Dynamique des répresentations de groupes de surfaces

A. Sambarino

Directeur: J.F. Quint

Résumé

Nous nous intéressons au problème suivant : pour un réseau Γ d'isométries de $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$, quelle est la croissance du nombre de points de l'orbite Γi dans le boule $B(i,r)$ lorsque $r \to \infty$.

Table des matières

1 Introduction

Le but principal de ce travail est d'étudier les orbites de groupes discrets d'isométries du point de vue quantitatif. Typiquement, le groupe fondamental Γ d'une surface hyperbolique compacte, agit sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$ par isométries et de façon discontinue. Le nombre de points de l'orbite d'un point p (0 par exemple sur le modèle du disque de Poincarè) dans les boules $B(p,r)$ est fini. On s'intéressera alors au comportement asymptotique de ce nombre de points lorsque le rayon de la boule tend vers l'infini.

La compacité de la surface $\mathbb{H}^2/\Gamma$ n'est pas tout à fait essentielle, c'est le fait d'avoir aire finie qui nous permet d'utiliser les techniques proposées par Eskin-McMullen[1], article sur lequel ce travail est basé. Ce dans le quatrième section qu'on va poser le problème de comptage sur le plan hyperbolique et on montrera le théorème suivant.

Théorème (Comptage)**.** *Soit* Γ *un sous groupe discret d'isométries du plan hyperbolique tel que* $\Sigma = \mathbb{H}^2/\Gamma$ *a une mesure hyperbolique finie, et soit* $N(r) = \mathrm{card}\{\Gamma \cdot p \cap B(p,r)\}$*. Alors*

$$N(r)\frac{\mathrm{aire}\,\Sigma}{\mathrm{aire}\,B(p,r)} \longrightarrow 1$$

lorsque $r \to \infty$*.*

Si l'on enlève un certain nombre de points du plan $\mathbb{R}^2$ on obtient un nouvel espace qui possède toujours une métrique hyperbolique d'aire finie. Voilà plusieurs exemples de surfaces hyperboliques pour lesquels le dernier théorème s'applique mais qui ne sont pas compacts.

Expliquons assez rapidement la méthode utilisée pour montrer le théorème de comptage sur $\mathbb{H}^2$: le théorème de Howe-Moore[3] qui nous montrons dans le section §3 implique que le flot géodésique sur une surface hyperbolique d'aire finie a des très fortes propriétés de récurrence. Ces propriétés impliquent que le bougé d'un petit cercle sur $\Sigma = \mathbb{H}^2/\Gamma$ devient equidistribué, c'est-à-dire, la poussée de sa mesure de Lebesgue converge faiblement vers la mesure de la surface. Ce qui nous permettra montrer le théorème de comptage.

Pour finir l'introduction disons qu'il y a des versions beaucoup plus généraux du théorème qu'on veut montrer et nous envoyons au lecteur intéresse encore à l'article [1]. Il faut quand même signaler que la méthode utilise dans ce travail est le point de départ pour montrer le résultat de comptage de Ekin-McMullen.

2 L'espace hyperbolique

Le but de cette section est d'introduire le groupe

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \, ad - bc = 1 \right\}$$

comme le groupe des isométries du plan hyperbolique, et de montrer comment le flot géodésique du plan hyperbolique est une action sur le fibré unitaire tangent à $\mathbb{H}^2$ d'un certain sous-groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

2.1 Le groupe des isométries de $\mathbb{H}^2$

Les transformations de Möbius à coefficients réels préservent l'espace $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{im}\, z > 0\}$ et on a alors une action du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}^2$ donnée par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Cette action est transitive (c'est-à-dire qu'il existe z dans $\mathbb{H}^2$ tel que l'application $g \mapsto g \cdot z$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{H}^2$ est surjective), comme le montre le calcul

$$\begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \cdot z = \lambda^2 z + \lambda s,$$

et le stabilisateur du point $i \in \mathbb{H}^2$ est le groupe des rotations du plan euclidien

$$K = \mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\} \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

Si k est un élément de K alors la différentielle de l'application $z \mapsto k \cdot z$ en le point i préserve l'espace tangent à $\mathbb{H}^2$ en i, et on a donc une action du groupe K sur $T_i\mathbb{H}^2$ que nous notons $(k,v) \mapsto k * v$ pour le distinguer de l'action sur $\mathbb{H}^2$. Étudions plus attentivement cette action.

Lemme 2.1. *L'action de K sur $T_i\mathbb{H}^2 = \mathbb{C}$ est donné par la formule*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} * w = (a+ib)^2 w.$$

Ce petit lemme a des conséquences très intéressantes : le groupe K agit sur $T_i\mathbb{H}^2$ par rotations et cette action est transitive sur chaque cercle. De plus le stabilisateur dans K de n'importe quel point est le groupe $\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$.

Démonstration. Soient $k \in K$ et $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ l'application holomorphe donné par $f(z) = k \cdot z$. Si $w \in T_i\mathbb{H}^2$ alors $k * w = f'(i)w$. Écrivons

$$k = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

pour certains a, b tels que $a^2 + b^2 = 1$, alors $f'(i)$ est égal à

$$\frac{1}{a^2 - b^2 - 2abi} = a^2 - b^2 + 2abi = (a+ib)^2,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Revenons à l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{H}^2$. L'espace hyperbolique peut être muni d'une métrique riemannienne à courbure constante égale à -1. Cette métrique est donnée par le formule

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \text{ où } z = x + yi.$$

Les géodésiques de ds^2 sont les demi-cercles orthogonaux à $\mathbb{R}$ et les demi-droites verticales. Par exemple la courbe $t \mapsto e^t i$ est la géodésique issue de i de vecteur tangent initial $(0,1)$, parameterisée par longueur d'arc.

Un calcul direct montre que l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur l'espace hyperbolique est une action par isométries de ds^2. On peut alors étendre l'action à $T^1\mathbb{H}^2$, le fibré tangent unitaire de $\mathbb{H}^2$. Or $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^2$ et l'action de K sur le cercle unitaire tangent à i est aussi transitive. Nous en déduisons que l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur $T^1\mathbb{H}^2$ est transitive.

De plus, le stabilisateur dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ du point $(i,(0,1))$ est le groupe $\{\mathrm{id},-\mathrm{id}\}$ et en fait, comme $\{\mathrm{id},-\mathrm{id}\}$ est distingué dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, il est le stabilisateur de n'importe quel point de $T^1\mathbb{H}^2$.

Remarque. En général, une isométrie d'une variété Riemannienne est déterminée par l'image d'un point et par sa différentielle en ce point. Si en plus on demande que la variété soit une surface orientée et que l'isométrie préserve l'orientation, elle reste déterminée par l'image d'un point et l'image d'un vecteur tangent en ce point. Cela découle du fait qu'un vecteur unitaire se complète de manière unique en une base orthonormée directe.

On en déduit que le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\mathrm{id},-\mathrm{id}\}$ est exactement le groupe des isométries directes de l'espace hyperbolique.

2.2 Le groupe diagonal et le flot géodésique

Le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ peut s'identifier à $T^1\mathbb{H}^2$ par l'homéomorphisme

$$g \mapsto g(i,(0,1)). \tag{1}$$

On a alors une nouvelle façon de regarder le flot géodésique sur $\mathbb{H}^2$. Soit $A = \{a_t : t \in \mathbb{R}\}$ le sous groupe à un paramètre où

$$a_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

La géodésique issue de i avec vecteur tangent initial $(0,1)$ est donc la courbe $t \mapsto a_t i$, qui n'est que l'orbite Ai. Si $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ alors la géodésique issue de gi avec vecteur tangent initial $g(0,1)$ est $t \mapsto g a_t i$.

D'après l'homéomorphisme (1) et le dernier paragraphe on trouve que la géodésique par l'élément g de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est $t \mapsto g a_t$, d'où nous concluons que le flot géodésique sur $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est l'action a *droite* du groupe diagonal A.

On a aussi une autre façon de regarder le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ lui même. Soit A^+ la demi géodésique issue de i avec vitesse $(0,1)$, c'est-à-dire,

$$A^+ = \left\{ \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) : t \geq 0 \in \mathbb{R} \right\},$$

alors $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ peut se décomposer comme étant $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = KA^+K$. On appelle cette décomposition *décomposition de Cartan.*

Proposition 2.2 (Décomposition de Cartan)**.** *Chaque élément g de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *peut s'écrire comme kal avec $k, l \in K$ et $a \in A^+$.*

Démonstration. Soit $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et soit γ l'unique géodésique reliant $i = \gamma(0)$ à gi. On a donc que $gi = \gamma(t_0)$ pour certain $t_0 \geq 0$. Notons v la vitesse $\dot\gamma(0)$ de γ en 0. On prend alors un élément $k \in K$ qui envoie le vecteur tangent $(0,1)$ au dessus de i vers v, et on prend l'élément de A^+ égal a

$$a = \begin{pmatrix} e^{t_0/2} & 0 \\ 0 & e^{-t_0/2} \end{pmatrix}.$$

L'isométrie $g^{-1}ka$ fixe le point i et donc elle appartient à K, puis $g^{-1}ka = l^{-1}$ donc $g = kal$ pour certains $k, l \in K$ et $a \in A^+$. □

Plusieurs décompositions de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Considérons l'action linéaire du $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Elle est transitive et le stabilisateur du point $(1,0)$ est le groupe

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

On a donc que les points $(x,0)$ $(x \in \mathbb{R} - \{0\})$ sont fixés par N, et la N-orbite de (x,y) avec $y \neq 0$ est la droite horizontale $\mathbb{R} \times \{y\}$.

Soit

$$N^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix} : w \in \mathbb{R} \right\}$$

le stabilisateur du point $(0,1)$. De façon analogue on a que les points $(0,y)$ sont de points fixes pour l'action de N^-, et la N^--orbite de (x,y) avec $x \neq 0$ est le droite vertical $\{x\} \times \mathbb{R}$.

Cette description simple des N-orbites et des N^--orbites entraîne la prochaine proposition assez intéressante.

Proposition 2.3. *Le groupe* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *est engendré par* N *et* N^-.

Démonstration. Soit g dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, alors on va l'écrire comme un produit d'éléments de N et de N^- en regardant l'action linéaire de g dans $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Soit $(x,y) = g(1,0)$ et supposons d'abord que $y \neq 0$, alors il existe h dans N^- tel que $h(1,0) = (1,y)$ et, comme $y \neq 0$, il y a $n \in N$ tel que $n(1,y) = (x,y)$ on trouve alors que $(nh)^{-1}g$ fixe $(1,0)$ et donc il appartient a N. On conclut que $g = nhm$ pour certains $n, m \in N$ et $h \in N^-$.

Si $g(1,0) = (x,0)$ alors on prend h dans N^- qui ne soit pas l'élément neutre, alors hg est dans le premier cas et on fini la démonstration. □

Pour finir cette section nous montrons la décomposition d'Iwasawa pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Rappelons que K est le groupe $\mathrm{SO}(2)$ et A est le sous groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ des matrices diagonales à coefficients positifs.

Proposition 2.4. *L'application* $K \times A \times N \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *donnée par* $(k,a,n) \mapsto kan$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration. On a déjà remarqué que l'action du groupe AN sur $\mathbb{H}^2$ par transformations de Möbius est transitive, en fait le calcul

$$\begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \cdot z = \lambda^2 z + \lambda s$$

montre aussi unicité : étant donné un point z_0 de $\mathbb{H}^2$ il existe qu'un élément de AN dont l'image du point i est z_0.

Soit alors g dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, ils existent a dans A et n dans N, uniquement déterminées par g, tels que

$$g \cdot i = an \cdot i,$$

alors l'isométrie $g^{-1}an$ fixe le point i et donc elle appartient à K. La proposition en découle. □

2.3 Réseaux de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Comme $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agit par isométries sur $\mathbb{H}^2$, l'action sur $T^1\mathbb{H}^2$ préserve la mesure produit de la mesure sur $\mathbb{H}^2$ par la mesure de Lebesgue sur les cercles de longueur 1 (qui n'est rien d'autre que la mesure de Haar de $K/\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$), et donc, cette mesure est une mesure de Haar de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, par unicité.

L'action à gauche de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur lui même préserve cette mesure, mais le flot géodésique est un action à droite, et donc on se demande s'il préserve encore cette mesure. Cela découle du fait que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est *unimodulaire* : ses mesures de Haar sont invariants par multiplication à gauche et à droite.

Proposition 2.5. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *est unimodulaire.*

Démonstration. Notons μ une mesure de Haar à gauche de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et R_g la multiplication à droite par l'élément $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. La mesure $(R_g)_*\mu(A) := \mu(R_{g^{-1}}(A))$ est encore une mesure invariant a gauche. L'unicité de la mesure Haar à scalaire près implique alors que

$$(R_g)_*\mu = \Delta(g)\mu$$

pour un certain $\Delta(g) \in \mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Si l'on considère la structure multiplicative sur $\mathbb{R}_+^*$ un calcul direct montre que la fonction $\Delta : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^*$ est un morphisme des groupes.

Il suffit alors de montrer que tout morphisme $\phi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to H$, oú H est un groupe abelien, est forcement trivial. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $s \in \mathbb{R}$ soient $a_\lambda \in A$ et $n \in N$ donnés par

$$a_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } n = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\phi(n) = \phi(a_\lambda n a_\lambda^{-1}) = \phi(\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 s \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et donc ϕ est constant sur $N - \{\mathrm{id}\}$ et donc trivial sur N. Un calcul similaire montre que ϕ est aussi constant sur le groupe

$$N^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix} : w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le noyau de ϕ contient donc N et N^-. D'après la proposition 2.3 $\ker \phi = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Soit Σ une surface compacte muni d'une métrique à courbure constante égale à -1. Il se trouve qu'il existe un groupe discret Γ d'isométries de $\mathbb{H}^2$ qui agit librement et de façon discontinue sur $\mathbb{H}^2$ tel que Σ est isométrique a $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$. Le fibré tangent unitaire de Σ est alors $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \cong \Gamma \backslash T^1\mathbb{H}^2$.

Or $\pi : T^1\mathbb{H}^2 \to T^1\Sigma$ est un revêtement, il est naturel de se demander s'il existe une mesure sur $T^1\Sigma$ qui soit invariante par l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Il s'agit de construire une mesure localement égale à μ, la mesure de Haar de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$: $m(\pi(W)) = \mu(W)$ lorsque que W est un ouvert assez petit pour garantir que $\pi|W$ soit injective, mais il n'est pas assez évident que cette idée marche.

Si on a une fonction continue à support compact $f : T^1\mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ on peut définir $\overline{f} : T^1\Sigma \to \mathbb{R}$ en moyennant sur le groupe Γ,

$$\overline{f}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(gx).$$

Cet opérateur de moyenne sous l'action de Γ a de bonnes propriétés comme le théorème suivant le montre. Pour un espace topologique X, notons $C_c(X)$ l'ensemble des fonctions continues $f : X \to \mathbb{R}$ à support compact et ̀valeurs réelles.

Théorème 2.6. *L'opérateur $C_c(T^1\mathbb{H}^2) \to C_c(T^1\Sigma)$ donné par $f \mapsto \overline{f}$ est surjective. De plus si $\overline{f} = 0$ alors $\int_{T^1\mathbb{H}^2} f d\mu = 0$.*

La démonstration de ce théorème peut se trouver dans le livre [5], où aussi le lecteur trouvera plus de détailes et plus de généralité pour ce qu'on verra pendant cette section.

Nous pouvons alors définir une fonctionnelle positive $\Phi : C_c(T^1\Sigma) \to \mathbb{R}$: pour $f_0 \in C_c(T^1\mathbb{H}^2)$ nous choisissons $f \in C_c(T^1\mathbb{H}^2)$ telle que $\overline{f} = f_0$ et on pose

$$\Phi(f_0) = \int_{T^1\mathbb{H}^2} f d\mu.$$

La première partie du théorème nous donne l'existence de f, et la deuxième partie implique que Φ est bien définie.

Or $T^1\Sigma$ est compact, $C_c(T^1\Sigma) = \{f : T^1\Sigma \to \mathbb{R} \text{ continues}\}$ et donc nous pouvons utiliser le théorème de répresentation de Riesz, qui nous donne une unique mesure $\overline{\mu}$ sur $T^1\Sigma$ telle que $\Phi(f_0) = \int f_0 d\overline{\mu}$. On a enfin la mesure cherchée :

Proposition 2.7. *Il existe une mesure* $\overline{\mu}$ *sur* $T^1\Sigma$ *invariante par l'action à droite de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$*. Cette mesure est localement égale à* μ*, la mesure de Haar de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *et elle est donc unique à scalaire près.*

La compacité de $T^1\Sigma$ implique que la mesure m est de masse totale finie. On a bien montré alors que les sous groupes discrets cocompacts sont en fait des réseaux :

Definition 2.1. Soit Γ un sous groupe discret d'un groupe localement compact G, nous dirons que Γ est un *réseau* de G si le quotient G/Γ admet une mesure finie invariante par l'action de $G : (g, h\Gamma) \mapsto (gh)\Gamma$.

Étant donné un réseau avec mesure G-invariant $\overline{\mu}$ on peut construire assez facilement des mesures G-invariants sur G localement égales a μ, c'est-à-dire des mesures de Haar sur G. On trouve alors que la mesure μ est donc unique a scalaire près. Elle doit être la même que celle qu'on a construite ci-dessus pour les groupes co-compacts (à multiplication par un scalaire près).

La dernière proposition devient plus générale :

Proposition 2.8. *Soit* Γ *un réseau d'un groupe de Lie* G*, alors il existe une mesure de Radon* $\overline{\mu}$ *sur* $\Gamma\backslash G$ *invariante par l'action à droite de* G*. Cette mesure est localement égale à* μ*, la mesure de Haar de* G *et elle est donc unique à scalaire près.*

Pour finir nous énoncions un théorème assez générale dont on aura besoin pendant la section §4.1. Sa démonstration s'agit de étendre ce qu'on a fait dans cette section en rempaçant un réseau Γ de G agissant a gauche sur G, par un groupe unimodulaire agissant continûment sur un espace topologique localement compact.

Soit alors H un groupe unimodulaire et λ une mesure de Haar de H. Supposons que H agit continûment sur un espace topologique localement compact X, et qu'on a une mesure de probabilité α sur X qui est H-invariante. En suivant les mêmes pas que pour le cas d'un réseau, nous prenons l'opérateur $\Lambda : C_c(X) \to C_c(X/H)$ qui à $f : X \to \mathbb{R}$ associe la fonction

$$\Lambda(f) : xH \mapsto \int_H f(xh)d\lambda(h).$$

L'opérateur Λ vérifie aussi les conclusions du théorème 2.6, c'est-à-dire il est encore surjective et si $\Lambda(f) = 0$ alors $\int_X f d\alpha = 0$. Nous pouvons alors énoncer le théorème qui généralise la proposition 2.8.

Théorème 2.9. *Soit* H *un groupe unimodulaire agissant continûement sur un espace localement compact* X*. Alors pour chaque probabilité* H*-invariant* α *sur* X *il existe une probabilité sur le quotient* $\overline{\alpha}$ *telle que pour* $f \in C_c(X)$ *on a*

$$\int_X f d\alpha = \int_{X/H} \int_H f(hx)d\lambda(h)d\overline{\alpha}(x)$$

3 Le flot géodésique en courbure -1

Dans cette section nous allons montrer que le flot géodésique d'une surface hyperbolique de volume fini vérifie une propriété de mélange pour la mesure $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-invariant qui implique, par exemple, l'ergodicité. Cette propriété sera une conséquence d'un résultat sur les représentations unitaires du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ qu'on appelle annulation des coefficients matriciels. Ce dernier théorème reste vrai pour une classe plus grande de groupes, et le théorème général est aussi connu comme théorème de Howe-Moore. Des référence pour ce type de résultats sont [3] et [6].

3.1 Annulation des coefficients matriciels

Soit Γ un réseau de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et soit m la mesure $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$-invariant sur $T^1\Sigma = \Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. On a alors une action de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur $L^2(T^1\Sigma, m)$, donnée par $g \cdot \alpha(x) = \alpha(xg)$, qui préserve le produit interne :

$$\langle f, h\rangle := \int_{T^1\Sigma} f(x)\overline{h(x)}dm(x) = \int_{T^1\Sigma} f(xg)\overline{h(xg)}dm(x).$$

Voilà notre premier exemple de représentation unitaire :

Definition 3.1. Soient G un groupe topologique et V un espace de Hilbert. Une *représentation unitaire* de G dans V est une action continue $\pi : G\times V \to V$ telle que pour tout g dans G, l'application $\pi(g) : V \to V$ est un opérateur unitaire de V, c'est-à-dire que $\pi(g)$ est linéaire inversible et préserve le produit interne de V.

La continuité de $\pi : G \times V \to V$ nous dit que l'application induite de G vers les opérateurs unitaires de V est continue au sens fort : pour chaque $v \in V$ l'application $g \mapsto gv$ de $G \to V$ est continue.

Supposons qu'on a un espace topologique X localement compact muni d'une probabilité m sur les boreliens. Supposons encore la donnée d'une action continue d'un groupe de Lie G sur X, préservant la mesure m. Cela nous donne alors une action de G sur $L^2(X, m)$ qui préserve le produit interne et cette action est continue au sens précèdent. On a alors une représentation unitaire du groupe G dans $L^2(X, m)$. Les vecteurs invariants de cette action nous donnent beaucoup d'information dynamique sur l'action de G sur X, c'est cette direction que nous prenons.

Une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{C}$ est dite *G-invariante* si pour chaque $g \in G$ $f(gx) = f(x)$ m-p.p. Le prochain lemme nous dit que cette définition implique une notion plus forte d'invariance.

Lemme 3.1. *Soit G un groupe localement compact et dénombrable a l'infini agissant continûment sur un espace métrique localement compact X muni d'une probabilité m, invariante par l'action de G. Si $f : X \to \mathbb{C}$ est une fonction borélienne G-invariante alors il existe un fonction borélienne $F : X \to \mathbb{C}$ telle que $F = f$ m-presque partout et encore m-presque partout $F(gx) = F(x)$ pour tout g dans G.*

Démonstration. Comme f est G-invariante on a, d'après le théorème de Fubini, que l'ensemble $\{(g,x) : f(gx) = f(x)\}$ est de complémentaire négligeable dans $G \times X$ pour la mesure produit de la mesure de Haar μ et de m.

Donc, encore à cause du théorème de Fubini, pour presque tout x on a $f(gx) = f(x)$ pour presque tout g. L'ensemble

$$X_0 = \{x \in X : g \mapsto f(gx) \text{ est essentiellement constante}\}$$

contient l'ensemble

$$X_1 = \{x \in X : \mu\text{-p.p. } f(gx) = f(x)\}$$

qui est de mesure totale dans X. On conclut que X_0 est aussi de mesure 1 dans X.

De plus si $h \in G$ et $x \in X_0$ on a que la fonction $g \mapsto f(ghx)$ est aussi essentiellement constante et alors $hx \in X_0$ quel que soit h dans G.

Il faut remarquer que si $x \in X_1$ alors la constante essentielle de $g \mapsto f(gx)$ est $f(x)$. Ceci montre que la fonction $F : X_0 \to \mathbb{C}$, qui à chaque $x \in X_0$ associe la constante essentielle de $g \mapsto f(gx)$, est égale à f presque partout. En plus, si $x \in X_0$ et $h \in G$ alors $hx \in X_0$, si bien que $F(hx) = F(x)$. On a trouvé alors la fonction F du lemme. $\square$

Une fois réglés ces problèmes techniques nous pouvons revenir a la dynamique. Une action continue du groupe G sur X comme ci-dessus est dite *ergodique* si chaque ensemble mesurable invariant a pour mesure 0 ou 1. Dans ce cas-là, la représentation unitaire sur $L^2(X,m)$

$$g \cdot \alpha(x) = \alpha(xg) \qquad \alpha \in L^2(X,m),$$

a pour seules fonctions invariantes les fonctions constantes (voir [4]). Et en fait, cette dernière affirmation est équivalente à l'ergodicité.

Si Γ est un réseau de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, alors l'action à droite de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur $T^1\Sigma = \Gamma\backslash \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ n'a qu'une orbite, donc l'action est ergodique. Les propriétés asymptotiques de cette action influent sur les propriétés asymptotiques des sous groupes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ quand on restreint l'action. Le prochain théorème est très important a ce sujet.

Théorème 3.2 (Howe-Moore. Annulation des coefficients matriciels)**.** *Soit π une représentation unitaire du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ dans l'espace de Hilbert V. Supposons encore qu'il n'y a pas de vecteurs invariants sauf $\{0\}$, c'est-à-dire que l'ensemble*

$$\{v \in V : \pi(g)v = v \ \forall g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\}$$

est égal à $\{0\}$. Alors, quels que soient $v, w \in V$, on a $\langle \pi(g)v, w\rangle \to 0$ lorsque g sort de tous les compacts de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Notation. Par la suite, on notera $g \to \infty$ lorsque g sort de n'importe quel compact.

Avant la preuve on va a montrer que ce théorème implique de très fortes propriétés de récurrence pour le flot géodésique sur les surfaces hyperboliques.

Definition 3.2. Soit G un groupe topologique localement compact, non compact, agissant sur un espace de probabilité (X, μ) et supposons que μ est préservée par cette action. On dit que l'action est *mélangeante* si

$$\int_X \alpha(xg)\beta(x)d\mu(x) \to \int_X \alpha d\mu \int_X \beta d\mu$$

quand $g \to \infty$ quels que soient $\alpha, \beta \in L^2(X, \mu)$.

Une action mélangeante est ergodique car si E est un ensemble mesurable invariant, on a

$$0 = \mu(E \cap E^c) = \mu(gE \cap E^c) = \int_X \chi_E(xg)\chi_{E^c}(x)d\mu(x) \to \mu(E)\mu(E^c).$$

Corollaire 3.3. *Soit* Γ *un réseau de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *alors l'action de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *sur* $\Gamma\backslash \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *est mélangeante.*

Démonstration. On pose $X = \Gamma\backslash \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Comme Γ est un réseau on a une probabilité m sur X qui est $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-invariante. On prend comme avant $\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to L^2(X, m)$ donnée par $\pi(g)\alpha(x) = \alpha(xg)$. D'après le lemme 3.1, comme l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ a une seul orbite, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ n'a pas de vecteurs invariantes dans l'espace $V := \{1\}^\perp \subset L^2(X, m)$ des fonctions d'intégrale nulle. Si $\alpha \in L^2(X, m)$ sa projection sur V est $\alpha - \int_X \alpha dm$. La représentation unitaire

$$\pi^\perp : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times V \to V$$

n'a pas des vecteurs invariants. Alors, d'après l'annulation des coefficients matriciels (théorème 3.2), on a

$$\int_X \left(\alpha(xg) - \int_X \alpha d\mu\right)\left(\beta(x) - \int_X \beta d\mu\right) d\mu(x) \to 0$$

quand $g \to \infty$ donc

$$\int_X \alpha(xg)\beta(x)d\mu(x) \to \int_X \alpha d\mu \int_X \beta d\mu$$

quand $g \to \infty$, et l'action est mélangeante. □

Le flot géoésique sur $\Sigma = \Gamma\backslash \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, où Γ est un réseau, est l'action a droite du groupe A qui n'est pas compact. On peut toujours choisir des suites qui partent vers l'infini dans A, et alors le dernier corollaire nous dit que l'action de A sur $\Gamma\backslash \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est aussi mélangeante.

3.2 Démonstration du théorème 3.2

Nous rappelons l'énoncé du théorème qu'on veut montrer.

Théorème. *Soit* π *une représentation unitaire du groupe* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *dans l'espace de Hilbert* V. *Supposons encore que l'espace*

$$\{v \in V : \pi(g)v = v \ \forall g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\}$$

est réduit à zéro. Alors, quels que soient $v, w \in V$ *on a* $\langle \pi(g)v, w\rangle \to 0$ *quand* $g \to \infty$

Notation. Pour simplifier on notera, dans cette section, $\pi(g)v := gv,\ \forall v \in V$, et $G := \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Soit $(g_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G qui part à l'infini et v dans V. Nous voulons extraire une sous suite convergeant (en un certain sens) de $(g_pv) \subset V$.

Il est bien connu que les espace de Hilbert de dimension infinie ne sont pas localement compacts, mais la représentation π est unitaire et donc elle préserve les boules. Le théorème de Banach-Alaoglu[2] nous dit alors que ces dernières sont compactes pour la topologie faible de V. Quitte a remplacer V par le sous espace fermé engendré par $(g_pv)_{p\in\mathbb{N}}$ nous pouvons supposer que V est séparable. Dans ce cas, la topologie faible est métrisable et elle reste determiné par

$$x_p \to y \text{ faiblement } \Leftrightarrow \langle x_p, z\rangle \to \langle y, z\rangle \ \ \forall z \in V.$$

La séparabilité de V et le théorème de Banach-Alaoglu nous permettent alors d'extraire une sous suite de (g_pv) (qu'on appelle aussi (g_pv)) convergeant faiblement vers $u \in V$. On veut montrer que u est G-invariant pour en déduire que $u = 0$ et donc $\langle g_pv, w\rangle \to 0$ quel que soit $w \in V$. La preuve du fait que u est G-invariant consiste en trois étapes,

1 la décomposition de Cartan $G = KA^+K$ nous permettra de supposer que g_p appartient au sous groupe A des matrices diagonales avec déterminant égal à 1,

2 du fait que g_p appartient à A on va en déduire que le vecteur u est N invariant, i.e. invariant par le sous groupe des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur le diagonale,

3 la preuve aboutira avec le fait général suivant : un vecteur N-invariant est forcement G-invariant.

Première étape

Soient (g_p) une suite dans G qui tend vers l'infini et soit v dans V avec $\|v\| = 1$ tel que g_pv ne tende pas vers 0 faiblement. Soit $k_pa_pl_p$ une décomposition de Cartan de g_p avec $k_p, l_p \in K$ et $a_p \in A$.

Le but de cette section est de montrer que le fait $g_pv \nrightarrow 0$ (faiblement) implique l'existence d'un vecteur $v_0 \in V$ tel que a_pv_0 ne tende pas vers zéro faiblement. Ce qui nous permettra de supposer après que pour tout $p \in \mathbb{N}$, g_p appartient à A.

Supposons alors qu'il existe un vecteur $w \in V$ et $\varepsilon > 0$ tels que (en prenant une sous suite si nécessaire) $\langle g_p v, w\rangle > \varepsilon$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme K est compact on peut toujours supposer que k_p^{-1} et l_p convergent respectivement vers k^{-1} et l dans K.

Prenons alors p assez grand pour garantir que $\|k_p^{-1}w - k^{-1}w\| < \varepsilon/3$. Si l'on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz on aura

$$|\left\langle a_p l_p v, k_p^{-1}w - k^{-1}w\right\rangle| \leq \|v\|\|k_p^{-1}w - k^{-1}w\| < \varepsilon/3,$$

(rappelons que la représentation est unitaire et donc $\|a_p l_p\| = 1$) et alors on a $|\langle g_p v, w\rangle| - |\left\langle a_p l_p v, k^{-1}w\right\rangle| < \varepsilon/3$, d'où $|\left\langle a_p l_p v, k^{-1}w\right\rangle| > 2\varepsilon/3$.

En raisonnant de façon analogue pour l_p et l on trouvera, pour tout p assez grand $|\left\langle a_p(l_p - l)v, k^{-1}w\right\rangle| < \varepsilon/3$ d'où

$$|\left\langle a_p l v, k^{-1}w\right\rangle| > \varepsilon/3.$$

En prenant $v_0 = lv$ nous finissons la démonstration.

Deuxième étape

Soit (a_p) une suite d'éléments de A qui sort de tout compact, et supposons la convergence faible $a_p v \to u \neq 0$ pour un certain u dans V. Nous voulons montrer que u est N-invariant. Écrivons

$$a_p = \begin{pmatrix} \lambda_p & 0 \\ 0 & \lambda_p^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } n = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$$

où $\lambda_p \to \infty$. Le calcul

$$\begin{pmatrix} \lambda_p^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_p & 0 \\ 0 & \lambda_p^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_p^{-2}s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

montre que $a_p^{-1} n a_p \to \mathrm{id}$ (dans G), d'où $\|a_p^{-1} n a_p v - v\| \to 0$. Comme n^{-1} agit continûment pour la topologie fort, il agit continûment pour la topologie faible et, donc, $n^{-1}a_p v \to n^{-1}u$ faiblement. Par conséquent il suffira de démontrer que $n^{-1}a_p v$ converge faiblement vers u. Pour voir cela posons $v_p = a_p^{-1} n a_p v$, prenons un $w \in W$ quelconque et faisons le calcul

$$\begin{aligned} \left\langle n^{-1}a_p v, w\right\rangle &= \left\langle n^{-1}a_p(v - v_p), w\right\rangle + \left\langle n^{-1}a_p(v_p), w\right\rangle \\ &= \left\langle n^{-1}a_p(v - v_p), w\right\rangle + \langle a_p v, w\rangle \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 (rappelons que $\|n^{-1}a_p\| = 1$) et le deuxième tend vers $\langle u, w\rangle$, ce qu'il fallait démontrer.

Troisième étape

Rappelons qu'on a noté $G := \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Formulons cette étape dans le lemme suivant.

Lemme 3.4. *Soit V un espace de Hilbert muni d'une répresentation unitaire de G. Si $u \in V$ est un vecteur N-invariant alors u est G-invariant.*

Démonstration. Soit $f : G \to \mathbb{R}$ donnée par $f(g) = \langle gu, u \rangle$. Si pour un $g \in G$ on a $f(g) = \|u\|^2$ alors on déduit, de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, que gu appartient à $\mathbb{R}_+ u$, et alors $gu = u$ parce que $\|gu\| = \|u\|$. Donc il suffira de démontrer que f est constante car $f(\mathrm{id}) = \|u\|^2$.

Soient $n, m \in N$ et $g \in G$, alors

$$f(ngm) = \langle ngm(u), u \rangle = \left\langle gu, n^{-1}u \right\rangle = f(g).$$

Ceci montre que f est invariant à gauche et à droite par N et donc on peut voir f comme une fonction N-invariant a gauche définie sur le quotient G/N. Cet espace s'identifie à $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, car l'action linéaire de G sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ est transitive, et le stabilisateur du point $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ dans G est le groupe N. La fonction $f : G/N \to \mathbb{R}$ est constante sur chaque N-orbite et donc f est constante sur chaque droite affine horizontale $\mathbb{R} \times \{t\}$ pour $t \neq 0$. La continuté de f nous dit qu'elle est constante aussi sur l'ensemble $(\mathbb{R} - \{0\}) \times \{0\} = MAN(1, 0)$, où $M = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$. Alors si $a \in MA$ on a $f(aN) = f(\mathrm{id}\, N)$. Ceci montre que $f : G \to \mathbb{R}$ est constante sur MA. Le vecteur u est alors MAN-invariant et donc f est MAN-invariante a droite. Posons $P = MAN$.

Il suffira alors de montrer que f est constante sur le quotient G/P. Nous donnons alors une description de l'espace G/P.

L'action linéaire de G dans $\mathbb{R}^2$ permute les droites et donc on a une action de G dans la droite projective réelle RP^1 . Cette action est transitive et le stabilisateur de la droite $\mathbb{R}(1, 0)$ dans G est justement le groupe P. Or les droites horizontales $\mathbb{R} \times \{c\}$ $c \neq 0$ sont des N-orbites pour l'action linéaire sur $\mathbb{R}^2$ si bien que l'action de N sur RP^1 n'a que deux orbites : le point fixe $\mathbb{R}(1, 0)$ et son complémentaire.

Notre fonction f définit alors une fonction $f : \mathrm{RP}^1 \to \mathbb{R}$ et elle reste N-invariante par l'action de N à gauche, si bien qu'elle est constante sur les N-orbites. Or f est continue et une des N-orbites est dense dans RP^1 . Nous concluons que $f : \mathrm{RP}^1 \to \Sigma$ est constate et on a fini la démonstration. □

4 Comptage sur l'espace hyperbolique

En utilisant le résultat de mélange de la section §3 on va montrer que les cercles sur une surface hyperbolique $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ de volume fini s'équidistribuent quand on les pousse par des géodésiques qui leurs sont normales. On en déduira le théorème de comptage pour les réseaux de $\mathbb{H}^2$:

Théorème 4.1. *Soit* Γ *un réseau de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *et* $N(r)$ *le nombre de points de l'orbite* Γi *dans la boule* $B(i,r) \subset \mathbb{H}^2$. *Alors*

$$N(r)\frac{\mathrm{aire}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^2)}{\mathrm{aire}\,B(i,r)} \longrightarrow 1$$

lorsque r *tends vers l'infini.*

4.1 Équidistribution

Soient Γ un réseau de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. D'abord fixons un quelques notations. Posons $X = \Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, m la mesure $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ invariante sur X et $a_r \in A$ donné, pour $r \in \mathbb{R}$, par

$$a_r = \begin{pmatrix} e^{r/2} & 0 \\ 0 & e^{-r/2} \end{pmatrix}.$$

Posons $\widehat{K} = \mathrm{PSO}(2) = \mathrm{SO}(2)/\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\} \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\overline{\lambda}$ la probabilité $\widehat{K}$-invariante de $\Gamma \cap \widehat{K}\backslash\widehat{K}$ donné par la proposition 2.8.

Par l'équidistribution des cercles sur $X = \Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ nous entendrons le théorème suivant.

Théorème 4.2 (Équidistribution, [1])**.** *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *continue à support compact, alors*

$$\frac{1}{\overline{\lambda}(\Gamma \cap \widehat{K}\backslash\widehat{K})}\int_{\Gamma\cap\widehat{K}\backslash\widehat{K}} f(ya_r)d\overline{\lambda}(y) \longrightarrow \frac{1}{\overline{\mu}(X)}\int_X f d\overline{\mu}$$

lorsque $r \to \infty$.

Soient $\pi : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \to X$ et $p : X \to X/K = \Sigma$ les projections naturelles. Posons $S_r = p \circ \pi(Ka_r)$, et $\lambda_r = p_*(a_r)_*\pi_*\lambda$. La mesure λ_r est bien sur une probabilité de support $S_r \subset \Sigma$.

Supposons que $f : X \to \mathbb{R}$ est constante sur les fibres de p, c'est-à-dire que f est un relevé à X d'une fonction f_0 sur Σ. Alors, d'après le théorème d'équidistribution (théorème 4.2), l'intégrale de f_0 sur S_r par rapport a λ_r tends vers

$$\frac{1}{\overline{\nu}(\Sigma)}\int_\Sigma f_0 d\overline{\nu},$$

(m_0 étant la mesure de Σ donné par le revêtement $\mathbb{H}^2 \to \Sigma$), Formulons ce qu'on vient de montrer en un corollaire.

Corollaire 4.3. *Avec les notations ci-dessus, si* $f_0 : \Sigma \to \mathbb{R}$ *est continue à support compact alors*

$$\int_{S_r} f d\lambda_r \to \frac{1}{\overline{\nu}(\Sigma)}\int_\Sigma f d\overline{\nu}$$

lorsque $r \to \infty$.

Remarque. Supposons pour l'instante que Γ agit librement et dicontinûment sur $\mathbb{H}^2$. Dans ce cas là, Σ est une (vraie) surface hyperbolique et $\Gamma\backslash\operatorname{PSL}(2,\mathbb{R})$ est le fibré tangent unitaire $T^1\Sigma$. Or $\widehat{K}$ est identifié au cercle unitaire tangent à $\mathbb{H}^2$ en i on a que $\pi(\widehat{K}) = \{\mathrm{id}\}\backslash\widehat{K}$ est alors le cercle unitaire tangent à Σ en Γi. Par ailleurs, la projection $p : T^1\Sigma \to \Sigma$ est la projection du fibré tangent unitaire. Donc pour r assez petit, les ensembles $S_r = p(\pi(\widehat{K}a_r))$ sont des cercles centrés en Γi de rayon r et la mesure λ_r peut s'interpréter comme la mesure de Lebesgue de longueur 1 sur S_r. Le dernier corollaire nous dit alors que ces cercles s'équidistribuent sur Σ lorsque $r \to \infty$, d'où la terminologie.

Pour montrer le théorème 4.2 nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 4.4. *Pour tout voisinage V de l'élément neutre de* $\operatorname{PSL}(2,\mathbb{R})$, *il existe une mesure de Radon τ sur V tel que, si λ est la probabilité de Haar de $\widehat{K}$ et $f : \operatorname{PSL}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continu à support compact alors*

$$\frac{1}{\mu(\widehat{K}V)} \int_{\widehat{K}V} f(g)d\mu(g) = \int_{\widehat{K}\times V} f(kv)d\lambda(k)d\tau(v).$$

Démonstration. Ce lemme est une conséquence de la décomposition d'Iwasawa 2.4. Soit V est un voisinage de l'élélement neutre de $\operatorname{PSL}(2,\mathbb{R})$. La mesure de Haar de $\operatorname{PSL}(2,\mathbb{R})$ restreint à KV est invariante par l'action de K à gauche. Or les groupes compacts sont unimodulaires on a, d'après le théorème 2.9, une mesure de Radon sur le quotient $K\backslash KV$, qu'on appelle $\overline{\tau}$.

D'après la décomposition d'Iwasawa, cet espace quotient on peut l'identifier avec un ouvert U du sous groupe AN. Il s'agit alors de relever la mesure qu'on a trouvé sur U vers V.

La projection vers le deuxième terme de $K \times AN$ restreint a V est une submersion de V sur U. D'après le forme locale des submersions il existe alors une section borelienne $\phi : U \to V$. Pour finir on définit $\tau := \phi_*\overline{\tau}$. $\square$

Nous allons utiliser en fait le corollaire suivant du dernier lemme.

Corollaire 4.5. *Soit $f : \Gamma\backslash\operatorname{PSL}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continu à support compact. Posons $Y = \Gamma \cap \widehat{K}\backslash\widehat{K}$ alors*

$$\frac{1}{\overline{\mu}(YV)} \int_{YV} f(x)d\overline{\mu}(x) = \frac{1}{\overline{\lambda}(Y)} \int_{Y\times V} f(yv)d\overline{\lambda}(y)d\tau(v).$$

Nous énuncions le lemme du front d'onde dont sa démostration nous le faisons après.

Lemme 4.6 (du front d'onde,[1])**.** *Soit U un voisinage de l'élément neutre de* $\operatorname{PSL}(2,\mathbb{R})$. *Alors il existe un voisinage V de* id *tel que, pour tout $g \in \operatorname{PSL}(2,\mathbb{R})$ on a $\widehat{K}Vg \subset \widehat{K}gU$.*

Démonstration du théorème 4.2. Nous voulons comparer l'intégrale

$$\frac{1}{\overline{\lambda}(Y)} \int_{Y} f(ya_r)d\overline{\lambda}(y) \tag{2}$$

avec une intégrale sur un ouvert de X. Soit U un voisinage de l'élément neutre de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Le lemme du front d'onde nous donne un ouvert V tel que $\widehat{K}Vg \subset \widehat{K}gU$ quel que soit $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Soient v dans V et g dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, alors d'après l'unicité dans la décomposition d'Iwasawa nous permet écrir

$$v = \sigma(g,v)g\theta(g,v)g^{-1} \in K(gANg^{-1})$$

pour deux applications $\theta : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times V \to U$ et $\sigma : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times V \to \widehat{K}$.

Soit τ la mesure sur V donné par le corollaire 4.5 alors

$$\frac{1}{\overline{\mu}(YV)}\int_{YV} f(xa_r)d\overline{\mu}(x) = \frac{1}{\overline{\lambda}(Y)\overline{\mu}(YV)}\int_{Y\times V} f(yva_r)d\overline{\lambda}(y)d\tau(v)$$
$$= \frac{1}{\overline{\lambda}(Y)\overline{\mu}(YV)}\int_{Y\times V} f(y\sigma(a_r,v)a_r\theta(a_r,v))d\overline{\lambda}(y)d\tau(v).$$

Comme $\sigma(a_r,v) \in \widehat{K}$ et $\overline{\lambda}$ est $\widehat{K}$-invariante on peut l'effacer de la dernière inégral. Des que $\theta(a_r,v) \in U$ et f est uniformément continu on a que

$$|f(ya_r\theta(a_r,v)) - f(ya_r)| < \varepsilon,$$

pour ε donné si nous avons bien choisi U. Alors

$$\left|\frac{1}{\overline{\lambda}(Y)\overline{\mu}(YV)}\int_{Y\times V} f(ya_r\theta(a_r,v))d\overline{\lambda}(y)d\tau(v) - \int_Y f(ya_r)d\overline{\lambda}(y)\right|$$
$$\leq \frac{1}{\overline{\lambda}(Y)\overline{\mu}(YV)}\int_{Y\times V} |f(ya_r\theta(a_r,v)) - f(ya_r)|d\overline{\lambda}d\tau < \varepsilon.$$

On a donc que l'intégral (2) est proche de

$$\frac{1}{\overline{\mu}(YV)}\int_{YV} f(xa_r)d\overline{\mu}(x) = \frac{1}{\overline{\mu}(YV)}\int_X \chi_{YV}(x)f(xa_r)d\overline{\mu}(x).$$

D'après le théorème de mélange du flot géodésique (corollaire 3.3), cette dernière intégral converge vers

$$\frac{1}{\overline{\mu}(X)}\int_X f d\overline{\mu},$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Montrons maintenant le lemme du front d'onde (lemme 4.6).

Démonstration. Montrons le pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ en lieu de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Pour $r \geq 1$ posons $a_r \in A^+$ et $n \in N$, comme

$$a_r = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } n = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$a_r^{-1}na_r = \begin{pmatrix} 1 & r^{-2}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

il existe donc une base de voisinages de id dans N dont tous les éléments sont contractés par la conjugaison par les éléments de A^+.
Soient V_N un voisinage de id dans N et V_A un voisinage de id dans A tels que

- $V_a V_N \subset U$.
- pour tout $r \geq 1$ on ait

$$a_r^{-1} V_N a_r \subset V_N$$

Alors, d'après la décomposition d'Iwasawa (proposition 2.4) $V_0 := KV_AV_N$ est un voisinage de l'élément neutre dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et, pour tout $r > 1$, on a, comme A est abelien,

$$KVa_r \subset KV_Aa_rV_N = Ka_rV_AV_N \subset Ka_rU.$$

On vient de montrer que, étant donné un voisinage U de id dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, il existe un voisinage V de l'élément neutre de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tel que $KVa \subset KaU$ pour tout $a \in A^+$.

Pour finir, nous utiliserons la décomposition de Cartan $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = KA^+K$ (proposition 2.2). Pour chaque voisinage E de id dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ la compacité de K nous donne un voisinage E' tel que, pour tout k dans K, $k^{-1}E'k \subset E$.

Soient alors U', V et V' des voisinages de id dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tels que

- $k^{-1}U'k \subset U$ quel que soit $k \in K$,
- $KVa \subset KaU'$ pour tout a dans A^+,
- $k^{-1}V'k \subset V$ pour tout k dans K.

Alors, si $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est donné et kal est sa décomposition de Cartan on aura

$$KV'kal \subset KkVal \subset KkaU'l \subset KkalU.$$

Le résultat en découle.

□

4.2 Comptage

Comme ci-dessus, Γ est un réseau de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, $\Sigma = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$, $\overline{\nu}$ est la mesure sur Σ qui est localement égal a ν, la mesure hyperbolique sur $\mathbb{H}^2$, et $Y = \Gamma \cap \widehat{K}\backslash\widehat{K}$. Nous montrerons dans cette section l'estimation de croissance pour le nombre de points de l'orbite Γi dans le boule $B(i,r)$ lorsque $r \to \infty$, annoncé dans l'introduction.

On a besoin d'un lemme de changement de variable qui nous dit exactement qui est la mesure dans le quotient pour l'action de $\widehat{K}$ sur $\mathbb{H}^2$ donné par le théorème 2.9.

Lemme 4.7. *Soit $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ continue, alors*

$$\int_{B(i,r)} f(z)d\nu(z) = \int_0^r \sinh(\rho) \int_{\widehat{K}} f(ke^\rho i)d\lambda(k)d\rho.$$

Théorème 4.8. *Soit $N(r)$ le nombre de points de l'orbite Γi dans la boule $B(i,r)$, alors*

$$N(r)\frac{\overline{\nu}(\Sigma)}{\overline{\lambda}(Y)\nu B(i,r)} \longrightarrow 1$$

lorsque r tends vers l'infini.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ donné suffisamment petite de sorte que $\pi : \mathbb{H}^2 \to \Sigma$ soit injective sur tout boule de rayon ε centrée en γi, quel que soit $\gamma \in \Gamma$.

Soit $\alpha_\varepsilon : \Sigma \to \mathbb{R}$ une fonction positive, supportée dans la boule $B(\Gamma i, \varepsilon) \subset \Sigma$ et d'intégrale égale a 1. Notons $\tilde{\alpha}_\varepsilon$ le relevé de α_ε à $\mathbb{H}^2$, $\tilde{\alpha}_\varepsilon(x) = \alpha_\varepsilon(\pi(x))$.

Soit $r > 0$ quelconque. Pour tout γ dans Γ, si $\gamma i \in B(i, r-\varepsilon)$ alors la boule centrée en $\gamma 0$ de rayon ε est totalement contenue dans $B(i,r)$. Par conséquent on a

$$N(r-\varepsilon) \leq \int_{B(i,r)} \tilde{\alpha}_\varepsilon(x) d\nu(x),$$

En raisonnant de façon analogue on obtient aussi l'inégalité

$$\int_{B(i,r)} \tilde{\alpha}_\varepsilon(x) d\nu(x) \leq N(r+\varepsilon).$$

On obtient alors

$$\int_{B(i,r-\varepsilon)} \tilde{\alpha}_\varepsilon d\nu \leq N(r) \leq \int_{B(i,r+\varepsilon)} \tilde{\alpha}_\varepsilon d\nu. \tag{3}$$

Maintenant on s'intéresse au calcul de $\int_{B(0,r)} \tilde{\alpha}_\varepsilon$. D'après le dernier lemme on a

$$\int_{B(i,r)} \tilde{\alpha}_\varepsilon(z) d\nu(z) = \int_0^r \sinh(\rho) \int_{\widehat{K}} \tilde{\alpha}_\varepsilon(k e^\rho i) d\lambda(k) d\rho.$$

Regardons plus attentivement cette dernière intégrale, soit C_r le cercle dans $\mathbb{H}^2$ centré en 0 de rayon r, et μ_r la mesure de Lebesgue de C_r de longueur 1, alors

$$\int_{\widehat{K}} \tilde{\alpha}_\varepsilon(k e^\rho i) d\lambda(k) = \int_{C_r} \tilde{\alpha}_\varepsilon d\mu_r.$$

Par construction, on a $\pi_* \mu_r = \lambda_r$, donc

$$\int_{C_r} \tilde{\alpha}_\varepsilon d\mu_r = \int_{S_r} \alpha_\varepsilon d\lambda_r$$

si bien que, d'après le corollaire 4.3

$$\int_{S_r} \alpha_\varepsilon d\lambda_r \xrightarrow[\rho\to\infty]{} \frac{1}{\overline{\nu}(\Sigma)} \int_\Sigma \alpha_\varepsilon d\overline{\nu} = \frac{1}{\overline{\nu}(\Sigma)}.$$

Nous trouvons alors, comme $\int_0^\infty \sinh(\rho) d\rho = \infty$

$$\frac{1}{\nu(B(i,r))} \int_{B(i,r)} \tilde{\alpha}_\varepsilon \to \frac{1}{\overline{\nu}(\Sigma)}.$$

D'après l'inégalté (3), en multipliant par $\overline{\nu}(\Sigma)/\nu(B(i,r))$ nous trouvons

$$\frac{\overline{\nu}(\Sigma)}{\nu(B(i,r))}\int_{B(i,r-\varepsilon)}\tilde{\alpha}_\varepsilon d\nu \leq N(r)\frac{\overline{\nu}(\Sigma)}{\nu(B(i,r))} \leq \frac{\overline{\nu}(\Sigma)}{\nu(B(i,r))}\int_{B(i,r+\varepsilon)}\tilde{\alpha}_\varepsilon d\nu.$$

Le côté gauche de l'inégalité est arbitrairement proche de $\exp(-\varepsilon)$ pour r assez grande, comme le calcul suivant le montre

$$\frac{\nu(B(i,r-\varepsilon))}{\nu(B(i,r))}\frac{\overline{\nu}(\Sigma)}{\nu(B(i,r-\varepsilon))}\int_{B(i,r-\varepsilon)}\tilde{\alpha}_\varepsilon d\nu \approx \frac{\nu(B(i,r-\varepsilon))}{\nu(B(i,r))} \approx \exp(-\varepsilon).$$

De manière analogue le côté droit est arbitrairement proche de $\exp(\varepsilon)$. Or ε est arbitraire si bien que

$$N(r)\frac{\overline{\nu}(\Sigma)}{\nu(B(i,r))}$$

a pour limite 1 quand $r \to \infty$. $\square$

Références

[1] A. Eskin and C. McMullen. Mixing, counting and equidistribution in Lie groups. *Duke Math. Jour.*, 71, 1993.

[2] Folland. *Functional Analysis.*

[3] R. Howe and C. Moore. Asymptotic properties of unitary representations. *J. Func. Anal.*, 32, 1979.

[4] R. Mañe. *Teoria Ergodica.* Projeto Euclides.

[5] A. Weil. *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Herman, 1940.

[6] R. Zimmer. *Ergodic Theory and Semisimple Lie Groups.* Birkhäuser, 1984.