaciones y ecuación de Euler-Lagrange

Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano $C^2$. Buscamos minimizar la acción lagrangiana

$$\mathbb{A}_L(\gamma) = \int_a^b L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)dt$$

en el conjunto de curvas $\mathcal{C}^1(x, y, \tau)$ de clase $C^1$, con tiempo y extremos fijos.

Decimos que $L$ es no degenerado si $\big(\partial^2 L/\partial v^2\big)(x, v) : T_xM \to \mathbb{R}$ es no degenerada como forma cuadrática, para todo $(x, v) \in TM$. También definimos la función $\mathcal{L} : TM \to T^*M$, que llamatemos transformada de *Legendre*, como

$$(x, v) \mapsto \left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)\right)$$

donde $\dfrac{\partial L}{\partial v}(x, v) : T_xM \to \mathbb{R}$ es la 1-forma que asocia $u \mapsto \dfrac{\partial L}{\partial v}(x, v)(u)$.

Calculando en coordenadas el diferencial de $\mathcal{L}$ en un punto $(x, v)$ obtenemos que

$$d\mathcal{L}_(x, v) = \begin{pmatrix} Id_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \end{pmatrix}$$

que implica que $d\mathcal{L}_(x, v)$ es invertible sí y solo sí $\big(\partial^2 L/\partial v^2\big)(x, v)$ es invertible. Es entonces consecuencia directa del teorema de la función inversa lo siguiente.

**Proposición 2.1.1.** *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase $C^2$ y $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ su* *transformada de Legendre. Se cumple entonces que*

$$L \text{ es no degenerado } C^r \iff \mathcal{L} \text{ es un difeomorfismo local } C^{r-1}.$$

$$L \text{ es no degenerado } C^r \text{ y } \mathcal{L} \text{ es inyectiva } \iff \mathcal{L} \text{ es un difeomorsimo } C^{r-1} \text{ sobre su imagen.}$$

### 2.1.1 Extremales en $\mathbb{R}^n$

Sea $\gamma : [a,b] \to M$ una curva de clase $C^r$. Una variación $C^r$ de la curva $\gamma$ es un mapa $\Gamma : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ de clase $C^r$, que cumple que $\Gamma(t,0) = \gamma(t)$ para todo $t \in [a,b]$.

Fijando un $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, este determina una curva $\Gamma_s : [a,b] \to M$ dada por $\Gamma_s(t) = \Gamma(t,s)$. Diremos que una variación $\Gamma$ tiene extremos fijos cuando $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$ y $\Gamma_s(b) = \gamma(b)$ para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

En lo que sigue, se trabajará con el caso particular en que la variedad $M$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. A su vez, dada $\gamma : [a,b] \to M$ una curva $C^1$, usaremos un tipo particular de variaciones con extremos fijos, aprovechando que $M$ está contenida en un espacio vectorial:

Sea $\gamma_1 : [a,b] \to M \subset \mathbb{R}^n$ una curva de clase $C^\infty$ con $\gamma_1(a) = 0 = \gamma_1(b)$. Con esta curva se genera una variación $\Gamma : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ con extremos fijos, según $\gamma_1$, dada por la fórmula

$$\Gamma(t,s) = \gamma(t) + s\gamma_1(t)\,.$$

**Definición 2.1.2.** *Diremos que $\gamma : [a,b] \to M$ una curva $C^1$, es* extremal *si es un punto crítico de la acción lagrangiana. Es decir, si*

$$\frac{d\mathbb{A}_L}{ds}(\gamma + s\gamma_1)\bigg|_{s=0} = 0$$

*para toda $\gamma_1 : [a,b] \to M$ curva $C^\infty$ con $\gamma_1(a) = 0 = \gamma_1(b)$.*

En particular, si se restringe una curva $\gamma$ a un subintervalo $[a', b'] \subset [a,b]$, el conjunto de variaciones con extremos fijos en $[a', b']$ es un subconjunto de las variaciones con extremos fijos en $[a,b]$, porque se pueden extender a $[a,b]$ tomando el valor nulo en $[a', b']^C$. De esto se desprende el siguiente corolario.

**Corolario 2.1.3.** *Si $\gamma : [a,b] \to M$ es extremal entonces $\gamma|_{[a',b']}$ también es extremal para cualquier subintervalo $[a', b'] \subset [a,b]$.*

Al definir una curva extremal como un punto crítico inmediatamente se cumple lo siguiente.

**Teorema 2.1.4.** *Dado un lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$, si $\gamma : [a, b] \to M$ minimiza la acción $\mathbb{A}_L$ en el conjunto de curvas con extremos y tiempo fijos, entonces $\gamma$ es una curva extremal de $L$.*

Si requerimos que $L$ sea de clase $C^2$ y $\gamma$ de clase $C^1$ podemos diferenciar en la acción dentro del símbolo de la integral:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{A}_L}{ds}(\gamma + s\gamma_1)\bigg|_{s=0} &= \left( \int_a^b dL\big(\gamma(t) + s\gamma_1(t), \dot{\gamma}(t) + s\dot{\gamma_1}(t)\big)\big(\gamma_1(t), \dot{\gamma_1}(t)\big)\, dt \right)\bigg|_{s=0} \\ &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\dot{\gamma_1}(t)\big)\, dt\,. \end{aligned}$$

Para que $\gamma$ sea extremal esta integral tiene que ser nula para toda curva $\gamma_1$ que se anule en $a$ y $b$. El siguiente resultado muestra que relación tiene que tener el lagrangiano con una curva extremal.

**Teorema 2.1.5** (Euler-Lagrange)**.** *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase $C^2$ en $M$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una curva $\gamma : [a, b] \to M$ de clase $C^2$ es extremal sí y solo sí*

$$\frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\,.$$

Esta última igualdad es conocida como la ecuación de Euler-Lagrange.

Demostración. Como $L$ y $\gamma$ son suficientemente regulares para poder derivar adentro de la integral de la acción, sabemos que si $\gamma$ es extremal entonces para cualquier $\gamma_1 : [a, b] \to M$ que se anule en $a$ y $b$ tenemos que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\dot{\gamma_1}(t)\big)\, dt\, = 0\,.$$

Integrando por partes el segundo término, vemos que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\dot{\gamma_1}(t)\big)\, dt = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\,\big(\gamma_1(t)\big)\,\bigg|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\, dt\,.$$

Como estamos derivando en una variación con extremos fijos, $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = 0$ y concluímos que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\dot{\gamma_1}(t)\big)\, dt = -\int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\, dt\,.$$

Entonces la condición para que $\gamma$ sea extremal se puede plantear como sigue:

$$\frac{d\mathbb{A}_L}{ds}(\gamma + s\gamma_1)\bigg|_{s=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\right]\big(\gamma_1(t)\big)\, dt = 0\,.$$

Esta integral tiene que ser nula para *cualquier* curva $\gamma_1 : [a,b] \to M$ de clase $C^\infty$ que verifique $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = 0$. Esto implicará que la expresión entre paréntesis rectos tenga que ser nula para todo tiempo. Para probar esto, un lema aparte. $\square$

**Lema 2.1.6** (Du Bois-Reymond). *Si $A : [a,b] \to \mathbb{R}^{n*}$ es un mapa continuo que cumple*

$$\int_a^b A(t)\big(\gamma_1(t)\big)\, dt = 0$$

*para toda $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^0$ con $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = 0$ entonces $A(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$.*

Demostración. Suponiendo que $A \neq 0$, existe entonces un $t_0 \in [a,b]$ y un $v_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que $A(t_0)(v_0) > 0$. Por continuidad de $A(t)$, fijamos un $\epsilon > 0$ tal que $A(t)(v_0) > 0$ para todo $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subset [a,b]$. Sea $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^\infty$, positiva en $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ y nula afuera de ese intervalo.

La curva $\phi \cdot v_0 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es de clase $C^\infty$ y cumple la condición de anularse en los extremos, además se tiene que

$$\int_a^b A(t)\big(\phi(t)v_0\big)\, dt = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \phi(t)A(t)(v_0)\, dt > 0$$

porque la función $\phi(t)A(t)(v_0)$ es continua y positiva en $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Llegamos a una contradicción de las hipótesis y por ende $A(t) \equiv 0$. $\square$

### 2.1.2 Regularidad de curvas extremales

En esta sección vamos a ver que las curvas extremales tienen la misma regularidad que el lagrangiano que las genera.

Dado un lagrangiano $L$ de clase $C^2$, tenemos que la condición para que una curva $\gamma : [a,b] \to M$ de clase $C^1$ sea extremal, es que

$$\left.\frac{d\mathbb{A}_L}{ds}(\gamma + s\gamma_1)\right|_{s=0} = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\, dt = 0$$

Integramos por partes el primer término, llamando $p(t)$ a la primitiva del primer factor de dicho término

$$p(t) = \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(s), \dot\gamma(s)\big)\, ds$$

se cumple que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\,dt = p(t)\big(\gamma_1(t)\big)\Big|_a^b - \int_a^b p(t)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\,dt\,.$$

Una vez más, como $\gamma_1$ se anula en los extremos de $[a,b]$, el primer término de la derecha de la igualdad se anula, con lo cual

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\,dt = -\int_a^b \left(\int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)\,ds\right)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\,dt\,.$$

Reemplazando esto en la ecuación original de extremalidad, obtenemos que

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big) - \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)\,ds\right]\big(\dot\gamma_1(t)\big)\,dt = 0$$

para toda $\gamma_1 : [a,b] \to M$ de clase $C^\infty$ con $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = 0$.

Estamos nuevamente en una situación muy similar a la del lema de Du Bois-Reymond, en este caso la función entre paréntesis rectos no será nula, pero sí constante. Para ver eso, otro lema.

**Lema 2.1.7** (Erdmann)**.** *Si $A : [a,b] \to \mathbb{R}^{n*}$ es un mapa continuo y*

$$\int_a^b A(t)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\,dt = 0$$

*para toda $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1$ con $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = 0$, entonces $A(t)$ es constante.*

Demostración. En busca del absurdo supongamos que $A(t)$ no es constante en $[a,b]$, esto significa que existen dos tiempos $t_0 < t_1 \in [a,b]$ y un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$A(t_0)(v) \neq A(t_1)(v)\,.$$

Como $A$ es continua, esta última desigualdad se extiende a dos entornos disjuntos de $t_0$ y $t_1$, por lo tanto podemos suponer que $t_0, t_1 \in (a,b)$. Además, como $A(t)$ es lineal también podemos suponer que

$$A(t_0)(v) > A(t_1)(v)$$

cambiando $v$ por $-v$ si no fuese el caso. Dado un $\delta > 0$, sea $\phi_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, positiva en $(-\delta,\delta)$ y nula afuera de ese intervalo, tal que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \phi_\delta(t)\,dt = 1\,.$$

Vamos a construir una curva $\dot\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, de clase $C^0$, como sigue

$$\dot\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [a, t_0 - \delta). \\ \phi_\delta(t - t_0)\, v & \text{si } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \\ 0 & \text{si } t \in (t_0 + \delta, t_1 - \delta). \\ -\phi_\delta(t - t_1)\, v & \text{si } t \in [t_1 - \delta, t_1 + \delta]. \\ 0 & \text{si } t \in (t_1 + \delta, b]. \end{cases}$$

Donde el $\delta$ considerado es tal que $\delta < \min\big\{t_0 - a, b - t_1, (t_1 - t_0)/2\big\}$. Podemos tomar ahora una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ que sea primitiva de $\dot\gamma$ y que se anule en los extremos de $[a,b]$. Esta curva es de clase $C^1$ y tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b A(t)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\, dt &= \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} A(t)\big(\phi_\delta(t-t_0)\, v\big)\, dt + \int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} A(t)\big(-\phi_\delta(t-t_1)\, v\big)\, dt \\ &= \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \phi_\delta(t-t_0)\, A(t)(v)\, dt - \int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} \phi_\delta(t-t_1)\, A(t)(v)\, dt \\ &\geq \big(A(t_0)(v) - \varepsilon\big) \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \phi_\delta(t-t_0)\, dt - \big(A(t_1)(v) + \varepsilon\big) \int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} \phi_\delta(t-t_1)\, dt \\ &= A(t_0)(v) - A(t_1)(v) - 2\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Donde para las última desigualdad usamos que, como $A(t)$ es continua, podemos elegir un par $\varepsilon, \delta > 0$, tal que

$$A(t)(v) \geq A(t_0)(v) - \varepsilon \qquad \text{con } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

$$A(t)(v) \leq A(t_1)(v) + \varepsilon \qquad \text{con } t \in [t_1 - \delta, t_1 + \delta].$$

Por último, como supusimos que $A(t_0)(v) > A(t_1)(v)$ y el valor $\varepsilon$ es arbitrario, entonces existe un $\delta > 0$ tal que la integral es no nula, contradiciendo la hipótesis del lema. □

Veamos ahora como hacemos uso de este lema. Tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) = p_0 + \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(s), \dot\gamma(s)\big)\, ds$$

con $p_0 \in \mathbb{R}^{n*}$. Más específicamente, evaluando en $t = a$ nos da el valor

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a), \dot\gamma(a)\big)\,.$$

Hemos demostrado la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.8.** *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase $C^1$ donde $M$ es un abierto de*

$\mathbb{R}^n$. *Sea* $\gamma : [a,b] \to M$ *una curva extremal de clase* $C^1$*, entonces*

$$\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a),\dot\gamma(a)\big) + \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)\, ds\,.$$

Esta es una igualdad entre funcionales de $\mathbb{R}^n$, con la identificación usual de $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^{n*}$. Notar que si $L$ y $\gamma$ son de clase $C^2$, derivando con respecto a $t$ obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange.

Con lo visto podemos probar que si $\gamma$ es extremal de clase $C^1$ de $L$, un lagrangiano no degenerado, entonces necesariamente $\gamma$ tiene la misma regularidad que $L$.

**Corolario 2.1.9.** *Si* $L : TM \to \mathbb{R}$ *es un lagrangiano no degenerado de clase* $C^r$*, con* $r \geq 2$*, en* $M \subset \mathbb{R}^n$ *abierto. Entonces toda curva extremal de* $L$ *de clase* $C^1$ *es de clase* $C^r$*.*

Demostración. Sea $\gamma : [a,b] \to M$ una curva extremal de clase $C^1$. Fijando $t_0 \in [a,b]$, miramos el punto $\big(\gamma(t_0),\dot\gamma(t_0)\big) = (x_0,v_0) \in TM$. Como suponemos que $L$ es no degenerado, por 2.1.1, su transformada de Legendre $\mathcal{L} : (x,v) \mapsto \left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right)$ es un difeomorfismo local de clase $C^{r-1}$.

Llamamos $\mathcal{K} : T^*M \to TM$ a su inversa local en el punto $\left(x_0, \frac{\partial L}{\partial v}(x_0,v_0)\right)$. Como ambas curvas $\gamma$ y $\dot\gamma$ son continuas, entonces para $t$ en un entorno de $t_0$ se cumple que

$$\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big) = \mathcal{K}\left(\gamma(t), \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\right) \tag{$\star$}$$

pero como vimos en la proposición anterior 2.1.8

$$\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a),\dot\gamma(a)\big) + \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)\, ds$$

lo que implica que si $\gamma$ es extremal $C^1$, entonces, como $L$ es $C^1$, la función del tiempo

$$t \mapsto \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)$$

es de clase $C^1$. De aquí que el lado derecho de la ecuación ($\star$) es por lo menos $C^1$, por lo tanto el lado izquierdo también, lo que siginifica que $\dot\gamma$ es $C^1$, o sea, la extremal $\gamma$ es de clase $C^2$.

Este razonamiento se puede iterar: Si $L$ es $C^2$, como ahora $\gamma$ es $C^2$, entonces la función $\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)$ se vuelve también de clase $C^2$. Suponiendo que $\mathcal{K}$ es $C^2$ entonces la ecuación ($\star$) implica que $\gamma$ es $C^3$.

Concluímos que si $\mathcal{K}$ es de clase $C^{r-1}$ entonces $\gamma$ es $C^r$, la clase de regularidad de $L$. $\square$

Probamos ahora un resultado más fuerte, pidiéndole un poco más a $L$.

**Corolario 2.1.10.** *Sea $L$ un lagrangiano de clase $C^r$, con $r \geq 2$, en $M \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si su transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces toda curva extremal $C^1$ por partes es de clase $C^r$.*

Demostración. Si $\mathcal{L}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces es no degenerado (por la proposición 2.1.1) y cumple las hipótesis del corolario anterior. Sabemos entonces que toda extremal $C^1$ es de clase $C^r$, pero definimos las extremales en el conjunto de curvas $C^1$ por partes, debemos considerar ese caso.

Sea una extremal $\gamma : [a, b] \to M$ de clase $C^1$ por partes y sea $a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_{k+1} = b$ una subdivisión finita de $[a, b]$ tal que la restricción $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ es $C^1$, para todo $i = 0, \ldots, k$. Estas restricciones también son curvas extremales (corolario 2.1.3) y son de clase $C^1$, entonces por el corolario anterior son de clase $C^r$.

Resta ver que sucede en los tiempos $a_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Sea $\gamma_1 : [a, b] \to M$ curva $C^\infty$ que se anula en $a$ y $b$, como $\gamma$ es extremal sabemos que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\, dt = 0$$

como en cada subintervalo $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ es como mínimo $C^2$ para todo $i = 0, \ldots, k$, Podemos integrar por partes el segundo término (como se hizo para obtener la ecuación de Euler-Lagrange)

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\, dt = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\Big|_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\, dt$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\, dt \\ &= \sum_{i=0}^{k} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[\frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\right]\big(\gamma_1(t)\big)\, dt + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\Big|_{a_i}^{a_{i+1}} \end{aligned}$$

y como cada $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ es extremal de clase $C^2$, verifica entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange para todo $i = 0, \dots, k$. Las integrales se anulan y llegamos finalmente a que

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\Big|_{a_i}^{a_{i+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_{i+1}), \dot\gamma_-(a_{i+1})\big)\big(\gamma_1(a_{i+1})\big) - \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_i), \dot\gamma_+(a_i)\big)\big(\gamma_1(a_i)\big)
\end{aligned}
$$

donde $\dot\gamma_+$ y $\dot\gamma_-$ corresponden a la derivada de $\gamma$ por derecha y por izquierda respectivamente.

La igualdad obtenida se cumple para toda $\gamma_1 : [a, b] \to M$, con $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = 0$. Dado un $1 \leq i_0 \leq k$, se elige una curva $\tilde\gamma_1$ de clase $C^\infty$ que se anule en $[a, a_{i_0-1}] \cup [a_{i_0+1}, b]$ y tenga un valor arbitrario en $a_{i_0}$. Concluimos que

$$
\sum_{i=0}^{k} \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\tilde\gamma_1(t)\big)\Big|_{a_i}^{a_{i+1}} = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_{i_0}), \dot\gamma_-(a_{i_0})\big)\big(\tilde\gamma_1(a_{i_0})\big) - \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_{i_0}), \dot\gamma_+(a_{i_0})\big)\big(\tilde\gamma_1(a_{i_0})\big) = 0
$$

como $\tilde\gamma_1(a_{i_0})$ puede tomar cualquier valor, necesariamente se cumple que

$$
\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_{i_0}), \dot\gamma_+(a_{i_0})\big) = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_{i_0}), \dot\gamma_-(a_{i_0})\big).
$$

Esto equivale a decir que

$$
\mathcal{L}\big(\gamma(a_{i_0}), \dot\gamma_+(a_{i_0})\big) = \mathcal{L}\big(\gamma(a_{i_0}), \dot\gamma_-(a_{i_0})\big)
$$

por último, queremos concluir que $\dot\gamma_+(a_{i_0}) = \dot\gamma_-(a_{i_0})$. Para esto precisamos la hipótesis que la transformada de Legendre $\mathcal{L}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, y es entonces inyectiva, con lo cual

$$
\dot\gamma_+(a_{i_0}) = \dot\gamma_-(a_{i_0}) \qquad \text{para todo } i = 1, \dots, k.
$$

En conclusión, cualquier curva $\gamma$ extremal $C^1$ por partes, es necesariamente de clase $C^1$ y por lo tanto, conforme al corolario anterior, termina siendo de clase $C^r$. □

### 2.1.3 Lagrangianos en variedades

Hasta ahora todo lo demostrado fue para lagrangianos en abiertos de $\mathbb{R}^n$, todos estos resultados se generalizan a variedades arbitrarias, aplicándose localmente en entornos coordenados.

En el caso euclidiano, fue conveniente tomar las variaciones del tipo $\gamma(t) + s\gamma_1(t)$ usando la estructura de espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, en variedades arbitrarias eso no es posible y se usan variaciones más generales.

Antes de pasar a el caso arbitrario probamos un último resultado para $M$ un abierto de $\mathbb{R}^n$, que establece una fórmula para la derivada de la acción con respecto a una variación arbitraria (sin extremos fijos) sobre una curva extremal.

**Teorema 2.1.11** (Fórmula de la primera variación)**.** *Si $\gamma : [a,b] \to M$ es una curva extremal de un lagrangiano $L$ de clase $C^2$, definido en un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces, para cualquier variación de $\gamma$ $\Gamma : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ de clase $C^2$, la derivada de la acción vale*

$$\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\bigg|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(b), \dot\gamma(b)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b,0)\right) - \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a), \dot\gamma(a)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a,0)\right).$$

Demostración.

$$\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big) = \int_a^b L\left(\Gamma_s(t), \frac{\partial \Gamma_s}{\partial t}(t)\right) dt\,.$$

Como $L$ es diferenciable y $\Gamma$ es $C^2$ podemos derivar dentro del signo de la integral

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\bigg|_{s=0} &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\left(\Gamma(t,s), \frac{\partial \Gamma(t,s)}{\partial t}(t)\right)\left(\frac{\partial \Gamma_s}{\partial s}(t)\right) + \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial v}\left(\Gamma(t,s), \frac{\partial \Gamma(t,s)}{\partial t}(t)\right)\left(\frac{\partial^2 \Gamma_s}{\partial t \partial s}(t)\right)\bigg|_{s=0} dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\left(\frac{\partial \Gamma_0}{\partial s}(t)\right) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\left(\frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial t \partial s}(t)\right) dt\,.\end{aligned}$$

Como $\gamma$ es extremal de clase $C^2$ cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\bigg|_{s=0} &= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\right]\left(\frac{\partial \Gamma_0}{\partial s}(t)\right) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\left(\frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial t \partial s}(t)\right) dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t,0)\right)\bigg|_a^b\,.\end{aligned}$$

□

Ahora podemos generalizar la definición de curva extremal a una variedad cualquiera.

**Definición 2.1.12.** *Sea $M$ una variedad diferenciable y sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase $C^2$. Una curva $\gamma : [a,b] \to M$ es extremal sí y solo sí*

$$\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\bigg|_{s=0} = 0$$

*para cualquier* $\Gamma : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ *variación de* $\gamma$ *de clase* $C^2$*, tal que*

$$\Gamma(a,s) = \gamma(a) \quad y \quad \Gamma(b,s) = \gamma(b) \qquad \textit{para todo } s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Veamos que esta definición coincide con la dada en el caso de $M$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $\gamma$ es una curva extremal en $\mathbb{R}^n$ (con la definición anterior) y $\Gamma : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es una variación $C^2$ con extrems fijo, al calcular la derivada parcial según $s$ de la acción, como la variación es constante en los extremos, obtenemos que

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a,0) \;=\; \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b,0) \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\bigg|_{s=0} = 0\,.$$

por la fórmula de la primera variación 2.1.11. Recíprocamente, las variaciones en $\mathbb{R}^n$ de la forma $\Gamma(t,s) = \gamma(t) + s\,\gamma_1(t)$ (donde $\gamma$ y $\gamma_1$ son curvas definidas en un intervalo $[a,b]$, de clase $C^2$ y $C^\infty$ respectivamente) son variaciones de clase $C^2$ y cumplen la condición de tener extremos fijos, por lo cual

$$\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L(\gamma + s\gamma_1)\bigg|_{s=0} = 0\,.$$

De igual forma que fue hecho en el caso euclídeo, se generaliza a variedades arbitrarias lo siguiente.

**Corolario 2.1.13.** *Dado un lagrangiano* $L : TM \to \mathbb{R}$*, si una curva* $\gamma : [a,b] \to M$ *minimiza* $\mathbb{A}_L$ *en el conjunto de curvas* $\mathcal{C}^1(\gamma(a), \gamma(b), b-a)$*, entonces* $\gamma$ *es una curva extremal de* $L$*.*

**Corolario 2.1.14.** *Sea* $L : TM \to \mathbb{R}$ *un lagrangiano de clase* $C^2$*. Si* $\gamma : [a,b] \to M$ *es una curva extremal de clase* $C^2$ *entonces* $\gamma|_{[a',b']}$ *es extremal para todo subintervalo* $[a',b'] \subset [a,b]$*.*

A su vez, esto implica que si $\gamma$ es una curva extremal y un segmento $\gamma|_{[a',b']}$ está incluído en un entorno coordenado, entonces ese segmento cumple todo lo ya visto para el caso en que $M$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, en particular:

**Teorema 2.1.15** (Euler-Lagrange)**.** *Sea* $M$ *una variedad diferenciable y* $L : TM \to \mathbb{R}$ *un lagrangiano de clase* $C^2$ *en* $M$*. Sea* $\gamma : [a,b] \to M$ *una curva extremal de clase* $C^2$*. Entonces, para todo subintervalo* $[a',b'] \subset [a,b]$ *tal que* $\gamma\big([a',b']\big)$ *está incluido en un entorno coordenado* $U \subset M$*, la curva* $\gamma|_{[a',b']}$ *cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas.*

*Recíprocamente, si para todo* $t_0 \in (a,b)$ *existe un* $\varepsilon > 0$ *y un entorno coordenado* $U_0 \subset M$*, en el cual* $\gamma|_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$ *cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas, entonces la curva* $\gamma$ *es una extremal de* $L$*.*

La prueba del enunciado recíproco se desprende de la prueba de la fórmula de la primera variación, para el caso general en que $M$ es una variedad diferenciable, que se demuestra a continuación.

**Teorema 2.1.16** (Fórmula de la primera variación). *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano $C^2$ en una variedad $M$ y sea $\gamma : [a,b] \to M$ una curva extremal de clase $C^2$. Entonces, para cada $\Gamma : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ variación $C^2$ de $\gamma$, se cumple que*

$$\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\Big|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(b), \dot\gamma(b)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b,0)\right) - \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a), \dot\gamma(a)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a,0)\right).$$

Demostración. Como $\gamma\big([a,b]\big) \subset M$ es compacto, podemos tomar una subdivisión de $[a,b]$ en subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$ con $i = 0, \ldots, k$, donde cada subsegmento $\gamma\big([a_i, a_{i+1}]\big)$ esté incluido en un entorno coordenado.

Como $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ es extremal, $\gamma$ cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas y entonces también cumple la fórmula de la primera variación (para el caso en que $M$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$) vista en el teorema 2.1.11

$$\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s|_{[a_i,a_{i+1}]}\big)\Big|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_{i+1}), \dot\gamma(a_{i+1})\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a_{i+1},0)\right) - \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_i), \dot\gamma(a_i)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a_i,0)\right).$$

Sumando en $i$, encontramos que los términos intermedios se cancelan, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\Big|_{s=0} &= \sum_{i=0}^{k} \frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s|_{[a_i,a_{i+1}]}\big)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(b), \dot\gamma(b)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b,0)\right) - \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a), \dot\gamma(a)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a,0)\right). \end{aligned}$$

$\square$

El último resultado que falta generalizar es que las curvas extremales son igual de regulares que el lagrangiano que las genera. Al tratarse de una propiedad local solo precisa verificarse en un entorno coordenado, por lo que se enuncia sin mayor aclaración.

**Proposición 2.1.17** (Regularidad de curvas extremales). *Sea $M$ una variedad diferenciable y $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase $C^r$ con $(r \geq 2)$ tal que su transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ es un difeomorfismo sobre su imagen. Entonces toda curva extremal $C^1$ por partes es de clase $C^r$.*

### 2.1.4 Campo de Euler-Lagrange

Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase $C^r$ no degenerado (con $r \geq 2$) y $\gamma : [a, b] \to M$ una curva extremal $C^2$ (que en definitiva es $C^r$). Vista en cualquier sistema de coordenadas $\gamma$ cumple la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big).$$

Computando la derivada según $t$, se obtiene que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\ddot{\gamma}(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\dot{\gamma}(t)\big)\,.$$

Como $L$ es no degenerado $(\partial^2 L)/(\partial v^2)(x, v)$ es invertible y se puede despejar $\ddot{\gamma}(t) \in TTM$. Esto da lugar a una ecuación diferencial de segundo orden para $\gamma(t)$, que a su vez induce un campo vectorial en el fibrado tangente $X_L : TM \to TTM$ de clase $C^{r-2}$ definido como

$$(x, v) \mapsto \Big(v, \tilde{X}_L(x, v)\Big) \in T_{(x,v)}TM$$

con $\tilde{X}_L$ dado en coordenadas por la ecuación

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v)\left(\tilde{X}_L(x, v)\right) = \frac{\partial L}{\partial x}(x, v) - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v)(v)\,.$$

A priori este campo no está bien definido, resta ver que es independiente de la parametrización.

**Teorema 2.1.18.** *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano $C^r$ no degenerado con $r \geq 2$. Entonces existe un único campo vectorial $X_L$ en $TM$, de clase $C^{r-2}$, tal que sus soluciones son de la forma $t \mapsto \big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$ donde $\gamma : [a, b] \to M$ es una curva extremal de $L$.*

Demostración. Dado un $(x.v) \in TM$, tomamos un entorno coordenado $U \subset M$ de $x$. Como la ecuación diferencial del campo es de la forma $(x, v) \mapsto \big(v, \tilde{X}_L(x, v)\big)$ sus curvas solución son de la forma $\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$ con $\gamma : [a, b] \to U \subset M$ de clase $C^r$. Por como se construyó el campo, en esas coordenadas $\gamma$ cumple la ecuación de Euler-Lagrange y entonces es una curva extremal.

Esto quiere decir que las curvas integrales de $X_L$ son todas de la forma $t \mapsto \big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$ con $\gamma : [a, b] \to M$ de clase $C^r$ curva extremal de $L$. Como la condición de que $\gamma$ sea extremal no depende de las coordenadas donde se mire, entonces el campo $X_L$ está bien definido. $\square$

**Corolario 2.1.19.** *Sea $L$ un lagrangiano $C^r$ no degenerado, con $r \geq 2$. Entonces para todo $(x, v) \in TM$ existe una curva extremal $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ que cumple las condiciones iniciales $\gamma(0) = x$ y $\dot{\gamma}(0) = v$.*

*Si $L$ es $C^3$ cualquier otra curva solución $\tilde{\gamma}(t)$ coincide con $\gamma(t)$ en la intersección de sus dominios.*

Demostración. Dado $(x,v) \in TM$, como $X_L$ es de clase $C^{r-2}$ entonces es como mínimo continuo, por el teorema de Peano existe una solucion $c(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ con condición inicial $(x,v)$. Por el teorema anterior, esta solución es de la forma $c(t) = \big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$ con $\gamma(t)$ una curva extremal de $L$.

Si $L$ es $C^3$ entonces el campo $X_L$ es de clase $C^1$ y el teorema de Picard nos da la unicidad deseada. $\square$

**Definición 2.1.20** (Campo y flujo de Euler-Lagrange)**.** *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano $C^r$ no degenerado, con $r \geq 2$. Al campo $X_L : TM \to TTM$ cuyas órbitas son de la forma $(\gamma, \dot{\gamma})$ con $\gamma$ una extremal de $L$, se lo denomina* campo de Euler-Lagrange *del lagrangiano $L$.*

*Si $r \geq 3$ este campo es únicamente integrable, es decir, genera un flujo parcial $\phi_t^L : TM \to TM$ de clase $C^{r-2}$, al cual llamaremos* flujo de Euler-Lagrange *del lagrangiano $L$.*

Se enuncia un último resultado (cuya demostración se verá en la sección 2.2) que implica que el campo $X_L$ puede ser $C^0$ y tener un flujo parcial $C^1$.

**Teorema 2.1.21.** *Sea $M$ una variedad diferenciable y $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase $C^r$ no degenerado, con $r \geq 2$. Si su transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces el campo $X_L : TM \to TTM$ de clase $C^{r-2}$ es únicamente integrable y define un flujo local $\phi_t^L$ de clase $C^{r-1}$.*

## 2.2 Aspectos simplécticos

### Mapas bilineales antisimétricos

Sea $E$ un espacio vectorial real de dimensión $m$ y sea $\Omega : E \times E \to \mathbb{R}$ un mapa bilineal antisimétrico, esto es, $\Omega(u,v) = -\,\Omega(v,u)$ para todo $u, v \in E$. Podemos caracterizar estos mapas con las siguientes bases.

**Teorema 2.2.1** (Base estándar de un mapa bilineal antisimétrico)**.** *Dado $E$ un espacio vectorial real de dimensión finita y $\Omega : E \times E \to \mathbb{R}$ un mapa bilineal antisimétrico. Se cumple que existe* *una base* $\{u_1, \ldots, u_k, e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ *de* $E$*, tal que*

$$\begin{aligned} \Omega(u_i, v) &= 0 && \textit{para todo } i = 1, \ldots, k \textit{ y } v \in E. \\ \Omega(e_i, e_j) = 0 &= \Omega(f_i, f_j) && \textit{para todo } i, j = 1, \ldots, n. \\ \Omega(e_i, f_j) &= \delta_{ij} && \textit{para todo } i, j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

*Este tipo de base se denomina base canónica y en ella se tiene que la forma matricial de* $\Omega$ *es*

$$\Omega(u, v) = \begin{bmatrix} - u - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id \\ 0 & -Id & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix}$$

Demostración. Se prueba por inducción, usando el proceso de Gram-Schmidt en una versión antisimétrica. Sea el subespacio $U = \{u \in E \mid \Omega(u, v) = 0 \text{ para todo } v \in E\}$ y $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base de $U$. Sea $W$ un subespacio complementario a $U$ en $E$

$$E = U \oplus W.$$

Agarrando un vector no nulo cualquiera $e_1 \in W$, como no está en $U$ entonces existe $f_1 \in W$ tal que $\Omega(e_1, f_1) \neq 0$, asumimos que $\Omega(e_1, f_1) = 1$.

Sea $W_1 = [e_1, f_1]$ el subespacio generado por ambos vectores, y sea

$$W_1^\perp = \{w \in W \mid \Omega(w, v) = 0 \text{ para todo } v \in W_1\}$$

el complemento ortogonal de $W_1$ en $W$. Probamos ahora que

$$W = W_1 \oplus W_1^\perp.$$

Para ver esto tomamos un $v \in W$, si $\Omega(v, e_1) = c$ y $\Omega(v, f_1) = d$, entonces

$$v = \underbrace{(de_1 - cf_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(v + cf_1 - de_1)}_{\in W_1^\perp}.$$

Prosiguiendo, se toma un vector no nulo cualquiera $e_2 \in W_1^\perp$, como no está en $U$ entonces existe $f_2 \in W_1^\perp$ tal que $\Omega(e_2, f_2) \neq 0$ y podemos asumir que $\Omega(e_2, f_2) = 1$. Sea $W_2 = [e_2, f_2]$ el subespacio generado por ambos vectores, el cual está incluído en $W_1^\perp$.

Este proceso se continúa y eventualmente termina porque $E$ tiene dimensión finita, obteniéndose que

$$E = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

donde todos los sumandos son ortogonales con respecto a $\Omega$ y cada $W_i$ tiene una base $\{e_i, f_i\}$ con $\Omega(e_i, f_i) = 1$. □

### 2.2.1 Variedades Simplécticas

**Definición 2.2.2.** *Un mapa bilineal antisimétrico $\Omega : E \times E \to \mathbb{R}$ definido en un espacio vectorial $E$ de dimensión finita, se dice* simpléctico *o no degenerado, si en la descomposición canónica dada por el teorema 2.2.1 se cumple que $U = \{0\}$.*

*Al par $(E, \Omega)$ se lo denomina* espacio vectorial simpléctico.

**Proposición 2.2.3.** *Si $\Omega : E \times E \to \mathbb{R}$ es una forma simpléctica en el espacio vectorial $E$ entonces la transformación lineal $\tilde{\Omega} : E \to E^*$ dada por*

$$\tilde{\Omega}(u)(v) = \Omega(u, v)$$

*es un isomorfismo.*

Demostración. El núcleo de $\tilde{\Omega}$ es el subespacio $U$ definido anteriormente, y como $\Omega$ es simpléctica entonces $U$ es nulo. □

**Proposición 2.2.4.** *Todo espacio vectorial simpléctico $(E, \Omega)$ es de dimensión par.*

Demostración. Tomando la base canónica dada por el teorema 2.2.1, como $U = \{0\}$, esta es de la forma $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ y por lo tanto $E$ tiene dimensión $2n$. □

Vemos ahora como tomar, en una variedad, formas simplécticas definidas en cada espacio tangente y una noción con la cual estas formas varíen diferenciablemente.

**Definición 2.2.5** (2-forma de De Rham)**.** *Sea $M$ una variedad diferenciable. Una 2-forma de De Rham $\omega$ en $M$ asocia a cada punto $p \in M$ un mapa $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ bilineal antisimétrico, de tal forma que $\omega_p$ varía diferenciablemente con $p$.*

*Esto es, para todo par de campos de vectores tangentes $X, Y \in \chi(M)$, la función*

$$\omega(X, Y) : M \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto \omega_p\big(X(p), Y(p)\big)$$

*es diferenciable.*

**Definición 2.2.6** (Variedad Simpléctica)**.** *A una 2-forma $\omega$ en $M$ se la llama* forma simpléctica *si es cerrada y $\omega_p$ es simpléctica en $T_pM$ para todo $p \in M$. Diremos que el par $(M, \omega)$ es una* variedad simpléctica*.*

Notar que para que $\omega_p$ sea simpléctica es necesario que $T_pM$ tenga dimensión par, lo que equivale a que $M$ tenga que ser de dimensión par.

Vamos a ver como se transportan formas diferenciales entre variedades, lo cual permite dar una noción de equivalencia entre variedades simplécticas.

**Definición 2.2.7** (Pullback)**.** *Sea $M_1$ una variedad y $(M_2, \omega_2)$ una variedad simpléctica. Dada $\phi : M_1 \to M_2$ una función diferenciable, definimos $\phi^*\omega_2$ una 2-forma en $M_1$ (llamada el pullback por $\phi$ de $\omega_2$) por la siguiente expresión*

$$(\phi^*\omega_2)_p\,(u, v) = (\omega_2)_{\phi(p)}\left(d\phi_p(u), d\phi_p(u)\right) \qquad \textit{para todo } u, v \in T_pM_1\,.$$

**Definición 2.2.8** (Simplectomorfismo)**.** *Sean $(M_1, \omega_1)$ y $(M_2, \omega_2)$ dos variedades simplécticas de la misma dimensión, y sea $\phi : M_1 \to M_2$ un difeomorfismo. Diremos que $\phi$ es un* simplectomorfismo *si*

$$\phi^*\omega_2 = \omega_1\,.$$

El teorema de Darboux (enunciado a continuación) establece que en la clasificación módulo simplectomorfismos de las variedades simplécticas no es posible utilizar invariantes locales, ya que el único invariante local es la dimensión.

Igual que toda variedad diferenciable es localmente difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, toda variedad simpléctica es localmente simplectomorfa a $(R^{2n}, \omega_0)$. Donde $\omega_0 : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ está dada por la base simpléctica canónica, de la forma vista en 2.2.1, que consiste de los vectores $e_i = (0, \dots, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0)$ y $f_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n+i}, \dots, 0)$ con $i = 1, \dots, n$.

**Teorema 2.2.9** (Darboux)**.** *Sea $(M, \omega)$ una variedad simpléctica de dimensión $2n$ y sea $p$ un punto cualquiera de $M$. Entonces existe un entorno coordenado $(\mathcal{U}, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ centrado en $p$, tal que en $\mathcal{U}$*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

A un entorno coordenado $(\mathcal{U}, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ con esas características se lo denomina *entorno de Darboux.* Para ver una prueba del teorema consultar por ejemplo [HZ11, p. 10].

### 2.2.2 Fibrado cotangente y 1-forma de Liouville

Sea $X$ una variedad $n$-dimensional y sea $T^*X$ su fibrado cotangente. Si tomamos una carta local $(\mathcal{U} \subset X, x_1, \dots, x_n)$ con $x_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, entonces $\{(dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x\}$ (los diferenciales de las funciones coordenadas) forman una base de $T_x^*X$.

Entonces para cualquier 1-forma $\xi \in T_x^*X$ se tiene que $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i (dx_i)_x$ para alguna $n$-upla $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Esto da lugar al sistema de coordenadas $(T^*\mathcal{U}, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ llamadas *coordenadas cotangentes* de $T^*X$ asociadas a las coordenadas $(\mathcal{U}, x_1, \dots, x_n)$.

Sea $\pi : T^*X \to X$ la proyección natural del fibrado cotangente. Por conveniencia llamemos $M = T^*X$, tomando un punto $p = (x, \xi) \in M$ observemos las siguientes relaciones

$$\pi\big((x,\xi)\big) = x \qquad \begin{array}{c} M = T^*X \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X \end{array} \qquad \begin{array}{c} T_pM \\ \big\downarrow{\scriptstyle d\pi_p} \\ T_xX \end{array} \qquad \begin{array}{c} T_p^*M \\ \big\uparrow{\scriptstyle (d\pi_p)^*} \\ T_x^*X \end{array} \qquad (d\pi_p)^*(\xi) = \xi \circ d\pi_p$$

que indican una manera natural de "levantar" las 1-formas $\xi \in T_x^*X$ a 1-formas en $T_{(x,\xi)}T^*X$.

**Definición 2.2.10** (1-forma de Liouville). *Sea $X$ una variedad diferenciable y sea $M = T^*X$ su fibrado cotangente. Definimos la* forma tautológica *o* 1-forma de Liouville *como una sección $\alpha : M \to T^*M$, tal que para todo punto $(x, \xi)$ del fibrado cotangente, $\alpha_{(x,\xi)} : T_{(x,\xi)}M \to \mathbb{R}$ es la 1-forma*

$$\alpha_{(x,\xi)} = (d\pi_{(x,\xi)})^*(\xi) = \xi \circ d\pi_{(x,\xi)}$$
$$v \mapsto \xi\big(d\pi_{(x,\xi)}(v)\big)$$

*donde $\pi : T^*X \to X$ es la proyección canónica del fibrado.*

Pasamos a ver como se expresa esta 1-forma en coordenadas cotangentes.

**Proposición 2.2.11.** *Sea $(\mathcal{U} \subset X, x_1, \dots, x_n)$ un sistema de coordenadas, con sus coordenadas cotangentes asociadas $(T^*\mathcal{U}, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$. Entonces la 1-forma de Liouville está dada en estas coordenadas por*

$$\alpha_{(x,\xi)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \, dx_i \,.$$

Demostración. Como la proyección $\pi : T^*X \to X$ en coordenadas cotangentes cumple que

$$\pi\big((x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)\big) = (x_1, \dots, x_n)\,.$$

Si se toma un $v \in T_{(x,\xi)}M$, entonces en estas coordenadas se escribe como

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial}{\partial \xi_i} \qquad \Longrightarrow \qquad d\pi_{(x,\xi)}(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Ahora, como

$$\alpha_{(x,\xi)}(v) \;=\; \xi\big(d\pi_{(x,\xi)}(v)\big) \;=\; \sum_{i=1}^{n} v_i\, \xi \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, v_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, dx_i(v)$$

□

La 1-forma de Liouville $\alpha$ posee la siguiente propiedad que la caracteriza.

**Lema 2.2.12.** *Sea $\mu : X \to T^*X$ una 1-forma cualquiera en $X$ con $\mu(x) = (x, \mu_x)$, entonces*

$$\mu^*\alpha = \mu\,.$$

Demostración. Sean $(\mathcal{U}, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ coordenadas en un entorno de $X$ y sean las coordenadas cotangentes $(T^*\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ donde hacemos énfasis en marcar la diferencia entre $\tilde{x}_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ (las funciones coordenadas en $X$) con las funciones coordenadas $x_i : T^*\mathcal{U} \to \mathbb{R}$ en $T^*X$. En general se hace un ligero abuso de notación llamando a ambas $x_i$.

En estas coordenadas la 1-forma se plantea como $\mu(x) = \big(x_1, \ldots, x_n, \mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)\big)$, su diferencial es

$$d_x\mu = \sum_{i=1}^{n} d\tilde{x}_i\, \frac{\partial}{\partial x_i} + d_x\mu_i\, \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Por la proposición anterior sabemos que en estas coordenadas $\alpha_{(x,\mu_x)} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)\, dx_i$ y como se tiene que $(\mu^*\alpha)_x = \alpha_{(x,\mu_x)}(d_x\mu)$ entonces

$$(\mu^*\alpha)_x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)\, dx_i \left(\sum_{i=1}^{n} d\tilde{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + d_x\mu_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)\, d\tilde{x}_i = \mu_x\,.$$

□

De especial importancia es que la 1-forma tautológica sirve para darle una estructura natural de variedad simpléctica al fibrado cotangente de cualquier variedad.

**Teorema 2.2.13.** *Sea $X$ una variedad y sea $M = T^*X$ su fibrado cotangente. Si tomamos la 2-forma $\omega$ en $M$ dada por*

$$\omega = -d\alpha$$

*donde $\alpha : M \to T^*M$ es la 1-forma de Liouville, entonces $(T^*X, \omega)$ es una variedad simpléctica.*

Demostración. Por ser la derivada exterior de una 1-forma, inmediatamente sabemos que $\omega$ es cerrada. Nos resta verificar que es no degenerada, para lo cual tomamos un sistema de coordenadas cotangentes $(T^*\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ en las cuales $\alpha_{(x,\xi)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \, dx_i$, entonces

$$\omega = -d\alpha = -d\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \, dx_i\right) = -\sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i \, .$$

Ahora, tomamos un vector tangente arbitrario $v \in T_{(x,\xi)}M$ y lo descomponemos en

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Por lo tanto, si fijamos el $v$, obtenemos la siguiente 1-forma en $T_{(x,\xi)}M$

$$\omega_{(x,\xi)}(v, \cdot) = \sum_{i=1}^n v_i \, d\xi_i - \sum_{i=1}^n w_i \, dx_i \, .$$

Como el conjunto $\{dx_1, \ldots, dx_n, d\xi_1, \ldots, d\xi_n\}$ es una base de $T^*_{(x,\xi)}M$ entonces

$$\omega_{(x,\xi)}(v, \cdot) \equiv 0 \quad \text{sí y solo sí} \quad v = 0 \, .$$

concluyendo que $\omega$ es no degenerada y por ende, simpléctica. □

## 2.3 Campo y flujo de Hamilton

**Lema 2.3.1** (Gradiente simpléctico)**.** *Sea $H : U \subset X \to \mathbb{R}$ una función $C^r$ definida en un abierto de la variedad simpléctica $(X, \omega)$. Entonces existe un único $X_H : U \to TU$ campo vectorial de clase $C^{r-1}$, llamado el gradiente simpléctico de $H$, con la propiedad*

$$\omega_x\big(X_H(x), \cdot\big) = d_x H(\cdot) \, .$$

Demostración. Como el mapa $\tilde{\omega}_x : T_xX \to T^*_xX$ que asocia $v \mapsto \omega_x(v, \cdot)$ es un isomorfismo (probado en la proposición 2.2.3) entonces el vector $X_H(x)$ existe y es único. A su vez $X_H$ es de la misma clase de regularidad que $dH$ por lo tanto es de clase $C^{r-1}$. □

**Definición 2.3.2** (Flujo hamiltoniano)**.** *Sea $H : U \subset (X, \omega) \to \mathbb{R}$ un mapa de clase $C^r$. El* *campo* $X_H : U \to TU$ *dado por la propiedad*

$$\omega_x\big(X_H(x), \cdot\big) = d_x H(\cdot)$$

*se lo denomina* campo hamiltoniano. *En el caso que* $r \geq 2$, *este campo es únicamente integrable e induce un flujo parcial* $\phi_t^H : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to X$ *llamado* flujo hamiltoniano *de* $H$.

Una primera propiedad del flujo hamiltoniano es que preserva a la función que lo genera.

**Proposición 2.3.3.** *Sea* $H : U \subset (X, \omega) \to \mathbb{R}$ *de clase* $C^2$ *y sea* $X_H$ *su campo hamiltoniano. Entonces* $H$ *es constante en las órbitas de su flujo hamiltoniano* $\phi_t^H$.

Demostración. Alcanza con probar que $d_x H\big(X_H(x)\big) = 0$ para todo $x \in U$. Por definición

$$d_x H\big(X_H(x)\big) = \omega_x\big(X_H(x), X_H(x)\big) = 0$$

porque la forma simpléctica $\omega_x$ es antisimétrica para todo $x \in U$. □

### 2.3.1 Subespacios y subvariedades lagrangianas

**Definición 2.3.4** (Subespacio lagrangiano)**.** *Sea* $(E, \omega)$ *un espacio vectorial simpléctico. Un subespacio* $F \subset E$ *se dice lagrangiano si*

$$\dim(F) = \frac{1}{2}\dim(E)$$

*y la forma simpléctica* $\omega$ *es idénticamente nula restricta a* $F \times F$.

Los subespacios lagrangianos son, en cierta medida, maximales con respecto a anular la forma simpléctica $\omega$.

**Lema 2.3.5.** *Sea* $F$ *un subespacio lagrangiano de* $(E, \omega)$ *un espacio vectorial simpléctico. Si* $v \in E$ *es tal que*

$$\omega(v, u) = 0 \quad \textit{para todo } u \in F \implies v \in F.$$

Demostración. Sea $F^\perp = \{v \in E \mid \omega(v, u) = 0 \text{ para todo } u \in F\}$ el subespacio formado por los vectores ortogonales (según $\omega$) a $F$. Como $F$ es lagrangiano se cumple que

$$F \subset F^\perp.$$

A su vez, el mapa $\tilde{\omega} : E \to E^*$ que asocia $v \mapsto \omega(v, \cdot)$ es un isomorfismo (proposición 2.2.3). Como la imagen de $F^\perp$ por este mapa es el conjunto $\tilde{\omega}(F^\perp) = \{p \in E^* \mid p_{|F} = 0\}$ de funcionales cuyo núcleo incluye a $F$, entonces $\tilde{\omega}(F^\perp)$ se puede identificar con $(E/F)^*$. Por lo tanto tenemos que la dimensión

$$\dim\bigl(F^\perp\bigr) = \dim\bigl(\tilde{\omega}(F^\perp)\bigr) = \dim\bigl((E/F)^*\bigr) = \dim(E) - \dim(F) = \frac{1}{2}\dim(E) = \dim(F)$$

lo cual, sumado al hecho que $F \subset F^\perp$, implica que $F^\perp = F$. □

**Definición 2.3.6** (Subvariedad lagrangiana). *Sea $(X, \omega)$ una variedad simpléctica y $N \subset X$ una subvariedad. Decimos que $N$ es una* subvariedad lagrangiana *si para todo $x \in N$ el espacio tangente $T_xN$ es un subespacio lagrangiano de $(T_xX, \omega_x)$.*

El siguiente teorema ilustra de las subvariedades lagrangianas respecto al flujo hamiltoniano en una variedad simpléctica.

**Teorema 2.3.7** (Hamilton-Jacobi). *Sea $H : U \subset (X, \omega) \to \mathbb{R}$ una función $C^2$ definida en un abierto de una variedad simpléctica. Entonces una subvariedad lagrangiana $N \subset U$ es localmente invariante por el flujo hamiltoniano $\phi_t^H$ sí y solo sí $H$ es constante en $N$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $N$ es invariante por el flujo $\phi_t^H$ entonces, para todo $x \in N$, las curvas $\gamma(t) = \phi_t^H(x)$, definidas en un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, están incluídas en $N$. Esto implica que su vector velocidad $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}N$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. En particular, su velocidad en tiempo $t = 0$ es el vector $X_H(x)$ y está incluído en $T_xN$.

Por definición de campo hamiltoniano, para cada $x \in N$ el diferencial $d_xH$ restricto a $T_xN$ cumple que

$$d_xH|_{T_xN} = \omega_x\bigl(X_H(x), \cdot\bigr)|_{T_xN}$$

pero como $X_H(x) \in T_xN$ y $N$ es una subvariedad lagrangiana ($\omega_x|_{T_xN \times T_xN} \equiv 0$) entonces

$$d_xH|_{T_xN} \equiv 0 \qquad \text{para todo } x \in N$$

con lo cual la restricción de $H$ a $N$ es constante.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, si $H$ es constante en $N$ entonces $d_xH|_{T_xN} = 0$ para todo $x \in N$. Esto equivale a que

$$\omega_x\bigl(X_H(x), v\bigr) = 0 \quad \text{para todo } v \in T_xN$$

y por el lema 2.3.5, como $T_xN$ es un subespacio lagrangiano entonces $X_H(x) \in T_xN$ para todo $x \in N$.

De aquí que podemos restringir el campo $X_H : U \to TU$ de clase $C^1$, a un campo en la subvariedad $N$. Por la unicidad del teorema de Cauchy-Lipschitz, las soluciones de $\phi_t^H$ en $N$ también son órbitas de $\phi_t^H$ en $U$ y por lo tanto la subvariedad $N$ es invariante por el flujo hamiltoniano en $U$. □

### 2.3.2 Hamiltonianos y lagrangianos

En esta sección veremos que dado un langrangiano no degenerado $L : TM \to \mathbb{R}$ definido en una variedad diferenciable $M$, existe un mapa $H : T^*M \to \mathbb{R}$ cuyo flujo hamiltoniano es conjugado al flujo de Euler-Lagrange mediante la transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$.

**Definición 2.3.8.** *Si $L : TM \to \mathbb{R}$ es un lagrangiano de clase $C^r$ en la variedad $M$, se define el mapa $\hat{H} : TM \to \mathbb{R}$ de clase $C^{r-1}$ como*

$$\hat{H}(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)(v) - L(x, v)\,.$$

**Proposición 2.3.9.** *Sea $L$ un lagrangiano de clase $C^2$ en la variedad $M$. Si $\gamma : [a, b] \to M$ es una curva extremal de $L$ (lo que implica que es $C^2$), entonces el mapa $\hat{H} : TM \to \mathbb{R}$ es constante en la curva velocidad $(\gamma, \dot{\gamma}) : [a, b] \to TM$.*

*En particular $\hat{H}$ es invariante por el flujo de Euler-Lagrange $\phi_t^L$ cuando este existe.*

Demostración. Veamos localmente en coordenadas al mapa $\hat{H}$ restricto a la curva $(\gamma, \dot{\gamma})$

$$\hat{H}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\dot{\gamma}(t)\big) - L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big).$$

Como es constante tiene derivada nula respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{H}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\right)\big(\dot{\gamma}(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\ddot{\gamma}(t)\big) - \\
&- \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\ddot{\gamma}(t)\big) - \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\dot{\gamma}(t)\big) \\
&= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\right) - \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\right]\big(\dot{\gamma}(t)\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

porque, al ser extremal de $L$, la curva velocidad $(\gamma, \dot{\gamma}) \in TM$ cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange en cualquier sistema de coordenadas.

Para completar la prueba recordamos que fue demostrado en el teorema 2.1.18, que si $L$ es no degenerado, entonces existe el flujo de Euler-Lagrange $\phi_t^L$ y sus soluciones son curvas de la forma $(\gamma, \dot\gamma)$ con $\gamma : [a,b] \to M$ una curva extremal del lagrangiano $L$. $\square$

Estamos buscando un análogo de el lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ en una variedad $M$, en su fibrado cotangente $T^*M$, donde tenemos una estructura simpléctica natural.

Para eso precisamos que la transformada de Legendre asociada al lagrangiano, sea una buena correspondencia entre los fibrados tangente y cotangente.

**Definición 2.3.10** (Hamiltoniano)**.** *Sea un lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ de clase $C^2$. Si la transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ dada por $\mathcal{L}(x,v) = \left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right)$ restricta a un abierto $U$ de $M$ es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces definimos el* hamiltoniano *asociado $H : \mathcal{L}(U) \subset T^*M \to \mathbb{R}$ como*

$$H = \hat{H} \circ \mathcal{L}^{-1}$$

$$H(x,p) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v_p)(v_p) - L(x, v_p)$$

*donde $v_p$ es el único vector de $T_xM$ que cumple*

$$\frac{\partial L}{\partial v}(x, v_p) = p \qquad o\ sea \qquad \mathcal{L}(x, v_p) = (x, p).$$

**Proposición 2.3.11.** *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase $C^r$ con $r \geq 2$. Si la transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ restricta a $TU$ (con $U \subset M$ abierto) es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces el hamiltoniano $H = \hat{H} \circ \mathcal{L}^{-1}$ es de clase $C^r$.*

*Además, si $U$ es un entorno coordenado, tomando en $TU$ las coordenadas tangentes canónicas y en $T^*U$ las coordenadas cotangentes correspondientes, se tiene que*

$$\frac{\partial H}{\partial p}(x,p) = v$$
$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,p) = -\frac{\partial L}{\partial x}(x,v)$$

*donde $\mathcal{L}(x,v) = (x,p)$.*

Demostración. En el entorno coordenado $(TU, x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$ un vector velocidad $(x,v) \in TU$ cumple que $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. En $(T^*U, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ el entorno cotangente correspondiente, una 1-forma $(x,p) \in T^*U$ es de la forma $p = \sum_i p_i \, dx_i$.

Sea $(x, v) \in TU$, con estas coordenadas

$$\frac{\partial L}{\partial v}(x,v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i}(x,v)\, dx_i$$

y entonces $H\big(\mathcal{L}(x,v)\big)$ se escribe como

$$H\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) = \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)(v) - L(x,v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i}(x,v) v_i - L(x,v)\,.$$

Diferenciando según $v_j$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv_j} H\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x,v) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i\, \frac{\partial^2 L}{\partial v_i v_j}(x,v) + \frac{\partial L}{\partial v_j}(x,v) - \frac{\partial L}{\partial v_j}(x,v) \end{aligned}$$

y arribamos a la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x,v) = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x,v)\,. \tag{$\star$}$$

Ahora bien, como la transformada de Legendre es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces su diferencial es invertible. En las coordenadas que estamos usando es

$$d_{(x,v)}\mathcal{L} = \begin{pmatrix} Id_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial v \partial x}(x,v) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v) \end{pmatrix}$$

lo que implica que la matriz $\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x,v)\right)_{ij}$ es invertible para todo $(x,v) \in U$. Juntando esto último con la ecuación $(\star)$ concluímos que

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) = v_j \qquad \text{para todo } j = 1, \ldots, n.$$

Para probar la otra igualdad hacemos una derivación análoga pero diferenciando según $x_j$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_j} H\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) &= \frac{\partial H}{\partial x_j}\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) + \sum_{i=1}^{n} \overbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right)}^{v_i} \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial x_j}(x,v) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i\, \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial x_j}(x,v) - \frac{\partial L}{\partial x_j}(x,v) \end{aligned}$$

donde, haciendo uso de la parte anterior, hemos conseguimos probar que

$$\frac{\partial H}{\partial x_j}\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) = -\frac{\partial L}{\partial x_j}(x,v) \qquad \text{para todo } j = 1, \ldots, n\,.$$

Por último verificamos la regularidad de $H$. El lagrangiano $L$ es de clase $C^r$ con $r \geq 2$, con lo cual la transformada de Legendre $\mathcal{L}$ es de clase $C^{r-1}$. Tomando un punto $(x,v) \in TU$ entonces en $(x,p) = \mathcal{L}(x,v)$, por lo anterior tenemos que en coordenadas

$$\frac{\partial H}{\partial p}(x,p) = \pi_v\left(\mathcal{L}^{-1}(x,p)\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,p) = -\frac{\partial L}{\partial x}\left(\mathcal{L}^{-1}(x,p)\right)$$

donde la función $\pi_v : TU \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^\infty$, es la proyección que manda $(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$ en el vector $(v_1, \ldots, v_n)$ de componentes de la velocidad. Entonces, por ser composición de funciones $C^{r-1}$, las derivadas parciales de $H$ son $C^{r-1}$ y por lo tanto $H$ es de clase $C^r$. □

Pasamos a usar la transformada de Legendre para transportar el campo de Euler-Lagrange de $TM$ a $T^*M$.

**Teorema 2.3.12.** *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano $C^r$, con $r \geq 2$, y supongamos que su transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$, restricta a $TU$ (con $U \subset M$ abierto) es un difeomorfismo sobre su imagen (con lo cual $L$ es no degenerado en $U$).*

*Entonces la imagen en $\mathcal{L}(TU)$, del campo de Euler-Lagrange $X_L$ asociado a $L$, mediante $d\mathcal{L} : TTU \to TT^*U$, coincide con el campo hamiltoniano $X_H$ (dado por la forma simpléctica canónica en $T^*U$) del hamiltoniano $H : T^*U \to \mathbb{R}$ asociado a $L$.*

*Se tiene además que $X_L$ es de clase $C^{r-1}$, y en particular, aún cuando $r = 2$ el campo $X_L$ es únicamente integrable y define un flujo parcial $\phi_t^L : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ de clase $C^1$.*

Demostración. Fijando un punto $(x,v) \in TU$, tomamos $(x,p) = \left(x, \dfrac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) \in T^*U$ cumpliéndose que $\mathcal{L}(x,v) = (x,p)$.

Como vimos en el teorema 2.1.18, las soluciones (por un punto $(x,v) \in TU$) del campo de Euler-Lagrange $X_L : TU \to TTU$, son curvas de la forma $(\gamma, \dot\gamma) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TU$ con $\varepsilon > 0$, donde $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ es una curva extremal de $L$ cumpliendo que $\big(\gamma(0), \dot\gamma(0)\big) = (x,v)$. Con lo cual

$$\frac{d}{dt}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\bigg|_{t=0} = X_L(x,v)$$

Entonces la imagen por el diferencial de la transformada de Legendre de $X_L(x,v)$ es

$$d_{(x,v)}\mathcal{L}\big(X_L(x,v)\big) = \frac{d}{dt}\mathcal{L}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\gamma(t), \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\right)\Big|_{t=0}$$

Este es un resultado local, entonces lo expresamos en coordenadas tangentes en $TU$, donde $\gamma$ cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)$, y las coordenadas cotangentes correspondientes en $T^*U$. Entonces

$$d_{(x,v)}\mathcal{L}\big(X_L(x,v)\big) = \left(\dot\gamma(t), \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\right)\Big|_{t=0} = \left(v, \frac{\partial L}{\partial x}(x,v)\right).$$

Agregando a esto el resultado de la proposición anterior, obtenemos que

$$d_{(x,v)}\mathcal{L}\big(X_L(x,v)\big) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}(x,p),\ -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p)\right) \in T_{(x,p)}T^*U.$$

Falta comprobar que ese es el campo hamiltoniano $X_H$, definido como el gradiente simpléctico de $H$ en $(T^*U,\omega)$. Para ver eso, calculamos la contracción del campo por la forma simpléctica $\omega$ en coordenadas cotangentes

$$\begin{aligned}\omega_{(x,p)}\left(d_{(x,v)}\mathcal{L}\big(X_L(x,v)\big),\ \cdot\ \right) &= \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dp_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i}\,dx_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\,dp_i \ = \ d_{(x,p)}H(\,\cdot\,).\end{aligned}$$

Para concluir, sabemos por la proposición anterior que el hamiltoniano $H$ es de clase $C^r$, con lo cual el campo hamiltoniano y su flujo $\phi_t^H$ son de clase $C^{r-1}$. Por otro lado, el difeomorfismo $\mathcal{L}|_{TU}$ es de clase $C^{r-1}$ y como su diferencial manda el campo $X_L$ en $X_H$, entonces el flujo local de $X_L|_{TU}$ cumple que

$$\phi_t^L\ |_{TU} = \mathcal{L}^{-1}\circ\phi_t^H\circ\mathcal{L}\ |_{TU}$$

que es de clase $C^{r-1}$ porque es composición de funciones de esa clase de regularidad. □

Hacemos una última observación para cerrar este capítulo. Cuando el lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ es no degenerado de clase $C^r$, con $r \geq 2$, sabemos (proposición 2.1.1) que la transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to (T^*M,\omega)$ es un difeomorfismo local. Entonces podemos hacer el pullback de la forma simpléctica $\omega$, a una 2-forma no degenerada $\mathcal{L}^*\omega$ en $TM$. Para poder decir que es cerrada requerimos que $L$ sea por lo menos de clase $C^3$, y en ese caso $(TM,\mathcal{L}^*\omega)$ es una variedad simpléctica.

Con esto podemos interpretar el campo $X_L$ como el campo hamiltoniano asociado a la función

$\hat{H}$ en $(TM, \mathcal{L}^*\omega)$. De esta forma, el resultado de la invariancia de la función $\hat{H}$ mediante el flujo de $X_L$ (proposición 2.3.9) se desprende de la invariancia de una función en su flujo hamiltoniano, probada en la proposición 2.3.3.

Sin embargo, desde esa perspectiva no podemos obtener los mismos resultados de regularidad del flujo de Euler-Lagrange obtenidos en el teorema anterior. Esto es porque $\hat{H}$ es de clase $C^{r-1}$ cuando $H$ es de clase $C^r$ y el grado de regularidad que se gana al tomar un campo hamiltoniano (en comparación con un campo de Euler-Lagrange) se pierde al tomar la función $\hat{H}$.

# Capítulo 3

# Métrica de Jacobi-Maupertuis

Sea $(M, g)$ una variedad riemanniana de dimensión $n$. Dado un potencial $V : M \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty$, tomamos el lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ definido por

$$L(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - V(x)\,.$$

Su transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ definida como $\mathcal{L}(x, v) = \left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)\right)$ vale

$$\mathcal{L}(x, v) = \big(x, \langle\, v, \cdot\, \rangle_x\big)$$

con lo cual es un difeomorfismo de $TM$ sobre $T^*M$. Con esto definimos la función $\hat{H} : TM \to \mathbb{R}$ vista en 2.3.8 y dada por la expresión

$$\hat{H}(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)(v) - L(x, v)$$

es conservada por el flujo de Euler-Lagrange (por la proposición 2.3.9) cuyas soluciones son las velocidades de curvas extremales. En este caso la llamamos la energía $E : TM \to \mathbb{R}$ y está dada por la expresión

$$E(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + V(x)\,.$$

Su hamiltoniano $H : T^*M \to \mathbb{R}$ definido como $H = \hat{H} \circ \mathcal{L}^{-1}$ se escribe como

$$H(x, p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + V(x)$$

donde $\|\, p\,\|$ es la norma dual en el fibrado contangente, es decir, $\|\, p\,\| = \|\, v\,\|$ donde $v \in T_xM$ es el único vector tal que $p(u) = \langle\, v, u\,\rangle$ para todo $u \in T_xM$.

*Observación.* Este tipo de Lagrangiano es simétrico en las fibras, para todo $(x, v) \in TM$ se cumple que $L(x, v) = L(x, -v)$. Esto implica que si una curva $\gamma : [a, b] \to M$ es extremal entonces la curva $-\gamma : [-b, -a] \to M$, dada por $-\gamma(t) = \gamma(-t)$ también es extremal.

## 3.1 Construcción de la métrica de Jacobi-Maupertuis

Dada una curva diferenciable $\gamma : [a, b] \to M$ tenemos que la acción del lagrangiano es

$$\mathbb{A}_L(\gamma) = \int_a^b L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\, dt = \int_a^b \frac{1}{2} \parallel \dot{\gamma}(t) \parallel^2 - V\big(\gamma(t)\big)\, dt\,.$$

Dado un $h \in \mathbb{R}$, la acción del lagrangiano $L + h$ en $\gamma$ vale

$$\mathbb{A}_{L+h}(\gamma) = \int_a^b L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) + h\, dt = \int_a^b \frac{1}{2} \parallel \dot{\gamma}(t) \parallel^2 + h - V\big(\gamma(t)\big)\, dt\,.$$

Queremos usar la siguiente propiedad elemental: si $A$ y $B$ son dos números reales, se cumple que $(A - B)^2 \geq 0$ y esto implica que $A^2 + B^2 \geq 2AB$, con igualdad sí y solo sí $A = B$. Para usar esto suponemos que $h - V\big(\gamma(t)\big) \geq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Tomando

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \parallel \dot{\gamma}(t) \parallel \qquad \text{y} \qquad B(t) = \big[\, h - V\big(\gamma(t)\big)\big]^{\frac{1}{2}}$$

para cada $t \in [a, b]$. Obtenemos la desigualdad

$$A(t)^2 + B(t)^2 = \frac{1}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 + h - V\big(\gamma(t)\big) \quad \geq \quad \big[2h - 2\,V\big(\gamma(t)\big)\big]^{\frac{1}{2}} \parallel \dot{\gamma}(t) \parallel = 2A(t)B(t)$$

integrando en $[a, b]$ se mantiene la desigualdad

$$\mathbb{A}_{L+h}(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 + h - V\big(\gamma(t)\big)\, dt \;\geq\; \int_a^b \big[2h - 2\,V\big(\gamma(t)\big)\big]^{\frac{1}{2}} \parallel \dot{\gamma}(t) \parallel\, dt \qquad (1)$$

dándose la igualdad sí y solo sí

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \big[2h - 2\,V\big(\gamma(t)\big)\big]^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, t \in [a, b].$$

El lado derecho de la ecuación (1) nos sugiere tomar una nueva métrica riemanniana que haga que esa integral sea la longitud de la curva $\gamma$. Para eso tenemos que restringirnos al subconjunto $V_h = \{x \in M \mid h - V(x) > 0\}$ el cual es un abierto de $M$ porque la función $V$ es continua.

**Definición 3.1.1** (Métrica de Jacobi)**.** *Sea $(M, g)$ una variedad riemanniana y $V : M \to \mathbb{R}$*

*una función diferenciable. Dado un $h \in \mathbb{R}$, en el abierto $V_h = \{x \in M \mid h > V(x)\}$ se define una nueva métrica riemanniana $g_J$, conforme a $g$, dada por*

$$g_J = 2(h - V) \cdot g$$

*llamada la* métrica de Jacobi *con energía $h$. Es decir, para todo $x \in V_h$ y todo par de vectores $(u, v) \in T_xM$, se tiene que*

$$\langle\, u, v \,\rangle_{g_J} = 2\big(h - V(x)\big)\, \langle\, u, v \,\rangle_g \, .$$

En lo que sigue fijamos una energía $h > \min_{x \in M} \{V(x)\}$ y tomamos la métrica $g_J$ asociada en $V_h \neq \emptyset$.

Llamamos $\ell_J(\gamma)$ a la longitud de una curva $\gamma : [a, b] \to V_h$ en esta nueva métrica, donde

$$\ell_J(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_{g_J}\, dt = \int_a^b \big[2h - 2\, V\big(\gamma(t)\big)\big]^{\frac{1}{2}} \, \|\, \dot\gamma(t) \,\|_g \, dt \, . \tag{2}$$

Resumimos en la siguiente proposición lo que obtuvimos mediante esta construcción.

**Proposición 3.1.2.** *Sea $\gamma : [a, b] \to V_h$ una curva diferenciable, entonces*

$$\mathbb{A}_{L+h}(\gamma) \geq \ell_J(\gamma).$$

*Donde la igualdad se cumple sí y solo sí la curva $(\gamma, \dot\gamma) \in TV_h$ tiene energía constante $h$, es decir, si*

$$E\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) = h \qquad \textit{para todo } t \in [a, b].$$

Demostración. Que $\mathbb{A}_{L+h}(\gamma) \geq \ell_J(\gamma)$ proviene de las ecuaciones (1) y (2) que también implican que la igualdad se da sí y solo sí

$$\|\, \dot\gamma(t) \,\| = \big[2h - 2\, V\big(\gamma(t)\big)\big]^{\frac{1}{2}}$$

para todo $t \in [a, b]$, lo cual equivale a que la energía de la curva velocidad sea

$$E\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) = \frac{1}{2}\, \|\, \dot\gamma(t) \,\|^2 + V\big(\gamma(t)\big) = h \qquad \text{para todo } t \in [a, b].$$

□

## 3.2 Reparametrizaciones a un nivel de energía dado

Como el caso de que una curva tenga energía constante es importante, vemos que siempre se puede reparametrizar una curva para lograrlo.

**Proposición 3.2.1.** *Sea $L(x,v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - V(x)$ un lagrangiano en $(M,g)$, con $V : M \to \mathbb{R}$ un mapa diferenciable. Sean $h \in \mathbb{R}$ y una curva $\gamma : [a,b] \to V_h = \{x \in M \mid h - V(x) > 0\}$ de clase $C^1$, tal que $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$. Entonces existe una reparametrización $\tilde{\gamma} : [0,T] \to V_h$ tal que su curva velocidad tiene energía constante e igual a $h$.*

Demostración. Vamos a ver que existe $\phi : [0,T] \to [a,b]$ un difeomorfismo de clase $C^1$ con $\dot{\phi}(t) > 0$ para todo $t \in [0,T]$, tal que la curva $\tilde{\gamma} : [0,T] \to V_h$ dada por $\tilde{\gamma}(t) = \gamma\big(\phi(t)\big)$ cumple que su velocidad tiene energía constante $h$.

En primer lugar calculamos la derivada de $\tilde{\gamma}(t) = \gamma\big(\phi(t)\big)$:

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\phi}(t)\,\dot{\gamma}\big(\phi(t)\big).$$

Igualando la energía de $\big(\tilde{\gamma}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t)\big)$ a $h$, obtenemos que debe cumplirse la igualdad

$$E\left(\tilde{\gamma}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t)\right) = \frac{1}{2}\dot{\phi}(t)^2 \,\left\|\, \dot{\gamma}\big(\phi(t)\big) \,\right\|^2 + V\big(\gamma\big(\phi(t)\big)\big) = h \qquad \text{para todo } t \in [0,T].$$

Como $h - V\big(\gamma\big(\phi(t)\big)\big) > 0$ para todo $t \in [0,T]$, separamos variables de la siguiente manera

$$\frac{\dot{\phi}(t)^2 \,\left\|\, \dot{\gamma}\big(\phi(t)\big) \,\right\|^2}{2h - 2\,V\big(\gamma\big(\phi(t)\big)\big)]} = 1$$

y como queremos que $\dot{\phi}(t) > 0$ tomamos la raíz positiva

$$\frac{\dot{\phi}(t)\,\left\|\, \dot{\gamma}\big(\phi(t)\big) \,\right\|}{\big[2h - 2\,V\big(\gamma\big(\phi(t)\big)\big)\big]^{\frac{1}{2}}} = 1\,.$$

Luego integramos ambos lados entre 0 y $t$

$$\int_0^t \frac{\dot{\phi}(s)\,\left\|\, \dot{\gamma}\big(\phi(s)\big) \,\right\|}{\big[2h - 2\,V\big(\gamma\big(\phi(t)\big)\big)\big]^{\frac{1}{2}}}\, ds = t\,.$$

Haciendo el cambio de variables $u = \phi(s)$ obtenemos

$$\int_a^{\phi(t)} \frac{\| \dot{\gamma}(u) \|}{\big[2h - 2\,V\big(\gamma(u)\big)\big]^{\frac{1}{2}}}\, du = t\,.$$

Como estamos suponiendo que $h - V\big(\gamma\big(\phi(t)\big)\big) > 0$ y $\dot{\gamma}(t)$ es continua y no nula para todo $t \in [0, T]$, entonces la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(u) = \frac{\| \dot{\gamma}(u) \|}{\big[2h - 2\,V\big(\gamma(u)\big)\big]^{\frac{1}{2}}}$$

es continua y positiva. Tomamos $F$ una primitiva de $f$ en $[a, b]$ tal que $F(a) = 0$ y definimos el valor $T = F(b)$. Por lo anterior sabemos que $F$ es de clase $C^1$ y que tiene derivada positiva en todo el intervalo, por lo tanto es invertible. Con esto vemos que

$$t = \int_a^{\phi(t)} \frac{\| \dot{\gamma}(u) \|}{\big[2\big(\,h - V\big(\gamma(u)\big)\,\big)\big]^{\frac{1}{2}}}\, du = F\big(\phi(t)\big) - F(a) = F\big(\phi(t)\big).$$

Concluímos que definiendo $\phi : [0, T] \to [a, b]$ como

$$\phi(t) = F^{-1}\big(t\big)$$

cumple que $\dot{\phi}(t) > 0$ para todo $t \in [0, T]$ y la curva $\tilde{\gamma}(t) = \gamma\big(\phi(t)\big)$ es una reparametrización de $\gamma$ tal que su curva velocidad $(\tilde{\gamma}, \dot{\tilde{\gamma}})$ tiene energía constante

$$E\left(\tilde{\gamma}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t)\right) = h \qquad \text{para todo } t \in [0, T].$$

□

## 3.3 Geodésicas minimizantes de la métrica de Jacobi

### 3.3.1 Curvas absolutamente continuas y minimizantes a tiempo libre

Vamos a relacionar las geodésicas de la métrica de Jacobi con las curvas minimizantes a tiempo libre de la acción $L + h$. Para eso, primero algunas definiciones.

**Definición 3.3.1** (Curvas absolutamente continuas)**.** *Sea una curva $\gamma : [a, b] \to (M, d)$ un espacio métrico. Decimos que $\gamma$ es absolutamente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$*

*tal que para cualquier familia* $(a_i, b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de intervalos disjuntos de* $[a,b]$ *tales que*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i - a_i < \delta$$

*se cumple que*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} d\big(\gamma(b_i), \gamma(a_i)\big) < \varepsilon.$$

Es claro que las curvas absolutamente continuas son uniformemente continuas. Son usadas para probar la existencia de curvas extremales minimizantes de la acción de $L$ para un tipo especial de lagrangiano: de clase $C^2$, estrictamente convexo en las fibras, y superlineal sobre compactos de $M$. A este tipo de lagrangianos se los llama *lagrangianos de Tonelli.*

El siguiente teorema sin demostración (consultar [BGH98, Teorema 2.17]) muestra por qué las curvas absolutamente sirven como conjunto sobre el cual tomar la acción del lagrangiano.

**Teorema 3.3.2.** *Una curva* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *es absolutamente continua sí y solo sí se cumplen las siguientes condiciones:*

*i)* *La derivada* $\dot\gamma(t)$ *existe en casi todo punto de* $[a,b]$.

*ii)* *La derivada* $\dot\gamma$ *es integrable Lebesgue en* $[a,b]$.

*iii)* *Para cada* $t \in [a,b]$ *se tiene que* $\gamma(t) - \gamma(a) = \int_a^t \dot\gamma(s)\, ds$.

**Definición 3.3.3.** *Sean* $x, y \in M$ *dos puntos cualquiera y* $\tau > 0$ *un tiempo positivo. Al conjunto de curvas absolutamente continuas que unen* $x$ *e* $y$ *en tiempo* $\tau$*, lo llamamos*

$$\mathcal{C}(x,y,\tau) = \{\gamma : [a,b] \to M \text{ absolutamente continua } \mid \gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y,\ b - a = \tau\}.$$

*También llamamos*

$$\mathcal{C}(x,y) = \bigcup_{\tau>0} \mathcal{C}(x,y,\tau)$$

*al conjunto de curvas absolutamente continuas que unen dos elementos de* $M$ *sin restricción en el intervalo de tiempo en que están definidas.*

Volviendo al caso de una variedad riemanniana $M$ y un lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$, en la búsqueda de mínimos de la acción se definen las siguientes funciones.

**Definición 3.3.4.** *Sea la función* $\phi : M \times M \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\phi(x,y,\tau) = \inf\{\mathbb{A}_L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}(x,y,\tau)\}$$

*junto con* $\phi : M \times M \to \mathbb{R}$ *(abusando de la notación cuando el tiempo* $\tau$ *no importa)*

$$\phi(x,y) = \inf_{\tau>0} \phi(x,y,\tau) = \inf\{\mathbb{A}_L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}(x,y)\}$$

*el llamado* potencial crítico de Mañé *o también llamado* potencial de acción crítica.

Con esta notación vemos que una curva $\gamma : [0,\tau] \to M$ minimiza la acción si

$$\mathbb{A}_L(\gamma) = \phi\big(\gamma(0), \gamma(\tau), \tau\big).$$

Donde se está minimizando entre las curvas definidas en el mismo tiempo que $\gamma$. Para minimizar independientemente del tiempo tenemos la siguiente definición.

**Definición 3.3.5** (Minimizante a tiempo libre)**.** *Una curva absolutamente continua* $\gamma : J \to M$ *definida en un intervalo* $J \subset \mathbb{R}$ *es* minimizante a tiempo libre *si*

$$\mathbb{A}_L\left(\gamma|_{[a,b]}\right) = \phi\big(\gamma(a), \gamma(b)\big)$$

*para todo subintervalo compacto* $[a,b] \subset J$.

### 3.3.2 Propiedades de las minimizantes a tiempo libre en la métrica de Jacobi

Suponiendo la existencia de minimizantes a tiempo libre (que aclararemos en el siguiente capítulo) vemos que rol juegan en la variedad $(V_h, g_J)$ correspondiente al nivel de energía $h$ del lagrangiano $L$ con la métrica de Jacobi $g_J$.

Empezamos con un lema que nos será de mucha utilidad en lo que sigue.

**Lema 3.3.6.** *Si* $\gamma : [0,T] \to V_h$ *es una curva diferenciable, minimizante a tiempo libre de* $\mathbb{A}_{L+h}$ *para algún* $h \in \mathbb{R}$*, entonces es extremal de* $L$ *y* $E\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) = h$ *para todo* $t \in [0,T]$.

Demostración. Tomamos primero curvas $\sigma \in \mathcal{C}\big(\gamma(0), \gamma(T), T\big)$ definidas en el mismo tiempo que $\gamma$. Como

$$\mathbb{A}_{L+h}(\sigma) = \int_0^T L\big(\sigma(t), \dot\sigma(t)\big) + h\, dt = A_L(\sigma) + hT\,.$$

Tenemos que en este caso la desigualdad $\mathbb{A}_{L+h}(\sigma) \geq \mathbb{A}_{L+h}(\gamma)$ equivale a que

$$\mathbb{A}_L(\sigma) + hT \geq \mathbb{A}_L(\gamma) + hT$$

que implica la minimización de $\mathbb{A}_L$ de la curva $\gamma$ en su tiempo $T$.

$$\mathbb{A}_L(\sigma) \geq \mathbb{A}_L(\gamma) \quad \text{para toda curva } \sigma \in \mathcal{C}\big(\gamma(0), \gamma(T), T\big).$$

Al ser $\gamma$ una minimizante de la acción de $L$ entonces, por el corolario 2.1.13, es una extremal. A su vez, por ser extremal sabemos que la curva $(\gamma, \dot{\gamma})$ tiene energía constante, lo cual fue probado en la proposición 2.3.9.

Ahora bien, resta ver que la energía de $(\gamma, \dot{\gamma})$ es efectivamente $h$. Por la proposición 3.1.2 sabemos que

$$\mathbb{A}_{L+h}(\gamma) \geq \ell_J(\gamma)$$

con igualdad sí y solo sí $(\gamma, \dot{\gamma})$ está en el nivel de energía $h$ del lagrangiano. Hacemos el argumento por absurdo: suponemos que $(\gamma, \dot{\gamma})$ no está en el nivel de energía $h$, con lo cual $\mathbb{A}_{L+h}(\gamma) > \ell_J(\gamma)$. Acorde a lo hecho en la proposición 3.2.1 reparametrizamos $\gamma$ a una curva $\tilde{\gamma}$ con los mismos extremos que $\gamma$ y con acción igual a su longitud en la métrica de Jacobi

$$\mathbb{A}_{L+h}(\tilde{\gamma}) = \ell_J(\tilde{\gamma}).$$

Pero como reparametrizar una curva no altera su longitud, esto implica que

$$\ell_J(\gamma) = \ell_J(\tilde{\gamma}) = \mathbb{A}_{L+h}(\tilde{\gamma}) < \mathbb{A}_{L+h}(\gamma)$$

contradiciendo que $\gamma$ sea minimizante a tiempo libre. □

El siguiente teorema muestra la relación que hay entre las geodésicas minimizantes de la métrica de Jacobi y las extremales de $L$.

**Teorema 3.3.7.** *Sea $(M, g)$ una variedad riemanniana y sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de la forma $L(x, v) : \dfrac{1}{2} \| v \|^2 - V(x)$ con $V : M \to \mathbb{R}$ un mapa diferenciable. Dado un $h \in \mathbb{R}$, sea $V_h = \{x \in M \mid h - V(x) > 0\}$ abierto de $M$.*

(a) *Si $\gamma : [a, b] \to V_h$ es una geodésica minimizante de la métrica de Jacobi y se reparametriza a una curva $\tilde{\gamma} : [0, T] \to V_h$ con energía $h$ constante, entonces $\tilde{\gamma}$ es una minimizante a tiempo libre de $\mathbb{A}_{L+h}$.*

(b) *Sea $\gamma : [0, T] \to M$ una curva minimizante de $\mathbb{A}_L$ con energia $E\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) = h$ constante. Si es minimizante a tiempo libre de $\mathbb{A}_{L+h}$, entonces $\gamma$ admite una reparametrización $\tilde{\gamma}$, a una geodésica minimizante de la métrica de Jacobi.*

DEMOSTRACIÓN. ($a$) Sea una curva $\sigma \in \mathcal{C}\big(\gamma(a), \gamma(b)\big)$, sabemos por la proposición 3.1.2 que

$$\mathbb{A}_{L+h}(\sigma) \geq \ell_J(\sigma).$$

Como estamos suponiendo que $\gamma$ es geodésica minimizante de $g_J$ y tiene los mismos extremos que $\sigma$, entonces sus longitudes cumplen que

$$\ell_J(\sigma) \geq \ell_J(\gamma).$$

Ahora, como $\ell_J(\tilde{\gamma}) = \ell_J(\gamma)$ (porque una reparametrización no cambia la longitud) y como $(\tilde{\gamma}, \dot{\tilde{\gamma}})$ está en el nivel de energía $h$ entonces, por la proposición 3.1.2, se cumple que

$$\ell_J(\tilde{\gamma}) = \mathbb{A}_{L+h}(\tilde{\gamma}).$$

Juntando estas desigualdades obtenemos que

$$\mathbb{A}_{L+h}(\sigma) \geq \ell_J(\sigma) \geq \ell_J(\gamma) = \ell_J(\tilde{\gamma}) = \mathbb{A}_{L+h}(\tilde{\gamma})\,.$$

Y como $\sigma$ es una curva arbitraria con los mismos extremos que $\gamma$, entonces $\tilde{\gamma} : [0, T] \to M$ (la reparametrización a energía $h$ de una geodésica minimizante de $g_J$) es minimizante a tiempo libre de $\mathbb{A}_{L+h}$.

(b) Para ver la prueba del recíproco primero recordamos que si $\gamma : [0, T] \to M$ es una minimizante a tiempo libre de $\mathbb{A}_{L+h}$ entonces, por el lema 3.3.6, su velocidad tiene energía constante $h$ y eso implica, por la proposición 3.1.2, que $\mathbb{A}_{L+h}(\gamma) = \ell_J(\gamma)$.

Sea $\sigma \in \mathcal{C}\big(\gamma(0), \gamma(T)\big)$ una curva diferenciable arbitraria con los mismos extremos que $\gamma$. Sea $\tilde{\sigma} : [0, T'] \to V_h$ su reparametrización a energía $h$, nuevamente por la proposición 3.1.2 tenemos que $\ell_J(\sigma) = \ell_J(\tilde{\sigma}) = \mathbb{A}_{L+h}(\tilde{\sigma})$.

Comparando las longitudes de $\sigma$ y $\gamma$, dos curvas en $V_h$ con los mismos extremos, vemos que

$$\begin{aligned} & \ell_J(\sigma) = \ell_J(\tilde{\sigma}) = \mathbb{A}_{L+h}(\tilde{\sigma}) \geq \mathbb{A}_{L+h}(\gamma) = \ell_J(\gamma) \\ \Longrightarrow \quad & \ell_J(\sigma) \geq \ell_J(\gamma) \quad \text{ para toda curva } \sigma \in \mathcal{C}\big(\gamma(0), \gamma(T)\big). \end{aligned}$$

Entonces la curva $\gamma : [0, T] \to V_h$, minimizante a tiempo libre de $\mathbb{A}_{L+h}$, minimiza la distancia entre sus extremos en la métrica de Jacobi. Más aún, como $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ es minimizante a tiempo libre para cualquier subintervalo $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ esto implica que $\gamma$ minimiza la distancia entre cualquier par de puntos de su imagen, lo que significa que se puede reparametrizar a una geodésica minimizante de la métrica de Jacobi. $\square$

## 3.4 Rayos geodésicos

Los rayos geodésicos son análogos riemannianos de semi-rectas y no son compatibles con variedades compactas. En esta sección vemos sus características básicas para luego usarlas en la construcción de las funciones de Busemann.

**Definición 3.4.1.** (a) *Una geodésica* $\gamma : I \to (M, g)$ *donde* $I \subset \mathbb{R}$ *es un intervalo abierto, es una* geodésica minimizante *si para todo subintervalo compacto* $[a, b] \subset I$ *la restricción* $\gamma|_{[a,b]}$ *minimiza la distancia entre* $\gamma(a)$ *y* $\gamma(b)$.

(b) *Llamamos* rayo geodésico *a una geodésica minimizante no constante* $\gamma : [0, +\infty) \to (M, g)$ *parametrizada por su longitud de arco.*

Los rayos cumplen que la distancia entre cualquier par de puntos de su imagen es

$$d\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big) = \ell\big(\gamma|_{[t_1,t_2]}\big) = t_2 - t_1 \qquad \text{con } 0 \leq t_1 < t_2.$$

La siguiente proposición muestra que la compacidad no es compatible con la existencia de rayos.

**Proposición 3.4.2.** *Sea* $(M, g)$ *una variedad riemanniana completa. Son equivalentes:*

(a) $M$ *es compacta.*

(b) $M$ *no admite rayos geodésicos.*

Demostración. [(a) $\implies$ (b)] Dado un punto cualquiera $x_0 \in M$, la función distancia a ese punto $d_{x_0} : M \to \mathbb{R}$ es continua. Por ser $M$ compacto entonces la función $d_{x_0}$ tiene máximo, esto implica que toda geodésica minimizante, parametrizada por longitud de arco, que parta de $x_0$ tiene longitud finita menor o igual a ese máximo, por lo tanto no puede ser un rayo, los cuales tienen longitud infinita.

[(b) $\implies$ (a)] Probaremos que si la variedad $(M, g)$ no es compacta entonces admite rayos geodésicos. El teorema de Hopf-Rinow (ver por ejemplo [doCar79, p. 120]) nos dice que por ser completa y no compacta, existe una sucesión de puntos $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que para cualquier $p \in M$

$$\lim_{n\to+\infty} d(q_n, p) = +\infty.$$

Este teorema también dice que existen geodésicas minimizantes entre cualquier par de puntos de la variedad $(M, g)$.

Fijamos un $p \in M$ y una sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergente como arriba. Tomamos una sucesión $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de geodésicas minimizantes $\gamma_n : [0, d(q_n, p)] \to M$ parametrizadas por longitud de arco, que unen $p$ con $q_n$. Estas curvas se pueden representar por el mapa exponencial en $p$ como

$$\gamma_n(t) = \exp_p(t\, v_n) \quad \text{con } t \in [0, d(q_n, p)]$$

donde los vectores $v_n = \dot{\gamma}_n(0) \in T_pM$ tienen norma unitaria, y entonces, como están en una esfera en $T_pM$, podemos extraer una subsucesión convergente de vectores unitarios $\{v_{n_k}\}$ tal que

$$\lim_{n_k \to +\infty} v_{n_k} = v_\infty \in T_pM \quad \text{y} \quad \| v_\infty \| = 1.$$

Sin perder generalidad asumimos que la sucesión original $v_n \to v_\infty$.

Sea $\gamma_\infty : [0, +\infty) \to M$ la geodésica que parte de $p$ con velocidad $v_\infty$, dada por

$$\gamma_\infty(t) = \exp_p(t\, v_\infty) \quad \text{con } t \in [0, +\infty).$$

Queremos ver que esta geodésica es un rayo, para eso probamos que minimiza la distancia entre $p = \gamma_\infty(0)$ y cualquier punto intermedio $\gamma_\infty(t)$ con $t \in (0, +\infty)$.

Como las geodésicas $\gamma_n$ tienen longitud $d(q_n, p) \to +\infty$, entonces para cualquier $t > 0$ existe un $K > 0$ tal que las curvas $\gamma_n$ están definidas en ese tiempo $t$ para todo $n > K$. A su vez, como el mapa exponencial es continuo, se cumple que para $n > K$

$$\lim_{n \to +\infty} \gamma_n(t) = \lim_{n \to +\infty} \exp_p(t\, v_n) = \exp_p(t\, v_\infty) = \gamma_\infty(t).$$

El mapa $d_p : M \to \mathbb{R}$ (de la distancia al punto $p$) también es continuo y como $d_p\big(\gamma_n(t)\big) = t$ (donde se precisa que $n > K$) entonces se tiene que

$$d_p\big(\gamma_\infty(t)\big) = \lim_{n \to +\infty} d_p\big(\gamma_n(t)\big) = t = \ell\big(\gamma_\infty |_{[0,t]}\big)$$

por ende $\gamma_\infty$ minimiza la distancia entre sus puntos, y como es una geodésica definida en un intervalo no acotado, concluímos que es un rayo geodésico. $\square$

## 3.5 Funciones de Busemann

En esta sección presentamos las funciones desarrolladas por Herbert Busemann a mediados del siglo XX. Él se interesó en ver que propiedades de la geometría riemanniana se podían generalizar a espacios sin una estructura diferencial, espacios en los cuales tenía una forma de medir longitudes de curvas, y utilizó como noción de geodésica, a las curvas que realizan la distancia entre sus extremos.

Para dar un ejemplo de como se manejaba sin conceptos diferenciables, definió que un espacio sea de curvatura negativa si, en los triángulo geodésicos (donde cada lado es una curva que minimiza la distancia) la longitud de cada paralela media es menor a la mitad de la longitud del lado paralelo.

Para un tratamiento más profundo del tema sugerimos la lectura de [Pap05], [Gro07] y [Bus05].

En esta sección primero miramos un caso más general en espacios métricos arbitrarios, para luego enfocarnos en el caso de $(M, g)$ una variedad riemanniana con su distancia asociada.

### 3.5.1 Construcción general en un espacio métrico

Sea $(M, d)$ un espacio métrico. Dado un punto $x \in M$, se define la función distancia al punto

$$\begin{aligned} d_x : M &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto d(y, x) \end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular, dados dos puntos $y, z \in M$, se cumple que $d_x(y) - d_x(z) \leq d(y, z)$ e intercambiando $y$ con $z$ obtenemos que

$$|\, d_x(y) - d_x(z) \,| \leq d(y, z). \tag{$\circledast$}$$

Esto implica que la función $d_x$ es continua y 1-lipschitz para todo $x \in M$. Definimos el mapa $B$ que a cada punto de $M$ le asocia la función distancia a ese punto

$$\begin{aligned} B : M &\to C(M, \mathbb{R}) \\ x &\mapsto d_x \end{aligned}$$

En el espacio $C(M, \mathbb{R})$ de funciones continuas de $M$ a $\mathbb{R}$ tomamos la topología de convergencia uniforme en compactos: dado un compacto $K \subset M$, la métrica del supremo en él es la función $d_\infty^K : C(K, \mathbb{R}) \times C(K, \mathbb{R}) \to [0, +\infty)$ que a cada par de funciones $f, g \in C(K, \mathbb{R})$ asocia el valor

$$d_\infty^K(f, g) = \sup_{x \in K} |\, f(x) - g(x) \,| < +\infty.$$

Una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones de $M$ en $\mathbb{R}$, converge uniformemente en compactos a una función $f$ si

$$\lim_{n \to \infty} d_\infty^K(f_n, f) = 0$$

para todo $K \subset M$ compacto. Como la convergencia uniforme preserva la continuidad, si las funciones $f_n$ son continuas para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la función límite $f$ también lo será.

Ahora, fijemos un punto cualquiera $x_0 \in (M, d)$ y para cada $x \in M$ consideremos la función $B_x : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$B_x(z) = d_x(z) - d_x(x_0).$$

Observar que para todo $x \in M$ se cumple que

(a) $B_x \in C(M, \mathbb{R})$. (b) $B_x(x_0) = 0$. (c) $B_x$ es 1-lipschitz.

El hecho que todas las $B_x$ sean lipschitz con la misma constante implica que la familia de funciones $\{B_x\}_{x \in M}$ es equicontinua. Esto nos remite a una versión del teorema de Ascoli-Arzelà para espacios regulares y localmente compactos extraída de [Kel75, p. 233].

**Teorema 3.5.1** (Ascoli-Arzelà)**.** *Sea $M$ un espacio topológico regular y localmente compacto. Sea $Y$ un espacio métrico y sea una familia de funciones $\mathcal{F} \subset C(M, Y)$. Entonces el conjunto $\mathcal{F}$ tiene clausura compacta con la topología de convergencia uniforme en compactos sí y solo sí*

1. *La familia $\mathcal{F}$ es equicontinua.*

2. *Las imágenes $\mathcal{F}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ tienen clausura compacta para todo $x \in M$.*

Para aplicar el teorema resta ver que el conjunto $\{B_x(z)\}_{x \in M}$ es acotado en $\mathbb{R}$ para todo $z \in M$:

$$|\, B_x(z)\,| = |\, d(x, z) - d(x, x_0)\,| \leq d(z, x_0) \quad \text{para todo } x \in M$$

por la desigualdad ($\circledast$) y entonces vale el teorema de Ascoli-Arzelà. Ahora bien, usando la compacidad secuencial del conjunto $\{B_x\}_{x \in M}$ extraemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.5.2.** *Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $(M, d)$ y $x_0 \in (M, d)$ un punto cualquiera, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}}$ tal que las funciones*

$$B_{x_{n_k}} = d_{x_{n_k}} - \ d_{x_{n_k}}(x_0)$$

*convergen uniformemente en compactos a una función $b_\infty \in C(M, \mathbb{R})$.*

A una tal función $b_\infty$ definida como en el corolario anterior, la llamamos *función de Busemann* asociada a la sucesión $\{x_{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Notar que a partir de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en principio pueden haber varias subsucesiones con funciones de Busemann distintas.

### 3.5.2 Caso riemanniano

Consideramos una variedad riemanniana $(M, g)$ no compacta, con su distancia riemanniana $d$. Sea $\gamma : [0, +\infty) \to M$ un rayo geodésico parametrizado por longitud de arco, esta geodésica minimiza la distancia riemanniana entre cualquier par de puntos de su imagen, y se tiene que

$$d\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big) = \ell\left(\gamma|_{[t_1,t_2]}\right) = t_2 - t_1 \text{ para todo par de tiempos } t_2 \geq t_1 \geq 0\,.$$

Llamamos $x_0 = \gamma(0)$ al origen del rayo, entonces se cumple que la distancia de cualquier punto intermedio $\gamma(t)$ a $x_0$ vale

$$d\big(\gamma(t), x_0\big) = \ell\left(\gamma|_{[0,t]}\right) = t\,.$$

Tomando a $x_0 = \gamma(0)$ como punto fijo y (acorde a como hicimos en la sección anterior) definiendo la familia de funciones $\big\{B_{\gamma(t)} \mid t \in [0, +\infty)\big\} \subset C(M, \mathbb{R})$ dadas en cada $z \in M$ por la expresión

$$B_{\gamma(t)}(z) = d\big(\gamma(t), z\big) - d\big(\gamma(t), x_0\big) = d\big(\gamma(t), z\big) - t.$$

Veamos como se comporta la familia $\big\{B_{\gamma(t)}\big\}_{t\geq 0}$ en un punto cualquiera $z \in M$. Sean dos tiempos positivos $t_2 > t_1 > 0$, por la desigualdad triangular se cumple que

$$\begin{aligned} d\big(\gamma(t_2), z\big) - d\big(\gamma(t_1), z\big) &\leq \overbrace{d\big(\gamma(t_2), \gamma(t_1)\big)}^{t_2 - t_1} \\ d\big(\gamma(t_2), z\big) - t_2 &\leq d\big(\gamma(t_1), z\big) - t_1 \\ B_{\gamma(t_2)}(z) &\leq B_{\gamma(t_1)}(z). \end{aligned}$$

Entonces, si se fija el $z$, la función del tiempo

$$\begin{gathered} B_{\gamma(\cdot)}(z) : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \\ t \mapsto d\big(\gamma(t), z\big) - t \end{gathered}$$

es monótona decreciente. Como además para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\big|\, B_{\gamma(t)}(z) \,\big| = \big|\, d\big(\gamma(t), z\big) - t \,\big| = \big|\, d\big(\gamma(t), z\big) - d\big(\gamma(t), x_0\big) \,\big| \leq d(z, x_0)$$

entonces para todo $z \in M$ existe y es finito el límite

$$\lim_{t\to+\infty} B_{\gamma(t)}(z) = \lim_{t\to+\infty} d\big(\gamma(t), z\big) - t.$$

Por lo visto en la sección anterior podemos decir algo más sobre la convergencia de estas funciones.

**Teorema 3.5.3.** *Sea $(M,g)$ una variedad riemanniana completa no compacta, y sea un rayo geodésico $\gamma : [0,+\infty) \to M$. Entonces las funciones $\{B_{\gamma(t)} \mid t \in [0,+\infty)\} \subset C(M,\mathbb{R})$*

$$B_{\gamma(t)}(z) = d_{\gamma(t)}(z) - t$$

*convergen uniformemente en compactos, cuando $t$ tiende a infinito, a la función continua*

$$\begin{aligned} b_\gamma &: M \to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \lim_{t\to+\infty} \left[d\big(\gamma(t), z\big) - t\right]. \end{aligned}$$

Demostración. Ya vimos que para todo $z \in M$ existe y es finito el límite

$$\lim_{t\to+\infty} B_{\gamma(t)}(z) = b_\gamma(z).$$

Sea $\{t_n\}_{n\in N}$ una sucesión divergente de tiempos positivos, aplicando el corolario 3.5.2 (con el punto fijo $x_0 = \gamma(0)$ y la sucesión divergente de puntos $\{\gamma(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$) se obtiene que las funciones $B_{\gamma(t_n)} \in C(M,\mathbb{R})$ convergen uniformemente en compactos a $b_\gamma$ (que por lo tanto es continua). Como esto se cumple para cualquier sucesión $t_n \to +\infty$ hemos probado el teorema. $\square$

A las funciones $b_\gamma$ las llamamos funciones de Busemann asociadas al rayo geodésico $\gamma$. En el corolario 3.5.2 vimos que solo precisamos de una sucesión $\{x_n\} \subset M$ para obtener funciones de Busemann, en el siguiente lema vemos como (en el caso riemanniano) se puede vincular una sucesión divergente con un rayo geodésico con la misma función de Busemann asociada.

**Lema 3.5.4.** *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (M,g)$ una sucesión y $x_0 \in (M,g)$ un punto arbitrario, entonces:*

(a) *Si $\lim_n d(x_n,x_0) = +\infty$ entonces para toda función de Busemann $b_\infty : M \to \mathbb{R}$ asociada a la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con origen en $x_0$, existe un rayo geodésico $\gamma : [0,+\infty) \to M$ que parte de $x_0$, tal que $b_\gamma$, la función de Busemann del rayo $\gamma$, coincide con $b_\infty$.*

(b) *Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a un punto $x_\infty \in M$ entonces su función de Busemann es*

$$B_{x_\infty} = d_{x_\infty} - d_{x_\infty}(x_0).$$

Demostración. (a) Como la variedad es completa, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos una geodésica minimizante $\gamma_n : [0, d(x_n,x_0)] \to M$ parametrizada por longitud de arco, uniendo $x_0$ con $x_n$. Consideramos el conjunto de los vectores unitarios $\{\dot\gamma_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}} \in T_{x_0}M$ que está incluído en el conjunto de vectores unitarios de $T_{x_0}M$ (el cual es compacto en $T_{x_0}M$) y entonces podemos extraer un punto de acumulación $v_\infty \in T_{x_0}M$ de $\{\dot\gamma_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sin pérdida de generalidad asumimos que

$$\lim_{n\to+\infty} \dot\gamma_n(0) = v_\infty.$$

De la misma forma que se hizo en la segunda parte de la proposición 3.4.2, con esa dirección se construye el rayo geodésico $\gamma(t) = \exp_{x_0}(t\, v_\infty)$ con $t \in [0, +\infty)$, el cual cumple que

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_n(t) = \gamma(t) \qquad \text{para todo } t \in [0, +\infty).^\dagger$$

Tomamos la función de Busemann $b_\gamma$ asociada a este rayo, por lo anterior, cumple que para cualquier sucesión divergente de tiempos positivos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$b_\gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \big[d\big(\gamma(t_n), z\big) - t_n\big] = \lim_{n\to+\infty} \big[d\big(\gamma_n(t_n), z\big) - t_n\big].$$

En particular, tomando la sucesión de tiempos $\{t_n = d(x_n, x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$, por hipótesis tienden a infinito y además cumplen que $x_n = \gamma_n(t_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, reemplazando esta sucesión en la última igualdad, obtenemos que

$$b_\gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} d_{\gamma(t_n)}(z) - t_n = \lim_{n\to+\infty} d_{x_n}(z) - d_{x_n}(x_0) = b_\infty(z).$$

(b) Este caso se cumple por la continuidad de la función distancia y no es de especial interés. $\square$

Las funciones de Busemann asociadas a un rayo geodésico $\gamma$ dan una noción de distancia asintótica al rayo geodésico, como tal, vemos como dependen del comportamiento "en infinito" de la curva $\gamma$.

**Definición 3.5.5** (Distancia al infinito entre rayos)**.** *Sean $\gamma, \gamma' : [0, +\infty) \to (M, g)$ dos rayos geodésicos. Definimos la distancia al infinito entre los rayos como*

$$\delta_\infty(\gamma, \gamma') = \liminf_{t,t'\to+\infty} d\big(\gamma(t), \gamma'(t')\big)\,.$$

**Lema 3.5.6.** *Si $\gamma, \gamma' : [0, +\infty) \to M$ son dos rayos geodésicos tales que*

$$\delta_\infty\big(\gamma, \gamma'\big) = 0$$

*entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$b_\gamma = b_{\gamma'} + c\,.$$

† Recordar que este límite se calcula usando que para cada $t$ existe un $k > 0$ tal que $\gamma_n$ está definida en $t$ para todo $n > k$.

Demostración. Sean dos puntos $z_1, z_2 \in M$ y dos sucesiones de tiempos positivos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{t'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty} d\big(\gamma(t_n), \gamma'(t'_n)\big) = \delta_\infty(\gamma, \gamma')\,.$$

Por la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} \big|\, d\big(\gamma(t_n), z_1\big) - d\big(\gamma'(t'_n), z_1\big) \,\big| &\leq d\big(\gamma(t_n), \gamma'(t'_n)\big) \\ \big|\, d\big(\gamma(t'_n), z_2\big) - d\big(\gamma'(t_n), z_2\big) \,\big| &\leq d\big(\gamma(t_n), \gamma'(t'_n)\big) \end{aligned}$$

sumando ambas desigualdades y agregando $t_n - t_n$ y $t'_n - t'_n$ adentro de los valores absolutos, obtenemos que

$$\begin{gathered} \big|\, d\big(\gamma(t_n), z_1\big) - t_n + t_n - d\big(\gamma'(t_n), z_1\big) + d\big(\gamma(t'_n), z_2\big) - t'_n + t'_n - d\big(\gamma'(t'_n), z_2\big) \,\big| \leq \\ \big|\, d\big(\gamma(t_n), z_1\big) - t_n + t_n - d\big(\gamma'(t_n), z_1\big) \,\big| + \big|\, d\big(\gamma(t'_n), z_2\big) - t'_n + t'_n - d\big(\gamma'(t'_n), z_2\big) \,\big| \leq \\ \leq 2\, d\big(\gamma(t_n), \gamma'(t'_n)\big) \end{gathered}$$

tomando el límite cuando $n$ tiende a infinito se llega a que

$$0 \;\leq\; |\, b_\gamma(z_1) - b_{\gamma'}(z_1) + b_\gamma(z_2) - b_{\gamma'}(z_1) \,| \;\leq\; 2\, d_\infty(\gamma, \gamma') \;=\; 0$$

es decir

$$b_\gamma(z_1) - b_{\gamma'}(z_1) \;=\; b_\gamma(z_2) - b_{\gamma'}(z_2)$$

para cualquier par de puntos $z_1, z_2 \in M$, concluyendo que existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$b_\gamma = b_{\gamma'} + c\,.$$

$\square$

El siguiente corolario es consecuencia directa de este último resultado.

**Corolario 3.5.7.** *Sea $\gamma : (0, +\infty) \to (M, g)$ una geodésica minimizante. Dados $0 < a \leq b \in \mathbb{R}$ tomemos los rayos geodésicos $\gamma_1 : [a, +\infty) \to (M, g)$ y $\gamma_2 : [b, +\infty) \to (M, g)$ dados por*

$$\gamma_1 = \gamma|_{[a,+\infty)} \qquad \gamma_2 = \gamma|_{[b,+\infty)}$$

*dos segmentos no acotados de la misma geodésica minimizante. Entonces sus funciones de Busemann $b_{\gamma_1}$ y $b_{\gamma_2}$ difieren en una constante.*

### 3.5.3 Ejemplos de funciones de Busemann en variedades

Veamos como son las funciones de Busemann en $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea y en el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ con la métrica (no euclídea) de Lobachewski.

**El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$**

Sea una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ y un vector $v \in \mathbb{R}^n$ de norma unitaria, tales que

*i)* $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

*ii)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \| x_n \| = +\infty$.

*iii)* Si llamamos $v_n = \dfrac{x_n}{\| x_n \|}$ a los vectores normalizados, entonces $v_n \to v$.

Dado un punto arbitrario $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tomamos las semi-rectas $\gamma_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ que parten de $x_0$ y pasan por $x_n$, parametrizadas por longitud de arco. Son rayos geodésicos de la métrica euclídea y están dados por la siguiente expresión

$$\gamma_n(t) = t\frac{x_n - x_0}{\| x_n - x_0 \|} + x_0 \qquad \text{con } t \in [0, +\infty).$$

Sean las funciones $B_{x_n} = d_{x_n} - \ d_{x_n}(x_0) \ \in \ C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que valen

$$B_{x_n}(x) = \| x - x_n \| - \| x_0 - x_n \| .$$

Como vimos en el lema 3.5.4 estas funciones convergen uniformemente en compactos a la función de Busemann asociada al rayo $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ definido como

$$\gamma(t) = tv + x_0$$

la semi-recta que parte de $x_0$ con dirección $v$. Tenemos que su función de Busemann es

$$\lim_{n\to+\infty} d_{x_n}(x) - \ d_{x_n}(x_0) = \lim_{t\to+\infty} [d_{\gamma(t)}(x) - t] = b_\gamma(x)$$

En este caso podemos calcular explícitamente el valor de la función $b_\gamma(x)$ :

$$\begin{aligned} b_\gamma(x) &= \lim_{t\to+\infty}\big[\,\|\,tv+x_0-x\,\|-t\big] &=& \lim_{t\to+\infty}\frac{\big(\,\|\,tv+x_0-x\,\|-t\big)\big(\,\|\,tv+x_0-x\,\|+t\big)}{\|\,tv+x_0-x\,\|+t} = \\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{\|\,tv+x_0-x\,\|^2-t^2}{\|\,tv+x_0-x\,\|+t} &=& \lim_{t\to+\infty}\frac{t^2(\|\,v\,\|^2-1)+2t\,\langle\,v,x_0-x\,\rangle}{t\,\|\,v\,\|+t} = \\ & &=& \langle\,v,x_0-x\,\rangle \end{aligned}$$

donde tomamos equivalencia de límites de polinomios y usamos que $\|\,v\,\|=1$.

### Funciones de Busemann en la recta real $\mathbb{R}$

Veremos que en este caso sencillo hay esencialmente 2 funciones de Busemann. Fijando un $x_0\in\mathbb{R}$, calculemos la función de Busemann asociada a una sucesión de números reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n\to+\infty$. Las funciones

$$B_{x_n}(x)=d_{x_n}(x)-d_{x_n}(x_0)=|\,x_n-x\,|-|\,x_n-x_0\,|$$

se anulan en $x_0$ y toman su valor mínimo, $-d(x_n,x_0)$, en el punto $x_n$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a infinito podemos suponer que la sucesión es creciente y mayor a $x_0$. Si $x\le x_n$ se tiene que

$$B_{x_n}(x)=x_n-x-(x_n-x_0)=x_0-x$$

lo que implica que para todo $x\in\mathbb{R}$

$$b_\infty(x)=\lim_{n\to+\infty}B_{x_n}(x)=x_0-x.$$

Vemos ahora como coincide con la función de Busemann asociada a la semi-recta $\gamma(t)=x_0+t$ definida para tiempos mayores o iguales a cero. Fijado un $x\in\mathbb{R}$, para $t>x$

$$d_{\gamma(t)}(x)-t=(x_0+t-z)-t=x_0-x$$

donde se ve como, para todo $x\in\mathbb{R}$

$$b_\gamma(x) \;=\; \lim_{t\to+\infty}d_{\gamma(t)}(x)-\;t \;=\; \lim_{n\to+\infty}d_{x_n}(x)-\;d_{x_n}(x_0) \;=\; b_\infty(x).$$

Ahora, para cualquier otra semi-recta $\gamma'(t)=x_0'+t$, su función de Busemann es

$$b_{\gamma'}(x)=x_0'-x=x_0-x+(x_0'-x_0)=b_\gamma(x)+(x_0'-x_0)$$

acorde a lo probado en el lema 3.5.6, este tipo de rayos tiene la misma función de Busemann módulo una traslación. Pero si tomamos los rayos $\sigma(t) = x_0 - t$ (equivalentes a tomar sucesiones $\{x_n\} \to -\infty$) análogamente se prueba que sus funciones de Busemann son de la forma

$$b_\sigma(x) = x - x_0.$$

Generando otra clase de funciones de Busemann módulo una traslación. Como partiendo de $x_0$ no hay otros rayos geodésicos, hemos probado que en este caso hay solo dos clases de equivalencia de funciones de Busemann módulo una traslación.

### Funciones de Busemann en $\mathbb{R}^2$

Fijando un $x_0 \in \mathbb{R}^2$, calculemos la función de Busemann asociada a una sucesión de vectores $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\| x_n \| \to +\infty$. Las funciones

$$B_{x_n}(x) = \| x_n - x \| - \| x_n - x_0 \|$$

cuyos gráficos son conos que se anulan en el círculo $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \| x - x_n \| = \| x_n - x_0 \|\}$ y tienen su mínimo absoluto en $x = x_n$ con valor $-\| x_n - x_0 \|$.

Sin pérdida de generalidad suponemos que la sucesión $\{\| x_n \|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es no nula, creciente, tiende a infinito y que $\dfrac{x_n}{\| x_n \|} \to v$.

Ya vimos en el caso general que

$$b_\infty(x) = \lim_n d_{x_n}(x) - d_{x_n}(x_0) = \langle v, x_0 - x \rangle$$

cuyo gráfico es un plano, tangente a todos los conos a lo largo de la recta $x_0 - x = tv$ con $t \in \mathbb{R}$.

### El plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$

Tomamos el modelo del semiplano $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ con la métrica hiperbólica que en coordenadas canónicas está dada por la matriz $\{g_{ij}\}$

$$\{g_{ij}\}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Las geodésicas $\gamma : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{H}^2$ (parametrizadas por longitud de arco) en esta variedad riemanniana son de dos tipos:

i) Las rectas verticales

$$\gamma_1(t) = \big(x_0, e^t\big).$$

ii) Las semicircunferencias con centro $(x_0, 0)$ en el eje horizontal y radio $r > 0$

$$\gamma_2(t) = \big(x_0 + r\tanh(t),\, r\,\mathrm{sech}(t)\,\big).$$

Donde tanh es la tangente hiperbólica

$$\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

y sech es la secante hiperbólica

$$\mathrm{sech}(t) = \frac{1}{\cosh(t)} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}.$$

Como cualquier par de estas curvas se intersectan a lo sumo en un punto, entonces se cumple que dados dos puntos arbitrarios, existe una única geodésica que los une y que por lo tanto es minimizante. En particular, tomando cualquier subintervalo de tiempos de la forma $[t_0, +\infty)$ o $(-\infty, t_0]$, las restricciones de estas curvas a esos subintervalos son rayos geodésicos.

Dado un punto $x_0$ arbitrario, queremos calcular la función de Busemann $b_{\gamma_1}$ asociada al rayo geodésico vertical

$$\gamma_1(t) = \big(x_0, e^t\big).$$

Para eso precisamos conocer la función distancia en $\mathbb{H}^2$, que presentamos sin demostración, el lector interesado puede consultar [Bea12, Sección 7.2].

**Proposición 3.5.8.** *Sean $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ con $y_1$ e $y_2$ positivos, dos puntos en $\mathbb{H}^2$. Entonces la distancia entre ambos está dada por la fórmula*

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2y_1y_2}\right)$$

*donde* arcosh *es la inversa del coseno hiperbólico* $\cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

**Lema 3.5.9.** *Dado un $x_0 \in \mathbb{R}$, sea $\gamma_1(t) : [0, +\infty) \to \mathbb{H}^2$ el rayo geodésico vertical, dado por*

$$\gamma_1(t) = \big(x_0, e^t\big)$$

*entonces su función de Busemann* $b_{\gamma_1} : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ *es*

$$b_{\gamma_1}(x, y) = \lim_{t \to +\infty} d_{\gamma_1(t)}(x, y) - t = \ln\left(\frac{1}{y}\right).$$

La prueba de este lema es una computación directa del límite que no es necesario incluir aquí. Observar sí, que como el límite no depende de $x_0$, todos los rayos geodésicos verticales poseen la misma función de Busemann asociada modulo una constante (acorde al lema 3.5.6). Lo cual, gracias al siguiente resultado, nos servirá para encontrar las funciones de Busemann correspondientes al resto de los rayos geodésicos de $\mathbb{H}^2$.

**Lema 3.5.10.** *Sea* $(M, g)$ *una variedad riemanniana y* $f : M \to M$ *una isometría. Si una curva* $\gamma_1 : [0, +\infty) \to M$ *es un rayo geodésico y* $b_{\gamma_1} : M \to \mathbb{R}$ *es su función de Busemann asociada, entonces*

$$\gamma_2 = f \circ \gamma_1$$

*también es un rayo geodésico, y su función de Busemann asociada es*

$$b_{\gamma_2} = b_{\gamma_1} \circ f^{-1}.$$

Demostración. Como las isometrías preservan la distancia y $\gamma_1$ minimiza la distancia entre cualquier par de puntos de su imagen, entonces lo mismo ocurre con $\gamma_2$. Además, al $\gamma_1$ estar parametrizada por longitud de arco entonces $\gamma_2$ también lo está, porque $f$ preserva la norma de la velocidad de las curvas. Se cumple entonces, por lo visto en 3.4.1, que $\gamma_2$ es un rayo geodésico.

Por otra parte, calculamos su función de Busemann en un punto $z \in M$

$$\begin{aligned} b_{\gamma_2}(z) &= \lim_{t \to +\infty} d_{\gamma_2(t)}(z) - t \\ &= \lim_{t \to +\infty} d_{f \circ \gamma_1(t)}(z) - t \\ &= \lim_{t \to +\infty} d_{\gamma_1(t)}\big(f^{-1}(z)\big) - t \\ &= b_{\gamma_1} \circ f^{-1}(z). \end{aligned}$$

□

Podemos usar este resultado para encontrar el resto de las funciones de Busemann, gracias a que se conocen todas las isometrías del plano hiperbólico.

**Definición 3.5.11** (Transformaciones de Möbius en $\mathbb{H}^2$)**.** *Dados* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *tales que* $ad - bc = 1$*, definimos las transformaciones de Möbius como las funciones* $f$ *definidas en el espacio* *hiperbólico extendido (agregando un punto en infinito)* $f : \mathbb{H}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbb{H}^2 \cup \{\infty\}$ *dadas por la expresión*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

*donde estamos usando la identificación usual de* $\mathbb{H}^2$ *con los números complejos con parte imaginaria positiva.*

**Proposición 3.5.12.** *Las transformaciones de Möbius en* $\mathbb{H}^2$ *tienen las siguientes propiedades:*

*(a) El conjunto de transformaciones de Möbius con la composición de funciones es un grupo.*

*(b) La inversa de* $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *es la función* $f^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$.

*(c) Hacen corresponder círculos generalizados (rectas y círculos) en círculos generalizados.*

*(d) Son isometrías del plano hiperbólico.*

Las propiedades (c) y (d), junto con el lema 3.5.10, implican que para cualquier par de rayos geodésicos existe una transformación de Möbius que los hace corresponder. Como ya tenemos una función de Busemann asociada a las rectas verticales (del lema 3.5.9), la usamos para encontrar el resto de las funciones de Busemann.

Con la notación compleja, partiendo del rayo geodésico $\gamma_1(t) = i\,e^t$, una transformación de Möbius $f : \mathbb{H}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbb{H}^2 \cup \{\infty\}$ con $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ manda $\gamma_1$ en el rayo

$$\gamma_2(t) = f(i\,e^t) = \frac{aie^t+b}{cie^t+d}$$

el cual por el lema 3.5.10 tiene función de Busemann asociada

$$b_{\gamma_2}(z) = b_{\gamma_1} \circ f^{-1}(z) = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{Im}\big(f^{-1}(z)\big)}\right) = \ln\left(\frac{(a-cx)^2+c^2y^2}{y}\right)$$

donde $z = (x, y)$ con $y > 0$.

Estas son entonces todas las funciones de Busemann del plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$.

# Capítulo 4

# Aplicaciones a problemas gravitacionales

## 4.1 El problema de $n$ cuerpos

En esta sección trataremos el movimiento de $n$ cuerpos en un espacio euclideano de dimensión finita $\mathbb{R}^k$, definido por las fuerzas de atracción mutua correspondientes al modelo newtoniano de gravitación. Una configuración $x = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^{kn} = (\mathbb{R}^k)^n$ determina la posición, en un instante dado, de los $n$ cuerpos, como tal, nos restringimos al espacio de configuraciones sin colisiones

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^{kn} \mid r_i \neq r_j \text{ siempre que } 1 \leq i < j \leq n \right\}$$

el cual es un abierto denso de $\mathbb{R}^{kn}$. En este abierto definimos el potencial newtoniano $U : \Omega \to \mathbb{R}$

$$U(x) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

donde el parámetro $m_i > 0$ es la masa del cuerpo $i$-ésimo, y el valor $r_{ij} = \| r_i - r_j \|_{\mathbb{R}^k}$ determina la distancia euclídea entre el cuerpo $i$ y el cuerpo $j$.

Al estar todos los cuerpos en posiciones distintas, cada uno es atraído por los restantes con una fuerza proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia mutua. La constante de proporcionalidad depende de las unidades elegidas, como para la dinámica del sistema no hace diferencia, la tomamos como la unidad. Se tiene entonces que la fuerza ejercida por el cuerpo $j$ sobre el cuerpo $i$ es el vector $F_{ij}(x)$

$$F_{ij}(x) = \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{(r_j - r_i)}{r_{ij}}$$

y la fuerza total sobre el cuerpo $i$-ésimo es

$$F_i(x) = \sum_{j\neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{(r_j - r_i)}{r_{ij}}.$$

Observamos ahora que la derivada parcial según $r_i$ del potencial newtoniano $U$ en $x$ es

$$\frac{\partial U}{\partial r_i}(x) = -\sum_{j\neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{(r_i - r_j)}{r_{ij}} = F_i(x).$$

Con esto podemos escribir la segunda ley de newton aplicada a cada cuerpo como

$$m_i \ddot{r}_i = \frac{\partial U}{\partial r_i}(x) \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Ahora bien, es útil considerar el producto interno de las masas en $\mathbb{R}^{kn}$, que a dos configuraciones $x = (r_1, \dots, r_n)$ e $y = (s_1, \dots, s_n)$ asocia el valor

$$\langle\, x, y \,\rangle = \sum_{i=1}^{n} m_i \,\langle\, r_i, s_i \,\rangle_{\mathbb{R}^k}.$$

Si calculamos el gradiente del potencial $U$ con este producto interno obtenemos que

$$\nabla U(x) = \left( m_1^{-1} \frac{\partial U}{\partial r_1}(x), \dots, m_n^{-1} \frac{\partial U}{\partial r_n}(x) \right)$$

con el cual las ecuaciones de Newton se escriben de forma más compacta

$$\ddot{x} = \nabla U(x).$$

## 4.2 Movimientos completamente parabólicos

**Definición 4.2.1.** *Sea $x(t) : [a, +\infty) \to \Omega$ una solución $\ddot{x}(t) = \nabla U\big(x(t)\big)$ del problema de Newton. Decimos que es un* movimiento completamente parabólico *si cumple que*

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = 0.$$

Como primera propiedad vemos que estos movimientos están en el nivel de energía nulo.

**Proposición 4.2.2.** *Sea $x(t) : [a, +\infty) \to \Omega$ un movimiento completamente parabólico. Sea $h = T\big(\dot{x}(t)\big) - U\big(x(t)\big)$ su energía. Entonces necesariamente $h = 0$.*

Demostración. La energía cinética es $T\big(\dot{x}(t)\big) = \dfrac{1}{2} \parallel \dot{x}(t) \parallel^2$ entonces por hipótesis tendremos que

$$\lim_{t\to+\infty} T\big(\dot{x}(t)\big) = 0.$$

Con lo cual, como $h$ es independiente del tiempo

$$h = \lim_{t\to+\infty} T\big(\dot{x}(t)\big) - U\big(x(t)\big) = \lim_{t\to+\infty} -U\big(x(t)\big).$$

Esta última igualdad nos dice que existe el límite de $U\big(x(t)\big)$ cuando $t$ tiende a infinito, y además, como el potencial newtoniano $U$ es una función positiva, obtenemos que $h \leq 0$.

Ahora, supongamos que la energía $h$ fuese negativa y consideremos el momento de inercia de la solución $I(t) = \langle\, x(t), x(t)\,\rangle$ . Entonces usando la identidad de Lagrange-Jacobi

$$\ddot{I}(t) = 2\,T\big(\dot{x}(t)\big) + 2h$$

se obtiene que

$$\lim_{t\to+\infty} \ddot{I}(t) = 2h < 0.$$

Lo que implica que para un intervalo no acotado de tiempos $(t_0, +\infty)$ existe una constante $k > 0$ tal que el momento de inercia tiene derivada segunda $\ddot{I}(t) < -k < 0$ y entonces

$$\lim_{t\to+\infty} I(t) = -\infty$$

que implica que existe un tiempo $t_{col} > a$ en el cual $I(t_{col}) = 0$, algo que solo puede ocurrir si

$$x(t_{col}) = 0 \in \mathbb{R}^{kn}$$

o sea la solución $x(t)$ tiene una colisión total en tiempo finito, lo cual contradice que la solución esté definida en un intervalo no acotado $[a, +\infty)$. Se dio el absurdo al suponer que $h$ era negativa con lo cual concluímos que $h = 0$. $\square$

Una clase particular de soluciones son las provenientes de las configuraciones llamadas centrales.

**Definición 4.2.3** (Configuración central). *Una configuración $x_0 \in \Omega$ se llama* configuración central *si existe una función $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^+$ con $\phi(0) = 1$ tal que la curva*

$$x(t) = \phi(t)\, x_0$$

*es solución del problema de Newton $\ddot{x} = \nabla U(x)$.*

**Proposición 4.2.4.** *Una configuración $x_0 \in \Omega$ es central sí y solo sí existe un $k \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\nabla U(x_0) + k\, x_0 = 0.$$

*Más aún*

$$k = \frac{U(x_0)}{I(x_0)}$$

*donde $I(x_0) = \langle\, x_0, x_0 \,\rangle$ es el momento de inercia de la configuración con respecto al origen.*

Demostración. Planteando la ecuación de newton para la solución $x(t) = \phi(t)\, x_0$ vemos que

$$\ddot{\phi}(t)\, x_0 = \nabla U\big(\phi(t)\, x_0\big) = \phi(t)^{-2} \nabla U(x_0)$$

porque el gradiente $\nabla U$ es homogéneo de grado $-2$. Como suponemos que $\phi \neq 0$ entonces esta igualdad vectorial equivale a que exista un $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla U(x_0) + k\, x_0 = 0$$

y que $\phi$ sea solución de la ecuación diferencial

$$\ddot{\phi}\, \phi^2 = -k.$$

Como con el producto interno de las masas $\langle\, \nabla U(x_0) + k\, x_0, x_0 \,\rangle = 0$ vemos que

$$0 = \langle\, \nabla U(x_0), x_0 \,\rangle + k \,\langle\, x_0, x_0 \,\rangle = -U(x_0) + kI(x_0)$$

por el teorema de Euler para funciones homogéneas, ya que $U$ es homogénea de grado $-1$. De esta última igualdad se concluye que

$$k = \frac{U(x_0)}{I(x_0)} > 0.$$

$\square$

Notar que la ecuación diferencial que debe cumplir $\phi$ corresponde a una solución del problema unidimensional de Kepler, obtenido de reducir el problema de dos cuerpos al centro de masas.

**Lema 4.2.5** (Configuraciones centrales como puntos críticos)**.** *Sea $x_0 \in \Omega$ una configuración con momento de inercia $I(x_0) = c$. Entonces es una configuración central sí y solo sí es un punto crítico de $U$ restricto al conjunto $\{x \in \Omega \mid I(x) = c\}$.*

Demostración. Primero vemos que el gradiente (con el producto interno de las masas) del momento de inercia respecto al origen $I(x) = \langle\, x, x\,\rangle$ es el vector

$$\nabla I(x_0) = 2\, x_0.$$

El método de multiplicadores de Lagrange nos dice que $x_0$ es punto crítico de $U$ restricto al conjunto $\{x \in \Omega \mid I(x) = c\}$ sí y solo sí existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 = \nabla U(x_0) + \lambda \nabla I(x_0) = \nabla U(x_0) + 2\lambda\, x_0$$

que justamente es la condición para que $x_0$ sea configuración central con $k = 2\lambda$. □

**Proposición 4.2.6.** *Para toda configuración central $x_0$ existe un $\alpha \neq 0$ tal que*

$$x(t) = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}\, x_0$$

*es un movimiento completamente parabólico definido en* $(0, +\infty)$.

Demostración. Suponiendo que $x(t) = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}\, x_0$ es solución con $t \in (0, +\infty)$, su derivada es

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{3}\, \alpha\, t^{-\frac{1}{3}}\, x_0$$

y cumple que $\dot{x}(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ como es requerido para ser completamente parabólica. Para encontrar un tal $\alpha$, tomamos la función $\phi(t) = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}$ cuyas derivadas son

$$\dot{\phi}(t) = \frac{2}{3}\, \alpha\, t^{-\frac{1}{3}} \qquad \ddot{\phi}(t) = -\frac{2}{9}\, \alpha\, t^{-\frac{4}{3}}$$

y planteamos la ecuación de Kepler unidimensional

$$-k = \ddot{\phi}\, \phi^2 = -\frac{2}{9}\, \alpha\, t^{-\frac{4}{3}} \alpha^2\, t^{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9}\, \alpha^3$$

verificando que esta se cumple cuando $\alpha$ toma el valor

$$\alpha = \left(\frac{9}{2} k\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{9\, U(x_0)}{2\, I(x_0)}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

□

**Proposición 4.2.7.** *Si $x(t) : [0, +\infty) \to E^n$ es una minimizante a tiempo libre del problema de $n$ cuerpos en un espacio euclídeo $E$, con dimensión $\dim(E) \geq 2$, entonces $x(t)$ es un movimiento completamente parabólico.*

Una prueba de este teorema puede encontrarse en [LM14, Teorema 1.1]. Veremos que se cumple el recíproco para un tipo especial de configuración central, llamada configuración mínima.

**Definición 4.2.8** (Configuración mínima). *Decimos que $x_0 \in \Omega$ es una configuración mínima si es un mínimo de*

$$U|_{\{I=1\}}$$

*donde $\{I = 1\} = \{x \in \Omega \mid I(x) = 1\}$ es el conjunto de configuraciones con momento de inercia unitario respecto al origen.*

Una configuración mínima es automáticamente un punto crítico de $U|_{\{I=1\}}$, en particular es una configuración central, según se demostró en el lema 4.2.5.

**Teorema 4.2.9.** *Si $x_0 \in \Omega$ es una configuración mínima entonces su movimiento homotético completamente parabólico correspondiente $x : (0, +\infty) \to \Omega$*

$$x(t) = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}\, x_0 \qquad \text{con } \alpha = \left(\frac{9}{2}\, U(x_0)\right)^{\frac{1}{3}}$$

*es minimizante a tiempo libre del lagrangiano $L(x, v) = \dfrac{1}{2} \| v \|^2 + U(x)$.*

Demostración. Sea $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva con los mismos extremos que $x(t)$, esta se expresa en coordenadas polares como

$$\gamma(t) = \rho(t)\, \theta(t)$$

donde $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ es una función positiva y la función $\theta : [a, b] \to \{I = 1\}$ es una curva de configuraciones con momento de inercia unitario, tal que $\theta(a) = \theta(b) = x_0$.

Queremos minimizar la acción del lagrangiano $L = T + U$ en el conjunto de curvas $\gamma$ con extremos fijos, definidas en cualquier subintervalo compacto $[a, b] \subset (0, +\infty)$. Como $x(t)$ se mueve en la dirección de un mínimo de $U$, buscamos probar que desviarse del movimiento homotético parabólico "encarece" la acción. Para eso primero vemos que la derivada de $\gamma$ es

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\rho}(t)\, \theta(t) + \rho(t)\, \dot{\theta}(t)$$

donde $\dot{\theta}(t) \in T_{\theta(t)}\, \{I = 1\}$ lo que implica que $\langle \theta(t), \dot{\theta}(t) \rangle = 0$ y entonces

$$\langle\, \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\, \rangle = \dot{\rho}(t)^2\, \|\, \theta(t)\, \|^2 + \rho(t)^2\, \|\dot{\theta}(t)\|^2 = \dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2\, \|\dot{\theta}(t)\|^2$$

porque $\theta(t) \in \{I = 1\}$ para todo $t \in [a, b]$. Con esto vemos que el lagrangiano en la curva velocidad $(\gamma, \dot\gamma)$ vale

$$\begin{aligned} L\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) &= T\big(\dot\gamma(t)\big) + U\big(\gamma(t)\big) = \frac{1}{2}\,\langle\, \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\,\rangle + U\big(\rho(t)\,\theta(t)\big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\dot\rho(t)^2 + \rho(t)^2\,\|\dot\theta(t)\|^2\right) + \frac{U\big(\theta(t)\big)}{\rho(t)} \end{aligned}$$

y es una suma de tres términos positivos. Como $x_0$ es una configuración mínima, tomar $\theta(t) \equiv x_0$ minimiza el último término y anula el segundo. Llegamos entonces a la desigualdad

$$L\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) \geq \frac{1}{2}\,\dot\rho(t)^2 + \frac{U(x_0)}{\rho(t)} \qquad \text{para todo } t \in [a,b]$$

con igualdad sí y solo sí $\theta(t) \equiv x_0$. Esto nos sugiere tomar la curva $\sigma : [a,b] \to \Omega$ definida como

$$\sigma(t) = \rho(t)\, x_0.$$

Por lo anterior, tenemos que $\mathbb{A}_L(\gamma) \geq \mathbb{A}_L(\sigma)$ y en definitiva queremos minimizar la acción

$$\mathbb{A}_L(\sigma) = \int_a^b \frac{1}{2}\,\dot\rho(t)^2 + \frac{U(x_0)}{\rho(t)}\, dt$$

en el conjunto de curvas diferenciables $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ con extremos fijos, definidas en cualquier subintervalo compacto $[a,b] \subset (0,+\infty)$.

Pero esto equivale a encontrar una minimizante a tiempo libre del problema unidimensional de Kepler. Para ver esto, consideremos el problema de 1 centro en la recta real: un cuerpo de masa $U(x_0)$ fijado en el origen, y otro cuerpo de masa unitaria en la posición $\rho > 0$, que se mueve por la fuerza de atracción que le ejerce el cuerpo fijo en el origen. El espacio de configuraciones es $\mathbb{R}^+$ (las posibles posiciones $\rho > 0$ del cuerpo movil), el potencial newtoniano es la función

$$\tilde U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \qquad \tilde U(\rho) = \frac{U(x_0)}{\rho}$$

y el lagrangiano es la función $\tilde L : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde L(\rho, v) = \frac{1}{2}\,\|\, v\,\|^2 + \frac{U(x_0)}{\rho}$$

En este caso está probado que existen minimizantes a tiempo libre entre cualquier par de configuraciones (en [LM14, Lema 3.3] hay una prueba) y para ver que esa minimizante a tiempo libre es el movimiento homotético parabólico usamos que:

- Por ser minimizante es extremal y solución del problema de Newton (ver corolario 2.1.13).

- Al ser minimizante a tiempo libre tiene energía 0 (por el lema 3.3.6).

Entonces como en el problema unidimensional de Kepler se conocen todas las soluciones y la única solución con energía nula es el movimiento parabólico

$$\rho(t) = \tilde{\alpha}\, t^{\frac{2}{3}} \rho_0 \quad \text{con } \tilde{\alpha} = \left(\frac{9}{2}k\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{y} \quad k = \frac{\tilde{U}(\rho_0)}{\tilde{I}(\rho_0)} = \frac{U(x_0)}{\rho_0^3}$$

con lo cual, la función $\rho : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ vale

$$\rho(t) = \left(\frac{9}{2}\, U(x_0)\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}.$$

Entonces la curva $\gamma : (a, b) \to \Omega$ minimizante a tiempo libre es la curva

$$\gamma(t) = \rho(t)\, \theta(t) = \left(\frac{9}{2}\, U(x_0)\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}\, x_0 = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}\, x_0$$

como queríamos demostrar. □

### 4.2.1 Reparametrización de un movimiento homotético parabólico

El resultado anterior junto con el teorema 3.3.7 nos dice que si $x_0$ es una configuración mínima, entonces su movimiento homotético completamente parabólico se puede reparametrizar a una geodésica minimizante de la métrica de Jacobi.

Si esta reparametrización está definida en un intervalo no acotado entonces es un rayo geodésico y tiene una función de Busemann asociada. Vamos a calcular esta reparametrización.

Sea $x_0 \in \Omega$ una configuración mínima y $\alpha > 0$ tal que la curva $x : (0, +\infty) \to \Omega$ dada por $x(t) = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}\, x_0$ es un movimiento completamente parabólico minimizante a tiempo libre.

Buscamos una función $f : (a, b) \to (0, +\infty)$ diferenciable, con $f'(t) > 0$ para todo $t \in (a, b)$, tal que $x\big(f(t)\big)$ sea geodésica de la métrica de Jacobi. Para esto alcanza con que la norma de la velocidad

$$\left\| \frac{d}{dt} x\big(f(t)\big) \right\|_J = 1 \quad \text{para todo } t \in (a, b).$$

Recordar que como en este caso estamos tomando el nivel de energía nulo entonces

$$\|\, v \,\|_J = \sqrt{2}\, \big(U(x)\big)^{\frac{1}{2}}\, \|\, v \,\|_x \ \text{ para todo } v \in T_x M.$$

También usaremos que $U$ es homogénea de grado $-1$ y que

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{3}\,\alpha\, t^{-\frac{1}{3}} x_0.$$

Con lo cual tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} 1 \;=\; \left\| \frac{d}{dt} x\big(f(t)\big) \right\|_J &= \sqrt{2}\, U\big(x\big(f(t)\big)\big)^{\frac{1}{2}} \,\|\, \dot{x}\big(f(t)\big) \,\|\, f'(t) \\ &= \sqrt{2}\left(U\big(\alpha\, f(t)^{\frac{2}{3}} x_0\big)\right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{2}{3}\alpha f(t)^{-\frac{1}{3}} x_0 \right\| f'(t) \\ &= \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}\, U(x_0)^{\frac{1}{2}}\, \alpha^{\frac{1}{2}}\, f(t)^{-\frac{2}{3}} \,\|\, x_0 \,\|\, f'(t) \end{aligned}$$

Como $\|\, x_0 \,\| = 1$ y llamando

$$\lambda = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}\, U(x_0)^{\frac{1}{2}}\, \alpha^{\frac{1}{2}}$$

vemos que obtuvimos la ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{1}{\lambda} = f(t)^{-\frac{2}{3}} f'(t)$$

la cual tiene solución

$$\frac{t}{\lambda} = 3\, f(t)^{\frac{1}{3}}.$$

Entonces la reparametrización buscada es la función

$$f(t) = \left(\frac{t}{3\lambda}\right)^3 \qquad \text{con } t \in (0, +\infty)$$

Concluyendo que la curva $\gamma : (0, +\infty) \to (\Omega, g_J)$, reparametrización de $x(t) = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}\, x_0$, dada por

$$\gamma(t) = x\big(f(t)\big) = \alpha\,\left(\frac{t}{3\lambda}\right)^{3\cdot\frac{2}{3}} x_0 = \alpha\, \frac{t^2}{\big(2^{\frac{3}{2}} U(x_0)^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}}\big)^2}\, x_0 = \frac{t^2}{8\, U(x_0)}\, x_0$$

es una geodésica minimizante de la métrica de Jacobi del nivel de energía $h = 0$ y está definida en un intervalo no acotado.

## 4.3 El teorema de Marchal y sus aplicaciones

En lo que sigue denotaremos $E = \mathbb{R}^k$ al espacio euclídeo en el que evolucionan los $n$ cuerpos. Dadas dos configuraciones $x, y \in E^n$ y un tiempo $\tau > 0$, se busca minimizar la acción del lagrangiano en el conjunto de curvas con extremos y tiempo fijos

$$\mathcal{C}(x,y,\tau) = \{\gamma : [a,b] \to E^n \text{ absolutamente continua } \mid \gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y,\ b-a = \tau\}\,.$$

Tales minimizantes serán extremales y por ende soluciones del problema de Newton siempre y cuando estén incluídas en $\Omega$ el conjunto de configuraciones sin colisiones.

También habíamos llamado

$$\mathcal{C}(x,y) = \bigcup_{\tau>0} \mathcal{C}(x,y,\tau)$$

al conjunto de curvas absolutamente continuas que unen dos configuraciones sin restricción en el intervalo de tiempo en que están definidas. Buscamos entonces mínimos de la acción lagrangiana en los siguientes casos:

$$\phi(x,y,\tau) = \inf\,\{\mathbb{A}_L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}(x,y,\tau)\}$$

$$\phi(x,y) = \inf_{\tau>0} \phi(x,y,\tau) = \inf\,\{\mathbb{A}_L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}(x,y)\}$$

Notar que estamos considerando configuraciones y curvas en $E^n$, es decir, admitiendo colisiones. El siguiente teorema ([Mar02]) nos asegura que al minimizar la acción, las colisiones solo pueden estar en los extremos de las curvas.

**Teorema 4.3.1** (Marchal)**.** *Sea $E$ un espacio euclideano con dim$(E) \geq 2$ y $L : TE^n \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ el lagrangiano $L(x,v) = \frac{1}{2} \parallel v \parallel^2 + U(x)$ dado por el potencial newtoniano $U : E^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Si una curva $\gamma : [a,b] \to E^n$ cumple que*

$$\mathbb{A}_L(\gamma) = \phi\big(\gamma(a), \gamma(b), b-a\big)$$

*entonces $\gamma(t) \in \Omega$ para todo $t \in (a,b)$.*

La teoría del cálculo variacional (véase por ejemplo [Fat08, Sección 3.3]) nos dice que cuando se toma un tipo de lagrangiano particular, estrictamente convexo en las fibras y superlineal sobre compactos (los llamados lagrangianos de Tonelli) entonces para todo $x, y \in E^n$ y $\tau > 0$ siempre existe una curva $\gamma \in \mathcal{C}(x,y,\tau)$ que cumple que

$$\mathbb{A}_L(\gamma) = \phi(x,y,\tau).$$

En el caso gravitacional, el lagrangiano generado por el potencial newtoniano es de Tonelli sobre el abierto de configuraciones sin colisiones $\Omega$, en este contexto la existencia de minimizantes para lagrangianos de Tonelli regulares se extiende sin mayor dificultad aplicando el lema de Fatou (un mayor desarrollo se puede encontrar en [LM14, lema 2.2]). Sabemos entonces que siempre se realizan los mínimos a tiempo fijo y resumimos en el siguiente teorema la relevancia de estas curvas.

**Teorema 4.3.2.** *Sea $E$ un espacio euclideano de dimensión mayor a 1. Entonces para todo par de configuraciones $x, y \in E^n$ y todo tiempo positivo $\tau > 0$ existe por lo menos una solución $\gamma \in \mathcal{C}(x, y, \tau)$ tal que*

$$\mathbb{A}_L(\gamma) = \phi(x, y, \tau)$$

*y cumple que*

$$\gamma(t) \in \Omega \quad \text{para todo } t \in (0, \tau).$$

*En particular la restricción de $\gamma$ a $(0, \tau)$ satisface las ecuaciones de Newton.*

Cabe destacar que la condición que $\dim(E) \geq 2$ es necesaria porque en el caso unidimensional el espacio de configuraciones $\Omega$ no es conexo y existen pares de configuraciones que no admiten curvas que las unan sin colisiones intermedias.

Ahora bien, otro resultado muy importante es la existencia de minimizantes a tiempo libre entre configuraciones distintas [LM14, Teorema 3.1].

**Teorema 4.3.3.** *Dadas dos configuraciones distintas $x \neq y \in E^n$ existe un tiempo $\tau > 0$ y una curva $\gamma \in \mathcal{C}(x, y, \tau)$ tal que $\mathbb{A}_L(\gamma) = \phi(x, y)$.*

Esta curva también es minimizante en su tiempo y si $\dim(E) \geq 2$ entonces, aplicando el teorema de Marchal, no tiene colisiones intermedias y obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 4.3.4.** *Si $x \neq y \in \Omega$ son dos configuraciones sin colisiones, entonces existe una solución $\gamma : [a, b] \to \Omega$ minimizante a tiempo libre con $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.*

Esto, en términos de la métrica de Jacobi del nivel de energía 0, equivale a que existan geodésicas minimizantes entre cualquier par de puntos.

## 4.4 La métrica de Jacobi del nivel de energía 0

Vimos que los movimientos completamente parabólicos del problema de $n$ cuerpos tienen energía $h = 0$ y que, por el corolario 4.3.4, la métrica de Jacobi en ese nivel de energía $V_0$ es geodésicamente convexa. Como el potencial newtoniano $U(r_1, \ldots, r_n)$ es positivo, entonces el conjunto abierto $V_0 = \{x \in \Omega \mid U(x) > 0\}$ en el cual está definida la métrica de Jacobi es exactamente el conjunto de configuraciones sin colisiones $\Omega \subset E^n$. La métrica en este abierto está dada por la expresión

$$g_J = 2\,U\,g$$

En el teorema 4.2.9 construímos una geodésica minimizante de la métrica de Jacobi

$$\gamma(t) = \lambda\, t^2\, x_0$$

donde $x_0 \in \Omega$ es una configuración mínima, $\lambda > 0$ y $t \in (0, +\infty)$. Como el límite

$$\lim_{t \to 0} \gamma(t) = 0 \notin \Omega$$

entonces esta geodésica no se puede extender a tiempos no positivos, concluyendo que $(\Omega, g_J)$ no es una variedad riemanniana completa.

Tenemos entonces que la variedad riemanniana $(\Omega, g_J)$ no es completa pero sí es geodésicamente convexa. Además admite rayos geodésicos que no se pueden extender a una geodésica definida para todo tiempo, cabe entonces la pregunta ¿Existe alguna geodésica minimizante definida para todo tiempo?

Para responder esto haremos uso de dos resultados. El primero (extraído de [LM14, teorema 1.2]) el cual es consecuencia del teorema de Marchal.

**Teorema 4.4.1.** *Si dim(E) $\geq 2$ entonces no hay minimizantes a tiempo libre del problema de $n$ cuerpos definidas para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.*

El segundo resultado es debido al astrónomo sueco Edvard von Zeipel (adaptado al lenguaje moderno en [McG86]).

**Teorema 4.4.2** (von Zeipel, 1908)**.** *Si $x(t) : (a, b) \to \Omega$ es una solución del problema de $n$ cuerpos que presenta una singularidad en el instante final $t = b < +\infty$, y $\rho(t) = |\, x(t)\, |$ es una función acotada en un entorno reducido de $b$, entonces la singularidad es una colisión.*

*Análogamente, ocurre lo mismo cuando hay una singularidad en el instante $t = a > -\infty$.*

Usaremos estos resultados preliminares (meritorios en si mismos) para demostrar lo siguiente.

**Teorema 4.4.3.** *La variedad riemanniana $(\Omega, g_J)$ (donde $g_J$ es la métrica de Jacobi del nivel de energía $h = 0$) no tiene geodésicas minimizantes definidas en todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. La idea de la prueba es, razonando por absurdo, suponer la existencia de una tal geodésica minimizante $\gamma : (-\infty, +\infty) \to \Omega$ y acorde a lo hecho en la proposición 3.2.1, reparametrizarla a una minimizante a tiempo libre $x(t) : (a, b) \to \Omega$ con

$$x = \gamma \circ r$$

donde $r : (a, b) \to (-\infty, +\infty)$ es un difeomorfismo y $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Si probamos que $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ entonces la solución $x(t) : (-\infty, +\infty) \to \Omega$ es una minimizante a tiempo libre definida para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$, contradiciendo el teorema preliminar 4.4.1.

Supongamos que $a$ es finito y (por conveniencia) que $a = 0$. Veamos como se comporta la solución $x(t)$ cuando $t$ tiende al valor 0, las posibilidades son:

$(i)$ Existe el límite y vale $\lim_{t \to 0^+} x(t) = x(a) \in \Omega$.

$(ii)$ Existe el límite y $\lim_{t \to 0^+} x(t) = c_0 \notin \Omega$ donde $c_0 \in E^n$ es una colisión total o parcial.

$(iii)$ No existe el límite $\lim_{t \to 0^+} x(t)$ y se está produciendo lo que se conoce como *pseudocolisión*.

Primero que nada vemos que $(i)$ no puede suceder, porque la función $x(t)$ es una solución maximal, al ser una reparametrización de una geodésica definida en todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.

El caso $(iii)$ también se descarta debido a que la solución $x(t)$ es $\frac{1}{2}$ Hölder porque es minimizante a tiempo libre ([LM14, sección 2.2]), y por lo tanto $|\, x(t) \,|$ está acotada en intervalos de tiempo finitos, en particular en cualquier intervalo $(a, c)$ con $c \in (a, b)$. Entonces por el teorema de von Zeipel 4.4.2 tenemos que la solución $x(t)$ tiende a una colisión cuando $t$ tiende a 0.

Como $x(t)$ es minimizante a tiempo libre tiene energía constante $h = E\big(x(t), \dot{x}(t)\big) = 0$ entonces

$$U\big(x(t)\big) = T\big(\dot{x}(t)\big) = \frac{1}{2} \,\|\, \dot{x}(t) \,\|^2 \qquad \text{para todo } t \in (a, b).$$

Ahora usamos una estimación del comportamiento asintótico de las distancias mutuas de una solución cuando esta tiende a una colisión [Spe70]. Para los cuerpos que chocan, sus distancias mutuas tienden a 0 con orden $t^{\frac{2}{3}}$ (suponiendo que la colisión se da en tiempo $t = 0$) y las distancias mutuas del resto de los cuerpos tienden a una constante.

Por lo tanto cuando la solución $x(t)$ se aproxima a la colisión en tiempo $t = 0$, el potencial newtoniano $U\big(x(t)\big)$ diverge con orden $t^{-\frac{2}{3}}$, entonces por la igualdad anterior $\|\, \dot{x}(t) \,\|$ tiende a infinito con orden $t^{-\frac{1}{3}}$.

La reparametrización $x(t) = \gamma\big(r(t)\big)$ con $t \in (a, b)$, cumple que

$$\|\, \dot{x}(t) \,\| = \big\|\, \dot{\gamma}\big(r(t)\big) \,\big\| \; r'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} U\big(x(t)\big)^{-\frac{1}{2}} \; \big\|\, \dot{\gamma}\big(r(t)\big) \,\big\|_J \; r'(t)$$

como $\gamma$ es geodésica de la métrica de Jacobi entonces tiene norma constante, esto implica que

$$r'(t) = \sqrt{2}\, U\big(x(t)\big)^{\frac{1}{2}} \;\|\, \dot{x}(t) \,\| \,.$$

Entonces $r'(t)$ es de orden $t^{-\frac{2}{3}}$ cuando $t$ tiende a 0. De aquí que para cualquier $c \in (a,b)$ la integral

$$\int_0^c r'(t)\,dt$$

es una integral impropia convergente. Con esto podemos probar que el límite de $r(t)$ cuando $t$ tiende a 0 es finito. Sea un valor $\varepsilon > 0$, como

$$r(\varepsilon) = r(c) - \int_\varepsilon^c r'(t)\,dt$$

entonces

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} r(\varepsilon) = r(c) - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^c r'(t)\,dt > -\infty$$

contradiciendo que $\lim_{t \to 0} r(t) = -\infty$. $\square$

Para cerrar esta sección describimos la función distancia riemanniana en $(\Omega, g_J)$.

**Proposición 4.4.4.** *Si $x, y \in \Omega$ entonces la distancia en la métrica de Jacobi es*

$$d(x,y) = \phi(x,y).$$

Demostración. El corolario 4.3.4 dice que si $x \neq y$ entonces existe un $\tau > 0$ y una curva $\gamma \in \mathcal{C}(x,y,\tau)$ con $\gamma\big([0,\tau]\big) \subset \Omega$ tal que $\mathbb{A}_L(\gamma) = \phi(x,y)$. Juntando esto con la proposición 3.1.2 y el teorema 3.3.7 que dicen que las minimizantes a tiempo libre tienen acción igual a la distancia entre sus extremos concluímos que

$$d(x,y) = \ell_J(\gamma) = \mathbb{A}_L(\gamma) = \phi(x,y).$$

En el caso que $x = y$ se tiene que $\phi(x,x) = 0 = d(x,x)$ pero no existe una minimizante a tiempo libre definida en un tiempo $\tau > 0$ porque toda $\gamma \in \mathcal{C}(x,x,\tau)$ tiene acción positiva. $\square$

### 4.4.1 Función de Busemann de un movimiento homotético parabólico

Sabemos que dada una configuración mínima $x_0 \in \Omega$, entonces (4.2.9) existe un $\alpha > 0$ tal que la solución

$$x(t) = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}\, x_0$$

es una curva minimizante a tiempo libre, la cual se reparametriza al rayo geodésico de la métrica de Jacobi $\gamma : (0, +\infty) \to (\Omega, g_J)$ dado por la expresión

$$\gamma(t) = \frac{t^2}{8\,U(x_0)}\, x_0$$

y como tal, tiene una función de Busemann asociada.

**Proposición 4.4.5.** *Sea $x_0 \in \Omega$ una configuración mínima. Entonces la función de Busemann $b_\gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ asociada al rayo geodésico que parte del origen $\gamma(t) = \dfrac{t^2}{8\,U(x_0)}\, x_0$ está dada por la expresión*

$$b_\gamma(z) = \lim_{t\to+\infty} \phi\big(\gamma(t), z\big) - \phi\big(\gamma(t), 0\big)$$

*donde además, la convergencia es uniforme en compactos, en el espacio de funciones $C(\Omega, \mathbb{R})$.*

Demostración. El teorema 3.5.3 establece la convergencia uniforme en compactos de

$$b_\gamma(z) = \lim_{t\to+\infty} d\big(\gamma(t), z\big) - t = \lim_{t\to+\infty} d\big(\gamma(t), z\big) - d\big(\gamma(t), \gamma(0)\big)$$

y por la proposición 4.4.4 vemos que este límite se puede reescribir como

$$b_\gamma(z) = \lim_{t\to+\infty} \phi\big(\gamma(t), z\big) - \phi\big(\gamma(t), 0\big).$$

□

Enunciamos un último resultado debido a [PS14], que muestra una aplicación de las funciones de Busemann en la variedad riemanniana $(\Omega, g_J)$ en el estudio de la dinámica del problema de $n$ cuerpos, y una de las tantas formas de continuar la exploración de los temas vistos en este trabajo.

**Teorema 4.4.6.** *Sea una configuración mínima $x_0 \in \Omega$ y sea $\gamma : [0, +\infty) \to E^n$ la curva $\gamma = \dfrac{t^2}{8\,U(x_0)}\, x_0$. Tomamos $u : \Omega \to \mathbb{R}$ la función opuesta de $b_\gamma$, definida como*

$$u(x) = \lim_{t\to+\infty} \phi\big(\gamma(t), 0\big) - \phi\big(\gamma(t), x\big).$$

*Entonces $u$ es una solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi*

$$\|\, Du(x) \,\|^2 = 2\, U(x).$$

*Más aún, para cada $x \in E^n$ existe un $c \in \mathbb{R}$ y una curva calibrante $\alpha : [0, +\infty) \to E^n$ de la función $u$ que cumple que $\alpha(0) = x$ y que*

$$\lim_{t\to+\infty} \Big\|\, \alpha(t)\, t^{-\frac{1}{3}} - c\, x_0 \,\Big\| = 0 \qquad con \quad c = \left(\frac{9}{2} U(x_0)\right)^{\frac{1}{3}}.$$

# Referencias


[Bea12] A.F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN: 9781461211464.

[Bus05] Herbert Busemann. *The geometry of geodesics*. Courier Corporation, 2005.

[BGH98] G. Buttazzo, M. Giaquinta, and S. Hildebrandt. *One-dimensional Variational Problems: An Introduction*. Oxford lecture series in mathematics and its applications. Clarendon Press, 1998. ISBN: 9780198504658.

[doCar79] M. P. do Carmo. *Geometria riemanniana*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. ISBN: 9788524400360.

[Fat08] A. Fathi. *The Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2008. ISBN: 9780521822282.

[Gro07] Mikhail Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Springer Science & Business Media, 2007.

[HZ11] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Modern Birkhäuser Classics. Springer Basel, 2011. ISBN: 9783034801041.

[Kel75] J.L. Kelley. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1975. ISBN: 9780387901251.

[LM14] A. da Luz and E. Maderna. "On the free time minimizers of the newtonian n-body problem". En: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 156. 02. Cambridge University Press. 2014, pp. 209–227.

[Mar02] C. Marchal. "How the Method of Minimization of Action Avoids Singularities". En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 83.1 (2002), pp. 325–353.

[McG86] Richard McGehee. "Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics". En: *Expositiones Mathematicae* 4 (1986), pp. 335–345.

[Pap05] Athanase Papadopoulos. *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*. European Mathematical Society, 2005.

[PS14] B. Percino and H. Sánchez-Morgado. "Busemann Functions for the N-Body Problem". En: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 213.3 (2014), pp. 981–991. ISSN: 1432-0673.

[Spe70] Hans J. Sperling. "On the real singularities of the N-body problem." En: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 245 (1970), pp. 15–40.