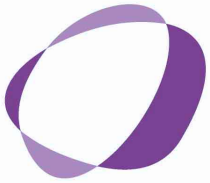
UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Monografía de Grado

Conexiones en Fibrados, Clases Características y el Teorema de Gauss-Bonnet-Chern

Autor:
Agustín Moreno

Supervisor:
Miguel Paternain

Noviembre 2012

Resumen

El objetivo de esta monografía es definir y relacionar las nociones de conexión en un fibrado principal, y la de conexión en un fibrado vectorial, y usar la teoría de clases características para demostrar dentro de este contexto y el de variedades Riemannianas, el teorema de Gauss-Bonnet-Chern, que es una generalización del clásico teorema de Gauss-Bonnet a variedades Riemannianas orientables, compactas y sin borde de dimensión par. Su enunciado puede resumirse como

$$\int_M e(M) = \chi(M),$$

donde $\chi(M)$ es la característica de Euler de M, y $e(M)$ es la clase de Euler de M, que es una cierta clase de cohomología de De Rham, representada por un polinomio en las entradas de la matriz de curvatura de la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica de M, llamado el polinomio de Pfaff. La prueba que aquí aparece es la que da Chern en su clásico paper del 44 (ver [5]), la primera hecha de forma intrínsica, apenas modificada para usar clases características.

Abstract

The objective of this monograph is to define and relate the notions of connections in principal and vector bundles, and to use the theory of Characteristic classes to prove, in this context and that of Riemannian manifolds, the Gauss-Bonnet-Chern theorem, a generalization of the classical Gauss-Bonnet theorem to orientable, compact and even-dimensional Riemannian manifolds without boundary. Its statement may be resumed as

$$\int_M e(M) = \chi(M),$$

where $\chi(M)$ is the Euler characteristic of M, and $e(M)$ is the Euler-class of M, a certain De Rham cohomology class, represented by a polynomial in the entries of the curvature matrix of the Levi-Civita connection associated to the metric of M, named the Pfaff polynomial. The proof here given is that by Chern´s classical paper from 44 (see [5]), the first to be done intrinsic, barely modified in order to use characteristic classes.

Índice general

0. Introducción **5**

1. Preliminares **11**
1.1. Conceptos Básicos 11
1.2. Teoremas Previos 14

2. Fibrados Vectoriales y Fibrado de Referenciales **19**
2.1. El Fibrado de Referenciales 22
2.2. Métricas Riemannianas y fibrados ortogonales 25

3. Conexiones en fibrados principales **27**

4. El Homomorfismo de Chern-Weil **45**
4.1. Ejemplos de Polinomios Invariantes y Clases Características 48

5. Conexiones en fibrados vectoriales **53**
5.1. Teorema de Gauss-Bonnet-Chern 59

Capítulo 0

Introducción

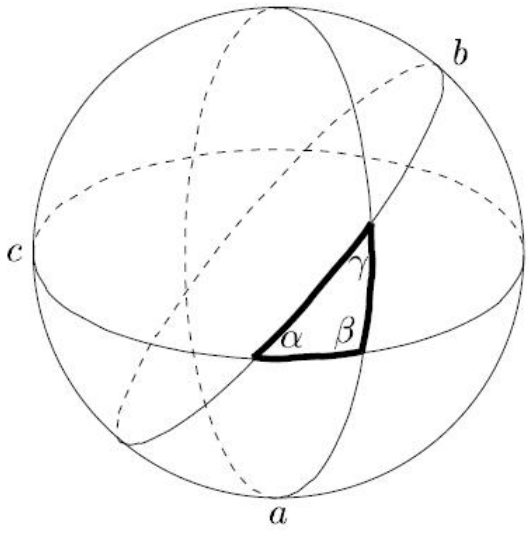
Antes de entrar en los detalles técnicos y la lógica dura, es importante y quizá necesario hacer una pequeña reseña histórica acerca del teorema de Gauss-Bonnet, desde Gauss hasta Chern, para resaltar e intentar entender no sólo la importancia del teorema en sí, sino de la prueba dada por Chern que trataremos aquí.

En su histórico trabajo de 1827 (ver [11]), Gauss demuestra lo siguiente:

Sea Δ un triángulo geodésico en la esfera S^2, con ángulos interiores α, β, γ. Luego,

$$\acute{A}rea(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

La prueba es realmente muy sencilla e ingeniosa. Sean a, b, c los círculos máximos que forman a Δ. Se tiene que b y c dividen a la esfera en 4 regiones. Si $A = 4\pi$ es el área de la esfera, cada una de las 2 regiones que tienen ángulo interior α tienen área igual a $\frac{\alpha}{2\pi}A = 2\alpha$, luego la suma de esas dos áreas es 4α. De forma similar se obtiene la fórmula análoga para las regiones correspondientes a β y γ.



Las 6 regiones cubren toda la esfera, y cubren a Δ y a su imagen antipodal exactamente 3 veces. Luego

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 2.2\acute{A}rea(\Delta), \text{ o sea } \acute{A}rea(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Se tiene entonces que el área de un triańgulo geodésico en la esfera depende únicamente de sus ángulos interiores, a diferencia de lo que sucede en el plano, donde siempre puede reescalarse. Otra diferencia contrastante es que la suma de éstos es siempre mayor que π, hecho que viola las leyes usuales de la geometría euclídea. Esto, intuitivamente, es debido a la *curvatura* de la esfera,

noción que en un principio resulta difícil de definir. No es sorprendente entonces que este concepto sea de interés central en geometría, y tenga una enorme cantidad de variantes, alguna de las cuales trataremos aquí.

La versión clásica del teorema de Gauss-Bonnet, que generaliza de buena forma la versión de Gauss, dice así:

En una superficie M de $\mathbb{R}^3$, sea $\mathcal{D}$ un dominio simplemente conexo cuyo borde $\partial\mathcal{D}$ consiste de una cantidad finita de curvas diferenciables. Luego

$$\int_{\partial\mathcal{D}} k_g ds + \sum_j (\pi - \alpha_j) + \int_{\mathcal{D}} K dA = 2\pi,$$

donde k_g es la curvatura geodésica de la curva del borde, los α_j son los ángulos interiores de los vértices del borde, K es la curvatura Gaussiana de M, y dA es la forma de área de M.

Observar que, en particular, si $\mathcal{D}$ es un triángulo en el plano, los términos que involucran curvaturas se anulan, y se obtiene el clásico resultado de que sus ángulos interiores suman π, hecho ya demostrado por Euclides en su célebre *Elementos*.

Esta versión es debido, de forma independiente, a Pierre Bonnet ([3], 1848) y Jaques Binet, si bien éste último nunca publicó la suya (quizá sea la razón de porque hoy se lo conoce como el Teorema de Gauss-Bonnet y no lleva el incómodo nombre de "Gauss-Binet-Bonnet").

Lo que usualmente llamamos el Teorema de Gauss-Bonnet para superficies compactas y orientables es debido a Walther von Dyck ([9], 1888):

Si M es una superficie compacta y orientable en $\mathbb{R}^3$, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K dA = \chi(M), \tag{1}$$

donde $\chi(M)$ es la característica de Euler de M.

La prueba más usual de esta versión es triangular la superficie y sumar la versión clásica anterior en cada 2-símplice. Se cancelan términos, y finalmente se llega a (1).

Las extensiones a dimensiones mayores comenzaron con Heinz Hopf ([13], [14]):

Sea M una variedad compacta, orientable y de codimensión uno en $\mathbb{R}^{2n+1}$, y sea

$$G : M \to S^{2n}$$

el mapa de Gauss de M. La forma de área se sustituye ahora por la forma de volumen dV de M, y, si se denota como ω_{2n} a la forma de volumen de S^{2n}, y como K a la curvatura Gaussiana (definida como $K(p) = det(d_pG)$), es directo verificar que $G^*(\omega_{2n}) = KdV$.

Lo interesante de este caso es que cae dentro del espectro de la teoría del grado, lúcida y concretamente tratada en [16], puesto que, usando la conocida fórmula del grado, se tiene que

$$\int_M K dV = \int_M G^*\omega_{2n} = deg(G)\int_{S^{2n}} \omega_{2n} = deg(G)vol(S^{2n})$$

Ahora, lo que Hopf prueba en [14], usando el teorema de Poincaré-Hopf, es que

$$deg(G) = \frac{1}{2}\chi(M),$$

obteniéndose así que

$$\int_M K dV = \frac{1}{2}vol(S^{2n})\chi(M),$$

que es (quizás) lo que se quería, puesto que generaliza la versión anterior, puesto que cuando $n = 1$ vale que $vol(S^2) = 4\pi$. Observar que esta es una prueba puramente geométrica, libre de argumentos combinatorios como los que aparecen en la versión anterior.

Pero Hopf no se quedó ahí, pues más era posible. En efecto, sea $\Omega = (\Omega_i^j)$ la matriz de curvatura de la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica de M heredada de $\mathbb{R}^{2n+1}$, que es una matriz de 2-formas en M localmente definida (el significado preciso de esto se trata en último capítulo de esta monografía). Una cuenta prueba que

$$G^*(\omega_{2n}) = \frac{vol(S^{2n})}{2} Pf(\Omega),$$

donde

$$Pf(\Omega) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}\pi^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} sg(\sigma) \Omega_{\sigma(1)}^{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(2n-1)}^{\sigma(2n)}$$

es una $2n$-forma en M globalmente definida, en un sentido que explicitaremos más adelante. $Pf(\Omega)$ es lo que se llama el *Integrando de Gauss-Bonnet de* M.

Se tiene que

$$\int_M Pf(\Omega) = \int_M \frac{2}{vol(S^{2n})} G^*(\omega_{2n}) =$$

$$\frac{2}{vol(S^{2n})} degG \int_{S^{2n}} \omega_{2n} = \frac{2}{vol(S^{2n})} \frac{1}{2} \chi(M) vol(S^{2n}) = \chi(M)$$

En otras palabras, para hipersuperficies (variedades de codimensión uno) orientables y compactas de $\mathbb{R}^{2n+1}$, el teorema de Gauss-Bonnet queda

$$\int_M Pf(\Omega) = \chi(M)$$

Ahora, todo lo anterior funciona muy bien para el caso en que la variedad es de codimensión uno, pero, como Hopf bien se dio cuenta, estos argumentos no sirven para el caso en que la codimensión es mayor que uno, puesto que en esa situación no existe un mapa de Gauss. Por lo tanto, cabía la pregunta de cual sería la versión del teorema de Gauss-Bonnet para ese tipo de subvariedades inmersas. La respuesta a esta interrogante fue dada independientemente por Allendoerfer y Fenchel en [1] y y [10], respectivamente.

Sea M una subvariedad compacta, orientable y de dimensión $2n$ en $\mathbb{R}^{2n+k}$ con $k > 1$. En este caso es posible tomar un entorno tubular $N(M)$ de M, y su borde $\partial N(M)$ es una hipersuperficie de $\mathbb{R}^{2n+k}$. Agregando una variable si es necesario se puede suponer que k es impar, y luego $\partial N(M)$ es de dimensión par (igual a $m = 2n + k - 1$). Si $Pf(\Omega)^N$ es el integrando de Gauss-Bonnet de $\partial N(M)$, la versión anterior nos dice que

$$\int_{\partial N(M)} Pf(\Omega)^N = \chi(\partial N(M))$$

Observar que $\partial N(M)$ puede pensarse como un fibrado sobre M donde la fibra es una esfera de dimensión par. Una cuenta (no trivial) muestra que

$$\int_{\partial N(M)} Pf(\Omega)^N = 2 \int_M Pf(\Omega),$$

donde $Pf(\Omega)$ es, como antes, el integrando respectivo de M. Se cumple además, por el hecho de que el fibrado es localmente un producto, que

$$\chi(\partial N(M)) = \chi(S^m)\chi(M) = 2\chi(M),$$

puesto que m es par. Luego nuevamente se ha obtenido que

$$\int_M Pf(\Omega) = \chi(M),$$

que es la versión de Gauss-Bonnet para variedades compactas, orientables y de dimensión par cualesquiera, inmersas en un espacio euclídeo.

Ahora, en 1940 no existía un Teorema de inmersión de Nash. Luego, la validez del teorema de Gauss-Bonnet para variedades Riemannianas intrínsecas permanecía abierto. Las pruebas hasta ahora se habían basado en la existencia del mapa de Gauss y del teorema de Poincaré-Hopf. Cabía entonces la pregunta de cuál sería el sustituto del mapa de Gauss para variedades abstractas.

En 1943, todavía sin resolver esta pregunta, Allendoerfer y Weil demostraron en [2] el problema general, usando lo siguiente:

- El teorema de inmersión isométrica local para variedades Riemannianas de Cartan-Janet y Whitney.
- La versión de Gauss-Bonnet para subvariedades del espacio euclídeo.
- argumentos combinatorios para juntar resultados locales para obtener uno global, como en el caso de las triangulaciones en superficies.

Si bien es un enorme logro, el hecho de haber usado argumentos combinatorios en un teorema de geometría es poco satisfactorio. Más pertinente aún es el hecho de que un teorema sobre variedades Riemannianas abstractas debería tener una prueba abstracta, y no debería recurrir a inmersiones en $\mathbb{R}^n$. Ambos autores estaban al tanto de las deficiencias de su versión, y cuando Chern fue a visitar a Weil en el Instituto de Estudios Avanzados de la Universidad de California, Berkeley, éste llamó su atención sobre el problema de Gauss-Bonnet.

Chern resolvió el problema a las semanas, introduciendo ideas sumamente novedosas para la época. En la prueba usó el fibrado tangente unitario (SM, π, M), que puede pensarse como el sustituto al mapa de Gauss. Más allá de haber proporcionado una solución al fin satisfactoria para los cánones de los geómetras, la prueba de Chern es la primera instancia en que es indispensable el uso de fibrados sobre una variedad Riemanniana. Hasta el momento, se desconocía el verdadero rol de los fibrados en geometría diferencial. Con esta prueba el panorama fue clarificado, y hoy en día esta es una herramienta fundamental. Cuando se estudian variedades diferenciables, automáticamente se estudian los fibrados asociados a las mismas, puesto que el entendimiento de las unas requiere el entendimiento de los otros. En palabras de André Weil:

"[Chern and I] were both beginning to realize the major role which fibre-bundles were playing, still mostly behind the scenes, in all kinds of geometric problems... I will merely point out what can now be realized in retrospect about Chern's proof for the Gauss-Bonnet theorem, as compared with the one Allendoerfer and I had given in 1942, following the footsteps of H. Weyl and other writers. The latter proof, resting on the consideration of tubes, did depend (although this was not apparent at the time) on the construction of a sphere-bundle, but of a non-intrinsic one, viz., the transversal bundle for a given immersion in Euclidean space; Chern's proof operated explicitly for the first time with an intrinsic bundle, the bundle of tangent vectors of length 1, thus clarifying the whole subject once and for all."([19])

Más aún, a partir de la prueba de Chern surgen muy naturalmente dos conceptos nuevos: la noción de transgresión; y la idea de usar la forma de curvatura y el teorema de De Rham para generar clases de cohomología con representantes canónicos, para obtener invariantes. Lo primero consiste en el hecho de que formas definidas en una variedad base pueden convertirse en exactas al ser levantadas por la proyección al espacio total de un fibrado, lo cual es clave en la prueba de Chern, donde se prueba que el levantado de $Pf(\Omega)$ es exacto en SM. Lo segundo es lo que conduce muy naturalmente a las clases características, como el propio Chern vislumbró al probar el teorema de Gauss-Bonnet, luego del cual introdujo las clases de Chern. Estas ideas no sólo revolucionaron la geometría diferencial, sino también la geometría algebraica, donde la existencia de representantes de estas clases permite la introducción de herramientas analíticas y geométricas

para el estudio de las variedades algebraicas, y la definición precisa de invariantes algebraicos clásicos.

En esta monografía se pretende desarrollar un poco la teoría de fibrados vectoriales y principales, junto con la noción de conexión y de curvatura. Se estudia el homomorfismo de Chern-Weil, herramienta que permite asignar de forma natural clases de cohomología de De Rham a una variedad, a partir de una conexión en un fibrado principal sobre ella, y se dan ejemplos de invariantes. Finalmente se toma un caso especial de éstos, la forma de Pfaff ($Pf(\Omega)$), que resulta ser un representante canónico de la clase de Euler, y se presenta la prueba del teorema de Gauss-Bonnet dada por Chern, con el agregado del uso explícito de clases características.

Capítulo 1

Preliminares

Comencemos por fijar convenciones, definiciones básicas y notación, e introducir los objetos de interés.

1.1. Conceptos Básicos

En todo el documento diferenciable significará infinitamente diferenciable. Dada una variedad diferenciable M, se denotará como $C^\infty(M)$ al conjunto de las funciones diferenciables en M a valores reales, y $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de los campos diferenciables de M, que tienen estructura de $C^\infty(M)$-módulo, con la acción y las operaciones usuales. $[-,-]:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$ será el corchete de Lie, definido como $[X,Y]=XY-YX$, donde se piensan los campos como mapas $C^\infty(M)\to C^\infty(M)$. Es decir, dados $X\in\mathfrak{X}(M)$ y $f\in C^\infty(M)$, $X(f):M\to\mathbb{R}$ será la derivada direccional de f en la dirección de X, esto es, $X(f)(p)=d_pf(X(p))$. Se cumple además la siguiente fórmula (ver [18] o [4]):

$$[X,Y](p)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Y(p)-d_{\varphi_t(p)}\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(p)))),\forall p\in E,\forall X,Y\in\mathfrak{X}(E),$$

donde φ es el flujo del campo X.

Si $f:M\to N$ es un difeomorfismo entre variedades diferenciables, y $X\in\mathfrak{X}(M)$, se define el push-forward de X por f como $f_*(X)\in\mathfrak{X}(N)$ dado por $f_*(X)(p)=d_{f^{-1}(p)}f(X(f^{-1}(p)))$. Se cumple que esta operación preserva el corchete de Lie, es decir que $f_*([X,Y])=[f_*(X),f_*(Y)],\forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.

$\Omega^k(M)$ denota el conjunto de las k-formas diferenciables en M, es decir, si $k=0$, $\Omega^0(M)=C^\infty(M)$, y si $k>0$, las funciones $\omega:\mathfrak{X}(M)^k\to C^\infty(M)$ multilineales y alternadas con la propiedad tensorial de que la expresión $w(X_1,\dots,X_k)(p)$ depende únicamente de $X_1(p),\dots,X_k(p)$ para todo $X_1,\dots,X_k\in\mathfrak{X}(M)$.

El producto cuña o producto exterior se define como

$$\wedge:\Omega^k(M)\times\Omega^l(M)\to\Omega^{k+l}(M)/$$

$$\omega_1\wedge\omega_2(X_1,\dots,X_{k+l})=\sum_{\sigma\in S_{k+l}}sg(\sigma)\omega_1(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})\omega_2(X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(k+l)}),$$

donde S_n es el grupo de permutaciones de n elementos. La derivada exterior es

$$d:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)/$$

$$d\omega(X_1,\dots,X_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{k+1}))$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1}),$$

donde $\hat{X}_i$ indica que se ha sacado el término.

El producto exterior es asociativo y conmutativo graduado, es decir, $\omega_1\wedge\omega_2=(-1)^{kl}\omega_2\wedge\omega_1$, y la derivada exterior cumple ser el único operador $\mathbb{R}$-lineal $d:\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)$ tal que $(df)(X)=X(f)$, si $f\in\Omega^0(M)$ y $X\in\mathfrak{X}(M)$, $d^2=0$ y $d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^k\omega_1\wedge d\omega_2$, si $\omega_1\in\Omega^k(M)$, $\omega_2\in\Omega^l(M)$ (Ver [17], cap. 7).

Ambas operaciones dan a $\Omega(M)=\bigoplus_{k\geq 0}\Omega^k(M)$ estructura de $\mathbb{R}$-álgebra diferencial graduada ($\Omega(M)$ es el álgebra exterior de las formas diferenciales).

Dadas M y N variedades, y $f:M\to N$ mapa diferenciable, el pullback por f está dado por $f^*:\Omega^k(N)\to\Omega^k(M)/f^*(\omega)(X_1,\ldots,X_k)(p)=\omega_{f(p)}(d_pf(X_1(p)),\ldots,d_pf(X_k(p)))$, si $k>0$, y como $f^*:C^\infty(N)\to C^\infty(M)/f^*(g)=g\circ f$, si $k=0$. Se cumple que el pullback es $\mathbb{R}$-lineal, preserva el producto exterior, es decir $f^*(\omega_1\wedge\omega_2)=f^*(\omega_1)\wedge f^*(\omega_2)$, conmuta con la derivada exterior, y además $(f\circ g)^*=g^*\circ f^*$, $id^*=id$, lo que en términos categóricos es lo mismo que afirmar que el par $(\Omega(-),-^*):C^\infty\text{-}Man\to\mathbb{R}\text{-}Vec$ es un funtor contravariante.

Eligiendo una carta local $\varphi:U\subseteq\mathbb{R}^n\to M$, poniendo variables $(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ en $\mathbb{R}^n$, toda k-forma diferencial en M tienen una única expresión

$$\omega=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}a_{i_1,\ldots,i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},$$

donde $a_{i_1,\ldots,i_n}\in C^\infty(\varphi(U))$ y $dx_i\in\Omega^1(M)$ es tal que $dx_i(X)(p)=\varphi_{u_i}(p)^*(X(p))$, $\varphi_{u_i}(p)^*$ siendo el elemento dual de $\varphi_{u_i}(p)=d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(e_i)=\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ en la base $\{d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(e_1),\ldots,d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(e_n)\}$ de T_pM (donde $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$), $\forall p\in M$, $\forall X\in\mathfrak{X}(M)$, $\forall i=1,\ldots,n$. La derivada exterior se calcula entonces como

$$d\omega=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_\alpha}dx_\alpha\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

También usaremos la notación multi-índice, poniendo $I=(i_1,\ldots,i_k)$, $\omega_I=a_{i_1,\ldots,i_k}$, $dx^I=dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$, y escribiendo

$$\omega=\sum_I\omega_Idx^I$$

Observar que si $\varphi^{-1}=(f_1,\ldots,f_n):\varphi(U)\to U\subseteq\mathbb{R}^n$ con $f_i:\varphi(U)\to\mathbb{R}$, $\forall i$, y $\mu_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es la proyección canónica sobre la i-ésima variable, se tiene que $(\varphi^{-1})^*(d\mu_i)=d((\varphi^{-1})^*(\mu_i))=d(\mu_i\circ\varphi^{-1})=df_i$. Por otro lado, es $dx_i=(\varphi^{-1})^*(d\mu_i)$, ya que $(dx_i)_p(d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(e_j))=\delta_{ij}=(d\mu_i)_{\varphi^{-1}(p)}(e_j)=(\varphi^{-1})^*(d\mu_i)_p(d_{\varphi^{-1}(p)}\varphi(e_j))$, $\forall j=1,\ldots,n$. El punto aquí es que se obtiene que $df_i=dx_i$, $\forall i$, lo cual justifica el hecho de que, como es habitual en la literatura, se piensen las cartas locales como saliendo de la variedad, poniendo $X=(x_1,\ldots,x_n):U\subseteq M\to\mathbb{R}^n$, y escribiendo las formas en coordenadas locales como arriba, donde ahora las formas dx^I se piensan como diferenciales de las coordenadas de las cartas. Estará claro cuando usaremos una u otra convención para nuestras cartas locales.

Otra forma equivalente de definir las k-formas diferenciales (que hemos usado en el cálculo anterior) es

$$\Omega^k(M)=\prod_{p\in M}\Lambda^k(T_pM^*)=\{\omega:M\to\bigcup_{p\in M}\Lambda^k(T_pM^*)/\omega_p\in\Lambda^k(T_pM^*),\ \forall p\in M\},$$

donde $\Lambda^k(T_pM^*)$ es el conjunto de las k-formas multilineales y alternadas en T_pM. La derivada exterior se define en coordenadas locales como arriba y el producto exterior, punto a punto como el producto cuña en las k-formas multilineales y alternadas. Informalmente, las formas diferenciales implican una doble evaluación, en puntos de la variedad y en vectores tangentes. En el primer

caso, se fijan los vectores tangentes (tomando campos) y se varía el punto, y al revés en el segundo, fijando el punto y tomando vectores tangentes. La ventaja de definirlo con campos es que permite una definición de la derivada exterior que es independiente de coordenadas locales. Usaremos ambas indiferentemente (para la equivalencia de las definiciones de la derivada exterior, ver [17], cap. 7).

El complejo de De Rham es el complejo de cocadenas $(\Omega^*(M), d)$ de los $C^\infty(M)$-módulos $\Omega^k(M)$ (que tiene $n+1$ términos no nulos, donde n indica la dimensión de M). En diagramas,

$$\Omega^*(M): \quad \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \ldots \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

El n-ésimo grupo de cohomología de De Rham es el n-ésimo módulo de cohomología del complejo de De Rham, a saber, $H^n(\Omega^*(M)) = Z^n(\Omega^*(M))/B^n(\Omega^*(M))$. Los elementos de $Z^n(\Omega^*(M))$ se llaman formas diferenciales cerradas, y los de $B^n(\Omega^*(M))$, formas diferenciales exactas. Es decir, $\omega \in \Omega^k(M)$ es cerrada sii $d\omega = 0$, y es exacta sii existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$. Tenemos nuevamente un álgebra graduada $H(\Omega(M)) = \bigoplus_{k\geq 0} H^k(\Omega^*(M))$, donde el producto es inducido por el producto exterior en las formas.

Un grupo de Lie es una variedad diferenciable G munida de una estructura de grupo tal que el mapa $G \times G \to G/(g,h) \mapsto gh^{-1}$ es diferenciable. La identidad usualmente será denotada por e.

Un álgebra de Lie es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathfrak{g}$ munida de un corchete bilineal $[-,-]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, anticonmutativo, que satisface la identidad de Jacobi $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0, \forall x, y, z$.

Todo grupo de Lie G tiene asociada de forma natural un álgebra de Lie, que consiste en tomar el conjunto de los campos en G invariantes a izquierda (esto es, los campos X que satisfacen $(\mathcal{L}_g)_*(X) = X$, donde $\mathcal{L}_g : G \to G$ es la traslación a izquierda $h \mapsto gh$), que son invariantes por el corchete de Lie de campos, debido a que el push-forward lo preserva. Todo elemento A tangente a G en la identidad ($A \in T_eG$) induce un campo invariante a izquierda poniendo $X_A(g) = d_g\mathcal{L}_g(A)$, y se cumple que el mapa $A \mapsto X_A$ es un isomorfismo entre T_eG y los campos invariantes a izquierda en G (con inversa $X \mapsto X(e)$), por lo tanto T_eG tiene estructura de álgebra de Lie poniendo $[A,B] = [X_A, X_B](e)$.

Un grupo de Lie actúa en sí mismo por conjugación $\mathcal{C} : G \times G \to G/\mathcal{C}_g(h) = ghg^{-1}$. Tomando diferencial en la identidad de $\mathcal{C}_g : G \to G$ se obtiene $Ad(g) = d_e\mathcal{C}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, que es un isomorfismo de álgebras de Lie (es isomorfismo lineal y preserva el corchete). Luego el mapa $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ es una representación, llamada la representación adjunta de G.

Una conexión en una variedad Riemanniana M es un operador

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)/(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$$

que satisface

- $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

$\forall f, g \in C^\infty(M), X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

Toda conexión tiene asociada una derivada covariante, esto es, si se denota por $\mathfrak{X}_\alpha(M)$ a los campos diferenciables definidos a lo largo de una curva α de M, un operador $\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}_\alpha(M) \to \mathfrak{X}_\alpha(M)$ que satisface

- $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}, \forall V, W \in \mathfrak{X}_\alpha(M)$
- $\frac{D}{dt}(fV) = f\frac{DV}{dt} + \frac{df}{dt}V, \forall V \in \mathfrak{X}_\alpha(M), f \in C^\infty(M)$

- Si V es la restricción a α de un campo X definido en M, se cumple que $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\dot{\alpha}} X$

Un campo a lo largo de una curva se dice paralelo si $\frac{DV}{dt} = 0$. Dados una curva α y un vector $v \in T_{\alpha(t_0)}M$, existe un único campo paralelo V a lo largo de α tal que $V(t_0) = v$, llamado el transporte paralelo de v a lo largo de α. Una conexión es simétrica si $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, y compatible con la métrica si $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Esto último es equivalente a pedir que $\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle$ para todo V, W campos a lo largo de una curva, siendo $\frac{D}{dt}$ la derivada covariante asociada a la conexión, y a que $\langle V, W\rangle = cte$ si V, W son paralelos. Toda métrica tiene asociada una única conexión simétrica y compatible con la métrica, llamada la conexión de Levi-Civita. Una curva γ en M es una geodésica si $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$, donde se toma la derivada covariante de la conexión de Levi-Civita de la métrica. Dados un punto $p \in M$ y un vector $v \in T_pM$ existe una única geodésica γ definida en algún entorno de 0 tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = v$. Fijado un punto p, es posible encontrar un $\epsilon > 0$ tal que está definido el mapa exponencial $exp_p : B(0, \epsilon) \subseteq T_pM \to M / exp_p(v) = \gamma(p, v, 1)$, donde $t \mapsto \gamma(p, v, t)$ es la única geodésica que cumple $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = v$ (ver [4]).

1.2. Teoremas Previos

Por completitud, demostraremos el Lema de Poincaré, que será usado más adelante.

Definición 1.2.1. *Una variedad diferenciable es contráctil si existe $p_0 \in M$ y $H : M \times [0, 1] \to M$ diferenciable tales que $H(p, 0) = p_0,\ H(p, 1) = p,\ \forall p \in M$.*

Es decir, una variedad es contráctil si la identidad es homotópica a una función constante.

Lema 1.2.1 (Poincaré)**.** *Sea M una variedad contráctil. Luego, toda forma diferencial cerrada en M es exacta.*

Antes, unas consideraciones previas. Denotemos $\mathcal{T}^k(V)$ a las k-formas multilineales en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V. La prueba del próximo lema es rutinaria:

Lema 1.2.2. *1. Dados $V = V_1 \oplus V_2$, $\omega \in \mathcal{T}^k(V)$, y $k > \alpha > 0$, se tiene que existen $\omega_1 \in \mathcal{T}^\alpha(V)$ y $\omega_2 \in \mathcal{T}^\beta(V)$, con $\beta = k - \alpha$, tales que $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$ y*

$$\omega_1(v_1, \ldots, v_\alpha) = 0,\ \textit{si } v_i \in V_2 \textit{ para algún } i$$

$$\omega_2(v_1, \ldots, v_\beta) = 0,\ \textit{si } v_i \in V_1 \textit{ para algún } i$$

2. Si $dim V_2 = 1$ y $0 \neq \lambda \in V_2^*$, ω puede escribirse de forma única como $\omega_1 + \omega_2 \wedge \lambda$, donde $\omega_1 \in \mathcal{T}^k(V), \omega_2 \in \mathcal{T}^{k-1}(V)$ son tales que

$$\omega_1(v_1, \ldots, v_k) = 0,\ \textit{si } v_i \in V_2 \textit{ para algún } i$$

$$\omega_2(v_1, \ldots, v_{k-1}) = 0,\ \textit{si } v_i \in V_2 \textit{ para algún } i$$

□

Proposición 1.2.1. *Dada M una variedad diferenciable, sean $\pi : M \times [0, 1] \to [0, 1]$ y $\pi_M : M \times [0, 1] \to M$ las proyecciones canónicas. Luego,*

$$T_{(p,t)}(M \times [0, 1]) = Ker(d_{(p,t)}\pi) \oplus Ker(d_{(p,t)}\pi_M), \forall (p, t) \in M \times [0, 1]$$

Demostración. Se tiene que $T_{(p,t)}(M \times [0, 1]) = T_pM \oplus T_t[0, 1]$, y como π y π_M son lineales, $d_{(p,t)}\pi$ y $d_{(p,t)}\pi_M$ no son otra cosa que las proyecciónes canónicas $T_pM \oplus T_t[0, 1] \to T_t[0, 1]$ y $T_pM \oplus T_t[0, 1] \to T_pM$, respectivamente. Luego $Ker(d_{(p,t)}\pi) = T_pM$ y $Ker(d_{(p,t)}\pi_M) = T_t[0, 1]$, y se tiene lo pedido. □

Estudiemos ahora las formas diferenciales en $M \times [0,1]$. Dada $x = (x_1, \ldots, x_n) : U \subseteq M \to \mathbb{R}^n$ una carta local para M, se tiene que $(x_1 \circ \pi_M, \ldots, x_n \circ \pi_M, t)$ es una carta para $M \times [0,1]$, donde $t : M \times [0,1] \to [0,1]$ es la proyección π antes definida. Denotemos $\bar{x}_i = x_i \circ \pi_M$. Luego, toda $\omega \in \Omega^k(M \times [0,1])$ se escribe en estas coordenadas locales como

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k} d\bar{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_{i_k} + dt \wedge \left(\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{k-1} \leq n} b_{j_1,\ldots,j_{k-1}} d\bar{x}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_{j_{k-1}} \right),$$

que en notación más compacta queda

$$\omega = \sum_I \omega_I d\bar{x}^I + dt \wedge \sum_J \omega_J d\bar{x}^J$$

Observar que a priori esta descomposición, que en coordenadas locales es algebraica (en el sentido de que se obtiene separando el diferencial dt de los demás), depende de las coordenadas x_i.

Sin embargo, a partir de la observación 1.2.1 y del lema 1.2.2, se obtiene que dada

$\omega \in \Omega^k(M \times [0,1])$, ésta puede ser escrita de forma única como $\eta + dt \wedge \nu$ con $\eta \in \Omega^k(M \times [0,1]), \nu \in \Omega^{k-1}(M \times [0,1])$ tales que $\eta_{(p,t)}(v_1, \ldots, v_k) = 0$ si $v_i \in Ker(d_{(p,t)}\pi_M)$ para algún i y $\nu_{(p,t)}(v_1, \ldots, v_{k-1}) = 0$ si $v_i \in Ker(d_{(p,t)}\pi_M)$ para algún i, es decir, la descomposición de arriba es independiente de coordenadas.

Dado $\alpha \in [0,1]$, se define el mapa $i_\alpha : M \to M \times [0,1]$ dado por $i_\alpha(p) = (p, \alpha), \forall p \in M$.

Observar que se tiene que

$$i_\alpha^*(d\bar{x}^I) = i_\alpha^*(d\bar{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_{i_k}) = i_\alpha^*(d\bar{x}_{i_1}) \wedge \cdots \wedge i_\alpha^*(d\bar{x}_{i_k}) =$$

$$di_\alpha^*(\bar{x}_{i_1}) \wedge \cdots \wedge di_\alpha^*(\bar{x}_{i_k}) = d(\bar{x}_{i_1} \circ i_\alpha) \wedge \cdots \wedge d(\bar{x}_{i_k} \circ i_\alpha) = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = dx^I$$

Además,

$$i_\alpha^*(dt) = di_\alpha^*(t) = d(t \circ i_\alpha) = 0, \text{ ya que } t \circ i_\alpha \text{ es constante igual a } \alpha.$$

De esto se deduce que, si

$$\omega = \sum_I \omega_I d\bar{x}^I + dt \wedge \sum_J \omega_J d\bar{x}^J,$$

se cumple que

$$i_\alpha^*(\omega) = \sum_I (\omega_I \circ i_\alpha) dx^I$$

Estamos ahora en condiciones de definir el operador integral de Poincaré:

$$\mathcal{I} : \Omega^k(M \times [0,1]) \to \Omega^{k-1}(M) /$$

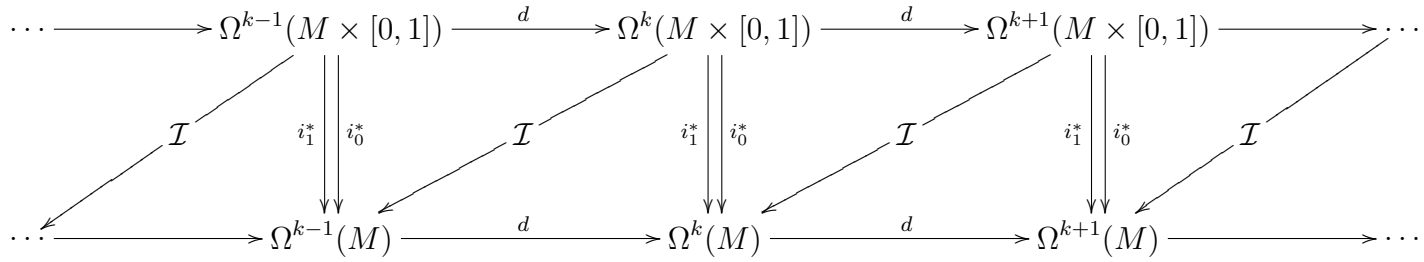
$$\mathcal{I}(\omega)_p(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \int_0^1 \nu_{(p,t)}(d_p i_t(v_1), \ldots, d_p i_t(v_{k-1}))dt = \int_0^1 i_t^*(\nu)_p(v_1, \ldots, v_{k-1})dt,$$

donde $\omega = \eta + dt \wedge \nu$ es la descomposición de antes.

Teorema 1.2.1. *Si $\omega \in \Omega^k(M \times [0,1])$, se cumple que*

$$i_1^*(\omega) - i_0^*(\omega) = d(\mathcal{I}(\omega)) + \mathcal{I}(d\omega)$$

Es decir, i_1^* e i_0^* son homotópicos como mapas de cadenas, donde la homotopía está dada por $\mathcal{I}$, como se visualiza en el siguiente diagrama:



Demostración. Basta con demostrar la identidad trabajando en un sistema de coordenadas fijo $(x_1,\dots,x_k)$, ya que la definición de $\mathcal{I}$ es independiente del mismo. Además, como el operador es claramente lineal, bsata con considerar sólo dos casos:

- $\omega = f d\bar{x}^I$.

  En este caso, $\mathcal{I}(\omega)=0$, y el único término de $d\omega$ donde aparece dt es $\frac{\partial f}{\partial t}dt\wedge d\bar{x}^I$.

  Se tiene además que

$$\int_0^1 i_t^*\left(\frac{\partial f}{\partial t}\wedge d\bar{x}^I\right)_p(v_1,\dots,v_k)dt = \int_0^1\left(\frac{\partial f}{\partial t}\circ i_t\right)(p)dx_p^I(v_1,\dots,v_k)dt =$$

$$\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial t}(p,t)dt\right)dx_p^I(v_1,\dots,v_k), \forall p\in M, \forall v_1,\dots,v_k\in T_pM$$

  Por lo tanto,

$$\mathcal{I}(d\omega)_p = \left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial t}(p,t)dt\right)dx_p^I = (f(p,1)-f(p,0))dx_p^I = i_1^*(\omega)_p - i_0^*(\omega)_p, \forall p\in M$$

- $\omega = f dt\wedge d\bar{x}^J$.

  Se tiene que

$$d\omega = -\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial f}{\partial\bar{x}_\alpha}dt\wedge d\bar{x}_\alpha\wedge d\bar{x}^J$$

  Además,

$$\int_0^1 i_t^*\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{x}_\alpha}d\bar{x}_\alpha\wedge d\bar{x}^J\right)_p(v_1,\dots,v_k)dt = \int_0^1\frac{\partial f}{\partial\bar{x}_\alpha}(p,t)(dx_\alpha\wedge dx^J)_p(v_1,\dots,v_k)dt =$$

$$\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\bar{x}_\alpha}(p,t)dt\right)(dx_\alpha\wedge dx^J)_p(v_1,\dots,v_k), \forall p\in M, \forall v_1,\dots,v_k\in T_pM$$

  Luego,

$$\mathcal{I}(d\omega)_p = -\sum_{\alpha=1}^n\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\bar{x}_\alpha}(p,t)dt\right)(dx_\alpha\wedge dx^J)_p, \forall p\in M$$

  Por otro lado,

$$d(\mathcal{I}(\omega))_p = d\left[\left(\int_0^1 f(p,t)dt\right)dx^J\right]_p = \sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\int_0^1 f(p,t)dt\right)(dx_\alpha\wedge dx^J)_p =$$

$$\sum_{\alpha=1}^n\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial\bar{x}_\alpha}(p,t)dt\right)(dx_\alpha\wedge dx^J)_p, \forall p\in M,$$

  lo cual termina la prueba. □

Corolario 1.2.1. *Lema de Poincaré.*

Demostración. Sean $p_0 \in M$ y $H : M \times [0,1] \to M$ mapa diferenciable tales que

$$H(p,1) = p, H(p,0) = p_0, \forall p \in M$$

Luego,

$$H \circ i_1 : M \to M \text{ es la identidad}$$

$$H \circ i_0 : M \to M \text{ es el mapa constante igual a } p_0$$

Por lo tanto, dada $\omega \in Z^k(\Omega^*(M))$, se tiene que

$$\omega = (H \circ i_1)^*(\omega) = i_1^*(H^*(\omega))$$

$$0 = (H \circ i_0)^*(\omega) = i_0^*(H^*(\omega))$$

Por otro lado,

$$d(H^*(\omega)) = H^*(d\omega) = 0$$

Se deduce del teorema 1.2.1 aplicado a $H^*(\omega)$ que

$$\omega = i_1^*(H^*(\omega)) - i_0^*(H^*(\omega)) = d\mathcal{I}(H^*(\omega)) + \mathcal{I}(d(H^*(\omega))) = d\mathcal{I}(H^*(\omega)),$$

y por lo tanto $\omega \in B^k(\Omega^*(M))$, que es lo que se quería probar. □

Capítulo 2

Fibrados Vectoriales y Fibrado de Referenciales

Definición 2.0.2. *Un fibrado vectorial n-dimensional (real) es una terna (V, π, M), donde $\pi : V \to M$ es un mapa diferenciable de variedades diferenciables satisfaciendo*

- *Para todo $p \in M$, $V_p := \pi^{-1}(\{p\})$ tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n.*
- *(Trivialidad Local) Para todo $p \in M$ existe un entorno abierto U de p en M y un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ tal que*
  - *si $P_1 : U \times \mathbb{R}^n \to U$ es la proyección sobre la primer variable, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^n \\ & {\scriptstyle \pi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle P_1} & \\ & U & \end{array}$$

  - *Si $P_2 : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la proyección sobre la segunda variable, $(P_2 \circ \varphi)|_{V_p} : V_p \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal, $\forall p \in U$.*

V se llama el espacio total, M el espacio base, y V_p la fibra en $p \in M$. El mapa $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ de la definición es una trivialización local del fibrado en p, mientras que una trivialización del fibrado es una familia $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ con $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ difeomorfismo y $\{U_\alpha\}$ cubrimiento abierto de M como en la definición. Toda trivialización se escribe como $\varphi = (\pi, \psi)$, donde $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ es un mapa diferenciable tal que $\psi|_{V_p} : V_p \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal, $\forall p \in U$.

Ejemplo 2.0.1. El fibrado producto, dado por la proyección canónica $\pi : V = M \times \mathbb{R}^n \to M$, donde la estructura de espacio vectorial en $\pi^{-1}(\{p\}) = \{p\} \times \mathbb{R}^n$ es la obvia.

Ejemplo 2.0.2. Los fibrados tangente y cotangente de una variedad diferenciable M, definidos como

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_pM^*,$$

con proyecciones dadas por

$$\pi : TM \to M / \pi(v) = p, \text{ si } v \in T_pM$$

$$\pi_* : T^*M \to M/\pi_*(\theta) = p, \text{ si } \theta \in T_pM^*$$

Observar que dada $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$ carta local, esta induce biyecciones

$$\widetilde{\varphi} : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(\varphi(U))/\widetilde{\varphi}(x,w) = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(x)}$$

$$\widetilde{\varphi}_* : U \times \mathbb{R}^n \to (\pi^*)^{-1}(\varphi(U))/\widetilde{\varphi}_*(x,w) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(x)}\right)^*,$$

que dan la estructura diferencial de TM y T^*M. Poniendo

$$\psi = (\varphi \times id) \circ \widetilde{\varphi}^{-1} : \pi^{-1}(\varphi(U)) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

$$\psi_* = (\varphi \times id) \circ \widetilde{\varphi}_*^{-1} : (\pi_*)^{-1}(\varphi(U)) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

se obtienen las trivializaciones de ambos fibrados.

En ocasiones es útil definir TM como la familia de pares (p, v) tales que $p \in M$ y $v \in T_pM$, y análogo para SM, lo cual es equivalente.

Ejemplo 2.0.3. El fibrado exterior k-ésimo de una variedad M,

$$\Lambda^k M = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_pM^*)$$

con proyección

$$\pi : \Lambda^k M \to M/\pi(\omega) = p, \text{ si } \omega \in \Lambda^k(T_pM^*)$$

Nuevamente, la estructura diferencial y de fibrado es inducida a partir de las cartas locales $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$, poniendo

$$\widetilde{\varphi} : U \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \to \pi^{-1}(\varphi(U))/$$

$$\widetilde{\varphi}(x,w) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} w_{i_1,\ldots,i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \big|_{\varphi(x)}\right)^* \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \big|_{\varphi(x)}\right)^*$$

Ejemplo 2.0.4. (Operaciones entre fibrados vectoriales) La mayoría de las operaciones entre espacios vectoriales se pueden extender a fibrados, haciéndolas fibra a fibra. Dados (V, π_V, M) y (W, π_W, M) fibrados vectoriales con la misma base, también los son los siguientes:

- La suma de Whitney o suma directa $(V \oplus W, \pi_V \oplus \pi_W, M)$, donde la fibra de p es $V_p \oplus W_p$ y la proyección es la obvia.
- El fibrado tensor $(V \otimes W, \pi_V \otimes \pi_W, M)$, con fibra $V_p \otimes W_p$.
- El fibrado $(Hom(V,W), Hom(\pi_V, \pi_W), M)$, con fibra $Hom(V_p, W_p)$.
- El fibrado dual (V^*, π_V^*, M), con fibra V_p^*.

Definición 2.0.3. *Una sección de un fibrado vectorial $\pi : V \to M$ es un mapa diferenciable $s : M \to V$ tal que $\pi \circ s = id$, es decir, un mapa que a cada elemento de M le hace corresponder un elemento de su fibra, de forma diferenciable. Denotaremos al conjunto de las secciones como $\Gamma(V)$.*

Observación 2.0.1. Todo fibrado vectorial tiene una sección nula dada por $s(p) = 0 \in V_p, \forall p \in M$, y es el vector nulo de la estructura de espacio vectorial real que tiene $\Gamma(V)$ con las operaciones punto a punto.

Ejemplo 2.0.5. Un campo diferenciable es una sección del fibrado tangente, mientras que una 1-forma diferencial lo es del cotangente, y una k-forma, del fibrado exterior k-ésimo.

Ejemplo 2.0.6. Si s es una sección del fibrado producto $V = M \times \mathbb{R}^n$, es de la forma

$$s(p) = (p, \sigma(p))$$

con $\sigma : M \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, y se tiene que $\Gamma(M \times \mathbb{R}^n) \simeq C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ como espacios vectoriales.

Definición 2.0.4. *Un morfismo entre dos fibrados vectoriales $\pi_V : V \to M$ y $\pi_W : W \to N$ es un par (f, φ) (que denotaremos $(f, \varphi) : (V, \pi_V, M) \to (W, \pi_W, N)$), donde $f : M \to N$ y $\varphi : V \to W$ son mapas diferenciables tales que*

- *el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_V} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_W} \\ M & \xrightarrow{\quad f\quad} & N \end{array}$$

  Es decir, $\varphi(V_p) \subseteq W_{f(p)}$, $\forall p \in M$ (lleva fibras en fibras).

- *$\varphi_p := \varphi|_{V_p} : V_p \to W_{f(p)}$ es lineal para todo $p \in M$.*

En el caso de que ambos fibrados tengan el mismo espacio base, para nosotros un morfismo entre ellos estará dado por un mapa diferenciable entre los espacios totales, lineal en las fibras, que denotaremos por $\varphi : (V, \pi_V, M) \to (W, \pi_W, M)$. Es decir, cuando en la noción anterior el mapa f es la identidad. La composición de morfismos se define de manera obvia (entrada a entrada), y se tiene como en cualquier categoría definida las noción de isomorfismo.

Así, todo fibrado vectorial es localmente isomorfo al fibrado producto vía un isomorfismo de fibrados con igual espacio base. Llamaremos fibrado trivial a cualquier fibrado vectorial globalmente isomorfo (como fibrados de misma base) al fibrado producto.

Observación 2.0.2. Es claro a partir de la definición que un morfismo $\varphi : (V, \pi_V, M) \to (W, \pi_W, M)$ es un isomorfismo si y sólo si φ es un difeomorfismo entre los espacios totales y $\varphi_p : V_p \to W_p$ es un isomorfismo lineal, para todo $p \in M$. Sin embargo, podemos mejorar esto:

Proposición 2.0.2. *Un morfismo $\varphi : (V, \pi_V, M) \to (W, \pi_W, M)$ es un isomorfismo si y sólo si $\varphi_p : V_p \to W_p$ es un isomorfismo lineal, para todo $p \in M$.*

Demostración. El directo es obvio. Para el recíproco, como φ es claramente biyectivo, basta chequear la diferenciablidad del mapa inverso. Como esto es un hecho local, podemos suponer que $V = W = M \times \mathbb{R}^n$. En este caso, $\varphi : M \times \mathbb{R}^n \to M \times \mathbb{R}^n$ tiene la forma

$$\varphi(p, v) = (p, \varphi_p(v)),$$

donde $\varphi_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal, por lo tanto la matriz de su diferencial es

$$d_{(p,v)}\varphi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ * & \varphi_p \end{pmatrix}$$

Por lo tanto esta matriz es invertible, y se deduce lo pedido del teorema de la función inversa. □

2.1. El Fibrado de Referenciales

Definición 2.1.1. *Dado V un espacio vectorial real de dimensión finita n, denotaremos $F(V) := Iso(\mathbb{R}^n, V)$ al conjunto de los isomorfismos lineales $x : \mathbb{R}^n \to V$.*

Los elementos de $F(V)$ se llaman referenciales de V. Observar que podemos identificar $F(V)$ con el conjunto de todas las bases ordenadas de V, ya que un referencial $x \in F(V)$ queda determinado por los vectores $x_i = x(e_i)$, siendo e_i la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Dado ahora un fibrado vectorial (V, π, M), se define

$$F(V) := \bigsqcup_{p \in M} F(V_p),$$

al cual le daremos una estructura diferenciable tal que el mapa $F\pi : F(V) \to M$ dado por $F\pi(x) = p$, si $x \in F(V_p)$, es diferenciable. A la terna $(F(V), F\pi, M)$ le llamaremos el fibrado de referenciales asociado a (V, π, M).

Observar que toda trivialización local $\varphi = (\pi, \psi) : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ induce una biyección

$$\widetilde{\varphi} : (F\pi)^{-1}(U) \to U \times GL_n(\mathbb{R})$$

dada por

$$\widetilde{\varphi}(x) = (p, \psi|_{V_p} \circ x),$$

donde estamos identificando $GL_n(\mathbb{R})$ con $Iso(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, identificación que se obtiene fijando la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.1.1. *Si n es la dimensión del fibrado (V, π, M), y m la de la variedad M,*

1. *$F(V)$ tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $m + n^2$.*
2. *Las biyecciones $\widetilde{\varphi}$ inducidas por las trivializaciones φ son difeomorfismos.*
3. *Se tiene una acción a derecha diferenciable $F(V) \times GL_n(\mathbb{R}) \to F(V)$ dada por*

   $$x.g = x \circ g, \forall x \in F(V), g \in GL_n(\mathbb{R})$$

   y si se mune a $U \times GL_n(\mathbb{R})$ con la acción $(p, g).h = (p, g \circ h), \forall h \in GL_n(\mathbb{R})$, se tiene que los mapas $\widetilde{\varphi}$ son equivariantes (esto es, $\widetilde{\varphi}(x.g) = \widetilde{\varphi}(x).g, \forall x \in (F\pi)^{-1}(U), g \in GL_n(\mathbb{R})$). Además, las $GL_n(\mathbb{R})$-órbitas de la acción son justamente las fibras $F(V_p)$.
4. *El mapa $F\pi$ es diferenciable, y para todo $p \in M$ existe un entorno abierto U de p en M tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} (F\pi)^{-1}(U) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & U \times GL_n(\mathbb{R}) \\ & {\scriptstyle F\pi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle P} & \\ & U & \end{array}$$

Demostración. (1) Sean $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ una trivialización del fibrado, y $\{\pi_\beta : W_\beta \subseteq \mathbb{R}^m \to \pi_\beta(W_\beta)\}$ un atlas para M. Cortando los U_α con los $\pi_\beta(W_\beta)$ y restringiendo los dominios adecuadamente si es necesario, se puede suponer que $\pi_\alpha : W_\alpha \to U_\alpha$ para todo α. Sea $\widetilde{\varphi}_\alpha : F\pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times GL_n(\mathbb{R}^n)$ la biyección inducida por φ_α, dada por $\widetilde{\varphi}_\alpha(x) = (p, \psi_\alpha|_{V_p} \circ x)$, si $x \in F(V_p)$, con $\varphi_\alpha = (\pi, \psi_\alpha)$.

Sea

$$\phi_\alpha : W_\alpha \times GL_n(\mathbb{R}) \to F\pi^{-1}(U_\alpha) / \phi_\alpha(p, g) = \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(p), g)$$

Luego ϕ_α es una biyección con inversa

$$\phi_\alpha^{-1}(x) = (\pi_\alpha^{-1}(F\pi(x)), \psi_\alpha|_{V_{F\pi(x)}} \circ x)$$

Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, se tiene que

$$\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha : W_\alpha \cap W_\beta \times GL_n(\mathbb{R}) \to W_\alpha \cap W_\beta \times GL_n(\mathbb{R})$$

está dado por

$$\phi_\beta^{-1}(\phi_\alpha(p,g)) = \phi_\beta^{-1}(\widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(p),g)) = \phi_\beta^{-1}((\psi_\alpha|_{V_{\pi_\alpha(p)}})^{-1} \circ g) = (\pi_\beta^{-1}(\pi_\alpha(p)), \psi_\beta|_{V_{\pi_\alpha(p)}} \circ (\psi_\alpha|_{V_{\pi_\alpha(p)}})^{-1} \circ g),$$

que es un difeomorfismo.

Identificando localmente $GL_n(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{n^2}$, se tiene que $\{\phi_\alpha\}$ es un atlas, que induce una estructura diferencial para $F(V)$.

(2) Se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F\pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi_\alpha}} & U_\alpha \times GL_n(\mathbb{R}) \\ \uparrow \phi_\alpha & & \pi_\alpha \times id \uparrow \\ W_\alpha \times GL_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{id} & W_\alpha \times GL_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

En efecto,

$$(\pi_\alpha^{-1} \times id)(\widetilde{\varphi}_\alpha(\psi_\alpha(p,g))) = (\pi_\alpha^{-1} \times id)(\pi_\alpha(p), g) = (p,g)$$

Luego, como id es un difeomorfismo, se tiene que $\widetilde{\varphi_\alpha}$ lo es para todo α.

(3) Dados $x \in F\pi^{-1}(U_\alpha)$ y $g \in GL_n(\mathbb{R})$, es

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(x.g) = (p, \psi_\alpha|_{V_p} \circ x \circ g) = (p, \psi_\alpha|_{V_p} \circ x).g = \widetilde{\varphi}_\alpha(x).g,$$

lo que prueba la equivariancia de los mapas.

Sea $\xi : F(V) \times GL_n(\mathbb{R}) \to F(V)/(x,g) \mapsto x \circ g$. Es directo verificar que es una acción. Para ver que es diferenciable, sea $\rho_\alpha = \phi_\alpha^{-1} \circ \xi \circ (\phi_\alpha \times id)$. O sea, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F\pi^{-1}(U_\alpha) \times GL_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\xi} & F\pi^{-1}(U_\alpha) \\ \uparrow \phi_\alpha \times id & & \phi_\alpha \uparrow \\ (W_\alpha \times GL_n(\mathbb{R})) \times GL_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\rho_\alpha} & W_\alpha \times GL_n(\mathbb{R}) \end{array}$$

Luego,

$$\rho_\alpha((p,g),h) = \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(p,g).h) = \phi_\alpha^{-1}((\psi_\alpha|_{V_{\pi_\alpha(p)}})^{-1} \circ g \circ h) = (p, g \circ h),$$

que es diferenciable. Luego la acción lo es.

Observar que dados $x, y \in F(V_p)$, se tiene que $y = x.g$ donde $g = x^{-1} \circ y$, luego $F(V_p)$ es una órbita.

(4) La conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{F}\pi)^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_\alpha} & U_\alpha \times GL_n(\mathbb{R}) \\ & {\scriptstyle F\pi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle P} & \\ & U_\alpha & \end{array}$$

es evidente, lo cual implica la diferenciablidad de $F\pi$. □

Definición 2.1.2. *Denotemos por $Eq(F(V), \mathbb{R}^n)$ al conjunto de los mapas equivariantes de $F(V)$ a $\mathbb{R}^n$, esto es, mapas diferenciables $\widetilde{s} : F(V) \to \mathbb{R}^n$ tales que $\widetilde{s}(x.g) = g^{-1}(\widetilde{s}(x)), \forall x \in F(V), g \in GL_n(\mathbb{R})$.*

Otra forma de interpretar las secciones está dada por la siguiente

Proposición 2.1.2. *$\Gamma(V)$ está en biyección con $Eq(F(V), \mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Se define

$$\varphi : \Gamma(V) \to Eq(F(V), \mathbb{R}^n)/$$
$$\varphi(s)(x) = x^{-1}(s(F\pi(x))), \forall x \in F(V), s \in \Gamma(V)$$

Se tiene que $\varphi(s)$ es diferenciable y

$$\varphi(s)(x.g) = g^{-1}(x^{-1}(s(F\pi(x.g)))) = g^{-1}(x^{-1}(s(F\pi(x)))) = g^{-1}(\varphi(s)(x)),$$

por lo tanto φ está bien definido.

Sea $\widetilde{\psi} : Eq(F(V), \mathbb{R}^n) \to Maps(F(V), V)$ definido por

$$\widetilde{\psi}(\widetilde{s})(x) = x(\widetilde{s}(x)), \forall \widetilde{s} \in Eq(F(V), \mathbb{R}^n), x \in F(V)$$

Usando la equivariancia, vale que

$$\widetilde{\psi}(\widetilde{s})(x.g) = x(g(\widetilde{s}(x.g))) = x(\widetilde{s}(x)) = \widetilde{\psi}(\widetilde{s})(x),$$

por lo tanto $\widetilde{\psi}(\widetilde{s})$ es constante en las fibras, y queda bien definido el mapa

$$\psi : Eq(F(V), \mathbb{R}^n) \to \Gamma(V)/$$

$$\psi(\widetilde{s})(p) = \widetilde{\psi}(\widetilde{s})(x), \text{ si } x \in F(V_p)$$

Además,

$$\varphi(\psi(\widetilde{s}))(x) = x^{-1}(\psi(\widetilde{s})(F\pi(x))) = x^{-1}(x(\widetilde{s}(x))) = \widetilde{s}(x), \forall \widetilde{s} \in Eq(F(V), \mathbb{R}^n), x \in F(V)$$

$$\psi(\varphi(s))(p) = x(\varphi(s)(x)) = x(x^{-1}(s(F\pi(x)))) = s(p), \forall s \in \Gamma(V), p \in M$$

por lo tanto los mapas ψ y φ son inversos uno de otro, y se tiene lo pedido. □

Proposición 2.1.3. *Un fibrado vectorial (V, π, M) es trivial si y sólo si $(F(V), F\pi, M)$ tiene una sección (esto es, un mapa diferenciable $\sigma : M \to F(V)$ tal que $F\pi \circ \sigma = id_M$)*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\varphi : (V, \pi, M) \to (M \times \mathbb{R}^n, P, M)$ un isomorfismo. Se define

$$\sigma : M \to F(V)/\sigma(p) = f_p^{-1} \in Iso(\mathbb{R}^n, V_p),$$

y se tiene que σ cumple lo pedido.

($\Leftarrow$) Sea $\sigma : M \to F(V)$ una sección. Se define

$$\varphi : M \times \mathbb{R}^n \to V/\varphi(p, v) = \sigma(p)(v)$$

Claramente este mapa preserva las fibras, y $\varphi_p = \sigma(p) \in Iso(\mathbb{R}^n, V_p)$, por lo tanto por la proposición 2.0.2 se tiene que φ es un isomorfismo. □

Observación 2.1.1. Una sección σ del fibrado de referenciales es equivalente a n secciones $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ del fibrado original tales que $(\sigma_1(p), \ldots, \sigma_n(p))$ es una base de V_p para todo $p \in M$, poniendo $\sigma(p)(e_i) = \sigma_i(p)$. A esto llamaremos campo de referenciales o referencial móvil, y como todo fibrado vectorial es localmente trivial siempre tiene un campo de referenciales local.

2.2. Métricas Riemannianas y fibrados ortogonales

Definición 2.2.1. *Una métrica Riemanniana en un fibrado vectorial (V, π, M) es una familia de productos internos $\langle -, - \rangle_p$ en V_p (esto es, formas bilineales, simétricas y definidas positivas), diferenciable en el sentido que si $s_1, s_2 \in \Gamma(V)$, el mapa $\langle s_1, s_2 \rangle$ dado por $\langle s_1, s_2 \rangle(p) = \langle s_1(p), s_2(p) \rangle_p$ pertenece a $C^\infty(M)$.*

Ejemplo 2.2.1. El fibrado producto tiene una métrica estándar inducida por el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$.

Observación 2.2.1. Es sencillo probar, usando particiones de la unidad, que todo fibrado vectorial tiene una métrica Riemanniana.

Observación 2.2.2. Una varidedad Riemanniana es una variedad cuyo fibrado tangente ha sido munido de una métrica Riemanniana.

Fijemos un fibrado vectorial n-dimensional (V, π, M) con métrica Riemanniana.

Proposición 2.2.1. *Todo punto de M tiene un entorno U y una trivialización $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi_p : V_p \to \mathbb{R}^n$ es una isometría lineal para todo p en U (con la métrica estándar en $U \times \mathbb{R}^n$).*

Demostración. Por la observación 2.1.1, todo punto de M tiene un entorno U con un referencial móvil local allí definido, es decir, secciones $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(\pi^{-1}(U))$ linealmente independientes punto a punto. Por el proceso de Gram-Schmidt se puede reemplazar estas secciones por $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Gamma(\pi^{-1}(U))$ tales que $(\sigma_1(p), \ldots, \sigma_n(p))$ es base ortonormal de V_p para todo p en U. Viendo esto como una sección σ del fibrado de referenciales, se obtiene como en la proposición 2.1.3, un isomorfismo $\psi : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$ dado por $\psi(p, v) = \sigma(p)(v), \forall (p, v) \in U \times \mathbb{R}^n$.

Como $\psi_p(e_i) = \sigma(p)(e_i) = \sigma_i(p)$, se tiene que ψ_p lleva una base ortonormal en otra idem, y por lo tanto es una isometría lineal. Se tiene entonces que $\varphi = \psi^{-1}$ cumple lo pedido. □

Definición 2.2.2. *Dado un espacio vectorial V de dimensión finita n con producto interno, denotaremos $F_0(V) := Isom(\mathbb{R}^n, V)$ al conjunto de las isometrias lineales $x : \mathbb{R}^n \to V$.*

Los elementos de $F_0(V)$ se llaman referenciales ortogonales de V, y se tiene que $x \in F_0(V)$ si y sólo si $(x(e_1), \ldots, x(e_n))$ es una base ortonormal de V.

Dado ahora un fibrado vectorial (V, π, M) con métrica Riemanianna, se define

$$F_0(V) = \bigsqcup_{p \in M} F_0(V_p) \subseteq F(V)$$

Se tiene nuevamente una proyección $F_0\pi = F\pi|_{F_0(V)} : F_0(V) \to M$. A la terna $(F_0(V), F_0\pi, M)$ le llamaremos el fibrado de referenciales ortogonal asociado a (V, π, M).

La prueba de la siguiente proposición es similar a la anterior.

Proposición 2.2.2. *1. $F_0(V) \subseteq F(V)$ es una subvariedad y $F_0\pi$ es diferenciable.*

2. Se tiene una acción a derecha diferenciable $F_0(V) \times O(n) \to F_0(V)$ tal que las órbitas son las fibras $F_0(V_p)$.

3. Para todo punto de M existe un entorno U y un difeomorfismo $\widehat{\varphi} : (F_0\pi)^{-1}(U) \to U \times O(n)$ tal que $\widehat{\varphi}(x.g) = \widehat{\varphi}(x).g, \forall x \in F_0(V), g \in O(n)$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} (F_0\pi)^{-1}(U) & \xrightarrow{\widehat{\varphi}} & U \times O(n) \\ & {\scriptstyle F_0\pi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle P} & \\ & U & \end{array}$$

□

Definición 2.2.3. *Dado un espacio vectorial V de dimensión finita n, orientado, con producto interno, denotemos por $F_0^+(V) := Isom_0^+(\mathbb{R}^n, V)$ a las isometrías lineales que preservan la orientación ($\mathbb{R}^n$ con la orientación usual).*

Observar que un elemento de $Isom_0^+(\mathbb{R}^n, V)$ lo podemos identificar con las bases ortonormales positivas de V vía la identificación usual.

Ahora, consideremos una variedad Riemanniana orientable M. Se define

$$F_0^+(M) = \bigsqcup_{p \in M} F_0^+(T_pM),$$

con la proyección natural $\pi^+ : F_0^+(M) \to M$. La terna $(F_0^+(M), \pi^+, M)$ es el fibrado ortogonal positivo asociado a M y los elementos de $F_0^+(M)$, referenciales ortonormales positivos. Se tiene nuevamente la siguiente proposición:

Proposición 2.2.3. *1. $F_0^+(M) \subseteq F_0(TM)$ es una subvariedad y π^+ es diferenciable.*

2. *Se tiene una acción a derecha diferenciable $F_0^+(M) \times SO(n) \to F_0^+(M)$ tal que las órbitas son las fibras $F_0^+(T_pM)$.*
3. *Para todo punto de M existe un entorno U y un difeomorfismo $\varphi : (\pi^+)^{-1}(U) \to U \times SO(n)$ tal que $\varphi(x.g) = \varphi(x).g, \forall x \in F_0^+(M), g \in SO(n)$ y el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} (\pi^+)^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times SO(n) \\ & {\scriptstyle \pi^+} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle P} & \\ & U & \end{array}$$

□

Capítulo 3

Conexiones en fibrados principales

Definición 3.0.4. *Dado un grupo de Lie G, un G-fibrado principal es una terna (E, π, M), donde $\pi : E \to M$ es un mapa diferenciable entre variedades diferenciables, junto con una G-acción a derecha diferenciable $E \times G \to E$, tales que*

- *Si $p \in M$, $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$ es una G-órbita.*
- *(Trivialidad Local) Para todo $p \in M$ existe un entorno abierto U de p en M y un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ satisfaciendo*
  - *Si $P : U \times G \to U$ es la proyección sobre la primer variable, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times G \\ & {\scriptstyle \pi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle P} & \\ & U & \end{array}$$

  conmuta.
  - *Si se toma la acción $G \to U \times G$ tal que $(p, h).g = (p, hg)$, $\forall g, h \in G$, $\forall p \in U$, se tiene que φ es equivariante (esto es $\varphi(x.g) = \varphi(x).g$, $\forall x \in E, \forall g \in G$)*

E se llama el espacio total, M el espacio base y $E_p = \pi^{-1}(\{p\})$ la fibra en $p \in M$. El mapa $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ de la definición es una trivialización local del fibrado en p, mientras que una trivialización del fibrado es una familia $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ con $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ difeomorfismo y $\{U_\alpha\}$ cubrimiento abierto de M como en la definición. Toda trivialización se escribe como $\varphi = (\pi, \psi)$, donde $\psi : \pi^{-1}(U) \to G$ es una mapa diferenciable equivariante, tal que $\psi|_{E_p} : E_p \to G$ es un difeomorfismo para todo $p \in U$.

Como toda G-órbita es obviamente no vacía, la definición implica que π es sobreyectiva. Al ser la proyección $P : U \times G \to U$ abierta, a partir de la conmutatividad del diagrama se deduce que $\pi|_{\pi^{-1}(U)}$ es abierta, y como es posible tomar una trivialización del fibrado, se tiene que π es abierta. Esto implica que π induce un homeomorfismo $\widetilde{\pi} : E/G \to M$ entre el espacio de G-órbitas (munido de la topología cociente) y M. Además, la acción de G en E es libre, puesto que si $x \in E$ y $g \in G$ son tales que $x.g = x$, tomando una trivialización local φ en $\pi(x)$, se tiene que $\varphi(x) = (\pi(x), \psi(x)) = \varphi(x.g) = \varphi(x).g = (\pi(x), \psi(x)g)$, luego $\psi(x) = \psi(x)g$, y como la acción por traslación en G es libre (basta multiplicar por el inverso), necesariamente es $g = e$.

Ejemplo 3.0.2. El fibrado de referenciales de un fibrado vectorial es un $GL_n(\mathbb{R})$-fibrado principal, el fibrado de referenciales ortogonal, un $O(n)$-fibrado principal, y el fibrado ortogonal positivo de una variedad Riemanniana, un $SO(n)$-fibrado principal.

Definición 3.0.5. *Un morfismo entre dos fibrados principales (E, π_E, M) y (F, π_F, M) es un par (f, φ) (que denotaremos $(f, \varphi) : (E, \pi_E, M) \to (F, \pi_F, M)$), donde $f : M \to N$ es un mapa diferenciable, $\varphi : E \to F$ es un mapa diferenciable y equivariante, tales que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

conmuta.

Es decir, φ es equivariante y $\varphi(E_p) \subseteq F_{f(p)},\ \forall p \in M$. En el caso de que ambos fibrados tengan el mismo espacio base, un morfismo entre ellos estará dado simplemente por un mapa diferenciable y equivariante entre los espacios totales, que preserve las fibras. Nuevamente se tiene definida la composición de morfismos de manera obvia.

Todo fibrado principal es localmente isomorfo al G-fibrado producto $\pi : E = M \times G \to M$, la proyección canónica sobre la primer variable (donde la acción de G en $M \times G$ es $(x, h).g = (x, hg)$), vía un isomorfismo de fibrados con igual espacio base. Llamaremos fibrado trivial a cualquier fibrado principal globalmente isomorfo (como fibrados de misma base) al fibrado producto.

Definición 3.0.6. *Una sección de un G-fibrado $\pi : E \to M$ es un mapa diferenciable $s : M \to E$ tal que $\pi \circ s = id_M$.*

Resulta ser que el hecho de tener secciones es muy restrictivo para un G-fibrado, que no lo es para fibrados vectoriales, como lo ilustra la siguiente proposición:

Proposición 3.0.4. *Un G-fibrado tiene una sección si y sólo es trivial.*

Demostración. Asumamos primero que el fibrado es trivial. Luego existe $\varphi : E \to M \times G$ un difeomorfismo equivariante tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \xrightarrow{\varphi} & M \times G \\ & {\scriptstyle \pi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle P} & \\ & M & \end{array}$$

conmuta. Sea $s : M \to E$ dada por $s(m) = \varphi^{-1}(m, e)$, luego s es diferenciable y $\pi(s(m)) = \pi(\varphi^{-1}(m, e)) = P(m, e) = m$, por lo tanto s es la sección buscada. Recíprocamente, dada $s : M \to E$ sección, sea $\psi : M \times G \to E$ tal que $\psi(p, g) = s(p).g$, que es diferenciable. Además, $\psi(p, g) = \psi(q, h) \Leftrightarrow s(p).g = s(q).h \Leftrightarrow s(p) = s(q).hg^{-1}$, y en este caso $s(p)$ y $s(q)$ pertenecen a la misma fibra, de donde se deduce que $p = \pi(s(p)) = \pi(s(q)) = q$, y, como la acción es libre, que $g = h$, por lo tanto ψ es inyectiva. Dado $x \in E$, como $s(\pi(x)) \in E_{\pi(x)}$, existe un (único) $g \in G$ tal que $x = s(\pi(x)).g$, luego $x = \psi(\pi(x), g)$, y por ende ψ es sobreyectiva y $\psi^{-1}(x) = (\pi(x), g)$ es diferenciable pues la acción, π y s lo son. $\pi(\psi(p, g)) = \pi(s(p).g) = \pi(s(p)) = p = P(p, g)$, luego se tiene la conmutatividad del diagrama, y $\psi((p, g).h) = \psi(p, gh) = s(p).(gh) = (s(p).g).h = \psi(p, g).h$, por lo tanto ψ es equivariante. Concluimos que ψ es el isomorfismo buscado. □

Observación 3.0.3. Dado $\pi : E \to M$ un G-fibrado principal, sea $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ una trivialización. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, restringiendo adecuadamente los dominios, se pueden considerar los mapas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$. Estos mapas toman la forma $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p, g) = (p, g_{\beta\alpha}(p)g),\ \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta,\ \forall g \in G$, donde $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ es un mapa diferenciable.

En efecto, si $\varphi_\alpha = (\pi, \psi_\alpha)$ con $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to G$ mapa equivariante tal que restricto a la fibra es un difeomorfismo, dados $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ y $g \in G$, sea $g_{\beta\alpha}(p, g) = \psi_\beta(x)g^{-1}$, donde

$x = \varphi_\alpha^{-1}(p,g) \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Afirmamos que $g_{\beta\alpha}(p,g)$ en realidad no depende de g. Para esto hay que ver que si $h \in G$ e $y = \varphi_\alpha^{-1}(p,h)$, se cumple que

$$\psi_\beta(x)g^{-1} = \psi_\beta(y)h^{-1},$$

lo cual es equivalente a

$$\psi_\beta(x.g^{-1}) = \psi_\beta(y.h^{-1}),$$

donde se ha usado la equivariancia de los mapas. Observar que $\pi(x.g^{-1}) = \pi(x) = p = \pi(y) = \pi(y.h^{-1})$, luego, como ψ_β es difeo en las fibras, lo anterior es equivalente a que

$$x.g^{-1} = y.h^{-1} \Leftrightarrow y = x.g^{-1}h \Leftrightarrow \varphi_\alpha(x.g^{-1}h) = (p,h)$$

$$\Leftrightarrow \varphi_\alpha(x).g^{-1}h = (p,h) \Leftrightarrow (p,g).g^{-1}h = (p,h),$$

lo cual es cierto.

Luego queda definido un mapa diferenciable $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ y se tiene que

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p,g) = (\pi(\varphi_\alpha^{-1}(p,g)), \psi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(p,g))) = (p, \psi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(p,g))g^{-1}g) = (p, g_{\beta\alpha}(p)g)$$

Definición 3.0.7. *La familia $\{g_{\beta\alpha}\}$ es lo que llamaremos el sistema de mapas de transición asociado a la trivialización $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$.*

Observar que de la identidad $\varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} = id$ se deduce que $g_{\alpha\alpha} = e$, y, si $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, de $\varphi_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\gamma \circ \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, que $g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta}g_{\beta\alpha}$. Estas dos igualdades se conocen como las condiciones de cociclo.

Definición 3.0.8. *Dados $\pi : E \to M$ G-fibrado principal y $f : N \to M$ mapa diferenciable entre variedades, se define el pull-back de π por f como el mapa $f^*\pi : f^*E \to N$ resultante de restringir la proyección canónica sobre la primer variable de $N \times E$ al conjunto $f^*E = \{(n,x) \in N \times E : f(n) = \pi(x)\}$.*

Es posible mostrar que este conjunto tiene estructura de variedad diferenciable y que $f^*\pi$ es un mapa diferenciable. De hecho, será un G-fibrado principal, donde la acción está dada por $(n,x).g = (n, x.g),\ \forall (x,n) \in f^*E,\ \forall g \in G$.

Si $\widetilde{f} : f^*E \to E$ es la restricción a f^*E de la proyección canónica sobre la segunda variable, se tiene por construcción que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\widetilde{f}} & E \\ \downarrow{\scriptstyle f^*\pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

conmuta, es decir $(f, \widetilde{f}) : (f^*E, f^*\pi, N) \to (E, \pi, M)$ será un morfismo de G-fibrados, puesto que $\widetilde{f}$ es claramente equivariante.

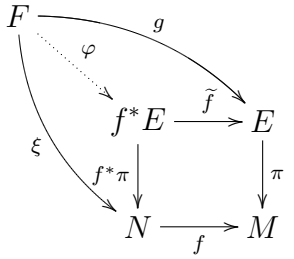
Veamos que el pull-back es efectivamente un G-fibrado. Es directo verificar que $f^*\pi^{-1}(\{n\}) = \{n\} \times E_{f(n)}$ es la G-órbita de n para todo $n \in N$, a partir de que $E_{f(n)}$ lo es para $f(n)$ en el fibrado original. Para obtener las trivializaciones del pull-back, dado $n \in N$, sea $\varphi = (\pi, \psi) : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ una trivialización local en $f(n)$. Sean $V = f^{-1}(U)$ y $\phi = id_N \times \psi : (f^*\pi)^{-1}(V) = \widetilde{f}^{-1}(\pi^{-1}(U)) \to V \times G$, que está bien definido puesto que $\widetilde{f}^{-1}(\pi^{-1}(U)) = \{(n,x) \in N \times E : f(n) = \pi(x) \in U\} \subseteq V \times \pi^{-1}(U)$, y es diferenciable. Claramente el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (f^*\pi)^{-1}(V) & \xrightarrow{\phi} & V \times G \\ & {\scriptstyle f^*\pi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle P} & \\ & U & \end{array}$$

conmuta, siendo P la proyección canónica sobre la primer variable.

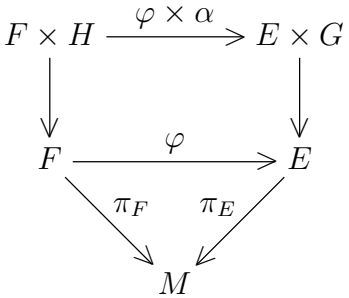
Además, $\phi(n,x) = \phi(m,y) \Leftrightarrow (n,\psi(x)) = (m,\psi(y))$, y como en este caso $\pi(x) = f(n) = f(m) = \pi(y)$, y ψ es difeomorfismo en las fibras, se tiene que $(n,x) = (m,y)$ y ϕ es inyectiva. Dado $(n,g) \in V \times G$, existe un único $x \in E_{f(n)} \subseteq \pi^{-1}(U)$ tal que $\psi(x) = g$ (x no es otro que $(\psi|E_{f(n)})^{-1}(g)$), luego $\phi(n,x) = (n,g)$, y ϕ es sobreyectiva, y su inversa $(n,g) \mapsto (n,\psi|E_{f(n)})^{-1}(g))$ es diferenciable. Si $g \in G$, $\phi((n,x).g) = \phi(n,x.g) = (n,\psi(x.g)) = (n,\psi(x).g) = \phi(n,x).g$, y ϕ es equivariante. Por lo tanto ϕ es una trivialización local en n.

Observación 3.0.4. Es interesante notar que el pull-back de un G-fibrado $\pi : E \to M$ por el mapa $f : N \to M$ no es otra cosa que el pull-back categórico (o producto fibrado, y uno se pregunta si el nombre no proviene justamente de la categoría de los fibrados) de los mapas f y π. En efecto, basta verificar la propiedad universal que define a este objeto. Sea entonces $\xi : F \to N$ un G-fibrado y $g : F \to E$ mapa diferenciable tal que $(f,g) : (F,\xi,N) \to (E,\pi,M)$ es morfismo de G-fibrados. Queremos ver que existe un único mapa diferenciable $\varphi : F \to f^*E$ tal que el diagrama



conmuta. Las condiciones $f^*\pi \circ \varphi = \xi$ y $\widetilde{f} \circ \varphi = g$ implican la unicidad, puesto que φ no puede ser otro que el mapa $x \mapsto (\xi(x), g(x)),\ \forall x \in F$. Como $f(\xi(x)) = \pi(g(x)),\ \forall x \in F$, se tiene que φ está bien definida, y es diferenciable. Además, es directo chequear que en realidad φ es un difeomorfismo, y por lo tanto todo mapa de fibrados factoriza como un isomorfismo al fibrado pull-back y el morfismo canónico $(f,\widetilde{f})$, que es algo más fuerte, particular de esta categoría.

Definición 3.0.9. *Dados H, G grupos de Lie y $\alpha : H \to G$ un homomorfismo, se dice que un H-fibrado principal $\pi_F : F \to M$ es una reducción a H del G-fibrado principal $\pi_E : E \to M$ relativa a α (o π_E es una extensión a G de π_F, relativa a α) si existe un mapa diferenciable $\varphi : F \to E$ que preserva las fibras y cumple $\varphi(x.h) = \varphi(x).\alpha(h), \forall x \in F, h \in H$. Es decir, si el siguiente diagrama es conmutativo:*



donde los mapas verticales son las correspondientes acciones.

Ejemplo 3.0.3. Dado un fibrado vectorial (V,π,M) munido de una métrica Riemanniana, el fibrado $(F_0(V), F_0\pi, M)$ es una reducción a $O(n)$ del fibrado de referenciales $(F(V), F\pi, M)$ relativa a la inclusión $O(n) \hookrightarrow GL_n(\mathbb{R})$, donde el mapa φ es la inclusión $F_0(V) \hookrightarrow F(V)$.

Ejemplo 3.0.4. Dada una variedad Riemanniana M orientable, $(F_0^+(M), \pi^+, M)$ es una reducción a $SO(n)$ de $(F_0(TM), F_0\pi, M)$ relativa a $SO(n) \hookrightarrow O(n)$, y por lo tanto también lo es de $(F(TM), F\pi, M)$.

Proposición 3.0.5. *Un G-fibrado principal $\pi : E \to M$ tiene una reducción a H relativa a α si y sólo si existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de M y una familia de mapas de transición de la forma $\{\alpha \circ h_{\beta\gamma}\}$, siendo $h_{\beta\gamma} : U_\gamma \cap U_\beta \to H$ satisfaciendo las condiciones de cociclo.*

□

Definición 3.0.10. *Dada M variedad diferenciable y V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita n, si $C^\infty(M,V)$ denota las funciones diferenciables de M a V (tomando en V la estructura diferencial natural inducida por un isomorfismo lineal con $\mathbb{R}^n$), una k-forma diferencial en M a valores en V es un mapa $\omega : \mathfrak{X}(M)^k \to C^\infty(M,V)$ multilineal y alternado con la propiedad tensorial usual.*

El conjunto de las k-formas diferenciales en M a valores en V se denota $\Omega^k(M,V)$, y sigue siendo un $C^\infty(M)$-módulo.

Observación 3.0.5. Dada $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de V, toda $\omega \in \Omega^k(M,V)$ se puede escribir como $\omega = \omega_1 e_1 + \cdots + \omega_n e_n$, donde $\omega_i \in \Omega^k(M) = \Omega^k(M,\mathbb{R})$ y $(e_i)_p(v_1,\dots,v_k) = e_i,\ \forall p \in M,\ \forall v_1,\dots,v_k \in T_pM,\ \forall i = 1,\dots,n$. En particular, si ω toma valores en un grupo matricial, estará dada por una matriz de k-formas usuales.

Definición 3.0.11. *Si $f : M \to V$ es un mapa diferenciable y $X \in \mathfrak{X}(M)$, observar que se puede seguir definiendo $X(f) : M \to V$ como $X(f)(p) = d_p f(X(p))$. Tomando una base $\{e_1,\dots,e_n\}$ de V, y escribiendo $f = f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$ donde $f_i \in C^\infty(M)$, lo anterior no es otra cosa que $X(f)(p) = X(f_1)(p)e_1 + \cdots + X(f_n)(p)e_n = d_p f_1(X(p))e_1 + \cdots + d_p f_n(X(p))e_n$. Esto nos permite definir con la misma fórmula que ya teníamos para las formas diferenciales usuales (cuando $V = \mathbb{R}$), la derivada exterior $d : \Omega^k(M,V) \to \Omega^{k+1}(M,V)$, y se sigue cumpliendo la identidad $d^2 = 0$. Si $\omega = \omega_1 e_1 + \cdots + \omega_n e_n \in \Omega^k(M,V)$, es directo chequear que la derivada exterior queda $d\omega = (d\omega_1)e_1 + \cdots + (d\omega_n)e_n$, siendo $d\omega_i$ la derivada exterior usual aplicada a ω_i.*

Si V y W son dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita, el producto exterior se define ahora como

$$\wedge : \Omega^k(M,V) \otimes \Omega^l(M,W) \to \Omega^{k+l}(M, V \otimes W)/$$

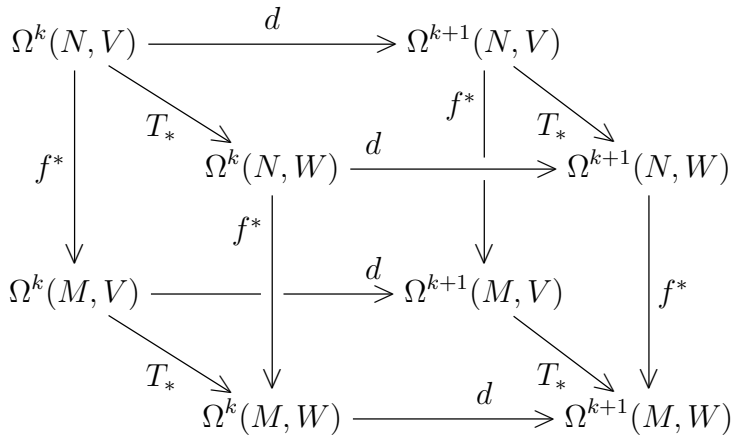
$$\omega_1 \wedge \omega_2(X_1,\dots,X_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sg(\sigma)\omega_1(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)}) \otimes \omega_2(X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(k+l)}),$$

donde S_n es el grupo de permutaciones de n elementos. Tenemos nuevamente la fórmula $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta, \forall \omega \in \Omega^k(M,V), \eta \in \Omega^l(M,W)$.

Definición 3.0.12. *Dado $f : M \to N$ mapa diferenciable entre variedades se define con la misma fórmula el pullback $f^* : \Omega^k(N,V) \to \Omega^k(M,V)$, y dada $T : V \to W$ transformación lineal entre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, ésta induce un mapa $T_* : \Omega^k(M,V) \to \Omega^k(M,W)$ dado por $T_*(\omega(X_1,\dots,X_k)) = T \circ \omega(X_1,\dots,X_k),\ \forall \omega \in \Omega^k(M,V),\ \forall X_1,\dots,X_k \in \mathfrak{X}(M)$.*

Nuevamente, si $\omega = \omega_1 e_1 + \cdots + \omega_n e_n \in \Omega^k(N,V)$, se cumple que $f^*(\omega) = f^*(\omega_1)e_1 + \cdots + f^*(\omega_n)e_n \in \Omega^k(M,V)$.

Proposición 3.0.6. Se cumple que los siguientes diagramas conmutan



Demostración. En efecto, denotando $d_pf^k : T_pM^k \to T_{f(p)}N^k$ a $d_pf \times \cdots \times d_pf$ k veces, se tiene que

$$T_*(f^*(\omega))_p = T \circ f^*(\omega)_p = T \circ \omega_{f(p)} \circ d_pf^k = T_*(\omega)_{f(p)} \circ d_pf^k = f^*(T_*(\omega))_p,\ \forall \omega \in \Omega^k(N,V),\ \forall p \in M$$

$$\Rightarrow T_* \circ f^* = f^* \circ T_*$$

Por otro lado, observar que

$$X(T_*(\omega)(X_1,\ldots,X_k))(p) = X(T \circ \omega(X_1,\ldots,X_k))(p) =$$

$$d_{\omega(X_1,\ldots,X_k)(p)}T(d_p\omega(X_1,\ldots,X_k)(X(p))) = T(X(\omega(X_1,\ldots,X_k))(p)),$$

$$\forall \omega \in \Omega^k(N,V), \forall p \in N, \forall X, X_1, \ldots X_k \in \mathfrak{X}(N)$$

Entonces,

$$(dT_*(\omega))(X_1,\ldots,X_{k+1})(p) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i(T_*(\omega)(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{k+1}))(p)$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}T_*(\omega)([X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1})(p) =$$

$$\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}T(X_i(\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{k+1})))(p)$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}T(\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{k+1}))(p) = T_*(d\omega)(X_1,\ldots,X_{k+1})(p),$$

$$\forall \omega \in \Omega^k(N,V), \forall p \in N, \forall X_1,\ldots,X_{k+1} \in \mathfrak{X}(N)$$

$$\Rightarrow d \circ T_* = T_* \circ d$$

□

Proposición 3.0.7. *Dados $T : V \to X$ y $S : W \to Y$ mapas lineales entre espacios vectoriales, $\omega \in \Omega^k(M,V)$ y $\eta \in \Omega^k(M,W)$, vale que $(T \otimes S)_*(\omega \wedge \eta) = T_*(\omega) \wedge S_*(\eta) \in \Omega^{k+l}(M, X \otimes Y)$*

Demostración.

$$((T \otimes S)_*(\omega \wedge \eta))_p(v_1,\ldots,v_{k+l}) = (T \otimes S)((\omega \wedge \eta)_p(v_1,\ldots,v_{k+l})) =$$

$$\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma \in S_{k+l}} sg(\sigma)T(\omega_p(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)}))\otimes S(\eta_p(v_{\sigma(k+1)},\ldots,v_{\sigma(k+l)})) = (T_*(\omega)\wedge S_*(\eta))_p(v_1,\ldots,v_{k+l}),$$

$$\forall p \in M, \forall v_1,\ldots,v_{k+l} \in T_pM$$

□

Procedamos ahora a introducir la noción de conexión en un fibrado principal. Para motivar ideas, considerar el fibrado trivial $\pi : E = M \times G \to M$. Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie del grupo G, sea $\theta \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ dada por $\theta_{(x,g)} = d_{(x,g)}(\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \pi_2) : T_{(x,g)}E \to T_eG = \mathfrak{g},\ \forall (x, g) \in E$, donde $\mathcal{L}_h : G \to G$ es la traslación a izquierda por $h \in G$, y $\pi_2 : E \to G$ es la proyección canónica sobre la segunda variable. Se definen además los mapas $\mathcal{I}_{(x,g)} : G \to E$ tal que $\mathcal{I}_{(x,g)}(h) = (x, g).h = (x, gh)$, y $\nu_{(x,g)} = d_e\mathcal{I}_{(x,g)} : \mathfrak{g} \to T_{(x,g)}E,\ \forall (x, g) \in E$. Afirmamos que

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\nu_{(x,g)}} T_{(x,g)}E \xrightarrow{d_{(x,g)}\pi} T_xM \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. En efecto, Como los mapas $\mathcal{I}_{(x,g)}$ y π son respectivamente inyectivo y sobreyectivo, y tomar diferenciales es funtorial, también lo son $\nu_{(x,g)}$ y $d_{(x,g)}\pi$. Para ver que $Im\nu_{(x,g)} = Ker d_{(x,g)}\pi$, observar que $d_{(x,g)}\pi : T_xM \times T_gG \to T_xM$ está dado por $d_{(x,g)}\pi(v, w) = v,\ \forall v \in T_xM,\ \forall w \in T_gG$ y $\nu_{(x,g)} : \mathfrak{g} \to T_{(x,g)}E$, como $\nu_{(x,g)}(Y) = (0, d_e\mathcal{L}_g(Y)),\ \forall Y \in \mathfrak{g}$, luego $Ker d_{(x,g)}\pi = 0 \times T_gG = 0 \times d_e\mathcal{L}_g(\mathfrak{g}) = Im\nu_{(x,g)}$.

Aún más, se tiene la siguiente

Proposición 3.0.8. *$\theta_{(x,g)} \circ \nu_{(x,g)} = id_{\mathfrak{g}}$ y $R_g^*(\theta) = Ad(g^{-1})_*(\theta)$, donde $Ad(g^{-1})_* : \Omega^1(E, \mathfrak{g}) \to \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ es el mapa inducido por $Ad(g^{-1}) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, y $R_g : E \to E$ es la acción de g en E, $R_g(x, h) = (x, hg)$.*

Demostración. Operando,

$$R_g^*(\theta)_{(x,h)} = \theta_{(x,hg)} \circ d_{(x,h)}R_g = d_{(x,hg)}(\mathcal{L}_{g^{-1}h^{-1}} \circ \pi_2) \circ d_{(x,h)}R_g = d_{(x,h)}(\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \mathcal{L}_{h^{-1}} \circ \pi_2 \circ R_g)$$

Por otro lado,

$$Ad(g^{-1}) = d_e\mathcal{C}_{g^{-1}},\ \text{donde } \mathcal{C}_{g^{-1}} : G \to G/\ \mathcal{C}_{g^{-1}}(x) = g^{-1}xg,\ \forall x \in G$$

Luego,

$$Ad(g^{-1})_*(\theta)_{(x,h)} = Ad(g^{-1}) \circ \theta_{(x,h)} = d_e\mathcal{C}_{g^{-1}} \circ d_{(x,h)}(\mathcal{L}_{h^{-1}} \circ \pi_2) = d_{(x,h)}(\mathcal{C}_{g^{-1}} \circ \mathcal{L}_{h^{-1}} \circ \pi_2)$$

Como $\mathcal{C}_{g^{-1}} \circ \mathcal{L}_{h^{-1}} \circ \pi_2 = \mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \mathcal{L}_{h^{-1}} \circ \pi_2 \circ R_g/\ (x, a) \mapsto g^{-1}h^{-1}ag,\ \forall (x, a) \in E$, se tiene que

$$R_g^*(\theta) = Ad(g^{-1})_*(\theta)$$

Para la otra igualdad,

$$\theta_{(x,g)} \circ \nu_{(x,g)} = d_{(x,g)}(\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \pi_2) \circ d_e\mathcal{I}_{(x,g)} = d_e(\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \pi_2 \circ \mathcal{I}_{(x,g)}) = d_eid_G = id_{\mathfrak{g}}$$

□

Esta 1-forma θ será lo que llamaremos conexión de Maurer-Cartan en el fibrado producto.

Observar que en el fibrado $G \to pto$, donde el espacio base consta de un único punto, la 1-forma anterior queda $\theta_g = d_g\mathcal{L}_{g^{-1}}$, y se cumple que es invariante a izquierda:

$$\mathcal{L}_h^*(\theta)_g = \theta_{hg} \circ d_g\mathcal{L}_h = d_{hg}\mathcal{L}_{(hg)^{-1}} \circ d_g\mathcal{L}_g = d_g\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ d_{hg}\mathcal{L}_{h^{-1}} \circ d_g\mathcal{L}_h = d_g\mathcal{L}_{g^{-1}} = \theta_g, \forall g, h \in G$$

En general, en un fibrado principal arbitrario,

Definición 3.0.13. *Dados G grupo de Lie, sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie asociada a G. Una conexión en un G-fibrado principal $\pi : E \to M$ es $\theta \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ tal que*

- *$\theta_x \circ \nu_x = id_{\mathfrak{g}}$, donde $\nu_x = d_e\mathcal{I}_x : \mathfrak{g} \to T_xE$ siendo $\mathcal{I}_x : G \to E/\ \mathcal{I}_x(g) = x.g,\ \forall x \in E$*
- *$R_g^*(\theta) = Ad(g^{-1})_*(\theta)$, donde $R_g : E \to E/\ R_g(x) = x.g,\ \forall g \in G$*

Interpretemos un poco la definición. Para todo $x \in E$, se tiene nuevamente una sucesión

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\nu_x} T_xE \xrightarrow{d_x\pi} T_{\pi(x)}M \longrightarrow 0,$$

que cumple ser exacta ya que, siendo la exactitud de la misma un hecho local del fibrado, el cual es localmente trivial, bastaba con verlo en el fibrado $M \times G \to M$, que ya lo hemos hecho. O bien, para el lector escéptico, dado $x \in E$, sean U entorno de $\pi(x)$ y $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ difeomorfismo equivariante tal que $P \circ \varphi = \pi$, siendo $P : U \times G \to U$ la proyección canónica. Luego $d_x\varphi : T_xE \to T_{\varphi(x)}(U \times G)$ es un isomorfismo y $d_{\varphi(x)}P \circ d_x\varphi = d_x\pi$. Además, $\mathcal{I}_{\varphi(x)}(g) = \varphi(x)g = \varphi(x.g) = \varphi(\mathcal{I}_x(g))$, luego $d_x\varphi \circ \nu_x = \nu_{\varphi(x)}$ (notar que aquí se abusa de notación al llamar igual a los mapas $\mathcal{I}_x : G \to E$ con $x \in E$ e $\mathcal{I}_y : G \to U \times G$ con $y \in U \times G$, y a sus correspondientes diferenciales). Por lo tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\nu_x} & T_xE & \xrightarrow{d_x\pi} & T_{\pi(x)}M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle d_x\varphi}\simeq & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\nu_{\varphi(x)}} & T_{\varphi(x)}(U \times G) & \xrightarrow{d_{\varphi(x)}P} & T_{\pi(x)}M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos (o sea un isomorfismo de sucesiones exactas cortas), luego la exactitud de la sucesión de abajo implica la de la de arriba.

Ahora, el hecho de que la conexión satisface $\theta_x \circ \nu_x = id_{\mathfrak{g}}$ dice que la sucesión exacta se escinde vía θ_x, y es posible escribir $T_xE = H_x \oplus V_x$, siendo $H_x = Ker\theta_x$ y $V_x = Im\nu_x = Kerd_x\pi \simeq \mathfrak{g}$. Los elementos de estos subespacios se llaman, respectivamente, horizontales y verticales. La justificación para el nombre es justamente que cuando uno proyecta a $T_{\pi(x)}M$ vía $d_x\pi$, los vectores verticales van todos a cero, mientras que que los horizontales se mapean biyectivamente con $T_{\pi(x)}M \simeq H_x$. Otra forma de interpretar los vectores verticales, es que son los tangentes a la fibra (ya que $Im\mathcal{I}_x = E_x$).

Para la otra condición, tenemos, para poder interpretarla mejor, la siguiente

Proposición 3.0.9. *Para $\theta \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ satisfaciendo $\theta_x \circ \nu_x = id_{\mathfrak{g}}$ para todo $x \in E$, la condición $R_g^*(\theta) = Ad(g^{-1})_*(\theta), \forall g \in G$, es equivalente a que $d_xR_g(H_x) = H_{x.g}, \forall x \in E, \forall g \in G$*

Demostración. sean $g \in G$ y $x \in E$. Asumiendo la primera, si $v \in H_x$, se tiene que

$$\theta_{x.g}(d_xR_g(v)) = R_g^*(\theta)_x(v) = (Ad(g^{-1})_*(\theta))_x(v) = Ad(g^{-1})(\theta_x(v)) = 0$$

Luego $d_xR_g(H_x) \subseteq H_{x.g}$, y como R_g es un difeomorfismo, son dos espacios vectoriales de la misma dimensión (la de la variedad M), y por lo tanto son iguales.

Recíprocamente, basta chequear que vale la igualdad en vectores horizontales y verticales por separado. Si $v \in H_x$, vale que $d_xR_g(v) \in H_{x.g}$ por hipótesis, luego

$$R_g^*(\theta)_x(v) = \theta_{x.g}(d_xR_g(v)) = 0 = Ad(g^{-1})(\theta_x(v)) = (Ad(g^{-1})_*(\theta))_x(v)$$

Si ahora $v \in V_x$, sea $A \in \mathfrak{g}$ tal que $v = \nu_x(A)$.

Observar que para todo $g \in G$, se tiene la igualdad $d_xR_g \circ \nu_x = \nu_{x.g} \circ Ad(g^{-1})$, puesto que ambos son el diferencial en la identidad del mapa $G \to E/h \mapsto xhg = xg(g^{-1}hg)$. Por lo tanto,

$$R_g^*(\theta)_x(v) = R_g^*(\theta)_x(\nu_x(A)) = \theta_{x.g}(d_xR_g(\nu_x(A))) = \theta_{x.g}(\nu_{x.g}(Ad(g^{-1})(A))) =$$

$$Ad(g^{-1})(A) = Ad(g^{-1})(\theta_x(\nu_x(A))) = Ad(g^{-1})(\theta_x(v)) = Ad(g^{-1})_*(\theta)_x(v),$$

lo cual termina la prueba. □

Es decir, una conexión provee de una distribución (una elección diferenciable de subespacios del fibrado tangente), horizontal e invariante por la acción. Además, recíprocamente, se cumple que tal distribución define una conexión, por lo tanto es equivalente tener la una o la otra.

Ejemplo 3.0.5. Si $G = GL_n(\mathbb{R})$, la conexión de Maurer-Cartan en $G \to pto$ es $\theta_g = g^{-1}dg$:

Dados $g \in GL_n(\mathbb{R})$ y $A \in T_gGL_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$, sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to GL_n(\mathbb{R})$ tal que $\alpha(0) = g, \dot{\alpha}(0) = A$. Luego,

$$\theta_g(A) = d_g\mathcal{L}_{g^{-1}}(A) = \left(\frac{\partial}{\partial t}g^{-1}\alpha(t)\right)\Big|_{t=0} = g^{-1}A = g^{-1}dg(A)$$

Lema 3.0.1. *Sea*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & F \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} \\ M & \xrightarrow{\quad f\quad} & N \end{array}$$

un mapa de G-fibrados. Si $\theta \in \Omega^1(F, \mathfrak{g})$ es una conexión en $\pi_F : F \to N$, se tiene que $\varphi^*(\theta) \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ es una conexión en $\pi_E : E \to M$

Demostración. Si $x \in E$ e $y \in F$, sean

$$\mathcal{I}_x^E : G \to E/\mathcal{I}_x^E(g) = x.g,\ \nu_x^E = d_e\mathcal{I}_x^E$$

$$\mathcal{I}_y^F : G \to F/\mathcal{I}_y^F(g) = y.g,\ \nu_y^F = d_e\mathcal{I}_y^F$$

Por hipótesis se cumple que $\theta_y \circ \nu_y^F = id_{\mathfrak{g}}, \forall y \in F$.
Además,

$$\varphi(\mathcal{I}_x^E(g)) = \varphi(x.g) = \varphi(x).g = \mathcal{I}_{\varphi(x)}^F(g), \forall g \in G \Rightarrow \varphi \circ \mathcal{I}_x^E = \mathcal{I}_{\varphi(x)}^F$$

Por lo tanto,

$$\varphi^*(\theta)_x \circ \nu_x^E = \theta_{\varphi(x)} \circ d_x\varphi \circ d_e\mathcal{I}_x^E = \theta_{\varphi(x)} \circ d_e(\varphi \circ \mathcal{I}_x^E) = \theta_{\varphi(x)} \circ d_e\mathcal{I}_{\varphi(x)}^F = \theta_{\varphi(x)} \circ \nu_{\varphi(x)}^F = id_{\mathfrak{g}}$$

Si $g \in G$, sean

$$R_g^E : E \to E/R_g^E(x) = x.g,\ Ad^E(g) = Ad(g)_* : \Omega^*(E, \mathfrak{g}) \to \Omega^*(E, \mathfrak{g})$$

$$R_g^F : F \to F/R_g^F(y) = y.g,\ Ad^F(g) = Ad(g)_* : \Omega^*(F, \mathfrak{g}) \to \Omega^*(F, \mathfrak{g})$$

Por hipótesis se cumple que $(R_g^F)^*(\theta) = Ad^F(g^{-1})(\theta)$.
Además,

$$\varphi(R_g^E(x)) = \varphi(x.g) = \varphi(x).g = R_g^F(\varphi(x)), \forall x \in E \Rightarrow \varphi \circ R_g^E = R_g^F \circ \varphi$$

Entonces,

$$(R_g^E)^*(\varphi^*(\theta))_x = \varphi^*(\theta)_{x.g} \circ d_xR_g^E = \theta_{\varphi(x.g)} \circ d_{x.g}\varphi \circ d_xR_g^E = \theta_{\varphi(x).g} \circ d_x(\varphi \circ R_g^E) =$$

$$\theta_{\varphi(x).g} \circ d_x(R_g^F \circ \varphi) = \theta_{\varphi(x).g} \circ d_{\varphi(x)}R_g^F \circ d_x\varphi = (R_g^F)^*(\theta)_{\varphi(x)} \circ d_x\varphi = Ad^F(g^{-1})(\theta)_{\varphi(x)} \circ d_x\varphi =$$

$$Ad(g^{-1}) \circ \theta_{\varphi(x)} \circ d_x\varphi = Ad(g^{-1}) \circ \varphi^*(\theta)_x = Ad^E(g^{-1})(\varphi^*(\theta))_x, \forall x \in E$$

$$\Rightarrow (R_g^E)^*(\varphi^*(\theta)) = Ad^E(g^{-1})(\varphi^*(\theta)),$$

lo cual prueba lo pedido. □

Observación 3.0.6. El lema anterior implica que todo fibrado trivial tiene una conexión, la cual es inducida por la conexión de Maurer-Cartan en el fibrado producto. A esta conexión la llamaremos conexión plana inducida por el correspondiente isomorfismo.

Lema 3.0.2. *Si $\theta^1, \dots, \theta^k$ son conexiones en el G-fibrado $\pi : E \to M$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in C^\infty(M)$ son tales que $\sum_i \lambda_i = 1$, se tiene que $\theta = \sum_i (\lambda_i \circ \pi)\theta^i$ es una conexión.*

Demostración.

$$\theta_x \circ \nu_x = \sum_i (\lambda_i \circ \pi)(\theta^i_x \circ \nu_x) = \sum_i (\lambda_i \circ \pi) id_{\mathfrak{g}} = id_{\mathfrak{g}}, \forall x \in E$$

$$R^*_g(\theta) = \sum_i (\lambda_i \circ \pi) R^*_g(\theta^i) = \sum_i (\lambda_i \circ \pi) Ad(g^{-1})_*(\theta^i) = Ad(g^{-1})_*(\theta)$$

□

Corolario 3.0.1. *Si M es una variedad diferenciable paracompacta, todo G-fibrado $\pi : E \to M$ tiene una conexión.*

Demostración. Sea $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ una trivialización del fibrado. La hipótesis de paracompacidad permite tomar una partición de la unidad $\{\lambda_\alpha\} \subseteq C^\infty(M)$ subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha\}$. Por la observación anterior, φ_α induce una conexión plana θ^α en $\pi^{-1}(U_\alpha)$, la cual puede ser extendida a una conexión en E y poniendo $\theta = \sum_\alpha (\lambda_\alpha \circ \pi)\theta^\alpha$ se obtiene una conexión en E por el lema anterior, puesto que esta suma es localmente finita. □

Definición 3.0.14. *Dados $\pi : E \to M$ un G-fibrado con una conexión θ, V un espacio vectorial de dimensión finita y $\omega \in \Omega^k(E, V)$, diremos que ω es horizontal si $w_x(v_1, \dots, v_k) = 0$ si alguno de los v_i es vertical, $\forall v_1, \dots, v_k \in T_xE, \forall x \in E$. Análogamente se definen las formas verticales. Si $\rho : G \to Gl(V)$ es una representación, diremos que ω es ρ-equivariante si $R^*_g(\omega) = \rho(g^{-1})_*(\omega), \forall g \in G$, y si la representación es la trivial, que ω es invariante (o sea $R^*_g(\omega) = \omega, \forall g \in G$).*

Observar que si $\theta \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ es una conexión, por definición es Ad-equivariante, donde $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ es la representación adjunta de G. Por convención, diremos que una forma Ad-equivariante es equivariante, a secas.

Lema 3.0.3. *Si $\pi : E \to M$ G-fibrado, el conjunto de las k-formas diferenciales usuales (a valores en $\mathbb{R}$) que son horizontales e invariantes coincide con la imagen de $\pi^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(E)$.*

Demostración. Sea $\omega \in \Omega^k(E)$. Si ω es horizontal e invariante, definiremos $\eta \in \Omega^k(M)$ tal que $\pi^*(\eta) = \omega$, como sigue:

Dados $p \in M$ y $v_1, \dots, v_k \in T_pM$, como π es sobreyectiva, su diferencial también, luego existe $x \in E_p$ y $w_1, \dots, w_k \in T_xE$ tales que $d_x\pi(w_i) = v_i$ para todo i. Pondremos

$$\eta_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_x(w_1, \dots, w_k)$$

Hay que chequear que esto no depende de la elección de x ni de los w_i. Si $y \in E_p$, $u_1, \dots, u_k \in T_yE$ son tales que $d_y\pi(u_i) = v_i$ para todo i, sean $g \in G$ tal que $y = x.g = R_g(x)$ y $\widetilde{u_i} = d_xR_g(w_i)$ para todo i. Se tiene que

$$\pi = \pi \circ R_g \Rightarrow d_x\pi = d_y\pi \circ d_xR_g$$

Además, como ω es invariante, vale que

$$\omega_y(\widetilde{u_1}, \dots, \widetilde{u_k}) = \omega_{R_g(x)}(d_xR_g(w_1), \dots, d_xR_g(w_k)) = R^*_g(\omega)_x(w_1, \dots, w_k) = \omega_x(w_1, \dots, w_k)$$

Por lo tanto,

$$d_y\pi(u_i) = v_i = d_x\pi(w_i) = d_y\pi(d_xR_g(w_i)) = d_y\pi(\widetilde{u_i})$$
$$\Rightarrow u_i - \widetilde{u_i} \in Ker d_y\pi = Im\nu_y = V_y, \forall i$$

Como ω es horizontal,

$$0 = \omega_y(u_1, \dots, u_i - \widetilde{u_i}, \dots, u_k), \forall i \Rightarrow \omega_y(u_1, \dots, u_k) = \omega_y(\widetilde{u_1}, \dots, \widetilde{u_k}) = \omega_x(w_1, \dots, w_k)$$

Esto prueba que η está bien definida. Queda por ver que es efectivamente una forma diferencial, puesto que en ese caso, por definición es que $\pi^*(\eta) = \omega$.

Pero esto se deduce de la trivialidad local, ya que, si $v_1, \dots, v_k$ son extendidos a campos $X_1, \dots, X_k$ en M (lo cual siempre es posible en una variedad, por un argumento de bump-function), como el fibrado es localmente trivial, es posible extender $w_1, \dots, w_k$ en un entorno de x a campos $Y_1, \dots, Y_k$ en E satisfaciendo $\pi_*(Y_i) = X_i$, por lo cual $\eta(Y_1, \dots, Y_k)$ será diferenciable en un entorno de x, y esto es lo mismo que la diferenciabilidad de η como forma.

Recíprocamente, si $\omega = \pi^*(\eta) \in \Omega^k(E)$, sean $g \in G, x \in E$ y $v_1, \dots, v_k \in T_xE$ con $v_i \in V_x = Kerd_x\pi$. Luego,

$$R_g^*(\omega) = (\pi \circ R_g)^*(\eta) = \pi^*(\eta) = \omega,$$

y ω es invariante.

$$\omega_x(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) = \eta_{\pi(x)}(d_x\pi(v_1), \dots, d_x\pi(v_i), \dots, d_x\pi(v_k)) = 0,$$

y ω es horizontal. □

Notación. *Dadas $\omega \in \Omega^k(E, \mathfrak{g})$ y $\eta \in \Omega^l(E, \mathfrak{g})$, denotaremos $[\omega, \eta]$ a $[-,-]_*(\omega \wedge \eta) \in \Omega^{k+l}(E, \mathfrak{g})$, donde $[-,-] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es el corchete de Lie.*

Explícitamente, dados $p \in E$ y $v_1, \dots, v_{k+l} \in T_pE$,

$$[\omega, \eta]_p(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sg(\sigma)[\omega_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}), \eta_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})]$$

Comentario. Se puede chequear que $\Omega(E, \mathfrak{g}) = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(E, \mathfrak{g})$ con esta operación tiene estructura de lo que comúnmente se conoce como Superálgebra de Lie graduada (sobre $\mathbb{R}$).

Esto es, fijado un cuerpo $\mathbb{K}$ de caracaterística distinta de 2, un $\mathbb{K}$-espacio vectorial graduado V munido de un corchete bilineal $[-,-] : V \otimes_{\mathbb{K}} V \to V$, satisfaciendo:

- Respeta la graduación: $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$
- (Simetría) $[x, y] = -(-1)^{ij}[y, x], \forall x \in V_i, y \in V_j$
- (Identidad de Jacobi) $(-1)^{ik}[x, [y, z]] + (-1)^{ij}[y, [z, x]] + (-1)^{jk}[z, [x, y]] = 0, \forall x \in V_i, y \in V_j, z \in V_k$

Esta estructura algebraica es de interés para la física teórica, ya que aparece en la formulación de la teoría de la supersimetría para modelar el comportamiento de los fermiones y bosones.

Definición 3.0.15. *Si $\pi : E \to M$ es un G-fibrado principal con una conexión θ, se define la forma de curvatura como $\Omega = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] \in \Omega^2(E, \mathfrak{g})$*

Lema 3.0.4. *Sea*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & F \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} \\ M & \xrightarrow{\quad f \quad} & N \end{array}$$

un mapa de G-fibrados. Si $\theta \in \Omega^1(F, \mathfrak{g})$ es una conexión con forma de curvatura Ω, se cumple que $\varphi^*(\theta)$ tiene forma de curvatura $\varphi^*(\Omega)$.

Demostración. Hay que probar que $\varphi^*(\Omega) = d\varphi^*(\theta) + \frac{1}{2}[\varphi^*(\theta), \varphi^*(\theta)]$, para lo cual basta chequear que $\varphi^*([\theta, \theta]) = [\varphi^*(\theta), \varphi^*(\theta)]$, puesto que ya sabemos que el pull-back es lineal y conmuta con la derivada exterior.

Dados $x \in E, v, w \in T_xE$, se tiene que

$$\frac{1}{2}[\theta, \theta]_x(v, w) = \frac{1}{2}([\theta_x(v), \theta_x(w)] - [\theta_x(w), \theta_x(v)]) = [\theta_x(v), \theta_x(w)]$$

Luego,

$$\frac{1}{2}\varphi^*([\theta,\theta])_x(v,w) = \frac{1}{2}[\theta,\theta]_{\varphi(x)}(d_x\varphi(v), d_x\varphi(w)) =$$

$$[\theta_{\varphi(x)}(d_x\varphi(v)), \theta_{\varphi(x)}(d_x\varphi(w))] = [\varphi^*(\theta)_x(v), \varphi^*(\theta)_x(w)] = \frac{1}{2}[\varphi^*(\theta), \varphi^*(\theta)]_x(v,w),$$

lo cual prueba lo pedido. □

Lema 3.0.5. *Si $\pi : E \to M$ es un G-fibrado trivial, isomorfo al fibrado producto vía $\psi : E \to M \times G$, se tiene que existe un mapa de G-fibrados*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & G \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & pto \end{array}$$

y la conexión plana en E inducida por ψ coincide con la inducida por φ.

Demostración. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\psi} & M \times G & \xrightarrow{\pi_2} & G \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi_1} & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{id} & M & \longrightarrow & pto \end{array}$$

donde π_1 y π_2 son las proyecciones canónicas. Tomando $\varphi = \pi_2 \circ \psi$, que es equivariante puesto ambos π_2 y ψ lo son, se tiene el mapa buscado.

La conexión de Maurer-Cartan en $M \times G$ está dada por $\theta \in \Omega^1(M \times G, \mathfrak{g})$ tal que $\theta_{(x,g)} = d_{(x,g)}(\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \pi_2)$, siendo $\mathcal{L}_{g^{-1}}$ la traslación a izquierda por g^{-1}, mientras que la de Maurer-Cartan en G es $\widetilde{\theta} \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ tal que $\widetilde{\theta}_g = d_g\mathcal{L}_{g^{-1}}$.

Luego,

$$\pi_2^*(\widetilde{\theta})_{(x,g)} = \widetilde{\theta}_g \circ d_{(x,g)}\pi_2 = d_g\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ d_{(x,g)}\pi_2 = d_{(x,g)}(\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \pi_2) = \theta_{(x,g)}, \forall (x,g) \in M \times G$$

$$\Rightarrow \pi_2^*(\widetilde{\theta}) = \theta$$

$$\Rightarrow \varphi^*(\widetilde{\theta}) = (\pi_2 \circ \psi)^*(\widetilde{\theta}) = \psi^*(\pi_2^*(\widetilde{\theta})) = \psi^*(\theta),$$

lo cual termina la prueba. □

Observación 3.0.7. Notar que en el fibrado $G \to pto$ el espacio total es una fibra, por lo tanto no hay fibrado horizontal, luego toda forma horizontal en G es necesariamente nula.

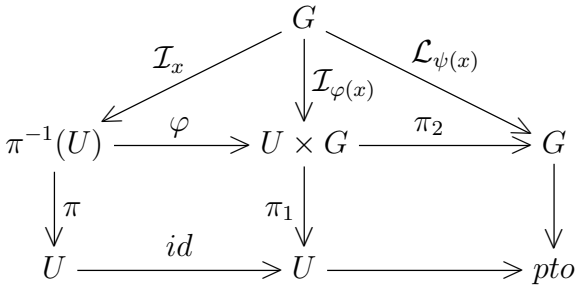
Definición 3.0.16. *Si $\pi : E \to M$ es un G-fibrado y $A \in \mathfrak{g}$, se define el campo vectorial en E asociado a A como $\tilde{A} \in \mathfrak{X}(E)$ tal que $\tilde{A}(x) = \nu_x(A)$, donde nuevamente ν_x indica el diferencial en la identidad del mapa $g \mapsto x.g$*

Observar que si θ es una conexión en E, se tiene que $\theta(\widetilde{A})(x) = \theta_x(\widetilde{A}(x)) = \theta_x(\nu_x(A)) = A, \forall x \in E$, luego $\theta(\widetilde{A}) : M \to g$ es constante igual a A.

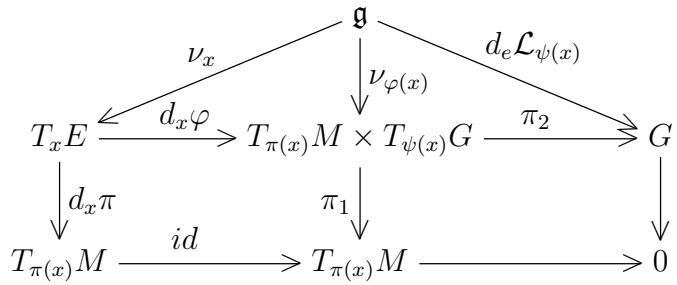
Proposición 3.0.10. *Dados $A, B \in \mathfrak{g}$, se cumple que $\widetilde{[A,B]} = [\widetilde{A}, \widetilde{B}]$*

Demostración. Asumamos primero que el fibrado es $G \to pto$. En este caso $\nu_g = d_e\mathcal{L}_g$, por lo tanto $\widetilde{A} = X_A$, el campo invariante a izquierda asociado a A, y se tiene que $\widetilde{[A,B]} = [\widetilde{A}, \widetilde{B}]$ por definición del corchete de Lie en $\mathfrak{g}$.

Si ahora el fibrado es arbitrario, basta probar que los campos coinciden en el dominio de una trivialización local arbitraria $\varphi = (\pi, \psi) : \pi^{-1}(U) \to U \times G$. Fijada φ, sea $x \in \pi^{-1}(U)$. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:



Por lo tanto, tomando diferencial en la identidad, se obtiene otro diagrama conmutativo:



Como el mapa $\pi \circ \mathcal{I}_x$ es constante igual a $\pi(x)$, se deduce que

$$0 = d_x\pi \circ \nu_x = \pi_1 \circ \nu_{\varphi(x)}$$

Esto más la conmutatividad del triángulo derecho implican que el campo en $U \times G$ asociado a $A \in \mathfrak{g}$, que denotaremos $\widehat{A}$ para distinguirlo del inducido en E, no es otro que $0 \times X_A$. Entonces,

$$[\widehat{A}, \widehat{B}] = [0 \times X_A, 0 \times X_B] = 0 \times [X_A, X_B] = 0 \times X_{[A,B]} = \widehat{[A,B]}, \forall A, B \in \mathfrak{g}$$

Además, la conmutatividad del triángulo izquierdo implica que $(\varphi^{-1})_*(\widehat{A}) = \widetilde{A}, \forall A \in \mathfrak{g}$, luego

$$\widetilde{[A,B]} = (\varphi^{-1})_*(\widehat{[A,B]}) = (\varphi^{-1})_*([\widehat{A}, \widehat{B}]) = [(\varphi^{-1})_*(\widehat{A}), (\varphi^{-1})_*(\widehat{B})] = [\widetilde{A}, \widetilde{B}], \forall A, B \in \mathfrak{g}$$

□

Teorema 3.0.1. *Sea $\pi : E \to M$ un G-fibrado con conexión θ y forma de curvatura Ω.*

1. *Ω es horizontal y equivariante.*
2. *Si el fibrado es trivial, y θ es una conexión plana (inducida por un isomorfismo), se tiene que $\Omega = 0$.*
3. *(Identidad de Bianchi) $d\Omega = [\Omega, \theta]$*

Demostración. 1) Dado $g \in G$, por un lado, se tiene que

$$R_g^*(d\theta) = dR_g^*(\theta) = dAd(g^{-1})_*(\theta) = Ad(g^{-1})_*(d\theta)$$

Por otro,

$$R_g^*([\theta,\theta])_x(v,w) = [\theta_{x.g}(d_xR_g(v)), \theta_{x.g}(d_xR_g(w))] = [R_g^*(\theta)_x(v), R_g^*(\theta)_x(w)] =$$

$$[(Ad(g^{-1})_*(\theta))_x(v), (Ad(g^{-1})_*(\theta))_x(w)] = [Ad(g^{-1})(\theta_x(v)), Ad(g^{-1})(\theta_x(w))]$$

$$= Ad(g^{-1})([\theta_x(v), \theta_x(w)]) = (Ad(g^{-1})_*([\theta, \theta]))_x(v, w), \forall x \in E, \forall v, w \in T_xE$$
$$\Rightarrow R_g^*([\theta, \theta]) = Ad(g^{-1})_*([\theta, \theta])$$

Juntando las dos cosas, usando la linealidad del pull-back, se tiene que $R_g^*(\Omega) = Ad(g^{-1})_*(\Omega)$, o sea la forma de curvatura es equivariante.

Resta probar la horizontalidad. Hay que probar que

$$d\theta(X, Y) = -\frac{1}{2}[\theta, \theta](X, Y) = -[\theta(X), \theta(Y)], \forall X, Y \in \mathfrak{X}(E) \text{ con } X \text{ vertical},$$

ó bien, lo que es lo mismo, que dados $x \in E, v, w \in T_xE$ con $v \in V_x$, vale que

$$d\theta_x(v, w) = -\frac{1}{2}[\theta, \theta]_x(v, w) = -[\theta_x(v), \theta_x(w)]$$

Como $T_xE = H_x \oplus V_x$, basta, por linealidad, probarlo para los casos donde $w \in H_x$ y $w \in V_x$, por separado.

Primero asumamos que $w \in V_x$. Por lo tanto existen $A, B \in \mathfrak{g}$ tales que $v = \nu_x(A) = \widetilde{A}(x), w = \nu_x(B) = \widetilde{B}(x)$, es decir, $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ son campos en E que extienden a los vectores v y w respectivamente. Esto implica que, en este caso, basta probar que

$$d\theta(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = -[\theta(\widetilde{A}), \theta(\widetilde{B})], \ \forall A, B \in \mathfrak{g}$$

Como $\theta(\widetilde{A})$ y $\theta(\widetilde{B})$ son mapas constantes, se tiene que $\widetilde{A}(\theta(\widetilde{B})) = \widetilde{B}(\theta(\widetilde{A})) = 0$.

Entonces,

$$d\theta(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = (\widetilde{A}(\theta(\widetilde{B})) + \widetilde{B}(\theta(\widetilde{A}))) - \theta([\widetilde{A}, \widetilde{B}]) = -\theta(\widetilde{[A, B]}) = -[A, B] = -[\theta(\widetilde{A}), \theta(\widetilde{B})]$$

Si ahora $w \in H_x$, es posible extenderlo a un campo Y horizontal, extendiéndolo primero a un campo Z arbitrario y luego poniendo $Y(y) = Z(y) - \nu_y(\theta_y(Z(y))), \forall y \in E$. En este caso, $\theta(Y) = 0$, luego es suficiente con mostrar que

$$d\theta(\widetilde{A}, Y) = 0, \forall A \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{X}(E) \text{ horizontal}$$

Como antes,

$$d\theta(\widetilde{A}, Y) = (\widetilde{A}(\theta(Y)) + Y(\theta(\widetilde{A}))) - \theta([\widetilde{A}, Y]) = -\theta([\widetilde{A}, Y])$$

Además, se tiene que $\varphi_x(t) = R_{g_t}(x)$, donde $g_t = exp(tA) \in G$, es el flujo del campo $\widetilde{A}$ en el punto $x \in E$, luego

$$[\widetilde{A}, Y](x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(Y(x) - d_{x.g_t^{-1}} R_{g_t}(Y(x.g_t^{-1}))), \forall x \in E,$$

Por otro lado,

$$\theta_x(d_{x.g_t^{-1}} R_{g_t}(Y(x.g_t^{-1}))) = R_{g_t}^*(\theta)_{x.g_t^{-1}}(Y(x.g_t^{-1})) = Ad(g_t^{-1})(\theta_{x.g_t^{-1}}(Y(x.g_t^{-1}))) = 0$$

Entonces,

$$\theta_x([\widetilde{A}, Y](x)) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\theta_x(Y(x)) - \theta_x(d_{x.g_t^{-1}} R_{g_t}(Y(x.g_t^{-1})))) = 0$$

2) Por el lema 3.0.5, θ es inducida por la conexión de Maurer-Cartan en $G \to pto$, entonces, por el lema 3.0.4, Ω es inducida por la curvatura de dicha conexión, que por ser horizontal (por la parte anterior), es nula, por la observación 3.0.7. Se deduce entonces que $\Omega = 0$.

3)

$$d\Omega = d^2\theta + \frac{1}{2}d[\theta,\theta] = \frac{1}{2}d[-,-]_*(\theta\wedge\theta) = \frac{1}{2}[-,-]_*(d\theta\wedge\theta - \theta\wedge d\theta)$$

$$= \frac{1}{2}([d\theta,\theta] - [\theta,d\theta]) = [d\theta,\theta] = [\Omega - \frac{1}{2}[\theta,\theta],\theta] = [\Omega,\theta] - \frac{1}{2}[[\theta,\theta],\theta] = [\Omega,\theta],$$

ya que $[[\theta,\theta],\theta] = 0$, consecuencia de la identidad de Jacobi en $\mathfrak{g}$.

□

Observación 3.0.8. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(E)$ son horizontales, repitiendo la cuenta que se hizo en la prueba anterior, se tiene que

$$\Omega(X,Y) = d\theta(X,Y) + [\theta(X),\theta(Y)] = (X(\theta(Y)) - Y(\theta(X))) - \theta([X,Y]) = -\theta([X,Y]),$$

lo cual da otra posible expresión para Ω.

Además, esta expresión nos da una forma de interpretar la curvatura, ya que se ve claramente que la distribución horizontal será involutiva (esto es, cerrada por el corchete de Lie, o sea, si X e Y son campos horizontales, $[X,Y]$ también) si y sólo si la curvatura es nula. Luego, en ese caso, por el teorema integral de Frobenius (ver [18] para su enunciado y prueba), existirá una foliación de variedades tangentes a la distribución horizontal. Dicho de otra manera, la curvatura puede pensarse como una obstrucción a la existencia de dicha foliación.

Definición 3.0.17. *Diremos que una conexión en un G-fibrado es plana (a secas) si su forma de curvatura es nula.*

Así, toda conexión plana inducida por un isomorfismo (en particular la de Maurer-Cartan, que es inducida por la identidad), es plana. Más aún, se tiene la siguiente caracterización:

Teorema 3.0.2. *Una conexión θ en un G-fibrado principal $\pi : E \to M$ es plana si y sólo si para todo $p \in M$ existe un entorno U de p en M y una trivialización local $\pi^{-1}(U) \to U \times G$ tal que $\theta|_{\pi^{-1}(U)}$ es inducida por la conexión de Maurer-Cartan en $U \times G$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Obvio.

($\Rightarrow$) Si $\Omega = 0$, por la observación 3.0.8 se tiene que $\theta([X,Y]) = 0$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ horizontales, es decir, la distribución horizontal es involutiva. Por lo tanto, por el teorema de integrabilidad de Frobenius, queda definida una foliación "horizontal" F en E, tal que H_x es el espacio tangente a la F_x, la hoja de F a través de $x \in E$.

Ahora, dado $p \in M$, sea $x \in E_p$. Como $d_x\pi : H_x = T_xF_x \to T_pM$ es un isomorfismo, existe un entorno U de p en M y un entorno V de x en F_x tal que $\pi : V \to U$ es un difeormorfismo. Luego, la inversa $s : U \to V$ es una sección del fibrado $\pi|_V : V = \pi^{-1}(U) \to U$, y por la proposición 3.0.4, dicho fibrado es trivial.

Sea $\widetilde{\theta}$ la conexión plana en $\pi^{-1}(U)$ inducida por el correspondiente isomorfismo.

Entonces,

$$Ker(\widetilde{\theta}_{y.g}) = d_yR_g(T_yV) = d_yR_g(H_y) = H_{y.g}$$

Por lo tanto, θ y $\widetilde{\theta}$ definen el mismo fibrado horizontal, luego coinciden. □

Corolario 3.0.2. *Sea $\pi : E \to M$ un G-fibrado principal. Se tienen las siguientes equivalencias:*

1. *E tiene una conexión plana.*
2. *Existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de M y una familia de mapas de transición $\{g_{\alpha\beta}\}$ tal que $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ es constante $\forall \alpha, \beta$.*
3. *Si G_d es G munido de la topología discreta, E tiene una reducción a G_d relativa a la identidad $G_d \to G$,*

Demostración. 2) $\Leftrightarrow$ 3) Se deduce de la proposición 3.0.5, ya que todo mapa continuo a un espacio topológico discreto es necesariamente constante.

2) $\Rightarrow$ 1)

Sea $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ trivialización del fibrado con mapas de transición constantes $g_{\alpha\beta}$, y θ^α la conexión plana en $\pi^{-1}(U_\alpha)$ inducida por φ_α. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\beta} & U_\alpha \cap U_\beta \times G & \xrightarrow{\pi_2} & G \\
\downarrow id \quad \swarrow \varphi_\beta^{-1} & & \downarrow \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} & & \mathcal{L}_{g_{\alpha\beta}} \downarrow \\
\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \cap U_\beta \times G & \xrightarrow{\pi_2} & G \\
\downarrow \pi & & \pi_1 \downarrow & & \downarrow \\
U_\alpha \cap U_\beta & \xrightarrow{id} & U_\alpha \cap U_\beta & \longrightarrow & pto
\end{array}$$

Por lo tanto, si θ^0 es la conexión de Maurer-Cartan en $G \to pto$, usando el lema 3.0.5, se tiene que

$$\theta^\alpha|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)} = \varphi_\alpha^*(\pi_2^*(\theta^0)) = \varphi_\beta^*(\pi_2^*(\mathcal{L}_{g_{\alpha\beta}}^*(\theta^0))) = \varphi_\beta^*(\pi_2^*(\theta^0)) = \theta^\beta|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}$$

Esto dice que $\theta \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ dada por $\theta_x = \theta_x^\alpha$, si $x \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, esta bien definida, es conexión, y tiene curvatura nula, pues θ^α la tiene para todo α.

1) $\Rightarrow$ 2) Sea θ conexión plana en E. Por el teorema 3.0.2, existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de M y trivializaciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \to U_\alpha \times G$ tales que $\theta|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = \varphi_\alpha^*(\theta^\alpha)$, donde θ^α es la conexión de Maurer Cartan en $U_\alpha \times G$.

Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, sean θ^0 la conexión de Maurer Cartan en $U_\alpha \cap U_\beta \times G$, y

$$\varphi = \widetilde{\varphi}_\alpha \circ \widetilde{\varphi}_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times G \to U_\alpha \cap U_\beta \times G$$

$$\text{donde } \widetilde{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)},\ \widetilde{\varphi}_\beta = \varphi_\beta|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}$$

Se tiene que $\theta^0 = \theta^\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta \times G} = \theta^\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta \times G}$, y por lo tanto

$$\theta|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)} = \widetilde{\varphi}_\alpha^*(\theta^0) = \widetilde{\varphi}_\beta^*(\theta^0),$$

de donde

$$(\widetilde{\varphi}_\beta^{-1})^*(\theta|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}) = \theta^0$$

Se deduce que

$$\varphi^*(\theta^0) = (\widetilde{\varphi}_\beta^{-1})^*(\widetilde{\varphi}_\alpha^*(\theta^0)) = (\widetilde{\varphi}_\beta^{-1})^*(\theta|_{\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}) = \theta^0$$

Esto, por la definición de θ^0, implica que φ permuta las hojas de la foliación horizontal de $U_\alpha \cap U_\beta \times G$, es decir los conjuntos de la forma $U_\alpha \cap U_\beta \times \{g\}$, con $g \in G$. En particular, existe $g_0 \in G$ tal que $\varphi(U_\alpha \cap U_\beta \times \{e\}) = U_\alpha \cap U_\beta \times \{g_0\}$, y, como φ es equivariante por composición de idem, resulta que

$$\varphi(x, g) = \varphi(x, e).g = (x, g_0).g = (x, g_0 g), \forall (x, g) \in U_\alpha \cap U_\beta \times G$$

Se concluye que el mapa de transición $g_{\alpha\beta}$ es constante igual a g_0. □

Ahora procederemos a mirar a una conexión desde el punto de vista local, primero estudiando las conexiones en el fibrado producto.

Proposición 3.0.11. *Sea $E = M \times G$ el fibrado producto con proyección usual $\pi : E \to M$, y sea $i : M \to E$ la inclusión $i(p) = (p, e)$.*

1. *El mapa* $i^* : \Omega^1(E, \mathfrak{g}) \to \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ *es una biyección entre las conexiones en* E *y las 1-formas en* M *a valores en* $\mathfrak{g}$.
2. *Sea* $\varphi : E \to E$ *un isomorfismo de la forma* $\varphi(p, a) = (p, g(p)a)$ *con* $g : M \to G$ *diferenciable, y sea* $\theta \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ *una conexión en* E *con* $i^*\theta = A \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$. *Luego, poniendo* $\theta^\varphi = \varphi^*(\theta)$ *y* $A^\varphi = i^*(\theta^\varphi)$, *se tiene que*

$$A^\varphi = Ad(g^{-1})_*(A) + g^*(\theta^0) \in \Omega^1(M, \mathfrak{g}),$$

donde $\theta^0 \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ *es la forma de Maurer-Cartan en* G.

Demostración. (1) Observar primero que, dada $A \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$, existe una única $\widetilde{A} \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ horizontal y Ad-equivariante tal que $i^*\widetilde{A} = A$. En efecto, dado $p \in M$, poniendo $x = (p, e)$, se tiene que $T_xE = Ker(d_x\pi) \oplus d_pi(T_pM)$, luego, como $\widetilde{A}$ tiene que anularse en $Ker(d_x\pi)$, queda determinada en x poniendo $\widetilde{A}_x(d_pi(v)) = A_p(v)(= i^*(\widetilde{A})_p(v))$, para todo $v \in T_pM$.

Si $y = (p, g) = R_g(x)$ es arbitrario, la condición de equivariancia implica que $\widetilde{A}_y(d_xR_g(v)) = R_g^*(\widetilde{A})_x(v) = Ad(g^{-1})(\widetilde{A}_x(v))$, para todo v, y, como $T_yE = d_xR_g(T_xE) \oplus d_y\pi$, queda determinada en y como $\widetilde{A}_y = Ad(g^{-1}) \circ \widetilde{A}_x$, lo que prueba la unicidad. Es directo chequear que la expresión resultante

$$\widetilde{A}_{(p,g)} = Ad(g^{-1}) \circ A_p \circ d_{(p,g)}\pi$$

cumple lo pedido.

Ahora, si θ_{MC} denota la conexión de Maurer-Cartan en E, se cumple que la correspondencia

$$\widetilde{A} \leftrightarrow \theta_{MC} + \widetilde{A}$$

da una biyección entre las 1-formas horizontales y equivariantes y las conexiones en E (la linealdad de R_g^* y el hecho de que $\widetilde{A}_x \circ \nu_x = 0$ implican que $\theta_{MC} + \widetilde{A}$ es conexión, y es claramente una biyección).

Además,

$$i^*(\theta_{MC})_p = \theta_{MC(p,e)} \circ d_pi = d_p(\mathcal{L}_e \circ \pi_2 \circ i) = 0,$$

pues $\pi_2 \circ i \equiv e$. Por lo tanto

$$i^*(\theta_{MC} + \widetilde{A}) = i^*(\widetilde{A}) = A$$

(2) Por lo visto en (1), $\theta = \theta_{MC} + \widetilde{A}$ con $i^*(\widetilde{A}) = A$. Luego,

$$\theta^\varphi = \varphi^*(\theta_{MC}) + \varphi^*(\widetilde{A})$$

$$\Rightarrow A^\varphi = i^*\varphi^*\theta_{MC} + i^*\varphi^*\widetilde{A}$$

Además, se tiene que $\theta_{MC} = \pi_2^*(\theta^0)$ donde $\pi_2 : M \times G \to G$ es la proyección, y $\pi_2 \circ \varphi \circ i = g$, por lo tanto

$$i^*\varphi^*\theta_{MC} = i^*\varphi^*\pi_2^*\theta_0 = g^*(\theta^0)$$

También, usando la definición de $\widetilde{A}$, vale que

$$(i^*\varphi^*\widetilde{A})_p = \widetilde{A}_{(p,g(p))} \circ d_p(\varphi \circ i) = Ad(g^{-1}(p)) \circ A_p \circ d_{(p,g(p))}\pi \circ d_p(\varphi \circ i) =$$

$$= Ad(g^{-1}(p)) \circ A_p = Ad(g^{-1}(p))_*(A)_p,$$

ya que $\pi \circ \varphi \circ i = id$. □

Corolario 3.0.3. *Sea* (E, π, M) *un* G*-fibrado principal, y sea* $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$ *una trivialización con mapas de transición* $\{g_{\alpha\beta}\}$. *Luego, hay una correspondencia 1-1 entre las conexiones en* E *y familias de 1-formas* $\{A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})\}$ *satisfaciendo en* $U_\alpha \cap U_\beta$, *si éste es no vacío, la ley de transformación*

$$A_\beta = Ad(g_{\alpha\beta}^{-1})_*(A_\alpha) + g_{\alpha\beta}^*(\theta^0) \in \Omega^1(U_\alpha \cap U_\beta, \mathfrak{g})$$

Demostración. Si $\theta \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ es una conexión, la trivialización $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ define una conexión en $U_\alpha \times G$ dada por

$$\theta^\alpha = (\varphi_\alpha^{-1})^*(\theta)$$

Si $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times G \to U_\alpha \cap U_\beta \times G$, que está dado por $\psi_{\alpha\beta}(p, a) = (p, g_{\alpha\beta}(p)a)$, se tiene que

$$\psi_{\alpha\beta}^* \theta^\alpha = (\varphi_\beta^{-1})^* \varphi_\alpha^* \theta^\alpha = (\varphi_\beta^{-1})^*(\theta) = \theta^\beta$$

Por lo tanto, definiendo $A_\alpha = i^*(\theta^\alpha) \in \Omega^1(U_\alpha)$ donde $i : U_\alpha \to U_\alpha \times G$ es la inclusión $p \mapsto (p, e)$, se deduce lo pedido de la proposición anterior.

Recíprocamente, dada la familia $\{A_\alpha\}$, por la proposición anterior existe $\theta^\alpha \in \Omega^1(U_\alpha \times G, \mathfrak{g})$ conexión tal que $i^*\theta^\alpha = A_\alpha$ para todo α (θ^α no es otra que $\theta_{MC} + \widetilde{A}_\alpha$).

La hipótesis implica que

$$i^*(\theta^\beta) = Ad(g_{\alpha\beta}^{-1})(i^*(\theta^\alpha)) + g_{\alpha\beta}^*(\theta^0),$$

y, deshaciendo las cuentas de la proposición anterior, se tiene que esto último es igual a

$$i^*(\theta^\beta) = i^* \psi_{\alpha\beta}^* \widetilde{A}_\alpha + i^* \psi_{\alpha\beta}^* \theta_{MC}$$

Como i^* es biyección en las conexiones, se tiene que $\theta^\beta = \psi_{\alpha\beta}^* \widetilde{A}_\alpha + \psi_{\alpha\beta}^* \theta_{MC} = \psi_{\alpha\beta}^*(\theta^\alpha)$

O sea,

$$\varphi_\alpha^*(\theta^\alpha) = \varphi_\beta^*(\theta^\beta) \in \Omega^1(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta))$$

Por lo tanto queda definida una conexión global $\theta \in \Omega^1(E, \mathfrak{g})$ tal que la restricción a $\pi^{-1}(U_\alpha)$ es $\varphi_\alpha^*(\theta^\alpha)$.

Además, es claro que la correspondencia entre la conexión y la familia de 1-formas es 1-1. □

Observación 3.0.9. Es usual, a partir del corolario anterior, identificar la conexión con la familia $\{A_\alpha\}$ de formas de conexión locales.

Capítulo 4

El Homomorfismo de Chern-Weil

Primero, un poco de álgebra lineal.

Definición 4.0.18. *Dado V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $k \geq 1$, denotaremos $S^k(V^*)$ al $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los mapas k-multilineales simétricos, es decir a los mapas de la forma $P : V^k = V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ k-multilineales, que son invariantes por la acción de S_k en V^k dada por $\sigma.(v_1, \ldots, v_k) = (v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}), \forall \sigma \in S_k, \forall v_1, \ldots, v_k \in V$, ó bien, equivalentemente, a los mapas $\mathbb{R}$-lineales $P : V^{\otimes_k} = V \otimes \cdots \otimes V \to \mathbb{R}$, invariantes por la acción análoga en $V \otimes \cdots \otimes V$. Si $k = 0$, por convención pondremos $S^0(V^*) = \mathbb{R}$.*

Se define un producto $\circ : S^k(V^*) \otimes S^l(V^*) \to S^{k+l}(V^*)/$

$$P \circ Q(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} P(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) Q(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

Es sencillo mostrar que este producto da estructura de álgebra graduada a $S(V^*) = \bigoplus_{k \geq 0} S^k(V^*)$

Proposición 4.0.12. *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V. Si $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] = \bigoplus_{k \geq 0} \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^k$ denota al álgebra graduada de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ en las variables $x_1, \ldots, x_n$ (la graduación dada por los polinomios homogéneos de grado k), se tiene que el mapa*

$$\varphi_k : S(V^*)^k \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^k$$

defnido como

$$\varphi_k(P)(x_1, \ldots, x_n) = P(v, \ldots, v), v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

es un isomorfismo lineal que induce un isomorfismo de álgebras graduadas

$$\varphi : S(V^*) \to \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

Demostración. Si $P \in S^k(V^*)$ y $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, se tiene que

$$P(v, \ldots, v) = P\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^{n} x_{i_k} e_{i_k}\right) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} P(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) x_{i_1} \ldots x_{i_k},$$

que es justamente un polinomio homogéneo de grado k en las variables x_i, luego φ_k está bien definida, y es claramente lineal. Basta ver entonces que es biyectiva.

φ_k es inyectiva pues si $P(v, \ldots, v) = 0$ se tiene que $P(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 0, \forall 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$, luego $P = 0$, pues una cuenta similar a la anterior implica que $P \in S^k(V)^*$ queda determinado por estos valores.

Dado $Q \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^k$, es posible escribir

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} a_{i_1, \ldots, i_k} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$$

con $a_{i_1,\ldots,i_k} = a_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)}}, \forall \sigma \in S_k$, luego $Q = \varphi_k(P)$ donde P es el único mapa k-multilineal tal que $P(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = a_{i_1,\ldots,i_k}$, que es simétrico por la condición anterior. Luego φ_k es sobreyeciva.

El mapa φ no es otro que

$$\varphi\left(\sum_{k \geq 0} P_k\right) = \sum_{k \geq 0} \varphi_k(P_k),$$

que es isomorfismo de espacios vectoriales graduados, puesto que preserva el grado, y es claramente lineal y biyectivo. Resta chequear que preserva el producto. En efecto,

$$\varphi_{k+l}(P \circ Q)(x_1, \ldots, x_n) = (P \circ Q)(v, \ldots, v) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} P(v, \ldots, v) Q(v, \ldots, v) =$$

$$P(v, \ldots, v) Q(v, \ldots, v) = \varphi_k(P)(x_1, \ldots, x_n) \varphi_l(Q)(x_1, \ldots, x_n), \forall P \in S^k(V^*), Q \in S^l(V^*),$$

lo cual por linealidad implica lo anterior. □

Definición 4.0.19. *Dado G grupo de Lie con álgebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$, la representación adjunta induce una acción de G en $S^k(\mathfrak{g}^*)$ dada por*

$$(g.P)(v_1, \ldots, v_k) = P(Ad(g^{-1})(v_1), \ldots, Ad(g^{-1})(v_k)), \forall g \in G, \forall P \in S^k(\mathfrak{g}^*), \forall v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{g}$$

Se define $I^k(G) := \{P \in S^k(\mathfrak{g}^*) : g.P = P, \forall g \in G\}$, es decir la parte G-invariante de $S^k(\mathfrak{g}^*)$.

Es directo chequear que producto de G-invariantes es G-invariante, luego se tiene un producto

$$\circ : I^k(G) \otimes I^l(G) \to I^{k+l}(G)$$

que da estructura de álgebra graduada a

$$I(G) = \bigoplus_{k \geq 0} I^k(G),$$

llamada, en vista de la proposición anterior, el álgebra de polinomios G-invariantes en $\mathfrak{g}$.

Observación 4.0.10. *Por la proposición 4.0.12,*

$$P \in I^k(G) \Leftrightarrow P(Ad(g^{-1})(v), \ldots, Ad(g^{-1})(v)) = P(v, \ldots, v), \forall v \in \mathfrak{g}$$

Sea ahora $\pi : E \to M$ un G-fibrado con conexión θ y forma de curvatura Ω. Denotando $\Omega^k := \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega \in \Omega^{2k}(E, \mathfrak{g}^{\otimes_k})$, se tiene que todo $P \in I^k(G)$ induce una $2k$-forma usual $P_*(\Omega^k) \in \Omega^{2k}(E)$. Como Ω es horizontal, $P_*(\Omega^k)$ también (producto exterior de formas horizontales es horizontal, y P es lineal), y la invariancia de P implica la de $P_*(\Omega^k)$:

$$R_g^*(P_*(\Omega^k)) = P_*(R_g^*(\Omega)^k) = P_*(Ad(g^{-1})_*(\Omega)^k) = P_*((Ad(g^{-1})^{\otimes_k})_*(\Omega^k)) =$$

$$(P \circ Ad(g^{-1})^{\otimes_k})_*(\Omega^k) = P_*(\Omega^k), \forall g \in G$$

Luego, por el Lema 3.0.3, se tiene que existe $P_*(\Omega^k)_M \in \Omega^{2k}(M)$ tal que $\pi^*(P_*(\Omega^k)_M) = P_*(\Omega^k)$.

Teorema 4.0.3. *1. $P_*(\Omega^k)_M$ es cerrada. Sea $\omega_E^k(P) = P_*(\Omega^k)_M + B^{2k-1}(\Omega^*(M)) \in H^{2k}(\Omega^*(M))$ su correspondiente clase de cohomología.*

2. $\omega_E^k(P)$ no depende de la conexión θ, sólo de la clase de isomorfismo del G-fibrado $\pi : E \to M$.

3. *$\omega_E : I(G) \to H(\Omega(M))$ es un homomorfismo de álgebras (no de álgebras graduadas, ya que no preserva el grado, sino que lo multiplica por 2).*
4. *Si $f : N \to M$ es un mapa diferenciable, se tiene que*

$$\omega^k_{f^*E} = H^{2k}(f^*) \circ \omega^k_E$$

El mapa ω_E se llama el homomorfismo de Chern-Weil, y $\omega^k_E(P)$ es la clase característica de E correspondiente a $P \in I^k(G)$.

Demostración. 1) Como π^* es inyectiva, basta ver que $P_*(\Omega^k)$ es cerrada. Se tiene, por Bianchi, que

$$dP_*(\Omega^k) = P_*(d\Omega^k) = kP_*(d\Omega \wedge \Omega^{k-1}) = kP_*([\Omega, \theta] \wedge \Omega^{k-1})$$

Entonces, como Ω^{k-1} es horizontal, y $[\Omega, \theta]$ es vertical, se tiene que $dP_*(\Omega^k)$ es horizontal y vertical, luego nula.

2) Sean θ^0 y θ^1 dos conexiones para el fibrado, con correspondientes formas de curvatura Ω^0 y Ω^1. Es directo chequear que $\pi \times id : E \times [0,1] \to M \times [0,1]$, con G-acción dada por $(x,t).g = (x.g, t)$, es un G-fibrado principal, y que $\widetilde{\theta} \in \Omega^1(E \times [0,1])$ definida como

$$\widetilde{\theta}_{(x,t)}(v,w) = (1-t)\theta^0_x(v) + t\theta^1_x(v), \forall (x,t) \in E \times [0,1], \forall v \in T_xE, \forall w \in T_t[0,1]$$

es una conexión para dicho fibrado (la cuenta es análoga a la que aparece en la demostración del lema 3.0.2). Sea $\widetilde{\Omega}$ su forma de curvatura. Denotando $i_t : E \to E \times [0,1]$ al mapa $x \mapsto (x,t)$, se tiene que

$$i_0^*(\widetilde{\theta})_x(v) = \widetilde{\theta}_{(x,0)}(d_x i_0(v)) = \widetilde{\theta}_{(x,0)}(v,0) = \theta^0_x(v), \forall x \in E, \forall v \in T_xE$$

Luego $i_0^*(\widetilde{\theta}) = \theta^0$ y análogamente $i_1^*(\widetilde{\theta}) = \theta^1$, lo cual implica que $i_0^*(\widetilde{\Omega}) = \Omega^0$ y que $i_1^*(\widetilde{\Omega}) = \Omega^1$.

Ahora, dado $P \in I^k(G)$, por 1) vale que $dP_*(\widetilde{\Omega}^k) = 0$, entonces, por el teorema 1.2.1, se tiene que

$$d\mathcal{I}(P_*(\widetilde{\Omega}^k)) = d\mathcal{I}(P_*(\widetilde{\Omega}^k)) + \mathcal{I}(dP_*(\widetilde{\Omega}^k)) = i_1^*(P_*(\widetilde{\Omega}^k)) - i_0^*(P_*(\widetilde{\Omega}^k)) = P_*((\Omega^1)^k) - P_*((\Omega^0)^k),$$

donde $\mathcal{I}$ es el operador integral de Poincaré. Se deduce que la clase de cohomología de $P_*((\Omega^1)^k)$ y $P_*((\Omega^0)^k)$ coinciden, y por lo tanto $\omega^k_E(P)$ no depende de la conexión.

Además, dados $\pi_E : E \to M$ y $\pi_F : F \to M$ dos G-fibrados isomorfos vía $\varphi : \pi_E \to \pi_F$, fijada una conexión θ en F con curvatura Ω, se tiene que $\varphi^*(\theta)$ es conexión en E con curvatura $\varphi^*(\Omega)$. Por lo tanto, como ya hemos probado la independencia respecto de la conexión, dado $P \in I^k(G)$, es

$$\pi_E^*(P_*(\Omega^k)_M) = (\pi_F \circ \varphi)^*(P_*(\Omega^k)_M) = \varphi^*(\pi_F^*(P_*(\Omega^k)_M)) = \varphi^*(P_*(\Omega^k)) = P_*(\varphi^*(\Omega^k))$$

Entonces,

$$P_*(\Omega^k)_M = P_*(\varphi^*(\Omega^k))_M,$$

a partir de lo cual, tomando clase de cohomología, se obtiene

$$\omega^k_E(P) = \omega^k_F(P),$$

y $\omega^k_E(P)$ resulta depender sólo de la clase de isomorfismo del fibrado π_E.

3) Es una cuenta que dados $P \in I^k(G)$ y $Q \in I^l(G)$, vale que

$$(P \circ Q)_*(\Omega^{k+l}) = P_*(\Omega^k) \wedge Q_*(\Omega^l),$$

lo que prueba lo pedido. (ver [8], página 77).

4) Si θ es una conexión en $\pi : E \to M$ con curvatura Ω, se tiene que $\widetilde{f^*}(\theta)$ es una conexión en $f^*\pi : f^*E \to N$ con curvatura $\widetilde{f^*}(\Omega)$. Luego, dado $P \in I^k(G)$, por 2) es

$$\omega^k_{f^*E}(P) = P_*(\widetilde{f^*}(\Omega)^k)_M + B^{2k-1}(\Omega^*(N))$$

Por otro lado, se tiene que

$$H^{2k}(f^*)(\omega^k_E(P)) = f^*(P_*(\Omega^k)_M) + B^{2k-1}(\Omega^*(N))$$

Se cumple además que

$$(f^*\pi)^*(f^*(P_*(\Omega^k)_M)) = \widetilde{f^*}(\pi^*(P_*(\Omega^k)_M)) = \widetilde{f^*}(P_*(\Omega^k)) = P_*(\widetilde{f^*}(\Omega)^k)$$

Por lo tanto $f^*(P_*(\Omega^k)_M) = P_*(\widetilde{f^*}(\Omega)^k)_M$, lo que prueba lo pedido. □

Comentario. También se pueden considerar mapas multilineales (sobre $\mathbb{R}$) $P : \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, simétricos, para obtener el algebra de polinomios invariantes complejos $I_{\mathbb{C}}(G)$. Todo lo probado anteriormente funciona, y nuevamante, para un G-fibrado $\pi : E \to M$ con conexión, se obtiene el homomorfismo de Chern-Weil complejo

$$\omega_{E,\mathbb{C}} : I_{\mathbb{C}}(G) \to H(\Omega(M, \mathbb{C}))$$

4.1. Ejemplos de Polinomios Invariantes y Clases Características

Procederemos ahora a dar ejemplos de polinomios invariantes para grupos clásicos. En cada uno de ellos exhibiremos el mapa polinomial $v \mapsto P(v, \ldots, v), v \in \mathfrak{g}, P \in I^k(G)$.

Ejemplo 4.1.1. $G = GL_n(\mathbb{R})$, el grupo de las matrices $n \times n$ invertibles, con álgebra de Lie $\mathfrak{g} = M_n(\mathbb{R})$, el conjunto de las matrices $n \times n$ con el corchete de Lie dado por el conmutador

$$[A, B] = AB - BA, \forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$$

y con representación adjunta la conjugación

$$Ad(g)(A) = gAg^{-1}, \forall g \in GL_n(\mathbb{R}), A \in M_n(\mathbb{R})$$

Para $k \in \mathbb{Z}^+$ sea $P_{k/2}$ el polinomio homogéneo de grado k que es el coeficiente en λ^{n-k} en el polinomio en λ siguiente:

$$det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi}A\right) = \sum_{k=0}^{n} P_{k/2}(A, \ldots, A)\lambda^{n-k}, A \in M_n(\mathbb{R})$$

Observar que

$$\sum_{k=0}^{n} P_{k/2}(Ad(g^{-1})(A), \ldots, Ad(g^{-1})(A))\lambda^{n-k} = det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi}Ad(g^{-1})(A)\right) =$$

$$det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi}g^{-1}Ag\right) = det(g)det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi}A\right)det(g^{-1}) = det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi}A\right) = \sum_{k=0}^{n} P_{k/2}(A, \ldots, A)\lambda^{n-k},$$

por lo cual $P_{k/2}$ es un polinomio invariante, al cual llamaremos el $k/2$-ésimo polinomio de Pontrjagin. Dado un $GL_n(\mathbb{R})$-fibrado $\pi : E \to M$, se tiene la clase de Pontrjagin de E

$$p_{k/2}(E) = \omega^k_E(P_{k/2}) \in H^{2k}(\Omega^*(M))$$

Ejemplo 4.1.2. $G = O(n) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$, el subgrupo de matrices ortogonales, es decir las matrices $g \in M_n(\mathbb{R})$ que satisfacen $g^t g = I$, con álgebra de Lie las matrices anti-simétricas

$$\mathfrak{o}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = -A^t\}$$

con corchete de Lie el conmutador y representación adjunta la conjugación.

Observar que si $A \in \mathfrak{o}(n)$, se tiene que

$$det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi}A\right) = det\left(\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi}A\right)^t\right) = det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi}A^t\right) = det\left(\lambda I + \frac{1}{2\pi}A\right),$$

de donde se deduce que

$$P_{k/2}(A, \ldots, A) = P_{k/2}(-A, \ldots, -A) = (-1)^k P_{k/2}(A, \ldots, A)$$

Esto implica que si k es impar, la restricción a $\mathfrak{o}(n)$ del polinomio de Pontrjagin es cero, por ende seguiremos considerando solamente $P_l \in I^{2l}(O(n))$ con $l = 0, \ldots, [n/2]$.

Ejemplo 4.1.3. $G = SO(2m) \subseteq O(2m)$, el subgrupo de la matrices ortogonales con determinante 1, con álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2m) = \mathfrak{o}(2m)$, munido del corchete conmutador y la conjugación como representación adjunta. Nuevamente tenemos los polinomios invariantes de Pontrjagin $P_l \in I^{2l}(SO(2m))$ para $l = 0, \ldots, m$.

Pero aparece otro polinomio homogéneo de grado m, que llamaremos Pfaffiano, dado por

$$Pf(A, \ldots, A) = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!} \sum_{\sigma \in S_{2m}} sg(\sigma) A_{\sigma(1)\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)},$$

donde A satisface $A_{ij} = -A_{ji}, \forall i, j = 1, \ldots, 2m$.

Veamos que $Pf \in I^m(SO(2m))$:

Dados $g \in O(2m)$ y $A \in \mathfrak{o}(2m)$, se tiene que

$$Ad(g)(A) = gAg^{-1} = gAg^t =: \widetilde{A},$$

donde

$$\widetilde{A}_{ij} = \sum_{k_1, k_2 = 1}^{2m} g_{ik_1} A_{k_1 k_2} g_{jk_2}$$

Por lo tanto,

$$Pf(\widetilde{A}, \ldots, \widetilde{A}) =$$

$$\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!} \sum_{\sigma \in S_{2m}} sg(\sigma) \left(\sum_{k_1, k_2 = 1}^{2m} g_{\sigma(1)k_1} A_{k_1 k_2} g_{\sigma(2)k_2}\right) \ldots \left(\sum_{k_{2m-1}, k_{2m} = 1}^{2m} g_{\sigma(2m-1)k_{2m-1}} A_{k_{2m-1}k_{2m}} g_{\sigma(2m)k_{2m}}\right) =$$

$$\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!} \sum_{k_1, \ldots, k_{2m} = 1}^{2m} A_{k_1 k_2} \ldots A_{k_{2m-1}k_{2m}} \sum_{\sigma \in S_{2m}} sg(\sigma) g_{\sigma(1)k_1} \ldots g_{\sigma(2m)k_{2m}}$$

Ahora, la expresión

$$\sum_{\sigma \in S_{2m}} sg(\sigma) g_{\sigma(1)k_1} \ldots g_{\sigma(2m)k_{2m}}$$

no es otra cosa que el determinante de la matriz $(g_{ik_j})_{ij}$, el cual es cero a menos que $(k_1, \ldots, k_{2m})$ sea una permutación de $(1, \ldots, 2m)$. Entonces,

$$Pf(\widetilde{A}, \ldots, \widetilde{A}) = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!} \sum_{\sigma \in S_{2m}} det(g_{i\sigma(j)}) A_{\sigma(1)\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)} =$$

$$\frac{det(g)(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!}\sum_{\sigma\in S_{2m}} sg(\sigma)A_{\sigma(1)\sigma(2)}\dots A_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)} = det(g)Pf(A,\dots,A)$$

Por lo tanto, Pf es invariante para $SO(2m)$, pero no para $O(2m)$, puesto que en ese caso, si $det(g) = -1$, se tiene que

$$Pf(gAg^{-1},\dots,gAg^{-1}) = -Pf(A,\dots,A)$$

Para un $SO(2m)$-fibrado $\pi : E \to M$, se tiene la llamada clase característica de Euler

$$e(E) = \omega_E^m(Pf) \in H^{2m}(\Omega^*(M))$$

Ejemplo 4.1.4. $G = GL_n(\mathbb{C})$, con álgebra de Lie $\mathfrak{g} = M_n(\mathbb{C})$ munida de la misma estructura de antes. Se definen los polinomios complejos $C_k, k = 0,\dots,n$, que llamaremos polinomios de Chern, dados por:

$$det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi i}A\right) = \sum_{k=0}^{n} C_k(A,\dots,A)\lambda^{n-k}, A \in M_n(\mathbb{C})$$

Como antes, son $GL_n(\mathbb{C})$-invariantes, y para un $GL_n(\mathbb{C})$-fibrado principal $\pi : E \to M$ se tienen las clases de Chern

$$c_k(E) = \omega_{E,\mathbb{C}}^k(C_k) \in H^{2k}(\Omega^*(M,\mathbb{C}))$$

Observar que si $A \in M_n(\mathbb{R})$, vale que

$$P_{k/2}(A,\dots,A) = C_k(iA,\dots,iA) = i^k C(A,\dots,A)$$

Ejemplo 4.1.5. $G = U(n) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$, el subgrupo de matrices unitarias, esto es, las matrices complejas g que satisfacen $g\bar{g}^t = I$, donde $\bar{g}$ es la matriz conjugada de g. El álgebra de Lie es la de las matrices anti-hermíticas

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A = -\bar{A}^t\}$$

Observar que para $A \in \mathfrak{u}(n)$ se tiene que

$$det\left(\lambda I - \frac{1}{2\pi i}A\right) = det\left(\lambda I + \frac{1}{2\pi i}\bar{A}^t\right) = \overline{det\left(\bar{\lambda} I + \frac{1}{2\pi i}A\right)}$$

Por ende, $C_k(A,\dots,A) \in \mathbb{R}$ para toda $A \in \mathfrak{u}(n)$, luego C_k es un polinomio real cuando se lo restringe a $\mathfrak{u}(n)$, y las clases de Chern de un $U(n)$-fibrado principal son clases en la cohomología real.

Proposición 4.1.1. *Dado un $SO(2m)$-fibrado principal (E,π,M) con conexión con forma de curvatura $\Omega \in \Omega^2(E,\mathfrak{so}(2m))$, dada por una matriz antisimétrica de 2-formas usuales (Ω_i^j) (como en la observación 3.0.5), se tiene que*

$$Pf_*(\Omega^m) = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!}\sum_{\sigma\in S_{2m}} sg(\sigma)\Omega_{\sigma(1)}^{\sigma(2)}\wedge\dots\wedge\Omega_{\sigma(2m-1)}^{\sigma(2m)} \in \Omega^{2m}(E)$$

Demostración. Sea $P_i^j : \mathfrak{so}(2m) \to \mathbb{R}$ dado por $P_i^j(A) = A_{i,j}$. Luego trivialmente $P_i^j \in S^1(\mathfrak{so}(2m)^*)$.

Además,

$$P_{i_1}^{i_2}\circ\dots\circ P_{i_{2m-1}}^{i_{2m}}(A,\dots,A) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} P_{i_1}^{i_2}(A)\dots P_{i_{2m-1}}^{i_{2m}}(A) = P_{i_1}^{i_2}(A)\dots P_{i_{2m-1}}^{i_{2m}}(A),$$

$$\forall A \in \mathfrak{so}(2m), \forall\ 1 \le i_1,\dots,i_{2m} \le 2m$$

Por lo tanto,

$$Pf(A,\dots,A)=\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!}\sum_{\sigma\in S_{2m}} sg(\sigma)P^{\sigma(2)}_{\sigma(1)}(A)\dots P^{\sigma(2m)}_{\sigma(2m-1)}(A)=$$

$$=\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!}\sum_{\sigma\in S_{2m}} sg(\sigma)P^{\sigma(2)}_{\sigma(1)}\circ\dots\circ P^{\sigma(2m)}_{\sigma(2m-1)}(A,\dots,A),\forall A\in\mathfrak{so}(2m)$$

Luego, por la proposición 4.0.12, se tiene que

$$Pf=\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!}\sum_{\sigma\in S_{2m}} sg(\sigma)P^{\sigma(2)}_{\sigma(1)}\circ\dots\circ P^{\sigma(2m)}_{\sigma(2m-1)}$$

Se deduce que

$$Pf_*(\Omega^m)=\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!}\sum_{\sigma\in S_{2m}} sg(\sigma)\left(P^{\sigma(2)}_{\sigma(1)}\circ\dots\circ P^{\sigma(2m)}_{\sigma(2m-1)}\right)_*(\Omega^m)=$$

$$=\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!}\sum_{\sigma\in S_{2m}} sg(\sigma)\left(P^{\sigma(2)}_{\sigma(1)}\right)_*(\Omega)\wedge\dots\wedge\left(P^{\sigma(2m)}_{\sigma(2m-1)}\right)_*(\Omega)=\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!}\sum_{\sigma\in S_{2m}} sg(\sigma)\Omega^{\sigma(2)}_{\sigma(1)}\wedge\dots\wedge\Omega^{\sigma(2m)}_{\sigma(2m-1)}$$

□

Capítulo 5

Conexiones en fibrados vectoriales

Fijemos para esta sección un fibrado vectorial $\pi : V \to M$.

Definición 5.0.1. *Una conexión en $\pi : V \to M$ es un mapa*

$$D : \Gamma(V) \to \Gamma(V \otimes T^*M)$$

tal que

- $D(s_1 + s_2) = Ds_1 + Ds_2, \forall s_1, s_2 \in \Gamma(V)$
- $D(fs) = fDs + s \otimes df, \forall s \in \Gamma(V), \forall f \in C^\infty(M)$

Observar que si $\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes V)$, se tiene que α se escribe como $\sum_{i=1}^n s_i \otimes \theta_i$ donde $\theta_i \in \Omega^1(M)$ y $s_i \in \Gamma(V)$, para todo i. Toda conexión tiene asociado un operador de derivación direccional,

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(V) \to \Gamma(V)$$

$$(X, s) \mapsto \nabla_X s,$$

dado por

$$\nabla_X s = \sum_{i=1}^n \theta_i(X) s_i, \text{ si } Ds = \sum_{i=1}^n s_i \otimes \theta_i,$$

que entenderemos por la derivada de s a lo largo de X.

Es directo verificar que se cumplen la propiedades

- $\nabla_{fX+gY} s = f\nabla_X s + g\nabla_Y s$
- $\nabla_X(s + t) = \nabla_X s + \nabla_X t$
- $\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + X(f)s$

$\forall f, g \in C^\infty(M), X, Y \in \mathfrak{X}(M), s, t \in \Gamma(V)$

Observación 5.0.1. Las conexiones Riemannianas son un caso particular de conexión en un fibrado vectorial, donde el fibrado en cuestión es el tangente de la variedad Riemanniana. En este contexto es usual identificar la conexión con el operador de derivada direccional.

Analicemos la conexión, desde un punto de vista local. Si la dimensión del fibrado vectorial es n, considerése un referencial móvil local $e_1, \ldots, e_n$, definido en un abierto U.

Ahora, como los e_i forman una base en cada fibra de $\pi^{-1}(U)$, es posible escribir

$$De_j = \sum_i e_i \otimes \omega_i^j,$$

donde $\omega_i^j \in \Omega^1(U)$ para todo i, j. La matriz $\omega = (\omega_i^j) \in M_n(\Omega^1(U))$ es lo que llamaremos la matriz de la conexión, relativa al campo referencial $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Esta matriz determina la conexión completamente (aunque localmente), ya que toda sección (local) se escribe como

$$s = \sum_i \sigma_i e_i,$$

donde $\sigma_i \in C^\infty(U)$, y por lo tanto

$$Ds = \sum_i D(\sigma_i e_i) = \sum_i \sigma_i De_i + e_i \otimes d\sigma_i = \sum_i \sigma_i \left(\sum_j e_j \otimes \omega_j^i \right) + e_i \otimes d\sigma_i = \sum_j e_j \otimes \left(\sum_i \omega_j^i \sigma_i + d\sigma_j \right)$$

Además, observar que la derivada direccional de s respecto a un campo X queda

$$\nabla_X s = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \omega_j^i(X)\sigma_i + d\sigma_j(X) \right) e_j$$

En particular, si $s = e_j$,

$$\nabla_X e_j = \sum_{i=1}^n \omega_i^j(X) e_i$$

Nos interesa relacionar las matrices de conexión para dos campos referenciales locales e y $\bar{e}$ distintos, definidos en el mismo abierto U de M. Observar que en esta situación existe $A = (a_i^j) \in GL_n(C^\infty(U))$ tal que

$$\bar{e}_j = \sum_i a_i^j e_i, \forall j$$

Por lo tanto, por un lado, por la cuenta anterior, se tiene que

$$D\bar{e}_j = \sum_k e_k \otimes \left(\sum_i \omega_k^i a_i^j + da_k^j \right)$$

Y por otro, si $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_i^j)$ es la matriz de la conexión relativa a $\bar{e}$, vale que

$$D\bar{e}_j = \sum_i \bar{e}_i \otimes \bar{\omega}_i^j = \sum_i \left(\sum_k a_k^i e_k \right) \otimes \bar{\omega}_i^j = \sum_k e_k \otimes \left(\sum_i a_k^i \bar{\omega}_i^j \right)$$

Se deduce entonces la fórmula fundamental de la conexión, o ley de transformación:

$$\sum_i a_k^i \bar{\omega}_i^j = \sum_i \omega_k^i a_i^j + da_k^j$$

Por simplicidad, introduciremos una notación matricial para las ecuaciones anteriores. Se definen las operaciones

$$\wedge : M_{m\times n}(\Omega^k(M)) \times M_{n\times r}(\Omega^l(M)) \to M_{m\times r}(\Omega^{k+l}(M))/$$

$$(\omega \wedge \eta)_{ij} = \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \eta_{kj}$$

$$\otimes : M_{m\times n}(\Gamma(V)) \times M_{n\times r}(\Omega^k(M)) \to M_{m\times r}(\Gamma(V) \otimes \Omega^k(M))/$$

$$(e \otimes \omega)_{ij} = \sum_{k=1}^n e_{ik} \otimes \omega_{kj}$$

$$d : M_{m\times n}(\Omega^k(M)) \to M_{m\times n}(\Omega^{k+1}(M))/$$
$$(d\omega)_{ij} = d(\omega_{ij})$$

Para el caso $\sigma \in M_{m\times n}(\Omega^0(M)) = M_{m\times n}(C^\infty(M))$, sustituiremos el producto exterior y el tensor por el producto punto a punto, escribiendo simplemente $\sigma \wedge \eta = \sigma\eta,\ e \otimes \sigma = e\sigma$.

Es directo chequear que sigue valiendo la identidad

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta, \forall \omega \in M_{m\times n}(\Omega^k(M)), \eta \in M_{n\times r}(\Omega^l(M))$$

En particular, si $A \in GL_n(C^\infty(M))$, a partir de $AA^{-1} = Id$ se deduce que $dAA^{-1} + AdA^{-1} = 0$, o sea, $dA = -AdA^{-1}A$.

Observación 5.0.2. Observar que en realidad $M_{m\times n}(\Omega^k(M)) = \Omega^k(M, M_{m\times n}(\mathbb{R}))$, la identificación dada por tomar la base canónica en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, como en la observación 3.0.5. Por lo tanto esto es un caso particular, y la derivada y producto exterior ya los teniamos definidos, y la identidad anterior ya la sabíamos.

Con la notación anterior, escribiendo

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(C^\infty(U)),\ e = (e_1, \ldots, e_n) \in M_{1\times n}(\Gamma(\pi^{-1}(U)))$$

se tiene que toda sección local se escribe como $s = e\sigma$, y la conexión aplicada a s queda

$$Ds = e \otimes (\omega\sigma + d\sigma),$$

donde $\omega \in M_n(\Omega^1(U))$ es la matriz de la conexión, que queda definida como

$$De = e \otimes \omega,$$

donde nuevamente hemos extendido la conexión D a $M_{n\times m}(\Gamma(V))$, entrada a entrada, y la expresión obtenida para la derivada direccional de s respecto a X es

$$\nabla_X s = e(\omega(X)\sigma + d\sigma(X)),$$

escrita de forma de respetar las dimensiones de las matrices.

Para e y $\bar{e}$ campos de referenciales locales, la fórmula fundamental de la conexión, escrita de forma matricial, es

$$A\bar{\omega} = \omega A + dA,$$

donde $A \in GL_n(C^\infty(U))$ es la matriz de cambio de referencial dada por

$$\bar{e} = eA$$

Definición 5.0.2. *Dado un campo referencial local e definido en el abierto U de M, con matriz de conexión asociada ω, se define la matriz de curvatura de la conexión relativa a e como*

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \in M_n(\Omega^2(U))$$

Proposición 5.0.2. *1. (Identidad de Bianchi) $d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$*

2. Dados e y $\bar{e}$ campos de referenciales locales definidos en el mismo abierto, con matrices de curvatura respectivas Ω y $\bar{\Omega}$, y matriz de cambio de referencial A, se cumple que

$$A\bar{\Omega} = \Omega A$$

Demostración. 1)

$$d\Omega = d(d\omega + \omega \wedge \omega) = d(\omega \wedge \omega) = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega =$$

$$(\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$$

2) Aplicando la derivada exterior a la fórmula fundamental, y usándola también, se tiene que

$$d(A\bar{\omega}) = d(\omega A + dA) = d(\omega A)$$

$$\Rightarrow dA \wedge \bar{\omega} + Ad\bar{\omega} = d\omega A - \omega \wedge dA$$

$$\Rightarrow dA \wedge \bar{\omega} + A(\bar{\Omega} - \bar{\omega} \wedge \bar{\omega}) = (\Omega - \omega \wedge \omega)A - \omega \wedge dA$$

$$\Rightarrow dA \wedge \bar{\omega} + A\bar{\Omega} - A\bar{\omega} \wedge \bar{\omega} = \Omega A - \omega \wedge \omega A - \omega \wedge dA$$

$$\Rightarrow (dA - A\bar{\omega}) \wedge \bar{\omega} + A\bar{\Omega} = \Omega A - \omega \wedge (\omega A + dA)$$

$$\Rightarrow -\omega A \wedge \bar{\omega} + A\bar{\Omega} = \Omega A - \omega \wedge A\bar{\omega}$$

$$\Rightarrow A\bar{\Omega} = \Omega A$$

□

Hasta ahora hemos hecho todas las consideraciones locales, ya que es localmente donde siempre podemos conseguir secciones del fibrado de referenciales. Para las consideraciones globales, observar que siempre es posible tomar un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$ de M, y una familia $\{e_\alpha : U_\alpha \to F(V)\}$ de campos de referenciales locales, simplemente usando la trivialidad local. Siempre que $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, se tiene la matriz de cambio de referencial $A_{\alpha\beta} \in M_{n\times n}(C^\infty(U_{\alpha\beta}))$ dada por $e_\beta = e_\alpha A_{\alpha\beta}$, y la fórmula fundamental relaciona en $U_{\alpha\beta}$ las matrices de la conexión relativas a e_α y e_β. Observar que claramente se tienen las condiciones de cociclo

$$A_{\alpha\alpha} = Id$$

$$A_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}A_{\gamma\alpha} = Id$$

Dada ahora una sección global $s \in \Gamma(V)$, esta se escribe, en U_α, como $s = e_\alpha\sigma^\alpha$, donde $\sigma^\alpha \in M_{n\times 1}(C^\infty(U_\alpha))$, y, si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, de $s = e_\alpha\sigma^\alpha = e_\beta\sigma^\beta = e_\alpha A_{\alpha\beta}\sigma^\beta$ se deduce que $\sigma^\alpha = A_{\alpha\beta}\sigma^\beta$.

Observar que si $\Omega^\alpha \in M_{n\times n}(\Omega^2(U_\alpha))$ es la matriz de curvatura de la conexión relativa a e_α, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene en $U_\alpha \cap U_\beta$ que

$$e_\alpha\Omega^\alpha(X,Y)\sigma^\alpha = e_\beta A_{\beta\alpha}\Omega^\alpha(X,Y)A_{\alpha\beta}\sigma^\beta = e_\beta A^{-1}_{\alpha\beta}\Omega^\alpha(X,Y)A_{\alpha\beta}\sigma^\beta = e_\beta\Omega^\beta(X,Y)\sigma^\beta,$$

donde hemos usado la parte 2 de la proposición 5.0.2 en la última igualdad. Por lo tanto se puede hacer la siguiente

Definición 5.0.3. *Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, el operador*

$$R(X,Y) : \Gamma(V) \to \Gamma(V)/s = e_\alpha\sigma^\alpha \mapsto e_\alpha\Omega^\alpha(X,Y)\sigma^\alpha$$

se llama el operador de curvatura de Riemann.

Es decir, $R(X,Y)(s)$ es la sección global del fibrado vectorial que localmente, en U_α, se escribe como $e_\alpha\Omega^\alpha(X,Y)\sigma^\alpha$, si s se escribe como $e_\alpha\sigma^\alpha$ en ese mismo abierto, y hemos probado que esto no depende del campo referencial elegido. En adelante, escribiremos $s = e_\alpha\sigma^\alpha$ para denotar a las secciones globales, sin demasiado lugar a confusión.

El siguiente teorema relaciona el operador de curvatura aquí definido, con el tensor de curvatura de Riemann tan frecuentemente utilizado en geometría Riemanniana:

Teorema 5.0.1. *Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene que*

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

Demostración. A partir de lo observado anteriormente, basta probar que ambos operadores coinciden en las secciones locales.

Sea entonces e un campo referencial local, y $s = \sigma e$ una sección local.

Luego, se tiene que

$$\nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s =$$
$$= \nabla_X(e(\omega(Y)\sigma + d\sigma(Y))) - \nabla_Y(e(\omega(X)\sigma + d\sigma(X))) - e[\omega([X,Y])\sigma + d\sigma([X,Y])] =$$
$$e[\omega(X)(\omega(Y)\sigma + d\sigma(Y)) + d(\omega(Y)\sigma + d\sigma(Y))(X)]$$
$$-e[\omega(Y)(\omega(X)\sigma + d\sigma(X)) + d(\omega(X)\sigma + d\sigma(X))(Y)]$$
$$-e[\omega([X,Y])\sigma + d\sigma([X,Y])] =$$
$$= e[\omega(X)\omega(Y)\sigma - \omega(Y)\omega(X)\sigma + \omega(X)Y(\sigma) - \omega(Y)X(\sigma) + X(\omega(Y)\sigma) + \cancel{X(Y(\sigma))} - Y(\omega(X)\sigma)$$
$$\cancel{-Y(X(\sigma))} - \omega([X,Y])\sigma - \cancel{[X,Y](\sigma)}] =$$
$$= e[\omega(X)\omega(Y)\sigma - \omega(Y)\omega(X)\sigma + \cancel{\omega(X)Y(\sigma)} - \cancel{\omega(Y)X(\sigma)} + X(\omega(Y))\sigma + \cancel{\omega(Y)X(\sigma)}$$
$$-Y(\omega(X))\sigma - \cancel{\omega(X)Y(\sigma)} - \omega([X,Y])\sigma]e =$$
$$= e[X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) + \omega(X)\omega(Y) - \omega(Y)\omega(X)]\sigma =$$
$$= e[d\omega(X,Y) + \omega \wedge \omega(X,Y)]\sigma = e\Omega(X,Y)\sigma = R(X,Y)s$$

□

A partir de una conexión, hemos obtenido matrices de 1-formas asociadas a campos referenciales que determinan la conexión localmente. Ahora, queremos hacer el camino inverso. Dadas las matrices y los campos referenciales, queremos construir la conexión. Resulta que esto es posible, siempre y cuando se siga cumpliendo la fórmula fundamental.

Proposición 5.0.3. *Dados $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto de M, $\{e_\alpha : U_\alpha \to F\pi^{-1}(U_\alpha)\}$ familia de campos referenciales locales, y $\{\omega^\alpha \in M_n(\Omega^1(U_\alpha))\}$ familia de 1-formas a valores en $M_n(\mathbb{R})$ tales que, si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, se cumple la ley de transformación*

$$A_{\alpha\beta}\omega^\beta = \omega^\alpha A_{\alpha\beta} + dA_{\alpha\beta},$$

entonces se tiene que existe una única conexión D en el fibrado $\pi : V \to M$ tal que ω^α es la matriz de la conexión relativa a e_α.

Demostración. La unicidad es clara. Por lo ya visto, la conexión no puede ser otra que

$$D : \Gamma(V) \to \Gamma(T^*M \otimes V) /\ D(e_\alpha \sigma^\alpha) = e_\alpha \otimes (\omega^\alpha \sigma^\alpha + d\sigma^\alpha)$$

Para que efectivamente la expresión de D defina un elemento de $\Gamma(V \otimes T^*M)$ es que se usa la condición de compatibilidad que nos da la ley de transformación. Supongamos entonces que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Vale que

$$e_\alpha \otimes (\omega^\alpha \sigma^\alpha + d\sigma^\alpha) = e_\beta A_{\beta\alpha} \otimes ((A_{\alpha\beta}\omega^\beta A_{\beta\alpha} + A_{\alpha\beta} dA_{\beta\alpha})A_{\alpha\beta}\sigma^\beta + d(A_{\alpha\beta}\sigma^\beta)) =$$
$$= e_\beta A_{\beta\alpha} \otimes (A_{\beta\alpha}\omega^\beta \sigma^\beta + A_{\alpha\beta} dA_{\beta\alpha} A_{\alpha\beta}\sigma^\beta + dA_{\alpha\beta}\sigma^\beta + A_{\alpha\beta} d\sigma^\beta) =$$
$$= e_\beta A_{\beta\alpha} \otimes (A_{\beta\alpha}\omega^\beta \sigma^\beta - dA_{\alpha\beta}\sigma^\beta + dA_{\alpha\beta}\sigma^\beta + A_{\alpha\beta} d\sigma^\beta) =$$
$$= e_\beta A_{\beta\alpha} A_{\alpha\beta} \otimes (\omega^\beta \sigma^\beta + d\sigma^\beta) = e_\beta \otimes (\omega^\beta \sigma^\beta + d\sigma^\beta),$$

lo que prueba que D está bien definida, y es rutinario verificar que es efectivamente una conexión con la propiedad buscada. □

El objetivo ahora es estudiar la relación entre las conexiones en un fibrado vectorial, y las conexiones en el fibrado principal de referenciales, explicitando el vínculo entre estas dos nociones, que el lector seguramente ya habrá adivinado.

Primero observemos que las matrices $A_{\alpha\beta}$ no son otra cosa que mapas de transición de una trivialización adecuada del fibrado $(F(V), F\pi, M)$, y que recíprocamente toda trivialización induce referenciales móviles que se relacionan como antes vía los correspondientes mapas de transición.

En efecto, dados los referenciales $e_\alpha : U_\alpha \to (F\pi)^{-1}(U_\alpha)$, relacionados vía $e_\beta = e_\alpha A_{\alpha\beta}$, se define, como en la proposición 3.0.4, las trivializaciones $\varphi_\alpha : (F\pi)^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times GL_n(\mathbb{R})$ dadas por $\varphi_\alpha^{-1}(p, A) = e_\alpha(p).A, \forall p \in U_\alpha, \forall A \in GL_n(\mathbb{R})$. Luego, se tiene que

$$\varphi_\alpha(\varphi_\beta^{-1}(p, A)) = \varphi_\alpha(e_\beta(p).A) = (p, A_{\alpha\beta}(p)A), \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta, \forall A \in GL_n(\mathbb{R})$$

Por lo tanto, los mapas de transición están dados por las matrices $A_{\alpha\beta}$.

Recíprocamente, fijada la trivialización $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$, se definen los referenciales móviles $e_\alpha : U_\alpha \to (F\pi)^{-1}(U_\alpha)$ dados por $e_\alpha(p) = \varphi_\alpha^{-1}(p, Id)$, nuevamente como en la proposición 3.0.4.

Los mapas de transición $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL_n(\mathbb{R})$ están dados entonces por

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(p, A) = (p, g_{\alpha\beta}(p)A)$$

o lo que es lo mismo, si $\varphi_\alpha = (F\pi, \psi_\alpha)$, por

$$g_{\alpha\beta}(p) = \psi_\alpha(\varphi_\beta^{-1}(p, A))A^{-1},$$

y no dependen de A. Por lo tanto, si $A = Id$, se tiene que

$$g_{\alpha\beta}(p) = \psi_\alpha(e_\beta(p))$$

Además,

$$\varphi_\alpha^{-1}(p, A_{\alpha\beta}(p)) = \varphi_\alpha^{-1}(p, Id)A_{\alpha\beta}(p) = e_\alpha(p)A_{\alpha\beta}(p) = e_\beta(p),$$

de donde

$$(p, \psi_\alpha(e_\beta(p))) = \varphi_\alpha(e_\beta(p)) = (p, A_{\alpha\beta}(p))$$

Luego,

$$A_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ e_\beta = g_{\alpha\beta},$$

lo que termina de probar lo que queríamos.

Segundo, observemos que si $\theta^0 \in \Omega^1(GL_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R}))$ es la conexión de Maurer-Cartan en $GL_n(\mathbb{R})$, dada por $\theta_g^0 = g^{-1}dg$, se cumple que

$$A_{\alpha\beta}^*(\theta^0)_p(v) = \theta_{A_{\alpha\beta}(p)}(d_pA_{\alpha\beta}(v)) = A_{\alpha\beta}(p)^{-1}d_pA_{\alpha\beta}(v), \forall v \in T_pM, \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta$$

Por lo tanto, recordando que la representación adjunta en $GL_n(\mathbb{R})$ está dada por la conjugación, se deduce que la Ley de transformación que tiene que cumplir una familia de 1-formas $\{\omega^\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, M_n(\mathbb{R}))\}$ para que quede definida una conexión en el $GL_n(\mathbb{R})$-fibrado de referenciales, dada por el corolario 3.0.3, es

$$\omega^\beta = A_{\alpha\beta}^{-1}\omega^\alpha A_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}^{-1}dA_{\alpha\beta},$$

o sea,

$$A_{\alpha\beta}\omega^\beta = \omega^\alpha A_{\alpha\beta} + dA_{\alpha\beta}$$

Observar que es la misma que la condición para definir una conexión vectorial de la proposición 5.0.3. Hemos probado entonces, a partir del corolario 3.0.3 y la proposición 5.0.3, el siguiente

Teorema 5.0.2. *Hay una correspondencia biunívoca entre las conexiones del fibrado vectorial $\pi : V \to M$ y las conexiones del $GL_n(\mathbb{R})$-fibrado principal $F\pi : F(V) \to M$.*

Observar además que la forma de obtener la familia de 1-formas a partir de la conexión en el fibrado principal es poniendo $\omega^\alpha = e_\alpha^*(\theta)$, lo que es fácil de convencerse deshaciendo las cuentas hechas en el corolario 3.0.3.

En cuanto a la forma de curvatura de una conexión $\theta \in \Omega^1(F(V), M_n(\mathbb{R}))$, esta queda dada por

$$\Omega_x(v,w) = d\theta_x(v,w) + [\theta_x(v), \theta_x(w)] = d\theta_x(v,w) + (\theta_x(v)\theta_x(w) - \theta_x(w)\theta_x(v)) =$$
$$= d\theta_x(v,w) + (\theta \wedge \theta)_x(v,w), \forall x \in F(V), v, w \in T_xF(V),$$

donde en realidad estamos abusando un poco la notación al usar el producto $\wedge$ para indicar la composición

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(F(V), M_n(\mathbb{R})) \otimes \Omega^k(F(V), M_n(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\wedge} & \Omega^{k+l}(F(V), M_n(\mathbb{R}) \otimes M_n(\mathbb{R})) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \Omega^{k+l}(F(V), M_n(\mathbb{R})) \end{array}$$

donde el mapa vertical es inducido por la multiplicación de matrices $M_n(\mathbb{R}) \otimes M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ (o sea, en términos harto informales, donde aparece un tensor pongo una multiplicaciíon de matrices). En definitiva, podemos expresar la curvatura de forma

$$\Omega = d\theta + \theta \wedge \theta,$$

donde las operaciones son entrada a entrada, si se las piensa como matrices. El resultado es, como el pullback también funciona entrada a entrada, que las matrices de curvatura de las conexiones principal y vectorial se relacionan por

$$\Omega^\alpha = e_\alpha^*(\Omega)$$

5.1. Teorema de Gauss-Bonnet-Chern

Pasaremos ahora al contexto de las variedades Riemannianas y de las conexiones de Levi-Civita, que es en el cual está formulado el teorema de Gauss-Bonnet-Chern. Para la prueba haremos uso del fibrado tangente unitario (SM, π, M) a una variedad Riemanniana M, que tiene como fibra en p a los vectores de T_pM de norma 1 (observar que esto no es un fibrado principal en general, ni uno vectorial, sencillamente un fibrado con fibra $S^{dim(M)-1}$), que como es usual tiene estructura de variedad de dimensión $2dim(M) - 1$.

Sea entonces M una variedad Riemanniana de dimensión n, y ∇ la conexión de Levi-Civita asociada (o bien, equivalentemente, el operador de derivada direccional de la conexión de Levi-Civita $D : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM \otimes T^*M)$). Comenzaremos por deducir ecuaciones que serán utilizadas más adelante.

Fijado $e = (e_1, \ldots, e_n)$ referencial ortonormal definido en un abierto U de M, se define $\omega_i \in \Omega^1(U)$ para $i = 1, \ldots, n$, como

$$\omega_i(X) = \langle X, e_i \rangle, \forall X \in \mathfrak{X}(U)$$

Tenemos nuevamente la matriz de la conexión $\omega = (\omega_i^j)$, y, en este caso, como $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, se tiene, por la compatibilidad de la conexión, que

$$0 = X\langle e_i, e_j \rangle = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \nabla_X e_j \rangle =$$
$$= \left\langle \sum_{k=1}^n \omega_k^i(X) e_k, e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \sum_{r=1}^n \omega_r^j(X) e_r \right\rangle = w_j^i(X) + \omega_i^j(X), \forall X \in \mathfrak{X}(U)$$

Por lo tanto,

$$\omega_i^j = -\omega_j^i$$

Por otro lado, si $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, es

$$X(\omega_i(Y)) = X\langle Y, e_i\rangle = \langle \nabla_X Y, e_i\rangle + \langle Y, \nabla_X e_i\rangle$$

$$Y(\omega_i(X)) = Y\langle X, e_i\rangle = \langle \nabla_Y X, e_i\rangle + \langle X, \nabla_Y e_i\rangle$$

Entonces, por la simetría de la conexión, vale que

$$d\omega_i(X,Y) = X(\omega_i(Y)) - Y(\omega_i(X)) - \omega_i([X,Y]) =$$

$$\langle \nabla_X Y, e_i\rangle + \langle Y, \nabla_X e_i\rangle - \langle \nabla_Y X, e_i\rangle - \langle X, \nabla_Y e_i\rangle - \langle [X,Y], e_i\rangle =$$

$$\langle Y, \nabla_X e_i\rangle - \langle X, \nabla_Y e_i\rangle = \sum_{j=1}^n \omega_j^i(X)\langle Y, e_j\rangle - \sum_{j=1}^n \omega_j^i(Y)\langle X, e_j\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^n \omega_j^i(X)\omega_j(Y) - \omega_j^i(Y)\omega_j(X) = \sum_{j=1}^n \omega_j^i \wedge \omega_j(X,Y)$$

Se deduce que

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^n \omega_j^i \wedge \omega_j \tag{5.1}$$

Junto a la de la definición de la forma de curvatura que ya teníamos, a saber,

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j + \sum_{k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j,$$

estas dos ecuaciones se llaman ecuaciones de Cartan. Observar que se cumple que $\Omega_i^j = -\Omega_j^i$, es decir $\Omega \in \Omega^2(U, \mathfrak{so}(n))$, y se tiene la identidad de Bianchi

$$d\Omega_i^j = \sum_k \Omega_i^k \wedge \omega_k^j - \omega_i^k \wedge \Omega_k^j \tag{5.2}$$

Sean ahora $x = (x_1, \ldots, x_n)$ coordenadas locales de M definidas en el mismo abierto U, y sea $u_i = e_i^*$ (o sea, $u_i(p,v) = e_i(p)^*(v)$) para $i = 1, \ldots, n$. Se tiene que $(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n)$ son coordenadas locales para TM, y su restricción a SM también, sujetas a la condición $\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1$.

Sea $(p,v) \in SM$. Se define el operador $K_{(p,v)} : T_{(p,v)}(SM) \to T_pM$ de la siguiente forma. Si $\xi \in T_{(p,v)}(SM)$ entonces $\xi = \dot\alpha(0)$ siendo $\alpha(t) = (p(t), w(t)) \in SM$ con $p(0) = p$, $w(0) = v$ y tal que es posible extender el campo $w(t)$, inicialmente a lo largo de $p(t)$, a un campo local unitario en M. Notar que derivando en $\pi(\alpha(t)) = p(t)$ se tiene que $\dot p(0) = d_{(p,v)}\pi(\xi)$.

Se define

$$K_{(p,v)}(\xi) = \frac{Dw}{dt}(0)$$

Es fácil ver que la def no depende del w usado.

Ahora definimos $\widetilde{\theta}_i \in \Omega^1(SU)$ dada por

$$(\widetilde{\theta}_i)_{(p,v)}(\xi) = < K_{(p,v)}(\xi), e_i(p) >$$

Queremos mostrar que

$$\widetilde{\theta}_i = du_i + \sum_j u_j \pi^*(\omega_i^j) \tag{5.3}$$

Tomemos campos locales X y Z de forma tal que X es unitario y extiende a $w(t)$, y $Z(p) = \dot{p}(0)$, y escribamos $X = \sum_j \sigma_j e_j$, con σ_j diferenciable en un entorno de p. Notar que $\sigma_j(p) = v_j$ siendo v_j las coordenadas de v en la base $e_i(p)$.

Se tiene que

$$K_{(p,v)}(\xi) = \nabla_Z X(p) = \sum_j (Z(\sigma_j)(p)e_j(p) + \sigma_j(p)\nabla_Z e_j(p)) = \sum_k \left(Z(\sigma_k)(p) + \sum_j v_j \omega_k^j(Z)(p) \right) e_k(p)$$

Además, si $\alpha(t)$ tiene coordenadas locales $(p_1(t), \ldots, p_n(t), \sigma_1(p(t)), \ldots, \sigma_n(p(t)))$, derivando en $u_i(\alpha(t)) = \sigma_i(p(t))$ se obtiene

$$d_{(p,v)}u_i(\xi) = d_p\sigma_i(\dot{p}(0)) = \dot{p}(0)(\sigma_i) = Z(\sigma_i)(p)$$

Luego,

$$(\widetilde{\theta}_i)_{(p,v)}(\xi) = Z(\sigma_i)(p) + \sum_j v_j \omega_i^j(Z)(p) =$$

$$(du_i)_{(p,v)}(\xi) + \sum_j v_j (\omega_i^j)_p(d_{(p,v)}\pi(\xi)) = (du_i)_{(p,v)}(\xi) + \sum_j u_j(p,v)\pi^*(\omega_i^j)_{(p,v)}(\xi),$$

de donde se tiene la igualdad 5.3.

En forma matricial, esta identidad queda

$$\widetilde{\theta} = \pi^*(\omega)u + du \in \Omega^1(SU, \mathbb{R}^n) \tag{5.4}$$

Observar que a partir de $\langle X, X\rangle = \sum_i \sigma_i^2 = 1$, derivando respecto a Z se tiene que

$$0 = \langle \nabla_Z X(p), X(p)\rangle = \sum_j \sigma_j(p)\langle K_{(p,v)}(\xi), e_j(p)\rangle = \sum_j u_j(p,v)(\widetilde{\theta}_j)_{(p,v)}(\xi),$$

de donde, como p y v son arbitrarios, se obtiene

$$\sum_j u_j \widetilde{\theta}_j = 0 \tag{5.5}$$

Aplicando la derivada exterior en 5.3 se obtiene

$$d\widetilde{\theta}_i = \sum_j du_j \wedge \pi^*(\omega_i^j) + u_j \pi^*(d\omega_i^j) =$$

$$= \sum_j \left(\widetilde{\theta}_j - \sum_k u_k \pi^*(\omega_j^k) \right) \wedge \pi^*(\omega_i^j) + u_j \left(\pi^*(\Omega_i^j) - \sum_k \pi^*(\omega_i^k) \wedge \pi^*(\omega_k^j) \right) =$$

$$= \sum_j \widetilde{\theta}_j \wedge \pi^*(\omega_i^j) + u_j \pi^*(\Omega_i^j) \tag{5.6}$$

Lema 5.1.1. *Dado un punto p en M, es posible encontrar un referencial móvil $e = (e_1, \ldots, e_n)$ definido en un entorno de p tal que, si ω es la matriz de la conexión de Levi-Civita relativa a e, se cumple que $\omega_p = 0$.*

Demostración. Sean $B = exp_p(B(0,\epsilon))$ una bola normal en p, y $(e_1,\dots,e_n)$ una base ortonormal de T_pM. Luego, dado cualquier punto q en B, este se escribe de forma única como $q = exp_p(v) = \gamma(p,v,1)$, donde $t \mapsto \gamma(p,v,t)$ es la geodésica que en instante inicial pasa por p con velocidad $v \in B(0,\epsilon) \subseteq T_pM$. Si $v \in B(0,\epsilon)$ y $w \in T_pM$, sea $t \mapsto \tau_v(t,w) \in T_{\gamma(p,v,t)}M$ el transporte paralelo de w por la geódesica $\gamma(p,v,-)$, para $t \in [0,1]$. Se define $e_i^v(t) = \tau_v(t,e_i)$. Luego, por la compatibilidad de la métrica, $\{e_1^v(t),\dots,e_n^v(t)\}$ es una base ortonormal de $T_{\gamma(p,v,t)M}$, para todo v y t, luego queda definido un referencial móvil e en B dado por $e_i(q) = e_i^v(1)$ si $q = exp_p(v)$.

Si X es un campo definido en B tal que $v = X(p) \in B(0,\epsilon)$, se tiene que

$$\sum_i \omega_i^j(X)(p)e_i(p) = \nabla_v e_j(p) = \frac{De_j}{dt}(0) = 0,$$

luego $\omega_p(X) = 0$. Como ω_p es lineal, se tiene que $\omega_p(X) = 0$ para todo campo X definido en B, y se deduce lo pedido. □

Observación 5.1.1. Dada una variedad M de dimensión n sin borde, compacta y orientada, y $\omega \in \Omega^n(M)$, si $[\omega] \in H^n(\Omega^*(M))$ es la clase de cohomología de De Rham de ω, se puede definir

$$\int_M [\omega] := \int_M \omega,$$

puesto que, por Stokes, es

$$\int_M \omega + d\eta = \int_M \omega + \int_{\partial M} \eta = \int_M \omega$$

Teorema 5.1.1 (Gauss-Bonnet-Chern)**.** *Dada una varidedad Riemanniana M compacta, sin borde, de dimensión $n = 2p$ y orientable, se tiene que*

$$\int_M e(M) = \chi(M),$$

donde $\chi(M)$ es la característica de Euler de M, y $e(M) = e(F_0^+(TM))$ es la clase característica de Euler del $SO(2p)$-fibrado $(F_0^+(TM), \pi^+, M)$.

Demostración. Fijemos un cubrimiento $\{U_\alpha\}$ de M donde en cada U_α hay definido un campo referencial ortonormal positivo $e_\alpha \in \Gamma(F_0^+(TU_\alpha))$ y coordenadas locales $(x_1^\alpha,\dots,x_n^\alpha)$, que inducen como antes coordenadas locales en SU_α dadas por $(x_1^\alpha,\dots,x_n^\alpha,u_1^\alpha,\dots,u_n^\alpha)$, donde $u_i^\alpha = (e_i^\alpha)^*$. Se tiene la matriz de la conexión de Levi-Civita $\omega^\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{so}(n))$ relativa a e_α, la forma de curvatura $\Omega^\alpha = (\Omega_{i,j}^\alpha) \in \Omega^2(U_\alpha, \mathfrak{so}(n))$ y las 1-formas $\widetilde{\theta}^\alpha = \pi^*(\omega^\alpha)u^\alpha + du^\alpha \in \Omega^1(SU_\alpha, \mathbb{R}^n)$.

Sea

$$Pf(\Omega^\alpha) = \frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p}\pi^p p!} \sum_{\sigma\in S_{2p}} sg(\sigma)\Omega^\alpha_{\sigma(1),\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \Omega^\alpha_{\sigma(2p-1),\sigma(2p)} \in \Omega^{2p}(U_\alpha)$$

Ahora, como las matrices de transición $A_{\alpha\beta}$ son ortogonales, las matrices de curvatura se transforman, por la proposición 5.0.2, como

$$\Omega^\beta = A_{\alpha\beta}^{-1}\Omega^\alpha A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}^t\Omega^\alpha A_{\alpha\beta} = Ad(A_{\alpha\beta}^{-1})(\Omega^\alpha)$$

Se deduce de la invariancia del polinomio Pfaffiano (o si se quiere, es exactamente la misma cuenta, ya que las matrices de transición tienen determinante 1) que $Pf(\Omega^\alpha) = Pf(\Omega^\beta)$ en $U_\alpha \cap U_\beta$, luego queda definida una forma global e intrínseca $Pf(\Omega)$ que en U_α vale $Pf(\Omega^\alpha)$.

Sea $\theta_{prin} \in \Omega^1(F(TM), M_n(\mathbb{R}))$ la conexión en el fibrado de referenciales correspondiente a la conexión de Levi-Civita, según el teorema 5.0.2. La antisimetría de las matrices ω^α, que determinan la conexión, implican que en realidad θ_{prin} toma valores en $\mathfrak{so}(2p)$, por lo tanto su restricción a

$F_0^+(TM)$ define una conexión. Sea $\Omega_{prin} \in \Omega^2(F_0^+(TM), \mathfrak{so}(2p))$ su forma de curvatura. Se cumple que $e_\alpha^*(\Omega_{prin}) = \Omega^\alpha$, para todo α, lo cual implica, por la proposición 4.1.1, que

$$e_\alpha^*(Pf_*(\Omega_{prin}^p)) = Pf(\Omega^\alpha)$$

Luego,

$$(\pi^+)^*(e_\alpha^*(Pf_*(\Omega_{prin}^p))) = (\pi^+)^*(Pf(\Omega^\alpha))$$

Ahora, por el lema 3.0.3, $(\pi^+)^* : \Omega^{2p}(M) \to \Omega^{2p}(F_0^+(TM))$ es un isomorfismo entre las $2p$-formas de M y las formas horizontales e invariantes en $F_0^+(TM)$, y $Pf_*(\Omega_{prin}^k)$ es una de esas. El hecho de que $\pi^+ \circ e_\alpha = id$, implica que $e_\alpha^* \circ (\pi^+)^* = id$, luego la restricción de e_α^* a las formas horizontales e invariantes es la inversa de $(\pi^+)^*$. Se deduce, como α es arbitrario, que

$$Pf_*(\Omega_{prin}^p) = (\pi^+)^*(Pf(\Omega)),$$

es decir,

$$Pf(\Omega) = Pf_*(\Omega_{prin}^p)_M$$

Por lo tanto $Pf(\Omega)$ es representante de la clase de cohomología $e(M)$, por definición del homomorfismo de Chern-Weil.

El objetivo entonces se reduce a probar que

$$\int_M Pf(\Omega) = \chi(M)$$

Pongamos

$$Pf(\widetilde{\Omega}) = \pi^*(Pf(\Omega)) \in \Omega^{2p}(SM) \text{ y } \widetilde{\Omega}^\alpha = \pi^*(\Omega^\alpha) \in \Omega^2(SU_\alpha, \mathfrak{so}(2p))$$

Observar que el mapa $e_\alpha \circ \pi : SU_\alpha \to F_0^+(TU_\alpha)$ lleva fibras en fibras, puesto que $\pi^+ \circ e_\alpha = id$. Esto implica que su diferencial lleva vectores tangentes a la fibra en vectores idem, lo cual, sumado al hecho de que $\widetilde{\Omega}^\alpha = \pi^*(e_\alpha^*(\Omega_{prin}))$, implican que $\widetilde{\Omega}^\alpha$ se anula en vectores tangentes a la fibra, puesto que Ω_{prin} es horizontal.

Mostraremos ahora que existe $\Pi \in \Omega^{2p-1}(SM)$ tal que $d\Pi = Pf(\widetilde{\Omega})$. Para eso, sean, para $k = 0, \dots, p-1$,

$$\Phi_k^\alpha = \sum_{\rho \in S_{2p}} sg(\rho) u^\alpha_{\rho(1)} \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)} \in \Omega^{2p-1}(SU_\alpha)$$

$$\Psi_k^\alpha = \sum_{\rho \in S_{2p}} sg(\rho) \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(1),\rho(2)} \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(3)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)} \in \Omega^{2p}(SU_\alpha)$$

Es sencillo chequear que las 1-formas $\widetilde{\theta}^\alpha$ se transforman en $S(U_\alpha \cap U_\beta)$ como

$$\widetilde{\theta}^\alpha = A_{\alpha\beta} \widetilde{\theta}^\beta,$$

por lo tanto una cuenta similar a la de invariancia del Pfaffiano demuestra que las formas Φ_k^α y Ψ_k^α definen formas globales e intrínsicas en SM, que denotaremos por Φ_k y Ψ_k respectivamente. Además, observar que Ψ_{p-1} difiere de $Pf(\widetilde{\Omega})$ en un factor numérico.

Probaremos ahora que vale, para todo $k = 0, \dots, p-1$, la relación

$$d\Phi_k = \Psi_{k-1} + \frac{2p-2k-1}{2(k+1)} \Psi_k, \tag{5.7}$$

donde definimos $\Psi_{-1} = 0$.

Se tiene que

$$d\Phi_k^\alpha = \sum_{\rho\in S_{2p}} sg(\rho) du^\alpha_{\rho(1)} \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)}$$

$$+sg(\rho)u^\alpha_{\rho(1)} \left(\sum_{i=2}^{2p-2k} (-1)^i \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2)} \wedge \cdots \wedge d\widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(i)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \right) \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)}$$

$$-sg(\rho)u^\alpha_{\rho(1)}\widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \wedge \left(\sum_{i=2p-2k+1}^{2p-1} \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge d\widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(i),\rho(i+1)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)} \right) =$$

$$= \sum_{\rho\in S_{2p}} sg(\rho) du^\alpha_{\rho(1)} \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)}$$

$$+sg(\rho)u^\alpha_{\rho(1)} \left(\sum_{i=2}^{2p-2k} d\widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(i)} \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \right) \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)}$$

$$-sg(\rho)u^\alpha_{\rho(1)}\widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \wedge \left(\sum_{i=2p-2k+1}^{2p-1} d\widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(i),\rho(i+1)} \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)} \right)$$

$$= \sum_{\rho\in S_{2p}} sg(\rho) du^\alpha_{\rho(1)} \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)}$$

$$+sg(\rho)(2p-2k-1)u^\alpha_{\rho(1)} d\widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)}$$

$$-ksg(\rho)u^\alpha_{\rho(1)}\widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \wedge d\widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)}, \qquad (5.8)$$

donde en la última igualdad hemos hecho un cambio en la variable de sumación. Sustituyendo las expresiones de du_i^α, $d\widetilde{\theta}_i^\alpha$ y $d\widetilde{\Omega}^\alpha_{i,j}$ a partir de 5.4, 5.6 y 5.2 respectivamente, se obtienen dos tipos de términos: los que tienen algún $\pi^*((\omega^\alpha)_i^j)$, y los que no. Sacando éstos últimos, se obtiene

$$\Psi_{k-1} + \sum_{\rho\in S_{2p}} (2p-2k-1) sg(\rho) u^\alpha_{\rho(1)} \left(\sum_{j=1}^{2p} u_j^\alpha \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2),j} \right) \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)}, \qquad (5.9)$$

que es una expresión también globalmente definida e intrínseca. Ahora, fijado un punto p en M, como es posible encontrar un referencial móvil definido en un entorno de p tal que $(\omega_i^j)_p = 0$, se tiene que, agregando este referencial si es necesario a los $\{e_\alpha\}$, las expresiones globales que definen 5.8 y 5.9 coinciden en p. Ahora, como estas no dependen del referencial, y p es arbitrario, se tienen que son idénticas.

Se definen ahora las expresiones

$$A_k = \sum_{\rho\in S_{2p}} sg(\rho) u^\alpha_{\rho(1)} \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(1),\rho(2)} \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(3)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)}$$

$$B_k = \sum_{\rho\in S_{2p}} sg(\rho) u^\alpha_{\rho(1)} u^\alpha_{\rho(3)} \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(3),\rho(2)} \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(3)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)}$$

$$C_k = \sum_{\rho\in S_{2p}} sg(\rho) u^\alpha_{\rho(3)} \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(1),\rho(2)} \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(3)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)} \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)},$$

que son elementos de $\Omega^{2p}(SU_\alpha)$.

Vale que

$$A_k = \sum_{\rho\in S_{2p}} sg(\rho)\left(1-\sum_{i=2}^{2p}(u^\alpha_{\rho(i)})^2\right)\widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(1),\rho(2)}\wedge\widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(3)}\wedge\cdots\wedge\widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)}\wedge\widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)}\wedge\cdots\wedge\widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)} =$$

$$= \Psi_k - A_k - 2(p-k-1)C_k - 2kA_k,$$

de donde

$$\Psi_k = 2(k+1)A_k + 2(p-k-1)C_k \tag{5.10}$$

Por otro lado, por 5.5, se tiene que

$$B_k = \sum_{\rho\in S_{2p}} sg(\rho)u^\alpha_{\rho(1)}\left(-\sum_{i\neq 3}u^\alpha_{\rho(i)}\widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(i)}\right)\widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(3),\rho(2)}\wedge\widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(3)}\wedge\cdots\wedge\widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p-2k)}\wedge\widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-2k+1),\rho(2p-2k+2)}\wedge\cdots\wedge\widetilde{\Omega}^\alpha_{\rho(2p-1),\rho(2p)} =$$

$$= C_k - (2k+1)B_k,$$

luego,

$$C_k = 2(k+1)B_k \tag{5.11}$$

La expresión 5.9 queda

$$d\Phi_k = \Psi_{k-1} + (2p-2k-1)(A_k - 2(p-k-1)B_k) \tag{5.12}$$

Sustituyendo 5.10 y 5.11 en 5.12, se obtiene 5.7, la cual por inducción nos permite resolver Ψ_k en términos de $d\Phi_0,\ldots,d\Phi_k$, de la siguiente manera

$$\Psi_k = \sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{2^{m+1}(k+1)k\ldots(k-m+1)}{(2p-2k-1)(2p-2k+1)\ldots(2p-2k+2m-1)}d\Phi_{k-m},\ k=0,\ldots,p-1$$

En particular,

$$Pf(\widetilde{\Omega}) = \frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p}\pi^p p!}\Psi_{p-1} = d\Pi,$$

donde

$$\Pi = \frac{1}{\pi^p}\sum_{m=0}^{p-1}(-1)^m\frac{1}{(2p-2m-1)!!m!2^{p+m}}\Phi_m$$

Fijemos ahora un campo X en M con un conjunto finito de singularidades $I=\{p_i\}$. Tomemos, para cada singularidad, un entorno $B_i(\epsilon)\subseteq M$ difeomorfo a una bola de $\mathbb{R}^{2p}$ de radio ϵ, de modo tal que los $B_i(\epsilon)$ son disjuntos y $\pi^{-1}(B_i(\epsilon))\simeq B_i(\epsilon)\times S^{2p-1}$. Sea $N_\epsilon = M-\bigcup_i\overline{B_i(\epsilon)}$, que es nuevamente una variedad Riemanniana orientable, sin borde, de la misma dimensión. Normalizando X en N_ϵ, podemos suponer que $X|_{N_\epsilon}\in\Gamma(N_\epsilon,SN_\epsilon)$. Sea $S_{p_i}:=\pi^{-1}(\{p_i\})\simeq S^{2p-1}$ la fibra del fibrado tangente unitario en p_i, y

$$r^i_\epsilon : B_i(\epsilon)\times S_{p_i}\to S_{p_i}$$

la proyección sobre el segundo factor. Identificando $\pi^{-1}(B_i(\epsilon))$ con $B_i(\epsilon)\times S_{p_i}$, X restricto a $\partial B_i(\epsilon)$ toma la forma

$$(X|_{\partial B_i(\epsilon)})(q) = (q, Y_i(q)), \forall q\in\partial B_i(\epsilon),$$

con $Y_i = r^i_\epsilon\circ X|_{\partial B_i(\epsilon)}:\partial B_i(\epsilon)\to S_{p_i}$, y se cumple que $ind_{p_i}X = degY_i$.

Por un lado, por la fórmula del grado, se tiene que

$$\int_{\partial B_i(\epsilon)}Y_i^*(\Pi) = degY_i\int_{S_{pi}}\Pi = ind_{p_i}X\int_{S_{pi}}\Pi$$

Y por otro, como $X|_{\partial B_i(\epsilon)}$ es un difeomorfismo sobre su imagen (con inversa $\pi|_{X(\partial B_i(\epsilon))}$), orientando esta para que preserve la orientación, por el teorema de cambio de variable vale que

$$\int_{\partial B_i(\epsilon)} Y_i^*(\Pi) = \int_{\partial B_i(\epsilon)} (X|_{\partial B_i(\epsilon)})^*((r_\epsilon^i)^*(\Pi)) = \int_{X(\partial B_i(\epsilon))} (r_\epsilon^i)^*(\Pi)$$

Se deduce que

$$\int_{X(\partial B_i(\epsilon))} (r_\epsilon^i)^*(\Pi) = ind_{p_i} X \int_{S_{pi}} \Pi$$

Además, como $r_\epsilon^i \xrightarrow{\epsilon\to 0} id_{S_{p_i}}$ (en la topología C^1), se cumple que

$$\left| \int_{X(\partial B_i(\epsilon))} \Pi - \int_{X(\partial B_i(\epsilon))} (r_\epsilon^i)^*(\Pi) \right| \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0,$$

de donde

$$\int_{X(\partial B_i(\epsilon))} \Pi \xrightarrow{\epsilon\to 0} ind_{p_i} X \int_{S_{p_i}} \Pi$$

Entonces, como $\pi|_{X(N_\epsilon)} : X(N_\epsilon) \to N_\epsilon$ es un difeomorfismo, se tiene, por el teorema de cambio de variable y el teorema de Stokes, que

$$\int_M Pf(\Omega) = \int_{N_\epsilon} Pf(\Omega) + \sum_i \int_{B_i(\epsilon)} Pf(\Omega) = \int_{X(N_\epsilon)} Pf(\widetilde{\Omega}) + \sum_i \int_{B_i(\epsilon)} Pf(\Omega)$$

$$= \int_{X(N_\epsilon)} d\Pi + \sum_i \int_{B_i(\epsilon)} Pf(\Omega) = \int_{\partial X(N_\epsilon)} \Pi + \sum_i \int_{B_i(\epsilon)} Pf(\Omega) =$$

$$= \sum_i \left(\int_{\partial X(B_i(\epsilon))} \Pi + \int_{B_i(\epsilon)} Pf(\Omega) \right) \xrightarrow{\epsilon\to 0} \sum_i ind_{p_i} X \int_{S_{p_i}} \Pi \tag{5.13}$$

Por otro lado,

$$\int_{S_{p_i}} \Pi = \frac{1}{(2p-1)!!2^p\pi^p} \int_{S_{p_i}} \Phi_0 \tag{5.14}$$

ya que $\widetilde{\Omega}^\alpha$ se anula en los vectores tangentes a las fibras, luego Φ_m también, si $m \neq 0$.

Por definición, se tiene que

$$\Phi_0 = \sum_{\rho\in S_{2p}} sg(\rho) u^\alpha_{\rho(1)} \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p)} = \sum_{i=1}^{2p} u_i^\alpha \sum_{\rho\in S_{2p}/\rho(1)=i} sg(\rho) \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2)} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{\rho(2p)} =$$

$$\sum_{i=1}^{2p} u_i^\alpha \sum_{\rho\in S_{2p}/\rho(1)=i} (-1)^i \widetilde{\theta}^\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{i-1} \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{i+1} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{2p} =$$

$$(2p-1)! \sum_{i=1}^{2p} (-1)^i u_i^\alpha \widetilde{\theta}^\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{i-1} \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{i+1} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\theta}^\alpha_{2p}$$

Además, esta última suma es el elemento de volumen de S^{2p-1}, luego, usando que

$$vol(S^{2p-1}) = \frac{2\pi^p}{(p-1)!},$$

se obtiene que

$$\int_{S_{p_i}} \Phi_0 = \frac{(2p-1)!2\pi^p}{(p-1)!}$$

Sustituyendo en 5.14, como

$$\frac{(2p-1)!}{(2p-1)!!} = 2^{p-1}(p-1)!,$$

se llega a

$$\int_{S_{p_i}} \Pi = 1, \forall i$$

Entonces, por 5.13, se tiene que

$$\int_M Pf(\Omega) = \sum_i ind_{p_i} X = \chi(M),$$

por el teorema de Poincaré-Hopf, lo que concluye la prueba. □

Bibliografía

[1] C. B. Allendoerfer, The Euler number of a Riemannian manifold. Amer J Math, 62: 243248, 1940.

[2] C. B. Allendoerfer, A. Weil, The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra. Trans Amer Math Soc, 53: 101129, 1943.

[3] O. Bonnet, Mémoire sur la théorie générale des surfaces. J de lEcole Polytechnique, 19(32): 1146, 1848.

[4] M. do Carmo, Riemannian Geometry. Birkhaussen, Boston, 1992.

[5] S.S Chern, A Simple Intrinsec Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds. Ann. of Math., Vol. 45, No. 4, pp. 747-752, 1944.

[6] S.S Chern, Vector Bundles With a Connection. MAA Studies in Mathematics, 27. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1989.

[7] J.L. Dupont, Curvature And Characteristic Classes. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1978.

[8] J.L Dupont, Fibre Bundles and Chern-Weil Theory. Lecture Notes Series No. 69, Aarhus Universitet, Denmark, 2003.

[9] W. von Dyck, Beitrage zur analysis situs. Math Ann, 32: 457512, 1888.

[10] W. Fenchel, On total curvatures of Riemannian manifolds. J London Math Soc, 15: 1522, 1940.

[11] C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827.

[12] V. Guillemin, A. Pollack, Differential Topology. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[13] H. Hopf, Uber die curvatura integra geschlossener hyperfl achen. Math Ann, 95: 340367, 1925.

[14] H. Hopf, Vektorfelder in n-dimensionalen mannifaltigkeiten. Math Ann, 96: 225250, 1926.

[15] Y. Li, The Gauss-Bonnet-Chern Theorem on Riemannian Manifolds. arXiv:1111.4972, 2011.

[16] J. Milnor, Topology from the Differentiable Viewpoint, Univ. of Virginia Press, Charlottesville, Virginia, 1965.

[17] M. Spivak, A Comprehensive Introduction To Differential Geometry. Publish or Perish, Houston, Texas, 1999.

[18] F.W Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Springer, 2010.

[19] A. Weil, Chern S S. As geometer and friend. En: Shiing-Shen Chern Selected Papers. New York-Berlin- Heidelberg: Springer-Verlag, ixxii, 1978.

[20] H.H. WU, Historical Development of The Gauss-Bonnet Theorem. Science in China Series A: Mathematics,Vol. 51, No. 4, 777784, 2008.