Trabajo Monográfico

Órbitas periódicas de homeomorfismos en superficies

Por: Juliana Xavier

Orientador: Dr. Martín Sambarino

Licenciatura en Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad de la República

Uruguay

Resumen

En esta monografía expondremos condiciones que garantizan la existencia de órbitas periódicas de período arbitrariamente grande para homeomorfismos de superficies.

Índice

1. Introducción

En esta monografía se estudia el problema de encontrar órbitas periódicas para homeomorfismos de superficies. El estudio de este problema tiene una base firme que son los resultados acerca de la existencia de órbitas periódicas para homeomorfismos del anillo, y de hecho todos los resultados que obtenemos en este trabajo utilizan dichos resultados. El interés en el anillo ha sido motivado históricamente por sistemas mecánicos y problemas geométricos que dan origen a funciones del anillo. Mostraremos esto con dos ejemplos aquí.

Billares sobre una mesa convexa y de borde diferenciable: La bola se idealiza como un punto que se mueve sobre una mesa y rebota en la baranda de manera que el ángulo de incidencia sea igual al ángulo de reflexión. El anillo asociado con este sistema dinámico es $A = S^1 \times [0, \pi]$, donde la circunferencia S^1 parametriza el borde de la mesa y $\theta \in [0, \pi]$ es el ángulo entre la tangente al borde de la mesa y la dirección en que la bola parte de la baranda en el rebote. Si x es un punto de contacto y $\theta \in (0, \pi)$ es el ángulo de reflexión, entonces el *mapa del billar* es $F : A \to A$, $F(x, \theta) = (x', \theta')$, donde x' es el próximo punto de contacto con el borde de la mesa y θ' el próximo ángulo de reflexión. Definiendo $F(x, 0) = x$ y $F(x, \pi) = x$ se puede extender F a todo A. Para entender la dinámica del billar cualitativamente (por ejemplo la existencia de órbitas periódicas), basta entender la dinámica del mapa del billar.

El mapa de retorno geodésico en S^2: Una de las maneras clásicas de encontrar geodésicas cerradas es tratar de minimizar la longitud de una curva cerrada en su clase de homotopía. Esto no se aplica al caso de la esfera S^2, ya que todas las curvas cerradas son homotópicas a curvas con longitud tan chica como se quiera. Sin embargo, Birkhoff obtuvo que existe al menos una geodésica cerrada en S^2 equipada con una métrica Riemanniana arbitraria:

Teorema 1.1. (Birkhoff). *Para cualquier métrica Riemanniana en S^2 existe siempre una geodésica cerrada simple.*

Birkhoff se dio cuenta que así como en el problema de los billares, la existencia de geodésicas cerradas en la esfera podía reducirse a estudiar un homeomorfismo del anillo, como explicaremos a seguir. Dada una geodésica cerrada simple $\gamma \subset S^2$, el *mapa de retorno de geodésicas*, $F : A \to A$ para γ se define por

$$F(x, \theta) = F(x', \theta')$$

donde x' es el segundo punto donde γ es intersectada por una geodésica que parte de x y forma un ángulo θ con γ, y θ' es el nuevo ángulo.

Teorema 1.2. (Birkhoff). *El mapa de retorno de geodésicas está bien definido en una esfera cuando tiene curvatura positiva. Si este mapa está bien definido, es un difeomorfismo que preserva área.*

Esto motivó el interés en la existencia de órbitas periódicas para homeomorfismos que preservan área del anillo, ya que hay una correspondencia uno a uno entre las geodésicas cerradas y las órbitas periódicas del mapa de retorno de geodésicas. El siguiente resultado de Franks, muestra que cuando el mapa de retorno está definido para una métrica Riemanniana en S^2, existen infinitas geodésicas cerradas para esa métrica:

Teorema 1.3. (Franks [Fr1]). *Sea $f : A \to A$ un difeomorfismo que preserva área, orientación y componentes del borde. Si f tiene al menos un punto periódico, entonces tiene infinitos.*

Combinando el teorema de Franks con este otro de Bangert,

Teorema 1.4. (V. Bangert). *Cuando el mapa de retorno geodésico no está definido, existen infinitas geodésicas cerradas en S^2.*

se obtiene que cualquier métrica Riemanniana en S^2 tiene infinitas geodésicas cerradas, lo que responde una pregunta que estuvo mucho tiempo sin contestarse.

Otra motivación para estudiar difeomorfismos que preservan área, es que deberían tener propiedades parecidas a las del tiempo uno de un flujo asociado a un campo Hamiltoniano. En particular, podría esperarse estimar el número y la naturaleza de los puntos fijos, así como se hace con flujos Hamiltonianos basándose en resultados análogos para puntos críticos de funciones diferenciables (la función Hamiltoniana).

Este trabajo precisamente trata ese tema para homeomorfismos en superficies; es decir, el tema del número y naturaleza de las órbitas periódicas. Probamos que para homeomorfismos en superficies isotópicos a la identidad sin puntos errantes, más hipótesis técnicas, existen infinitas órbitas periódicas, y en el caso de que el género de la superficie sea mayor o igual a uno, probamos que las infinitas órbitas periódicas pueden elegirse contractibles (i.e la trayectoria de la órbita por la isotopía es un lazo homotópicamente nulo). Un resultado célebre de Thurston [Th2] establece que, a menos de isotopía, un homeomorfismo f sobre una superficie, es periódico, reducible, o pseudo - Anosov. Si f es periódico, entonces para algún $n > 0$, f^n es isotópico a la identidad. De acuerdo con el Teorema 6 de [Th2] un homeomorfismo pseudo-Anosov tiene para cualquier período dado, el menor número de órbitas periódicas en su clase de isotopía, y tiene puntos periódicos de período arbitrariamente largo. Es decir, que en el caso pseudo-Anosov, la naturaleza y número de órbitas periódicas ya han sido estudiados. Por otro lado, el caso reducible presenta componentes invariantes pseudo-Anosov y periódicas, es decir que el estudio cualitativo de su dinámica se reduce al estudio de las otras dos clases. Esto motiva nuestro trabajo con homeomorfismos isotópicos a la identidad, en búsqueda de la descripción del carácter de las órbitas periódicas.

La estructura de la monografía es la siguiente. El trabajo está completamente basado en el artículo *Periodic orbits of Hamiltonian homeomorphisms of surfaces* [LeC2] de Patrice Le Calvez. El teorema principal establece la existencia de infinitas órbitas periódicas para homeomorfismos de la esfera con al menos tres puntos fijos:

Teorema 5.1: *Sea F un homeomorfismo no trivial que preserva orientación de una esfera S, tal que F no tiene puntos errantes y que posee al menos tres puntos fijos. Entonces F tiene puntos periódicos de período arbitrariamente largo.*

La existencia de infinitas órbitas periódicas para un homeomorfismo F con tres puntos fijos de una esfera ya era conocida en el caso simpléctico ([Fr2]). También se sabía en el caso transitivo ([Han]), y nosotros lo hacemos más generalmente en el caso que F no tiene puntos errantes. Este teorema se establece en la última sección de la monografía, sección 5, y es consecuencia del trabajo realizado en las secciones anteriores. Los primeros resultados sobre la existencia de infinitas órbitas periódicas en superficies se establecen en la sección 3. Trabajamos en una superficie compacta orientada M de género $g \geq 1$, $F : M \to M$ es un homeomorfismo isotópico a la identidad y suponemos que el conjunto de puntos fijos contractibles de F, $Fix_*(F)$ es finito. En particular obtenemos:

Corolario 3.1: *Si $Fix_*(F)$ es finito y está enlazado y F no tiene puntos errantes, existen puntos periódicos contractibles de F de período arbitrariamente largo.*
La propiedad de enlace se define en esa sección y se refiere al enlazamiento de las trayectorias $t \mapsto \widetilde{F}_t(z)$, $z \in Fix(\widetilde{F})$, donde $(\widetilde{F}_t)_{t\in[0,1]}$ es el levantamiento de la isotopía de la identidad y $\widetilde{F} = \widetilde{F}_1$.

También probamos:

Proposición 3.3: *Si F no tiene puntos errantes, $Fix_*(F)$ es finito y $Fix_*(F) \neq Per_*(F)$, entonces existen puntos periódicos contractibles de F de período arbitrariamente largo.*

En la sección 4 generalizamos los resultados obtenidos, no requiriendo que el conjunto $Fix_*(F)$ sea finito. La estrategia es aproximar por homeomorfismos con finitos puntos fijos y utilizar los resultados anteriores. Obtenemos:

Corolario 4.1: *Sea $F \in Homeo(M)$ tiempo uno de $(F_t)_{t\in[0,1]}$ isotopía de la identidad, y supongamos que F no tiene puntos errantes. Entonces hay órbitas periódicas contractibles de período arbitrariamente grande si alguna de las siguientes hipótesis se satisface:*

- ⋄ *existe un punto periódico contractible no fijo*
- ⋄ *$Fix_*(F)$ es contractible relleno y está débilmente enlazado*

donde aquí también M es una superficie compacta de género $g \geq 1$.

También obtenemos resultados similares para el caso género cero:

Corolario 4.2: *Sea F un homeo de una esfera S que preserva orientación y que no posee discos atractores (i.e D disco tal que $F(D) \subset Int(D)$) y tal que $N = S \setminus Fix(F)$*

es una superficie hiperbólica conexa. Pueden encontrarse órbitas periódicas de período arbitrariamente largo si alguna de las siguientes hipótesis se satisface:

- ⋄ *existe un punto periódico no fijo*
- ⋄ $Fix(F)$ *está débilmente enlazado*

Finalmente, en la sección 5 deducimos a partir de estos resultados el teorema 5.1 anunciado anteriormente.

2. Preliminares

2.1. Notaciones y definiciones

Si M es una variedad (posiblemente con borde), denotamos por $Homeo(M)$ el conjunto de homeomorfismos de M y para toda $F \in Homeo(M)$ denotamos por $Fix(F)$ (resp. $Per(F)$) el conjunto de puntos fijos (resp. puntos periódicos) de F. También utilizaremos la notación $Hom_+(M)$ para el conjunto de homeomorfismos de M que preservan orientación. Escribiremos respectivamente $\overline{Y}$, $Int(Y)$, ∂Y, Y^c, para la clausura, el interior, la frontera y el complemento de un conjunto $Y \subset M$.

Si X es un espacio topológico, $x \in X$ y U es un entorno de x, escribiremos $U(x)$.

Curvas

Una `curva` es una función continua $\gamma : I \to M$ definida en un intervalo no trivial I. Si $\gamma_1 : I_1 \to M$ y $\gamma_2 : I_2 \to M$ son dos curvas tales que $b_1 = \sup I_1 \in I_1$, $a_2 = \inf I_1 \in I_2$ y $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, se define el `producto` $\gamma_1\gamma_2$ como la concatenación de ambas curvas. De la misma forma se escribre $\prod_{k=0}^{n-1}\gamma_k$ para el producto de n curvas cuando esté definido. Escribiremos γ indistintamente para hablar de una curva o de su imagen. Si γ es una curva cerrada (i.e. I es cerrado y $\gamma(\inf I) = \gamma(\sup I)$), diremos que γ es un `lazo` en M. La `función dual` $\Lambda : M \setminus \gamma \to \mathbb{Z}$ es la que asigna a cada $z \in M \setminus \gamma$ el índice de γ respecto a z.

Trayectorias

Utilizaremos aquí y a lo largo del trabajo resultados conocidos de topología algebraica. El lector puede referirse a [Hat]. Una `trayectoria` de $F \in Homeo(M)$ es una curva que une un punto z con su imagen $F(z)$. Si $(\widetilde{M}, \pi)$ es un espacio de cubrimiento normal de M (i.e. $x, y \in \widetilde{M}$ tales que $\pi(x) = \pi(y)$ implica que existe g transformación de cubrimiento tal que $g(x) = y$) y $\widetilde{F}$ un levantamiento de F a $\widetilde{M}$, decimos que γ es una trayectoria de $\widetilde{F}$ si cualquier levantado de γ a $\widetilde{M}$ es una trayectoria de $\widetilde{F}$.

Observación 1. *Existe una trayectoria de $\widetilde{F}$ sii $\widetilde{F}$ conmuta con las transformaciones de cubrimiento.*

Para ver esto, supongamos primero que existe una trayectoria γ de $\widetilde{F}$, y sea g una transformación de cubrimiento. Si $\widetilde{\gamma}$ es el levantado de γ por $\widetilde{z}$, entonces el otro extremo de $\widetilde{\gamma}$ es $\widetilde{F}(\widetilde{z})$. Ahora bien, $g\widetilde{\gamma}$ es un levantado de γ de extremos $g\widetilde{z}$ y $g\widetilde{F}(\widetilde{z})$ y por lo tanto $g\widetilde{F}(\widetilde{z}) = \widetilde{F}(g\widetilde{z})$. Como $g^{-1}\widetilde{F}g$ es un levantamiento de F y coincide con $\widetilde{F}$ en un punto, estos dos levantamientos deben coincidir, y como g era arbitraria, se deduce que $\widetilde{F}$ conmuta con todas las transformaciones de cubrimiento. Recíprocamente, si $\widetilde{F}$ conmuta con el grupo G de transformaciones de cubrimiento, y $\widetilde{\gamma}$ es una curva cualquiera que une un punto $\widetilde{z}$ con su imagen $\widetilde{F}(\widetilde{z})$, entonces todos los levantados de su proyectada γ son de la forma $g\widetilde{\gamma}$, $g \in G$, y por lo tanto tienen extremos $g\widetilde{z}$ y $g\widetilde{F}(\widetilde{z}) = \widetilde{F}(g\widetilde{z})$, lo que prueba que son trayectorias de $\widetilde{F}$, y en otras palabras, que γ es una trayectoria de $\widetilde{F}$.

Si F es el tiempo uno de $(F_t)_{t\in[0,1]}$, isotopía de la identidad en M, diremos que para cada z la curva $\gamma_z : t \mapsto F_t(z)$ es una `trayectoria de la isotopía` $(F_t)_{t\in[0,1]}$. Si levantamos la isotopía comenzando con la identidad, obtenemos una isotopía de la identidad $(\widetilde{F}_t)_{t\in[0,1]}$ en $\widetilde{M}$, que llamaremos el `levantamiento canónico de la isotopía`. También diremos que el tiempo uno del levantamiento canónico de la isotopía es el `levantamiento canónico de` F.

Observación 2. *El tiempo t del levantamiento canónico conmuta con las transformaciones de cubrimiento* $\forall\ t \in [0, 1]$

Para ver esto, basta observar que si G es el grupo de transformaciones de cubrimiento, $g \in G$, $(g\widetilde{F}_t g^{-1})_{t\in[0,1]}$ es un levantamiento de la isotopía $(F_t)_{t\in[0,1]}$ que comienza en la identidad,y por lo tanto debe coincidir con el levantamiento canónico $(\widetilde{F}_t)_{t\in[0,1]}$. Tenemos entonces que cualquier curva γ_z es una trayectoria de $\widetilde{F} := \widetilde{F}_1$, y para $n \geq 1$ cualquier curva $\gamma_z^n = \prod_{k=0}^{n-1} \gamma_{F^k(z)}$ es una trayectoria de $\widetilde{F}^n$. Un punto fijo $z \in Fix(F)$ es `contractible` si el lazo γ_z es homotópicamente trivial y un punto periódico (de período q) es contractible si γ_z^q es trivial. Denotaremos por $Fix_*(F)$ (resp. $Per_*(F)$) al conjunto de puntos fijos (resp. periódicos) contractibles de F. Observar que estos conjuntos dependen de la isotopía elegida.

Foliaciones

Una `foliación topológica orientada` $\mathcal{F}$ en una superficie M es una partición de M en subvariedades de dimensión 1 tal que para todo $z \in M$ existe un entorno $U(z)$ y un homeomorfismo $h : U \to (-1,1) \times (-1,1)$ que preserva orientación y corresponde $\mathcal{F}$ con la partición $\{x \times (-1,1) : x \in (-1,1)\}$ orientada con la segunda coordenada creciente. Los elementos de la partición $\mathcal{F}$ se llaman `hojas de la foliación`. Si $\mathcal{F}$ es una foliación topológica orientada en una superficie M, escribiremos ϕ_z para la hoja que pasa por z. De la misma forma escribiremos ϕ_z^+ (resp. ϕ_z^-) para la semihoja positiva (resp. negativa) con origen z. Un `entorno tubular` abierto (resp. cerrado) de $\mathcal{F}$ es un par (V, h) donde V es un abierto (resp. compacto) de M y $h : V \to (-1,1)^2$ (resp. $h : V \to [-1,1]^2$) un homeomorfismo que preserva orientación y manda la foliación $\mathcal{F}$ en la foliación vertical orientada con la segunda coordenada creciente. Escribiendo $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ para la proyección sobre la primer coordenada, decimos que una curva $\gamma : I \to M$ es `positivamente transversal` a la foliación $\mathcal{F}$ si para cada $t_0 \in I$ existe un entorno tubular abierto (V, h) tal que $\gamma(t_0) \in V$ y tal que el mapa $t \mapsto p_1(h(\gamma(t)))$ definido en un entorno de t_0 es estrictamente creciente. Definimos análogamente el concepto de curva `negativamente transversal` a $\mathcal{F}$.

2.2. Números de rotación

El concepto de número de rotación lo introdujo Henri Poincaré y ha tenido numerosas aplicaciones. En esta sección describiremos varias manifestaciones de este concepto que utilizaremos posteriormente. En particular, nos interesa la definición de vectores homológicos de rotación para homeomorfismos de superficies isotópicos a la identidad, ya que es la más general, y a lo largo del texto la utilizaremos implícita o explícitamente. Pero empecemos por el principio.

La versión más simple del número de rotación aparece en el contexto de homeomorfismos de S^1 que preservan orientación.

Definición 2.1. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f. El* `número de traslación` *de $x \in \mathbb{R}$ por F es*

$$\tau(x, F) = \lim_{n \to \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}.$$

Las propiedades elementales del número de traslación son las siguientes:

- $\tau(x, F)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $\tau(x, F^n) = n\tau(x, F)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
- $\tau(x, F + m) = \tau(x, F) + m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.
- $\tau(F) := \tau(x, F)$ es independiente de x.

El siguiente teorema es un hecho fundamental, y relaciona el número de traslación con la existencia de órbitas periódicas:

Teorema 2.1. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f.*

- *$\tau(F) = 0$ sii F tiene un punto fijo.*
- *f tiene un punto fijo sii $\tau(F) \in \mathbb{Z}$.*
- *f tiene un punto periódico de período q sii $\tau(F) = p/q \in \mathbb{Q}$, donde p/q es irreducible.*

Las demostraciones se encuentran en la sección 11.1 de [KH]. Si F y G son dos levantamientos de $f \in Hom_+(S^1)$ existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $F(t) = G(t) + m$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se sigue que $\tau(F) = \tau(G)+m$. Como consecuencia, si consideramos la proyección de $\tau(F)$ sobre $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, el resultado es independiente de la elección del levantamiento y depende solamente del homeomorfismo original f.

Definición 2.2. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$ y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f. El* `número de rotación` *de f es $\rho(f) = \pi(\tau(F))$, donde $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es la proyección canónica.*

Inmediatamente obtenemos:

Proposición 2.1. *Sea $f \in Hom_+(S^1)$*

- *f tiene un punto periódico de período q sii $\rho(f) = p/q + \mathbb{Z}$, con p/q irreducible.*

El siguiente paso será definir el número de rotación para homeomorfismos del anillo.

Sea $f : A \to A$ un homeomorfismo del anillo $A = S^1 \times [0, 1]$ o $A = S^1 \times (0, 1)$ que preserva orientación y $F : \widetilde{A} \to \widetilde{A}$ un levantamiento de f al cubrimiento universal $\widetilde{A}$ de A. El `número de traslación` para $x \in \widetilde{A}$ y el levantamiento F es

$$\tau(x, F) = \lim_{n\to\infty} \frac{(F^n(x) - x)_1}{n},$$

donde $(\ )_1$ denota la proyección sobre el primer factor de $\widetilde{A} = \mathbb{R} \times [0,1]$.

En contraposición con el caso del círculo $\tau(x,F)$ puede no existir, y de hacerlo raramente es independiente de x. De todas formas al igual que en el caso anterior se tiene la siguiente

Definición 2.3. *Sea $f \in Hom_+(A)$ y $F : \widetilde{A} \to \widetilde{A}$ un levantamiento de f. El* `número de rotación` *de f en x es $\rho(x,f) = \pi(\tau(x,F))$, donde $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es la proyección canónica.*

Enunciaremos aquí el conocido Teorema de Poincaré - Birkhoff, conjeturado por Poincaré, que relaciona os números de rotación con la existencia de puntos periódicos. G.D Birkhoff probó el resultado, siendo ésta una de sus primeras grandes contribuciones por las cuales es reconocido en la comunidad matemática.

Teorema 2.2. (Birkhoff). *Sea $f : A \to A$ un homeomorfismo del anillo $A = S^1 \times [0,1]$ que preserva área, orientación y componentes del borde. Sea $F : \widetilde{A} \to \widetilde{A}$ un levantamiento de f al cubrimiento universal, y sean $F_0(x) = F(x,0)$, $F_1(x) = F(x,1)$. Si $p/q \in \mathbb{Q}$ y*

$$\tau(F_0) \leq p/q \leq \tau(F_1),$$

entonces F tiene al menos dos puntos con número de traslación p/q que son levantados de dos puntos periódicos diferentes de f de período q y número de rotación $p/q + \mathbb{Z}$.

El siguiente resultado de Franks es una generalización del teorema de Poincaré-Birkhoff y lo utilizaremos a lo largo del trabajo:

Teorema 2.3. [Fr1] *Sea $f : A \to A$ un homeomorfismo del anillo $A = \mathbb{T}^1 \times [0,1]$ que preserva área y es isotópico a la identidad. Sea $\pi : \widetilde{A} \to A$ el cubrimiento universal y $F : \widetilde{A} \to \widetilde{A}$ un levantamiento de F. Si $x, y \in \widetilde{A}$ y*

$$\rho(x,F) \leq \frac{p}{q} \leq \rho(y,F),$$

entonces f tiene un punto periódico z de período q con $\rho(z_0,F) = p/q$ para cualquier $z_0 \in \pi^{-1}(z)$. Lo mismo vale para el anillo abierto $A_0 = \mathbb{T}^1 \times (0,1)$ si $\pi(x)$, $\pi(y)$ pertenecen al conjunto de medida total de puntos en A_0 que son recurrentes para el homeomorfismo f^q para todo q.

Nuestro último objetivo es definir la noción de número de rotación para una superficie cualquiera y un homeo isotópico a la identidad, pues abarca las anteriores y muchas veces a lo largo de este trabajo estaremos utilizando implícitamente esta definición. Sea $F \in Homeo(M)$ tiempo uno de una isotopía de la identidad $(F_t)_{t\in[0,1]}$. En lo que sigue, consideraremos solamente puntos recurrentes hacia el futuro. Sea z uno de estos puntos. Fijamos una bola abierta n dimensional $U \subset M$ que contenga a z (o una bola abierta $n-1$ dimensional $U \subset \partial M$ si $z \in \partial M$) y escribimos $(F^{n_k}(z))_{k\geq 0}$ para la subsucesión de la órbita positiva de z obtenida a partir de los puntos que caen en U. Para cada $k \geq 0$ elegimos un curva γ_k' en U que una $F^{n_k}(z)$ a z. La clase de homología $[\Gamma_k] \in H_1(M, \mathbb{Z})$ del lazo $\Gamma_k = \gamma_z^{n_k}\gamma_k'$ no depende de la elección de γ_k'. Decimos que z tiene `vector homológico de rotación` $\rho(z) \in H_1(M, \mathbb{R})$ si

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{n_{k_l}}[\Gamma_{k_l}] = \rho(z)$$

para cualquier subsucesión $(F^{n_{k_l}}(z))_{l\geq 0}$ que converja a z.

La siguiente observación es inmediata:

Observación 3. *Esta definición coincide con las anteriores en el caso $M = S^1$, $M = A = S^1 \times (0,1)$ o $M = A = S^1 \times [0,1]$ tomando respectivamente las curvas $t \mapsto e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$ y $t \mapsto e^{2\pi i t} \times \{1/2\}$, $t \in [0,1]$ para generar la homología de M.*

2.3. El teorema de traslación de Brouwer y su versión foliada equivariante

La herramienta principal que usaremos a lo largo de todo este trabajo es una versión del teorema de traslación de Brouwer, debida a Patrice Le Calvez. Antes de enunciar este teorema, recordaremos la siguiente

Definición 2.4. *Una* `línea de Brouwer` *de un homeomorfismo F que preserva orientación en un plano orientado N es un encaje propio orientado ϕ de la recta real $\mathbb{R}$ que separa N en dos componentes conexas; la componente de la derecha ($R(\phi)$) contiene a $F(\phi)$ y la de la izquierda ($L(\phi)$) contiene a $F^{-1}(\phi)$.*

También recordaremos el teorema de traslación de Brouwer:

Teorema 2.4. [Br] *Si $F \in Hom_+(\mathbb{R}^2)$ es un homeomorfismo sin puntos fijos, todo punto pertenece a una línea de Brouwer.*

Ahora sí, enunciamos el teorema de Patrice Le Calvez:

Teorema 2.5. [LeC1] *Sea G un grupo discreto de homeomorfismos que preservan orientación que actúa propia y discontinuamente en un plano $\widetilde{N}$. Sea $\widetilde{F}$ un homeomorfismo de $\widetilde{N}$ sin puntos fijos que preserva orientación y que conmuta con todos los elementos de G. Entonces existe una foliación topológica orientada $\widetilde{\mathcal{F}}$ G-invariante cuyas hojas son líneas de Brouwer de $\widetilde{F}$.*

Observación 4. *Otra forma de decir que las hojas de una foliación $\mathcal{F}$ de un plano P son líneas de Brouwer de un homeomorfismo F es la siguiente: para todo z existe una curva γ* positivamente transversal a *$\mathcal{F}$ que une z con $F(z)$.*

Es obvio que la condición anterior implica que las hojas de la foliación son líneas de Brouwer de F.Supongamos ahora que cada hoja de $\mathcal{F}$ es una línea de Brouwer de F. Sea $z \in P$, y $W^+(z)$ el conjunto de puntos de $z' \in P$ tales que existe una curva positivamente transversal que une z con z'. Cada componente X de $P \backslash W^+(z)$ se puede escribir $X = \lambda \cup L(\lambda)$, donde λ es una hoja contenida en la frontera de $W^+(z)$. La preimagen de cualquier punto $z' \in X$ está en $L(\lambda)$ y es distinta de z, y por lo tanto $F(z) \in W^+(z)$.

Corolario 2.1. *Sea $(F_t)_{t\in[0,1]}$ una isotopía de la identidad en una superficie M de género $g \geq 1$ sin puntos fijos contractibles. Entonces existe una foliación toplógica orientada $\mathcal{F}$ en M tal que toda trayectoria γ_z es homotópica (con extremos fijos) a una curva positivamente transversal a $\mathcal{F}$.*

Demostración. Basta considerar el cubrimiento universal $\widetilde{M}$ de M, el levantamiento canónico $\widetilde{F}$ de $F := F_1$ y el grupo G de transformaciones de cubrimiento. Por la Observación 2, $\widetilde{F} := \widetilde{F}_1$ conmuta con G, y la hipótesis de no tener puntos fijos contractibles es equivalente a $Fix(\widetilde{F}) = \emptyset$. El Teorema 2.5 implica que existe una foliación toplógica orientada $\widetilde{\mathcal{F}}$ en $\widetilde{M}$, G - invariante (i.e si ϕ es la hoja por z, $g\phi$ es la hoja por $g(z)$) por líneas de Brouwer de $\widetilde{F}$. Como $M \simeq \widetilde{M}/G$, esto permite definir una foliación $\mathcal{F}$ en M, proyectando $\widetilde{\mathcal{F}}$. Si γ_z es una trayectoria de la isotopía $(F_t)_{t\in[0,1]}$, podemos levantarla comenzando en $\widetilde{z} \in \widetilde{M}$ y obtener una curva $\widetilde{\gamma}_{\widetilde{z}}$ hasta $\widetilde{F}(\widetilde{z})$. Como la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ es por líneas de Brouwer de $\widetilde{F}$, existe una curva $\widetilde{\beta}$ positivamente transversal a $\widetilde{\mathcal{F}}$ que une $\widetilde{z}$ con $\widetilde{F}(\widetilde{z})$ (Observación 4), y como $\widetilde{M}$ es simplemente conexo, γ_z es homotópica a la proyección de $\widetilde{\beta}$ en M, que es positivamente transveral a $\mathcal{F}$. $\square$

Usaremos la siguiente versión del Teorema 2.3, que deduciremos del Teorema 2.5 (ver [LeC1]).

Proposición 2.2. *Sea F un homeomorfismo isotópico a la identidad de un anillo abierto A y $\widetilde{F}$ un levantado de F al cubrimiento universal $\widetilde{A}$ de A. Para definir números de rotación, sea κ un lazo simple generador de $H_1(A, \mathbb{Z})$. Supongamos que existen dos puntos recurrentes hacia el futuro de números de rotación ν^- y ν^+ respectivamente (posiblemente iguales a $\pm\infty$), $\nu^- < \nu^+$ y que F satisface la siguiente propiedad (que llamaremos* `propiedad de intersección`*): cualquier lazo simple de A no homotópicamente nulo intersecta su imagen por F. Entonces para cualquier número racional $p/q \in (\nu^-, \nu^+)$ escrito en forma irreducible, existe un punto periódico de período q con número de rotación p/q.*

Demostración. Sea $T : \widetilde{A} \to \widetilde{A}$ la transformación de cubrimiento asociada a κ. Alcanza probar que $\widetilde{F}$ tiene un punto fijo si $\nu^- < 0 < \nu^+$, porque cualquier iterado de F satisface la propiedad de intersección ($p/q \in (\nu^-, \nu^+) \Rightarrow \nu^- - p/q < 0 < \nu^+ - p/q$, y si ρ es el número de rotación de x para el levantamiento $\widetilde{F}$, entonces $\rho - p/q$ es el número de rotación para el levantamiento $T^{-p}F^q$). Si esto no es cierto, construimos una foliación $\mathcal{F}$ en A dinámicamente transversal, que se levanta a una foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ en $\widetilde{A}$ por líneas de Brouwer de $\widetilde{F}$. Como existe un punto recurrente de número de rotación ν^- se deduce que existe un loop $\Gamma_- \subset A$ positivamente transversal a $\mathcal{F}$ cuya clase de homología puede escribirse $[\Gamma_-] = n_-\kappa$, $n_- < 0$. De la misma forma existe un loop $\Gamma_+ \subset A$ positivamente transversal a $\mathcal{F}$ tal que $[\Gamma_+] = n_+\kappa$, $n_+ > 0$. $\Gamma = n_+\Gamma_- - n_-\Gamma_+$ es homólogo a cero, pero como es transversal a la dinámica, la función dual $\Lambda : A \setminus \Gamma \to \mathbb{Z}$ está acotada y toma al menos dos valores. Supongamos, por ejemplo, que el máximo l_+ es no nulo y consideramos la componente conexa U de $A \setminus \Gamma$, donde Λ toma el valor l_+. Cualquier componente de ∂U es un loop simple transversal a $\mathcal{F}$, y por lo tanto no es homotoópicamente trivial, siendo $\mathcal{F}$ no singular. La única posibilidad es que U

sea un anillo con una componente de borde contenida en Γ_- y otra en Γ_+. Usando el teorema de Poincaré-Bendixon se deduce que U contiene una hoja cerrada ϕ de $\mathcal{F}$ no homotópicamente trivial. Como esta hoja se levanta en una línea de Brouwer de $\widetilde{F}$, se deduce $F(\phi) \cap \phi = \emptyset$, contradiciendo la propiedad de intersección. $\square$

2.4. Recurrencia en el plano implica puntos fijos

Si F es un homeomorfismo del plano, casi cualquier tipo de recurrencia implica la existencia de puntos fijos. En esta sección, estudiaremos éste hecho. Por ejemplo, se deduce del Teorema 2.4 que para $F \in Hom_+(\mathbb{R}^2)$ sin puntos fijos, el plano puede ser cubierto por subconjuntos abiertos e invariantes homeomorfos a $\mathbb{R}^2$ tales que la restricción de F es conjugada a una traslación no trivial. Basta tomar $W = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} F^{k+1}(R(\phi)) \setminus F^k(R(\phi))$. En particular, si F tiene algún punto no errante, entonces tiene un punto fijo.

Otra clase de recurrencia que implica la existencia de puntos fijos son las *cadenas periódicas de discos.*

Definición 2.5. *Una* `cadena periódica de discos` *para un homeo* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *es un conjunto* $\{D_i\}_{i=1}^n$ *de discos toplógicos abiertos en* $\mathbb{R}^2$ *tales que:*

1. $D_i \cap D_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$,
2. $F(D_i) \cap D_i = \emptyset \ \forall\ 1 \leq i \leq n$
3. *existen enteros positivos* k_i, $i = 1 \dots n$ *tales que* $F^{k_i}(D_i) \cap D_{i+1} \neq \emptyset \ \forall\ 1 \leq i \leq n-1$, $F^{k_n}(D_n) \cap D_1 \neq \emptyset$.

Proposición 2.3. [Fr2] *Si* $F \in Hom_+(\mathbb{R}^2)$ *posee una cadena periódica de discos, entonces* F *tiene un punto fijo.*

Idea de la prueba: La cadena de discos permite perturbar el homeo para obtener un homeo con un punto periódico, sin alterar el conjunto de puntos fijos. Entonces la existencia del punto fijo se sigue del Teorema 2.4.

Veremos cómo éstas ideas pueden aplicarse para encontrar puntos fijos en superficies cuyo cubrimiento universal es topológicamente $\mathbb{R}^2$. Si $f : A \to A$ es un homeomorfismo de un anillo abierto A, y $\widetilde{f} : \widetilde{A} \to \widetilde{A}$ es un levantamiento al cubrimiento universal $\widetilde{A} = \mathbb{R} \times (0,1)$, decimos que $U \subset \widetilde{A}$ es un `disco recurrente para adelante` de $\widetilde{f}$ si $\widetilde{f}(U) \cap U = \emptyset$ y $\widetilde{f}^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$ para algunos n, $k > 0$, donde $(U + k) = \{(x + k, t) : (x, t) \in U\}$. Un `disco recurrente para atrás` se define de la misma forma pero con $k < 0$. Probaremos la siguiente versión adaptada de un teorema de Franks.

Teorema 2.6. [Fr2] *Sea $f : A \to A$ un homeo de un anillo abierto A, tal que:*

(1) f es homotópico a la identidad

(2) $\Omega(f) = A$

(3) existe $\widetilde{f} : \widetilde{A} \to \widetilde{A}$, levantamiento de f al cubrimiento universal que posee un disco recurrente para adelante y un disco recurrente para atrás, y éstos discos son levantados de discos en A.

Entonces, $\widetilde{f}$ tiene un punto fijo.

Demostración. Sea $U \subset \widetilde{A}$ un disco contenido en un dominio fundamental tal que $\widetilde{f}(U) \cap (U) = \emptyset$. Probaremos primero que si existen enteros postivos n_1, n_2, k_1 y k_2 tales que

$$\widetilde{f}^{n_1}(U) \cap (U + k_1) \neq \emptyset$$

$$\widetilde{f}^{n_2}(U) \cap (U - k_2) \neq \emptyset$$

entonces $\widetilde{f}$ tiene un punto fijo. Como $\widetilde{f}(x + k) = \widetilde{f}(x) + k\ \forall\ x \in \widetilde{A}$ y $k \in \mathbb{Z}$, es fácil construir una cadena periódica de discos: la sucesión de discos U, U + k_1, U + $2k_1$, U + $3k_1$, $\ldots$, U + k_2k_1, U + $(k_1 - 1)k_2$, U + $(k_1 - 2)k_2$,$\ldots$ U + $2k_2$, U + k_2, U. Notar: $\widetilde{f}^{n_1}(U + ik_1) \cap (U + (i + 1)k_1) \neq \emptyset$ y $\widetilde{f}^{n_2}(U + jk_2) \cap (U + (j - 1)k_2) \neq \emptyset$. También $\widetilde{f}(U) \cap (U) = \emptyset$ implica $\widetilde{f}(U + i) \cap (U + i) = \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, de donde se deduce la existencia del punto fijo aplicando la Proposición 2.3.

Ahora definimos dos conjuntos: Sea B_+ el conjunto de los $x \in \widetilde{A}$ que están en discos fundamentales recurrentes para adelante de $\widetilde{f}$. Es decir, $x \in B_+$ si existe $U \subset \widetilde{A}$ tal que:

1. U es un disco de $\widetilde{A}$ contenido en un dominio fundamental

2. $x \in U$ y $\widetilde{f}(U) \cap U = \emptyset$

3. existen $n > 0$, $k > 0$ tales que

$$\widetilde{f}^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$$

Se define B_- de la misma forma, excepto que con $k < 0$. Los conjuntos B_+ y B_- son abiertos y son no vacíos por hipótesis. Además, podemos suponerlos disjuntos, porque sino estaríamos en el caso anterior y tendríamos un punto fijo como explicamos arriba. Es más, si $\widetilde{f}$ no tiene puntos fijos, $\widetilde{A} = B_+ \cup B_-$: $x \in \widetilde{A}$, $\widetilde{f}(x) \neq x \Rightarrow \exists\ U(x)$ tal que $\widetilde{f}(U) \cap U = \emptyset$; $\Omega(f) = A \Rightarrow \exists\ k \in Z$, $n > 0$ tal que $\widetilde{f}^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$; si $k = 0$ tenemos una cadena periódica de discos y por lo tanto un punto fijo, así que $k \neq 0$ y $x \in B_+ \cup B_-$. Esto es absurdo porque $\widetilde{A}$ es conexo. □

En la sección 5 aplicaremos el teorema anterior a una potencia de un homeomorfismo F de un anillo abierto. Es por esto que probamos el siguiente

Lema 2.1. *Si $f : M \to M$ es un homeomorfismo sin puntos errantes, entonces ninguna potencia f^k de f tiene puntos errantes.*

Demostración. Sea $F = f^k$, para algún $k \neq 0, 1$, $x \in M$ y $U(x)$. Como $\Omega(f) = M$, existe n_0 tal que $f^{n_0}(U) \cap U \neq \emptyset$. Escribimos $n_0 = m_0 k + p_0$ para algún entero positivo m_0 y $0 \leq p_0 \leq k - 1$. Entonces $F^{m_0}(U) \cap f^{-p_0}(U) \neq \emptyset$. Definimos ahora el conjunto $V_0 = F^{m_0}(U) \cap f^{-p_0}(U)$, y observamos nuevamente que existen un entero positivo m_1 y $0 \leq r_1 \leq k - 1$ tales que $F^{m_1}(V_0) \cap f^{-r_1}(V_0) \neq \emptyset$. Definiendo $p_1 = r_1 + p_0$, obtenemos $F^{m_1}(V_0) \cap f^{-p_1} f^{p_0}(V_0) \neq \emptyset$, con $0 \leq p_1 \leq 2(k-1)$. Podemos definir entonces $V_1 = F^{m_1}(V_0) \cap f^{-p_1}(f^{p_0}(V_0))$. En general, dado

$$V_i = F^{m_i}(V_{i-1}) \cap f^{-p_i}(f^{p_{i-1}}(V_{i-1}))$$

existen m_{i+1} entero positivo y $0 \leq p_{i+1} \leq 2(k-1)$ tales que $F^{m_{i+1}}(V_i) \cap f^{-p_{i+1}}(f^{p_i}(V_i)) \neq \emptyset$ y podemos definir el conjunto no vacío

$$V_{i+1} = F^{m_{i+1}}(V_i) \cap f^{-p_{i+1}}(f^{p_i}(V_i)).$$

Como solo hay finitos valores posibles para los p_i $(i \geq 0)$, existen $i \geq 0$, $j \geq 1$ tales que $p_{i+j} = p_i$. Miremos entonces el conjunto

$$V_{i+j} = F^{m_{i+j}}(V_{i+j-1}) \cap f^{-p_{i+j}}(f^{p_{i+j-1}}(V_{i+j-1})).$$

Tenemos $V_{i+j} \subset F^{m_{i+j}}(V_{i+j-1}) \cap f^{-p_{i+j}}(f^{p_{i+j-2}}(V_{i+j-2})) \subset F^{m_{i+j}}(V_{i+j-1}) \cap V_i$, como se obtiene de sustituir las expresiones para los V_{i+j-s}, $s \geq 1$. De igual forma obtenemos $F^{m_{i+j}}(V_{i+j-1}) \cap V_i \subset F^{m_{i+j}} F^{m_{i+j-1}} \dots F^{m_{i+1}}(V_i) \cap V_i$. Se deduce entonces que existe un entero positivo M tal que $F^M(V_i) \cap V_i \neq \emptyset$, y sustituyendo nuevamente las expresiones para los V_i, obtenemos un entero positivo N para el cual $F^N(U) \cap U \neq \emptyset$. Como x y $U(x)$ eran arbitrarios, concluimos $\Omega(F) = M$. $\square$

3. El caso $Fix_*(F)$ finito

En esta sección trabajaremos con una superficie compacta orientada M de género $g \geq 1$. $F \in Homeo(M)$ será el tiempo uno de una isotopía de la identidad $(F_t)_{t\in[0,1]}$, $\widetilde{\pi} : \widetilde{M} \to M$ el cubrimiento universal de M, y $\widetilde{G}$ el grupo de transformaciones de cubrimiento de $\widetilde{\pi}$. Si $(\widetilde{F}_t)_{t\in[0,1]}$ es el levantamiento canónico de la isotopía $(F_t)_{t\in[0,1]}$, definimos $\widetilde{F} := \widetilde{F}_1$. Para cada punto fijo z de $\widetilde{F}$, obtenemos por restricción un homeomorfismo $\widetilde{F}_z$ del anillo abierto $A_z = \widetilde{M} \setminus \{z\}$ ($\widetilde{M}$ puede ser identificado con el plano complejo $\mathbb{C}$ en el caso $g = 1$ o con el disco hiperbólico $\mathbb{D}$; ver [Th1]).

Observación 5. (El `levantamiento natural` al cubrimiento universal de A_z) *Existe una isotopía $(F'_t)_{t\in[0,1]}$ homotópica a $(F_t)_{t\in[0,1]}$ tal que $\widetilde{\pi}(z)$ es fijo durante toda la isotopía.*

Para ver esto, observamos que podemos construir para cada t una isotopía $H_t : M \times [0,1] \to M$ tal que $H_t(x,0) = x \forall\ x \in M$ y $H_t(x,1) = h_t(x)$, donde para cada t, $h_t : M \to M$ lleva $F_t(\widetilde{\pi}(z))$ en $\widetilde{\pi}(z)$ (ver [M]). Como el lazo $(F_t(\widetilde{\pi}(z)))_{t\in[0,1]}$ es contractible en M

$$(x,t,s) \mapsto H_t(F_t(x), s)$$

es continuo; de hecho es una homotopía de F_t cuyo tiempo uno, es decir $H(x,t,1) = H_t(F_t(x),1) = h_t(F_t(x))$ es la isotopía buscada:

1. $h_0(F_0(x)) = x \ \forall\ x$, ya que $F_0 = h_0 = Id$ (h_0 lleva $F_0(\widetilde{\pi}(z)) = \widetilde{\pi}(z)$ en $\widetilde{\pi}(z)$)

2. $h_t(F_t(\widetilde{\pi}(z))) = \widetilde{\pi}(z) \ \forall\ t \in [0,1]$ por construcción

3. $(x,t,s) \mapsto H_t(F_t(x),s)$ es una homotopía de F_t, i.e. $H_t(F_t(x),0) = F_t(x)$, y por lo tanto el tiempo uno es homotópico a $(F_t)_{t\in[0,1]}$.

Levantando esta isotopía a $\widetilde{M}$ podemos definir por restricción una isotopía en A_z, y tomar el levantamiento canónico $\check{F}_z$ al cubrimiento universal $\check{A}_z$ de A_z; nos referiremos a este levantamiento como el levantamiento natural de $\widetilde{F}_z$.

3.1. El número de enlace

Identificamos $\widetilde{M}$ con el plano complejo $\mathbb{C}$ si $g = 1$ o con el disco de Poincaré si $g \geq 2$.

Si z, z' son puntos fijos de $\widetilde{F}$, el grado de $L : S^1 \to S^1$

$$L(e^{2\pi it}) = \frac{\widetilde{F}_t(z) - \widetilde{F}_t(z')}{|\widetilde{F}_t(z) - \widetilde{F}_t(z')|}$$

es el `número de enlace` $I(z,z')$ de z y z'.

Observación 6. *El número de enlace está bien definido, es decir, sólo depende de z y de z' y no depende de la isotopía elegida $(F_t)_{t\in[0,1]}$.*

Para ver esto, basta observar que si $(F'_t)_{t\in[0,1]}$ es otra isotopía de la identidad a F con levantamiento canónico $(\widetilde{F}'_t)_{t\in[0,1]}$ tal que $\widetilde{F}'(z) = z$ y $\widetilde{F}'(z') = z'$, entonces $\widetilde{F}' = \widetilde{F}$ porque son dos levantamientos de F que coinciden en la imagen de un punto, y entonces el camino $t \mapsto \widetilde{F}_t(x)$ es homotópico a $t \mapsto \widetilde{F}'_t(x) \ \forall\ x \in \widetilde{M}$ por tener los mismos extremos. En particular tengo una homotopía $h : S^1 \times [0,1] \to \widetilde{M}$, $h(e^{2\pi it},0) = \widetilde{F}_t(z) - \widetilde{F}_t(z') \forall\ t \in [0,1]$, $h(e^{2\pi it},1) = \widetilde{F}'_t(z) - \widetilde{F}'_t(z') \ \forall\ t \in [0,1]$. Se deduce la afirmación del hecho que el grado es invariante por homotpía (ver [M]).

Observación 7. *El entero $I(z,z')$ es el número de rotación del punto fijo z' de $\widetilde{F}_z$ para el levantado natural $\check{F}_z$, si uno toma el borde orientado de un disco alrededor de z para generar $H_1(A_z,\mathbb{Z})$, la homología de A_z con coeficientes enteros.*

Esto se deduce rápidamente de que $I(z,z')$ es el grado g del mapa

$$L(e^{2\pi it}) = \frac{z - \widetilde{F'_t}(z')}{|z - \widetilde{F'_t}(z')|},$$

donde $(F'_t)_{t\in[0,1]}$ es la isotopía de la identidad que fija $\widetilde{\pi}(z)$ $\forall\ t \in [0,1]$: por un lado, $g = [t \mapsto \widetilde{F}'_t(z')]$, donde $[\ ]$ denota la clase de homología en $H_1(A_z, \mathbb{Z})$, y además por ser z' fijo de $\widetilde{F}_z$, esta clase de homología es igual a $(\check{F}(\check{z}') - \check{z}')_1$, que no es otra cosa que el número de rotación del punto fijo z' de $\widetilde{F}_z$ para el levantamiento natural $\check{F}_z$.

Si z es fijo de $\widetilde{F}$ y z' es un punto periódico, se define $I(z,z')$ como el número de rotación de $z' \in A_z$ para el levantamiento natural.

3.2. Los primeros resultados

Proposición 3.1. *Si F satisface la propiedad de intersección (ver la Prposición 2.2) y existen dos puntos fijos z, z'' de $\widetilde{F}_z$ tales que $I(z,z'') \neq 0$, existen puntos periódicos contractibles de F de período arbitrariamente largo.*

Demostración. Si $z' \in Fix(\widetilde{F})$, $\widetilde{\pi}(z) = \widetilde{\pi}(z')$ entonces $I(z,z') = 0$, porque al tomar la isotopía de la identidad que fija $\widetilde{\pi}(z)$, el levantamiento canónico fijará z y z' durante toda la isotopía y por lo tanto el mapa que define el número de enlace es constante y tiene grado cero. Entonces $I(z,z') = 0$, $I(z,z'') \neq 0$ y se puede aplicar la Proposición 2.2 en el anillo A_z (ver Observación 7). □

Definición 3.1. *$X \subset Fix_*(F)$* `no está enlazado` *si $\exists$ una isotopía $(F'_t)_{t\in[0,1]}$ homotópica a $(F_t)_{t\in[0,1]}$ tal que F'_t fija cualquier punto de X. Sino, decimos que X* `está enlazado`. *Si cualquier $X' \subset Fix_*(F)$ que contenga estrictamente a X está enlazado, decimos que X es un conjunto no enlazado (o desenlazado) maximal.*

En el caso en que $Fix_*(F)$ es finito, existe un conjunto no enlazado maximal X. La isotopía $(F'_t)_{t\in[0,1]}$ define una isotopía de la identidad en $N = M \setminus X$ y un levantamiento canónico $\check{F}$ de $F|_N$ al cubrimiento universal $\check{N}$ que conmuta con las transformaciones de cubrimiento (ver Observación 2). Como X es maximal, se tiene que $\check{F}$ no tiene puntos fijos (Observación 5)y se puede aplicar el Teorema 2.5 para encontrar una foliación orientada $\mathcal{F}$ en N dinámicamente transversal a $\check{F}$.

Proposición 3.2. *Si $Fix_*(F)$ es finito y está enlazado, existen dos puntos fijos z, z'' de $\widetilde{F}$ tales que $I(z, z'') \neq 0$.*

Demostración. Si X es un conjunto desenlazado maximal, $X \neq Fix_*(F)$ porque $Fix_*(F)$ está enlazado. Sean $\widetilde{\mathcal{F}}$ la foliación levantada a $\widetilde{N} := \widetilde{\pi}^{-1}(N)$ (recordar $\widetilde{\pi} : \widetilde{M} \to M$ es la proyección de cubrimiento universal), $z'' \in Fix(\widetilde{F}) \setminus \widetilde{\pi}^{-1}(X)$ y $(\widetilde{F'}_t)_{t\in[0,1]}$ la isotopía de la identidad que levanta a $(F'_t)_{t\in[0,1]}$. Sea Γ_0 un lazo positivamente transversal a $\widetilde{\mathcal{F}}$ homotópico en $\widetilde{N}$ a $\Gamma_1 = \gamma'_{z''} : t \mapsto \widetilde{F'}_t(z'')$ (ver Corolario 2.1). Como $z'' \in Fix(\widetilde{F}) \setminus \widetilde{\pi}^{-1}(X)$, Γ_0 no es contractible en $\widetilde{N}$, porque sino se contradice la maximalidad de X (ver Observación 5). Como además Γ_0 es transversal orientado a $\widetilde{\mathcal{F}}$, $[\Gamma_0] \in H_1(\widetilde{N})$ es no trivial (si $[\Gamma_0]_{\pi_1} \neq 0$ y $[\Gamma_0]_{H_1} = 0$, entonces si aparece la letra a en la descomposición de $[\Gamma_0]_{\pi_1}$, aparece también a^{-1}, pero si a es positivamente transversal a $\widetilde{\mathcal{F}}$, a^{-1} no lo es). Si escribimos entonces $\Gamma_0 = \Sigma c_i z_i$, $c_i \in \mathbb{Z}$, $z_i \in \widetilde{\pi}^{-1}(X)$, $\exists\, i$ tal que $c_i \neq 0$. Ahora basta notar que $c_i = I(z'', z_i)$ (ver Observación 7). □

Aplicando ahora la Proposición 3.1, obtenemos:

Corolario 3.1. *Si $Fix_*(F)$ es finito y está enlazado y F satisface la propiedad de intersección, existen puntos periódicos contractibles de F de período arbitrariamente largo.*

Proposición 3.3. *Si $Fix_*(F)$ es finito y $Fix_*(F) \neq Per_*(F)$, entonces $\forall\, z'' \in Per(\widetilde{F}) \setminus Fix(\widetilde{F})$ $\exists\, z \in Fix(\widetilde{F})$ tal que $I(z, z'') \neq 0$. Por lo tanto, si F no tiene puntos errantes, existen puntos fijos contractibles de período arbitrariamente largo.*

Demostración. Sean $\widetilde{\mathcal{F}}$, $\widetilde{N}$ como en la proposición anterior y Γ_0 un lazo positivamente transversal a $\widetilde{\mathcal{F}}$ homotópico en $\widetilde{N}$ a la trayectoria $\Gamma_1 = \gamma'^{q}_{z''} = \prod_{k=0}^{q-1} \gamma'_{\widetilde{F}^k(z'')}$, donde $q \geq 2$ es el período de z''. La función dual $\Lambda : \widetilde{M} \setminus \Gamma_0 \to \mathbb{Z}$, que asigna a cada $z \in \widetilde{M} \setminus \Gamma_0$ el índice de Γ_0 respecto a z, toma una cantidad finita de valores, pero al menos dos (por la condición de transversalidad). Podemos suponer que el máximo l^+ es diferente de cero (sino, tomamos el mínimo). Toda componente de $\widetilde{M} \setminus \Gamma_0$ donde Λ toma el valor l^+ es un disco abierto cuyo borde es un lazo simple transversal a la foliación. Por lo tanto, existe un punto $z \in \widetilde{\pi}^{-1}(X)$ en esta componente. Como el lazo Γ_1 es homotópico a Γ_0

en $\widetilde{N}$, el índice de Γ_1 relativo a z es l^+. Este número no es otra cosa que el número de enlace $I(z, z'')$. Concluimos observando que la propiedad de intersección es más débil que la de no tener puntos errantes y aplicando la Proposición 3.1 . $\square$

4. El caso $Fix_*(F)$ infinito

En esta sección, como en las anteriores, fijamos un homeomorfismo F isotópico a la identidad en una superficie compacta M de género $g \geq 1$ con $(\widetilde{M}, \widetilde{\pi})$ el cubrimiento universal de M.

4.1. Conceptos previos y resultados básicos

Definición 4.1. *Un subconjunto $X \subset M$ cerrado es* `contractible` *en M si $\exists\, U$ componente conexa de $M \setminus X$ tal que $i_* : H_1(U, \mathbb{Z}) \to H_1(M, \mathbb{Z})$ es sobreyectiva, donde $i : U \to M$ es la inclusión e i_* es el mapa inducido en homología. Si además $U = M \setminus X$, decimos que X es* `contractible relleno`*.*

Proposición 4.1. *Son equivalentes:*

1. *X es contractible en M*
2. *X está contenido en un disco de M*
3. *Cualquier componente de la preimagen de X en el cubrimiento universal de M es compacta*

Demostración. **1.** $\Rightarrow$ **2.** : Si X es contractible en M, $M \setminus X$ es un abierto que contiene representantes de las curvas que generan la homología de M. Levantando estas curvas y tomando entornos tubulares que queden contenidos en $\widetilde{\pi}^{-1}(M \setminus X)$, se ve que X está contenido en un disco de M, pues $\widetilde{\pi}^{-1}(X)$ queda contenido en un disco dentro de un dominio fundamental de $\widetilde{M}$.

2. $\Rightarrow$ **3.**: Obvio.

3. $\Rightarrow$ **1.**: Como $\widetilde{\pi}^{-1}(X)$ es la unión disjunta de compactos de $\widetilde{M}$, pueden tomarse curvas en $\widetilde{M} \setminus \widetilde{\pi}^{-1}(X)$ que se proyectan sobre generadores de la homología de M contenidos en $M \setminus X$, y por lo tanto X es contractible en M. ☐

También son equivalentes:

1. *X es contractible relleno*

2. $X = \bigcap_{m\geq 0} K_m$ *, donde* $K_m = \bigcup_{0\leq i\leq r_m} D_m^i$ *es una unión disjunta de finitos discos cerrados con* $K_{m+1} \subset Int(K_m)$

Demostración. **2.** $\Rightarrow$ **1.**: $X \subset K_m \; \forall \; m$, entonces cualquier componente de la preimagen de X en el cubrimiento universal de M es compacta, y X es contractible. Además $M \setminus X = \bigcup_{m\geq 0} K_m^c$, que es conexo porque $Int(K_m)^c = \overline{K_m^c} \subset K_{m+1}^c$ y cada $K_m^c = \bigcap_{0\leq i\leq r_m} (D_m^i)^c$ es conexo.

1. $\Rightarrow$ **2.**: Los K_m son subcubrimientos finitos de cubrimientos de X por discos cerrados, elegidos de tal forma que $K_{m+1} \subset Int(K_m)$. La hipótesis permite poder tomar los discos D^i disjuntos en cada paso. □

Estableceremos a continuación dos proposiciones que utilizaremos frecuentemente en esta sección.

Consideremos los espacios $Homeo(M)$ con la topología C^0 y $Homeo(\widetilde{M})$ con la topología C^0 sobre compactos.

Proposición 4.2. (Homeo(M) es localmente contractible). *Existen entornos* $\mathcal{W}(F)$ *y* $\widetilde{\mathcal{W}}(\widetilde{F})$ *tales que para toda* $F' \in \mathcal{W}$ *existe un único levantamiento* $\widetilde{F}' = H(F') \in \widetilde{\mathcal{W}}$ *y este levantamiento conmuta con las transformaciones de cubrimiento. Además, el mapa* $H : \mathcal{W} \to \widetilde{\mathcal{W}}$ *es continuo.*

Utilizaremos en la prueba resultados de [DoC].

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ tal que si x , $y \in M$ cumplen $d(x, y) < \epsilon$ existe una única geodésica minimizante de x a y, y sea $\mathcal{W} = \{F' \in Homeo(M) : \; d(F'(x), F(x)) < \epsilon \; \forall \; x \in M\}$. Si $F' \in \mathcal{W}$ y $x \in M$, sea γ_x la única geodésica tal que $\gamma_x(0) = F(x)$, $\gamma_x(1) = F'(x)$. Entonces $(t, x) \mapsto \gamma_x(t)$ es una homotopía entre F y F' y definimos $\widetilde{F}'$ como el tiempo uno del levantamiento de esta homotopía con mapa inicial $\widetilde{F}$. De esta manera $\widetilde{F}'$ es isotópica a la identidad, y por lo tanto conmuta con las transformaciones de cubrimiento (ver Observación 2). La continuidad de H es fácil: como la proyección de cubrimiento es localmente una isometría, dados $F' \in \mathcal{W}$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in M$, $d(x, y) < \delta$ entonces x, y pertenecen a un mismo entorno U tal que $\widetilde{\pi} : V \subset \widetilde{M} \to U$ es una isometría. Entonces si $d(F', F'') < \delta$, $d(\widetilde{F}', \widetilde{F}'') < \delta$, y basta elegir ahora si es necesario $\delta < \epsilon$. □

Se puede hablar entonces de puntos fijos contractibles de F', refiriéndose al levantamiento $\widetilde{F}' = H(F')$. Si z_0', z_1' son dos puntos fijos de $\widetilde{F}'$, está definido el número de enlace $I_{\widetilde{F}'}(z_0', z_1')$

Proposición 4.3. (Estabilidad del número de enlace).

1. *Si z_0 , z_1 son dos puntos fijos de $\widetilde{F}$, existe $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}(F)$ y entornos disjuntos $W_0(z_0)$, $W_1(z_1)$ tales que para toda $F' \in \mathcal{W}'$:*

$$z_0' \in Fix(H(F')) \cap W_0 \ , \ z_1' \in Fix(H(F')) \cap W_1 \Rightarrow I_{H(F')}(z_0', z_1') = I_{\widetilde{F}}(z_0, z_1)$$

2. *Para todo compacto $K_0 \in \widetilde{M}$ existe un compacto $K_1 \in \widetilde{M}$ y un entorno $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}(F)$ tal que para toda $F' \in \mathcal{W}'$:*

$$z_0' \in Fix(H(F')) \cap K_0 \ , \ z_1' \in Fix(H(F')) \setminus K_1 \Rightarrow I_{H(F')}(z_0', z_1') = 0$$

Demostración. 1. Sea $\epsilon > 0$ tal que si x, $y \in M$ con $d(x,y) < \epsilon$, existe una única geodésica minimizante de x a y. Elijo W_0 disjunto del ϵ- entorno tubular de la imagen de la curva $\widetilde{F}_t(z_1)$. Finalmente elijo $\mathcal{W}' = \{F' \in Homeo(M) : d(F'(x), F(x)) < \epsilon/2 \ \forall x \in M\}$. Entonces $F' \in \mathcal{W}'$, $z_0' \in W_0$, $z_1' \in W_1$ implica que las curvas $\widetilde{F}_t'(z_1'))$ y $\widetilde{F}_t(z_1)$ son homotópicas en $\widetilde{M} \setminus W_0$. Intercambiando los roles de z_0 y z_1 e intersectando los entornos así obtenidos con los anteriores, construyo una homotopía entre los mapas $t \mapsto \widetilde{F}_t(z_0) - \widetilde{F}_t(z_1)$ y $t \mapsto \widetilde{F}_t'(z_0') - \widetilde{F}_t'(z_1')$. □

La demostración de *2.* se basa en el siguiente

Lema 4.1. (El levantamiento canónico fija los puntos ideales en el infinito) *Sea $F \in Homeo(M)$, F isotópico a la identidad y $\widetilde{F}$ el levantamiento canónico de F. $\widetilde{F}$ se extiende como la identidad en los puntos ideales en el infinito.*

Demostración. Caso 1: M hiperbólica (i.e $g > 1$). Probaremos que si d_{hip} es la métrica de Poincaré en el disco, $\exists \ K > 0$ tal que $d_{hip}(x, \widetilde{F}(x)) < K \ \forall \ x \in \mathbb{D}$. Esto implica que para cualquier sucesión $x_n \to x \in \partial\mathbb{D}$, $d_{hip}(x_n, \widetilde{F}(x_n)) < K$ y por lo tanto $d(x_n, \widetilde{F}(x_n)) \to 0$. Podemos definir entonces $\widetilde{F}(x)$, $x \in \partial D$ como $\widetilde{F}(x) = \lim_n \widetilde{F}(x_n)$ para cualquier sucesión x_n tal que $x_n \to x$, y con esta definición $\widetilde{F}|_{\partial\mathbb{D}} = Id_{\partial\mathbb{D}}$. Ahora bien, $d_{hip}(x, \widetilde{F}(x)) < K$ es cierto para x en un dominio fundamental compacto,y siendo $d_{hip}(x, \widetilde{F}(x)) = d_{hip}(g(x_{fund}), \widetilde{F}(g(x_{fund}))) = d_{hip}(g(x_fund), g(\widetilde{F}(x_fund))) = d_{hip}(x_{fund}, \widetilde{F}(x_{fund}))$ para alguna $g \in G$ el grupo de transformaciones de cubrimiento y x_{fund} en el dominio fundamental, se tiene lo pedido.

Caso 2: M plana (i.e $g = 1$). En este caso compactificamos el cubrimiento universal $\widetilde{M} = \mathbb{C}$ agregando un *círculo de direcciones* en el infinito. Es decir, consideramos el espacio $\mathbb{C} \sqcup \Sigma$, donde Σ es homeomorfo a S^1 y lo parametrizamos con un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ con la siguiente topología: $x \in \mathbb{C}$, entonces los entornos de x son los habituales; $\theta \in \Sigma$, entonces los entornos de θ son de la forma $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R, \theta - \epsilon < arg(z) < \theta + \epsilon (mod 2\pi)\}$ para reales positivos R y ϵ, y $0 \leq arg(z) < 2\pi$. Por el mismo argumento que en el caso hiperbólico, alcanza probar que $d(x_n, \widetilde{F}(x_n)) < K \; \forall n$ para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$ tal que $x_n \to \theta \in \Sigma$, implica $\widetilde{F}(x_n) \to \theta$. Supongamos que $\widetilde{F}(x_n) \nrightarrow \theta$. Entonces $\exists$ R, $\epsilon > 0$ y una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$ tal que para todo k $|F(x_{n_k})| < R$ o $arg(x_{n_k}) \notin (\theta - \epsilon, \theta + \epsilon)$. Podemos suponer, tomando una subsucesión si es necesario que $|F(x_{n_k})| < R \; \forall k$ o $arg(x_{n_k}) \notin (\theta - \epsilon, \theta + \epsilon) \; \forall k$. En cualquier caso, como $x_n \to \theta$ se contradice la hipótesis $d(x_n, \widetilde{F}(x_n)) < K \; \forall n$. $\square$

Demostración. 2. La imagen K de $K_0 \times [0, 1]$ por la isotopía $\widetilde{F}_t$ es compacta. Sean U, V abiertos disjuntos tales que $\partial D \in U$, $K \in V$. Como $\widetilde{F}_t$ fija $\partial D \; \forall \; t$ por el lema, para todo $x \in \partial D$ existe un entorno $W(x)$ tal que $z \in W \Rightarrow \widetilde{F}_t(z) \in U \; \forall \; t$. Sea $\{W_i : i = 1, \ldots n\}$ un subcubrimiento finito de $\{W(x), x \in \partial D\}$. Definiendo $K_1 = (\bigcup_{i=1}^{n} W_i)^c$, y $\mathcal{W}'$ para que $F' \in \mathcal{W}'$, $z \in W$ implique $\widetilde{F}'_t(z) \in U \; \forall \; t$ obtengo lo pedido. $\square$

Observación 8. *Si $z \in Fix(\widetilde{F})$ se obtiene que $I(z, z') = 0$ si $z' \in Fix(\widetilde{F})$ está suficientemente cerca de ∞.*

4.2. Teoremas principales

En lo que sigue, asumiremos el siguiente

Teorema 4.1. *$\{F \in Homeo(M) : Fix(F) \; es \; finito\}$ es denso en $Homeo(M)$.*

y estudiaremos cuáles de nuestros resultados pueden generalizarse aproximando por homeomorfismos con finitos puntos fijos. Supondremos que $Fix_*(F)$ es contractible relleno con infinitas componentes conexas. Escribiremos $Fix_*(F) = \bigcap_{m\geq 0} K_m$, donde los conjuntos K_m son como en la Proposición 4.1 , imponiendo $D^i_m \cap Fix_*(F) \neq \emptyset\ \forall\ i \in \{0,\ldots,r_m\}$. Sean $N = M \setminus Fix_*(F)$, $\widetilde{N} = \widetilde{\pi}^{-1}(N)$, $\check{N}$ el cubrimiento universal de $\widetilde{N}$ y $\pi : \check{N} \to \widetilde{N}$ el mapa de cubrimiento.

La Proposición 3.3 se generaliza fácilmente y no utiliza ninguna hipótesis topológica sobre el conjunto $Fix_*(F)$:

Proposición 4.4. *Si $Fix_*(F) \neq Per_*(F)$, entonces $\forall\ z'' \in Per(\widetilde{F}) \setminus Fix(\widetilde{F})\ \exists\ z \in Fix(\widetilde{F})$ tal que $I(z, z'') \neq 0$.*

Demostración. Primero hay que observar que F se puede escribir como el límite de una sucesión $(F_k)_{k\geq 0}$ de homeomorfismos que coinciden con F en la órbita de $\widetilde{\pi}(z'')$ y que tienen un número finito de puntos fijos: dada $F_k \to F$ tal que $d(F_k(x), F(x)) < 1/k\ \forall x \in M,\ \forall\ k$, si $F_k(\widetilde{\pi}(z'')) \neq F(\widetilde{\pi}(z''))$, cambio F_k por $h_k \circ F_k$, donde $d(h_k(x), x) < 1/k\ \forall x$, h_k isotópica a la identidad soportada en un entorno $B(F_k(\widetilde{\pi}(z''))$ y tal que $h_k(F_k(\widetilde{\pi}(z''))) = F(\widetilde{\pi}(z''))$. Para k suficientemente grande, podemos suponer que F_k no fija $\widetilde{\pi}(z'')$ y por lo tanto F_k tiene la imagen de un entorno U de $\widetilde{\pi}(z'')$ disjunta de U con lo cual tomando $B \subset F_k(U)$ aseguramos que los puntos fijos de $h_k \circ F_k$ son los mismos que los de F_k. Como $d(h_k \circ F_k(x), F(x)) < 2/k\ \forall x,\ \forall k$, $h_k \circ F_k$ también converge a F, y de ahora en más nos referiremos por F_k a dicha sucesión.

Para cada k, sea $\widetilde{F}_k = H(F_k)$. Entonces $z'' \in Per(\widetilde{F}_k) \setminus Fix(\widetilde{F}_k)$, y como $Fix_*(\widetilde{F}_k)$ es finito, la Proposición 3.3 asegura que existe $z_k \in Fix(\widetilde{F}_k)$ tal que $n_k = I_{\widetilde{F}_k}(z_k, z'') \neq 0$. Usando la parte *2.* de la estabilidad del linking number, se tiene que $(z_k)_{k\geq 0}$ está acotada, pudiendo suponerse que converge a un punto fijo z de $\widetilde{F}$ y se deduce de la parte *1.* que $(n_k)_{k\geq 0}$ es constante a partir de un cierto k, $n_k = I_{\widetilde{F}}(z, z'')$.

□

En la sección anterior utilizamos la existencia de un conjunto desenlazado maximal para construir una foliación dinámicamente transversal. La existencia de ese conjunto es clara si $Fix_*(F)$ es finito, no siendo así en nuestro nuevo contexto. Por esta razón, debemos introducir una versión más débil de la propiedad de enlazamiento. Si $N = M \setminus Fix_*(F)$, la restricción de $\widetilde{\pi}$ a $\widetilde{N} = \widetilde{\pi}^{-1}(N)$ es un mapa de cubrimiento y G el grupo de transformaciones de cubrimiento.

Definición 4.2. *Diremos que* $Fix_*(F)$ *está* `débilmente desenlazado` *si existe un levantamiento* $\check{F}$ *de* $\widetilde{F}|_{\widetilde{N}}$ *al cubrimiento universal* $\check{N}$ *de* $\widetilde{N}$ *que conmuta con los elementos del grupo* $\check{G}$ *de transformaciones de cubrimiento de* $\pi : \check{N} \to \widetilde{N}$. *Si* $Fix_*(F)$ *no está débilmente desenlazado, diremos que* $Fix_*(F)$ *está* `débilmente enlazado`.

Para probar la

Proposición 4.5. *Si* $Fix_*(F)$ *es contractible relleno y está débilmente enlazado, existen dos puntos fijos* z, z'' *de* $\widetilde{F}$ *tales que* $I(z, z'') \neq 0$,

necesitaremos el siguiente

Lema 4.2. *Si* $Fix_*(F)$ *es contractible relleno y la acción de* $\widetilde{F}$ *en las clases de homotopía libre de lazos en* $\widetilde{N}$ *es no trivial, existen dos puntos fijos* z, z'' *de* $\widetilde{F}$ *tales que* $I(z, z'') \neq 0$.

Demostración. Sea $\Gamma \subset \widetilde{N}$ un lazo que no es libremente homotópico a $\widetilde{F}(\Gamma)$ en $\widetilde{N}$ y m suficientemente grande para que $K_m = \bigcup_{0 \leq i \leq r_m} D_m^i$ sea disjunto de $\widetilde{\pi}(\Gamma)$ y $F(\widetilde{\pi}(\Gamma))$. Los lazos Γ y $\widetilde{F}(\Gamma)$ no son libremente homotópicos en $\widetilde{M} \setminus \widetilde{\pi}^{-1}(K_m)$ porque $\widetilde{M} \setminus \widetilde{\pi}^{-1}(K_m) \subset \widetilde{N} = \widetilde{M} \setminus \widetilde{\pi}^{-1}(Fix_*(F))$ y la inclusión induce un morfismo a nivel de homotopía.

Probaremos primero que podemos encontrar una sucesión $(F_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{W}$ que converge a F tal que:

- cada F_k coincide con F afuera de K_m y tiene una cantidad finita de puntos fijos
- $Fix_*(F_k) \subset \bigcup_{0 \leq i \leq r_m} Int(D_m^i)$
- existe al menos un punto fijo contractible de F_k en cada D_m^i.

Para ver esto, primero tomamos una sucesión arbitraria de homeomorfismos $(F_n)_{n \geq 0}$ tal que $F_n \to F$. A partir de cierto n modifico la F_n para que coincida con F fuera de K_m; además, si para alguno de estos valores de n, la función F_n no tiene puntos fijos contractibles en algún D_m^i, puedo perturbar esta F_n para dejar fijo el punto fijo contractible x que F tiene en D_m^i, y este punto fijo será contractible de F_n, porque al tomar sino el levantamiento canónico $\widetilde{F}_n$, se tendría que $\forall \widetilde{x}$ tal que $\widetilde{\pi}(\widetilde{x}) = x$ $\widetilde{F}_n(\widetilde{x})$

y $\widetilde{x}$ están en diferentes dominios fundamentales, lo cual contradice que $\widetilde{F}_n$ es cercano a $\widetilde{F}$. Con esta perturbación no me aseguro de que el perturbado tenga finitos puntos fijos, pero puedo volver a aproximar por un difeo con un punto fijo hiperbólico en D_m^i y perturbar nuevamente a otro homeo con finitos puntos fijos, sabiendo ésta vez que el punto fijo hiperbólico se preserva. Observar que puedo elegir un cierto n de forma de que todos los perturbados que obtenemos aún pertenecen a $\mathcal{W}(F)$. La nueva sucesión F_k así obtenida cumple con todas las condiciones.

Sean $\widetilde{F_k} = H(F_k) \in \widetilde{\mathcal{W}}$ y $X_k \subset Fix_*(F_k)$ desenlazado maximal de F_k. Como los lazos Γ y $\widetilde{F}_k(\Gamma) = \widetilde{F}(\Gamma)$ son libremente homotópicos en $\widetilde{M}\backslash\widetilde{\pi}^{-1}(X_k)$ y no en $\widetilde{M}\backslash\widetilde{\pi}^{-1}(K_m)$, existe al menos un disco D_m^i tal que $X_k \cap D_m^i = \emptyset$. Consideramos una componente conexa de $\widetilde{\pi}^{-1}(D_m^i)$ y $z_k'' \in Fix(\widetilde{F}_k)$ en este disco. Se tiene entonces, como fue explicado en la Proposición 3.2, que existe $z_k \in \widetilde{\pi}^{-1}(X_k)$ tal que $n_k = I_{\widetilde{F}_k}(z_k, z_k'') \neq 0$. Podemos suponer, tomando una subsucesión de $(F_k)_{k\geq 0}$ si es necesario, que la sucesión z_k'' está toda contenida en la misma componente de $\widetilde{\pi}^{-1}(K_m)$ y por lo tanto converge a $z'' \in Fix(\widetilde{F})$. Deducimos que la sucesión $(z_k)_{k\geq 0}$ está acotada y podemos suponer que converge a un punto $z \in Fix(\widetilde{F})$. $z \neq z''$ porque $\widetilde{\pi}(z_k)$ y $\widetilde{\pi}(z_k'')$ están en diferentes componentes de K_m. Por lo tanto el linking number $I_{\widetilde{F}}(z, z'') \neq 0$, es el valor común de n_k para k suficientemente grande. □

Prueba de la Proposición 4.5:

Demostración. Consideramos un disco cerrado en M que contenga un punto fijo contractible pero que su frontera no y sea $D \subset \widetilde{M}$ una componente conexa de la preimagen de este disco. Tenemos

$$D \cap Fix(\widetilde{F}) = Int(D) \cap Fix(\widetilde{F}) \neq \emptyset.$$

Consideramos ∂D como un lazo basado en $z_0 \in \partial D$. Sea $z \in D \cap Fix(\widetilde{F})$ y $\check{F}_z$ el levantado natural de $\widetilde{F}_z = \widetilde{F}|_{A_z}$. Podemos suponer por el lema anterior que ∂D y $\widetilde{F}(\partial D)$ son libremente homotópicos en $\widetilde{N}$. Una tal homotopía define un arco en $\widetilde{N}$ conectando z_0 y $\widetilde{F}(z_0)$. Probaremos que si γ_0, γ_0' son dos curvas obtenidas de esta manera, es decir, cada una está asociada a una homotopía entre ∂D y $\widetilde{F}(\partial D)$ $\exists\, l \in \mathbb{Z}$ tal que $\gamma_0\gamma_0'^{-1} \simeq \partial D^l$. Para cualquier γ_0 obtenido así, es $\widetilde{F}(\partial D) \simeq \gamma_0^{-1}\partial D\gamma_0$. Entonces tenemos $\gamma_0'^{-1}\partial D\gamma_0' \simeq \gamma_0^{-1}\partial D\gamma_0$ sii $\gamma_0\gamma_0'^{-1}\partial D \simeq \partial D\gamma_0\gamma_0'^{-1}$ sii $\gamma_0\gamma_0'^{-1}$ conmuta con ∂D sii

$\gamma_0\gamma_0'^{-1} \simeq \partial D^l$, donde resta probar la última implicancia. Para ver esto, primero hay que observar que para algún m, la homotopía se realiza en un compacto de $\widetilde{M} \setminus \widetilde{\pi}^{-1}(K_m)$: la imagen H de la homotopía es un compacto disjunto de $Fix(\widetilde{F})$ y por lo tanto puedo tomar un abierto U que contenga al conjunto $Fix(\widetilde{F})$ y sea disjunto de H y en consecuencia un m tal que $K_m \subset U$. Ahora basta notar que un compacto de $\widetilde{M} \setminus \widetilde{\pi}^{-1}(K_m)$ es un compacto de $\widetilde{M}$ menos un número finito k de discos topológicos, es decir es un espacio que tiene el mismo tipo de homotopía que $\bigvee_{i=1}^{k} S^1$ (k círculos pegados por un punto) y el π_1 de este espacio es un grupo libre; en particular el conmutador de este grupo es trivial.

Además, es posible elegir la homotopía $(\Gamma_t)_{t\in[0,1]}$ entre ∂D y $\widetilde{F}(\partial D)$ de forma que γ_0 sea una trayectoria de $\check{F}_z$ (tomo γ en $\check{A}_z$ que una $\check{z}_0$ con $\check{F}_z(\check{z}_0)$ y que sea disjunta de los compactos de $\widetilde{M} \setminus \widetilde{\pi}^{-1}(K_m)$, la proyecto, y hago la homotopía a lo largo de ese camino).

El mapa $\Gamma \mapsto \gamma_0\widetilde{F}(\Gamma)\gamma_0^{-1}$, definido en $\pi_1(\widetilde{N}, z_0)$ no es la identidad. Sino, cualquier levantado de γ_0 a $\check{N}$ definiría el mismo levantamiento de $\widetilde{F}|_{\widetilde{N}}$ a $\check{N}$, y este levantamiento conmutaría con los elementos de G, contradiciendo el enlazamiento débil.(Un levantamiento de $\widetilde{F}|_{\widetilde{N}}$ queda determinado dándole un valor a un representante de z_0, y por lo tanto cada levantado de γ_0 define uno. Si $\Gamma\gamma_0\widetilde{F}(\Gamma)^{-1}\gamma_0^{-1} \simeq id\ \forall\ \Gamma$, y $\check{F}_0$ es el levantamiento que define el levantado $\check{\gamma}_0$ de γ_0 por $\check{z}_0$ y $\check{F}_1$ por $\check{z}_1$ ($\check{\gamma}_1$) y Γ proyectado de una curva $\check{\Gamma}_0$ que une $\check{z}_0$ y $\check{z}_1$, la curva $\check{\Gamma}_0\check{\gamma}_1\check{F}_1(\check{\Gamma}_0)\widetilde{\gamma_0}^{-1}$, donde $\widetilde{\gamma_0}^{-1}$ es el levantado de γ_0^{-1} que comienza en $\check{F}_1(\check{z}_0)$, es un lazo. Por lo tanto $\widetilde{\gamma_0}^{-1}$ termina en $\check{z}_0$, $\widetilde{\gamma_0}^{-1} = \check{\gamma}_0{}^{-1}$, $\check{F}_1(\check{z}_0) = \check{F}_0(\check{z}_0)$ y $\check{F}_1 = \check{F}_0$. Sea $\check{F}$ este levantamiento,y g una transformación de cubrimiento. $\check{\gamma}_0$ une $\check{z}_0$ con $\check{F}(\check{z}_0)$ y entonces $g\check{\gamma}_0$ une $g\check{z}_0$ con $g\check{F}(\check{z}_0)$, pero $g\check{\gamma}_0$ define el mismo levantamiento que $\check{\gamma}_0$ y entonces $g\check{F}(\check{z}_0) = \check{F}g(\check{z}_0)$. Por lo tanto $g^{-1}\check{F}g = \check{F}$ por levantar el mismo mapa y coincidir en un punto, y se tiene que $\check{F}$ conmuta con las transformaciones de cubrimiento).

Sea $\Gamma \subset \widetilde{N}$ un lazo basado en z_0 que no sea homotópico a $\gamma_0\widetilde{F}(\Gamma)\gamma_0^{-1}$. Sea m suficientemente grande como para que $K_m = \bigcup_{0\leq i\leq r_m} D_m^i$ sea disjunto de $\widetilde{\pi}(\Gamma)$, de $\widetilde{\pi}(\widetilde{F}(\Gamma))$, y de cualquier curva $\widetilde{\pi}(\Gamma_t),\ t \in [0,1]$.

Podemos encontrar en $\mathcal{W}$ una sucesión $F_k \to F$ tal que:

- cada F_k coincide con F afuera de K_m y tiene una cantidad finita de puntos fijos
- $Fix_*(F_k) \subset \bigcup_{0\leq i\leq r_m} Int(D_m^i)$
- existe al menos un punto fijo contractible de F_k en cada D_m^i.

Sean $\widetilde{F}_k = H(F_k) \in \widetilde{\mathcal{W}}$, $X_k \subset Fix_*(F_k)$ desenlazado maximal tal que $\widetilde{\pi}(z) \in X_k$ (un conjunto con un solo punto está siempre desenlazado) y $\check{F}_k$ el el levantamiento canónico de $\widetilde{F}_k|_{\widetilde{N}_k=\widetilde{M}\setminus\widetilde{\pi}^{-1}(X_k)}$ a $\check{N}_k$. Existe una isotopía $(F_{k,t})_{t\in[0,1]}$ de Id_M a F_k que fija todos los puntos de X_k. La levantamos a $\widetilde{M}$ en una isotopía $(\widetilde{F}_{k,t})_{t\in[0,1]}$ de $Id_{\widetilde{M}}$ a $\widetilde{F}_k$. Esta isotopía define una homotopía libre entre ∂D y $\widetilde{F}_k(\partial D) = \widetilde{F}(\partial D)$ en $\widetilde{N}_k$. Como ya tenemos una homotopía Γ_t entre ∂D y $\widetilde{F}(\partial D)$, deducimos : $\exists\,!\; l_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\widetilde{\gamma}_{k,z_0} : t \mapsto \widetilde{F}_{k,t}(z_0)$ y $\partial D^{l_0}\gamma_0$ son homotópicos en $\widetilde{N}_k$. En otras palabras, la curva $\partial D^{l_0}\gamma_0$ es una trayectoria de $\check{F}_k$. Como la isotopía $\widetilde{F}_{k,t}$ fija z, deducimos que $\widetilde{\gamma}_{k,z_0}$ (y por lo tanto $\partial D^{l_0}\gamma_0$) es una trayectoria del levantamiento natural $\check{F}_{k,z}$ de $\widetilde{F}_{k,z} = \widetilde{F}_k|_{A_z}$. Ahora bien, el único lazo $\partial D^{l_0}\gamma_0$ que es una trayectoria de $\check{F}_{k,z}$ es γ_0. Esto implica $l_0 = 0$ y que γ_0 es una trayectoria de $\check{F}_k$. Deducimos que Γ y $\gamma_0\widetilde{F}_k(\Gamma)\gamma_0^{-1}$ son homotópicas en $\widetilde{N}_k$ (de nuevo, $\gamma_0\widetilde{F}_k(\Gamma)\gamma_0^{-1}\Gamma^{-1}$ se levanta a un lazo). Como no son homotópicas en $\widetilde{M} \setminus K_m$, existe al menos un disco D_m^i tal que $X_k \cap D_m^i = \emptyset$. Concluimos como en el Lema 4.2. □

Deducimos de la Proposición 2.2 y las proposiciones anteriores el

Corolario 4.1. *Sea $F \in Homeo(M)$ tiempo uno de $(F_t)_{t\in[0,1]}$ isotopía de la identidad, y supongamos que F no tiene puntos errantes. Entonces hay órbitas periódicas contractibles de período arbitrariamente grande si alguna de las siguientes hipótesis se satisface:*

◇ *existe un punto periódico contractible no fijo*

◇ *$Fix_*(F)$ es contractible relleno y está débilmente enlazado*

Demostración. Hay que probar que los mapas $\widetilde{F}_z$ definidos para z punto fijo del levantamiento canónico $\widetilde{F}$ satisfacen la propiedad de intersección, para lo que basta probar que no existe ningún disco cerrado $D \subset \widetilde{M}$ tal que $\widetilde{F}(D) \subset IntD$ o $\widetilde{F}^{-1}(D) \subset IntD$.

Esto porque con cualquiera de las dos hipótesis $\widetilde{F}_z$ tiene un punto fijo z'' de número de rotación no nulo (Proposiciones 4.4 y 4.5, y Observación 7), y la Observación 8 nos da puntos fijos con número de rotación 0, lo cual sumado a la propiedad de intersección nos coloca en las hipótesis de la Proposición 2.2, que da puntos periódicos de período arbitrariamente largo. Probaremos el hecho más general de que $\bigcup_{k\geq 0} \widetilde{F}^k(U)$ y $\bigcup_{k\leq 0} \widetilde{F}^k(U)$ son no acotados si U es un dominio errante (si $\widetilde{F}(D) \subset IntD$, $x \in IntD \setminus \widetilde{F}(D)$ y $U(x) \subset Int(D\setminus\widetilde{F}(D)) \Rightarrow U$ es un dominio errante con $\bigcup_{k\geq 0} \widetilde{F}^k(U)$ acotado). Primero observamos que para todo $n \geq 1$ existe $z \in \widetilde{\pi}(U)$ tal que $(F^k(z))_{k\geq 0}$ corta $\widetilde{\pi}(U)$ para al menos n valores de k. (Como $\widetilde{\pi}(U)$ es no errante, $\exists\, n_1$ tal que $V_1 := F^{n_1}(\widetilde{\pi}(U)) \cap \widetilde{\pi}(U) \neq \emptyset$. $x \in V_1 \Rightarrow x = F^{n_1}(z)$, $z \in \widetilde{\pi}(U)$. Ahora, $\exists\, n_2$ tal que $V_2 := F^{n_2}(V_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. $x \in V_2 \Rightarrow x = F^{n_2}F^{n_1}(z)$, $z \in \widetilde{\pi}(U)$, $F^{n_1}(z) \in \widetilde{\pi}(U)$, $F^{n_2+n_1}(z) \in \widetilde{\pi}(U)$, etc.). Si $\widetilde{z} \in U$ es un representante de z, la órbita positiva $(\widetilde{F}_k(\widetilde{z}))_{k\geq 0}$ corta un abierto $g(U)$, $g \in G$ para al menos n valores de k. Corta al menos n de estos abiertos porque U es errante. Como n es arbitrariamente grande, $\bigcup_{k\geq 0} \widetilde{F}^k(U)$ es no acotado. $\square$

Estableceremos resultamos similares para homeomorfismos F que preservan orientación de una esfera S. Definimos de la misma forma la noción de conjunto desenlazado de puntos, conjunto desenlazado maximal, conjunto débilmente desenlazado. Supongamos que z_1, z_2, z_3, z_4 (en este orden) son cuatro puntos fijos diferentes de F. Definiremos el *número de enlace* $I(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Comenzamos con la siguiente

Observación 9. *Un conjunto de tres puntos en la esfera no está enlazado.*

Demostración. Sean z_1, z_2, z_3 tres puntos fijos. El homeo $F|_{S\setminus\{z_1,z_2\}}$ tiene un levantamiento natural al cubrimiento universal de $S \setminus \{z_1, z_2\}$ que fija los antecedentes de z_3: Si la clase de homología $[F_t(z_3)] = k \in \mathbb{Z}$, donde $(F_t)_{t\in[0,1]}$ es una isotopía de S que fija z_1 y z_2 para todo t, y $\widetilde{F}_t$ es el levantamiento de F_t que comienza en la identidad, entonces $T_{-k} \circ \widetilde{F}$ es el levantamiento buscado. Este levantamiento es el tiempo uno del levantamiento de F_t que comienza en T_{-k} ($T_{-k} \circ \widetilde{F}_t$). Concatenando una isotopía de la identidad a T_{-k} con $T_{-k} \circ \widetilde{F}_t$, obtengo una isotopía G_t de Id a $T_{-k} \circ \widetilde{F}$, con la particularidad de que $G_t(\widetilde{z}_3)$ es un lazo si $\widetilde{z}_3$ es un representante de z_3. Además, éstas isotopías conmutan con las transformaciones de cubrimiento, tengo una isotopía de Id

a F para la cual z_3 es contractible, y por lo tanto puedo deformarla a una isotopía que fija z_3. □

El homeomorfismo $F|_{S\setminus\{z_1,z_2\}}$ tiene un levantamiento natural al cubrimiento universal de $S \setminus \{z_1, z_2\}$ que fija los antecedentes de z_3. Consideramos el borde orientado de un disco cerrado alrededor de z_1 para definir vectores de rotación en $S \setminus \{z_1, z_2\}$ y denotamos por $I(z_1, z_2, z_3, z_4)$ al número de rotación de z_4 para este levantamiento. Podemos definir este número de enlace de otra manera: escribimos F como el tiempo uno de una isotopía de la identidad $(F_t)_{t\in[0,1]}$ que fija z_1, z_2 y z_3. Se tiene $I(z_1, z_2, z_3, z_4) = \Lambda(z_1) - \Lambda(z_2)$, donde Λ es la función dual del lazo $t \mapsto F_t(z_4)$. Aquí también se tiene la estabilidad del número de enlace (Proposición 4.3),es decir, si F' está cerca de F y admite cuatro puntos fijos z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 donde z_i está cerca de z'_i, $i = 1 \ldots 4$, se tiene $I(z_1, z_2, z_3, z_4) = I(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4)$. Si z_4 es una órbita periódica, definimos $I(z_1, z_2, z_3, z_4)$ de la misma forma.

Observación 10. *En el caso en que $Fix(F)$ es finito, existe un conjunto desenlazado maximal $X \subset Fix(F)$ y una foliación $\mathcal{F}$ transversal a la dinámica definida en $S \setminus X$. Si $X \neq Fix(F)$, $\forall\ z_4 \in Fix(F) \setminus X$ existe un lazo Γ basado en z_4 positivamente transversal a la foliación que es una trayectoria de F. Como $z_4 \in Fix(F) \setminus X$, se deduce que existen dos puntos z_1 y z_2 de X donde la función dual Λ toma dos valores diferentes. Para cualquier $z_3 \in X \setminus \{z_1, z_2\}$ se tiene $I(z_1, z_2, z_3, z_4) \neq 0$.*

Consideremos ahora un homeomorfismo F de S tal que $N = S \setminus Fix(F)$ es una superficie hiperbólica conexa. Escribimos

$$Fix(F) = \bigcap_{m\geq 0} K_m$$

donde $K_m = \bigcup_{0\leq i\leq r_m} D^i_m$ es una unión disjunta de al menos tres discos cerrados D^i_m cada uno de los cuales contiene un punto fijo, y donde $K_{m+1} \subset Int(K_m)$.

Proposición 4.6. *Supongamos $Fix(F) \neq Per(F)$. Para cualquier $z_4 \in Per(F) \setminus Fix(F)$, existen tres puntos fijos distintos z_1, z_2, z_3, tales que $I(z_1, z_2, z_3, z_4) \neq 0$.*

Demostración. Sea m tal que K_m sea disjunto de la órbita de z_4 y un conjunto $X_* \subset Fix(F)$ de tres puntos, cada uno en un disco D_m^i diferente. Podemos encontrar una sucesión $(F_k)_{k\geq 0}$ que converge a F tal que:

- cada F_k coincide con F en la órbita de z_4
- $Fix(F_k) \subset \bigcup_{0\leq i\leq r_m} Int(D_m^i)$
- $X_* \subset Fix(F_k)$

Para cada k, sea $X_k \subset Fix(F_k)$ desenlazado maximal de F_k que contenga a X_*. Si z_1^k, z_2^k, z_3^k son tres puntos diferentes de X_k, el entero $I(z_1^k, z_2^k, z_3^k, z_4)$ no depende de z_3^k. Podemos encontrar dos puntos z_1^k y z_2^k en X_k donde la función dual Λ de la trayectoria de z_4 toma dos valores diferentes. Por supuesto podemos suponer que z_1^k y z_2^k no están en el mismo disco D_m^i. Fijamos un punto $z_3^k \in X_*$ que no esté en el mismo disco D_m^i que ninguno de los puntos z_1^k y z_2^k. Los puntos z_j^k, $1 \leq j \leq 3$ están en diferentes discos y tenemos $I(z_1^k, z_2^k, z_3^k, z_4) \neq 0$. Podemos suponer que cada sucesión $(z_j^k)_{k\geq 0}$, $1 \leq j \leq 3$ converge a un punto fijo z_i. Los puntos z_1, z_2 y z_3 son distintos y $I(z_1, z_2, z_3, z_4) \neq 0$. □

Probaremos ahora el análogo de la Proposición 4.5:

Proposición 4.7. *Si $Fix(F)$ está débilmente enlazado, existen cuatro puntos fijos de F z_1, z_2, z_3 y z_4 tales que $I(z_1, z_2, z_3, z_4) \neq 0$.*

Comenzamos probando:

Lema 4.3. *Si la acción de F en las clases libres de homotopía de lazos en $S \setminus Fix(F)$ es no trivial, existen cuatro puntos fijos de F z_1, z_2, z_3 y z_4 tales que $I(z_1, z_2, z_3, z_4) \neq 0$.*

Demostración. Supongamos que $\Gamma \subset S \setminus Fix(F)$ no es libremente homotópica a $F(\Gamma)$ y sea m suficientemente grande para que K_m sea disjunto de Γ y $F(\Gamma)$. Consideramos un conjunto $X_* \subset Fix(F)$ con tres puntos, cada uno en un disco diferente D_m^i. Podemos encontrar una sucesión $(F_k)_{k\geq 0}$ que converge a F tal que:

- cada F_k coincide con F afuera de K_m y tiene una cantidad finita de puntos fijos

- $X_* \subset Fix(F_k)$

- $Fix_*(F_k) \subset \bigcup_{0 \leq i \leq r_m} Int(D_m^i)$

- existe al menos un punto fijo de F_k en cada D_m^i.

Sea $X_k \subset Fix(F_k)$ desenlazado maximal que contenga a X_*. Los lazos Γ y $F_k(\Gamma)$ son libremente homotópicos en $S \setminus X_k$. Esto implica que existe al menos un disco D_m^i tal que $X_k \cap D_m^i = \emptyset$. Tomamos un punto $z_4^k \in Fix(F_k)$ en este disco. Podemos encontrar dos puntos z_1^k y z_2^k en X_k donde la función dual Λ de la trayectoria de z_4^k toma dos valores diferentes, y se puede suponer que z_1^k y z_2^k no están en el mismo disco D_m^i. Sea $z_3^k \in X_*$ que esté en otro disco D_m^i. Podemos suponer que cada una de las sucesiones $(z_i^k)_{k \geq 0}$ converge a un punto fijo z_i. Los puntos z_1, z_2 y z_3 son distintos y $I(z_1, z_2, z_3, z_4) \neq 0$.

□

Demostración. (de la Proposición 4.7)

Sea $\Gamma_0 \subset N$ un lazo simple no homotópicamente trivial en N y fijemos $z_0 \in \Gamma_0$. Sea $X_* = \{z, z', z''\} \subset Fix(F)$, donde z, z' y z'' están en diferentes componentes conexas de $Fix(F)$ y supongamos que z y z' están en diferentes componentes de $S \setminus \Gamma_0$. Podemos suponer que Γ_0 y $F(\Gamma_0)$ son libremente homotópicas en N. Cualquier homotopía define una curva en N que conecta z_0 con $F(z_0)$. Aquí nuevamente, si γ_0 y γ_0' son dos curvas obtenidas de esta formam existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que γ_0 y $\Gamma_0^l \gamma_0'$ son homotópicas. En particular es posible elegir la homotpía $(\Gamma_t)_{t \in [0,1]}$ entre Γ_0 y $F(\Gamma_0)$ de tal forma que γ_0 sea una trayectoria del levantamiento canónico de $F|_{S \setminus X_*}$ al cubrimiento universal de $S \setminus X_*$. Nuevamente, existe un lazo Γ basado en z_0 que no es homotópico a $\gamma_0^{-1} F(\Gamma) \gamma_0$. Tomamos m suficientemente grande para que $K_m = \bigcup_{0 \leq i \leq r_m} D_m^i$ sea disjunto de Γ, de $F(\Gamma)$ y de cualquier curva Γ_t, $t \in [0,1]$. Podemos suponer que z, z' y z'' están en diferentes discos D_m^i. Como antes, podemos encontrar una sucesión $(F_k)_{k \geq 0}$ tal que:

- cada F_k coincide con F afuera de K_m y tiene una cantidad finita de puntos fijos

- $X_* \subset Fix(F_k)$

- $Fix_*(F_k) \subset \bigcup_{0 \leq i \leq r_m} Int(D_m^i)$

- existe al menos un punto fijo de F_k en cada D_m^i.

Consideramos $X_k \subset Fix(F_k)$ conjunto desenlazado maximal de F_k que contenga a X_*. Igual que en la proposición 4.5, se prueba que γ_0 es una trayectoria del levantamiento canónico de $F_k|_{S \setminus X_k}$ al cubrimiento universal. Deducimos que Γ y $\gamma_0^{-1} F(\Gamma)\gamma_0$ son homotópicas en $S \setminus X_k$. Por lo tanto, existe al menos un disco D_m^i tal que $X_k \cap D_m^i = \emptyset$. Concluimos como en el lema anterior. □

También obtenemos:

Corolario 4.2. *Sea F un homeo de S que preserva orientación y que no posee discos atractores (i.e D disco tal que $F(D) \subset Int(D)$) y tal que $N = S \setminus Fix(F)$ es una superficie hiperbólica conexa. Pueden encontrarse órbitas periódicas de período arbitrariamente largo si alguna de las siguientes hipótesis se satisface:*

- ◇ *existe un punto periódico no fijo*
- ◇ *$Fix(F)$ está débilmente enlazado*

Demostración. Cualquiera de las dos hipótesis implica que existen cuatro puntos fijos de F z_1, z_2, z_3 y z_4 tales que $I(z_1, z_2, z_3, z_4) \neq 0$ (Proposiciones 4.6 y 4.7). Además $I(z_1, z_2, z_3, z_4)$ es el número de rotación de z_4 en el anillo $A = S \setminus \{z_1, z_2\}$ para el levantamiento que fija los antecedentes de z_3, y por lo tanto el número de rotación de z_3 para este levantamiento es 0. Para poder aplicar la Proposición 2.2 solo queda chequear que $F|_{S \setminus \{z_1, z_2\}}$ satisface la propiedad de intersección. Supongamos entonces que existe un lazo γ en A, no homotópicamente nulo, tomando digamos z_1 para generar la homotopía de A, tal que es disjunto de su imagen por la restricción de F a A. La componente de $A \setminus \gamma$ donde la función dual de γ toma el máximo (o el mínimo, recordar que γ es no trivial) tiene bordes una curva cerrada simple que es un subconjunto de γ y z_1, de manera que si la miramos en la esfera, es decir agregamos z_1, es un disco D. Como $F|_A(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$, o bien $F(D) \subset Int(D)$ y D es un disco atractor, o bien $F^{-1}(D) \subset Int(D)$, en cuyo caso $S \setminus D$ es un disco atractor, contradiciendo la hipótesis del corolario. □

5. La esfera

En esta sección consideraremos un homeomorfismo F no trivial que preserva orientación de una esfera S, y supondremos que F no tiene puntos errantes y que posee al menos tres puntos fijos. Probaremos el siguiente

Teorema 5.1. *Cualquier componente conexa N de $S \setminus Fix(F)$ contiene puntos periódicos de período arbitrariamente largo.*

No es difícil probar que N es fija. Tomamos $z \in N$ y tres curvas simples γ_i, $1 \leq i \leq 3$ que unen z con un punto $z_i \in \partial N$. Podemos suponer que estos arcos se cortan solo en z. Los puntos z_i son fijos por F. Sea $Z = \bigcup_{1 \leq i \leq 3} \gamma_i$. Si N no es invariante, se tiene $F(Z) \cap Z = \{z_1, z_2, z_3\}$. Esto es imposible si F preserva orientación. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $N = S \setminus Fix(F)$. El teorema de traslación de Brouwer implica que N no es un disco. Distinguiremos dos casos, dependiendo de si N es un anillo o una superficie hiperbólica:

Proposición 5.1. *Si N es hiperbólica, existen puntos periódicos de período arbitrariamente largo.*

Demostración. Podemos suponer que $Fix(F)$ está débilmente desenlazado, sino, obtendríamos la conclusión usando el Corolario 4.2. El mapa $F|_N$ admite un levantamiento canónico $\widetilde{F}$ al cubrimiento universal $\widetilde{N}$ y existe una foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ dinámicamente transversal a $\widetilde{F}$. Se proyecta a una foliación $\mathcal{F}$ que satisface la misma propiedad: cualquier $z \in N$ puede conectarse con $F(z)$ por una trayectoria de $\widetilde{F}$ positivamente transversal a $\mathcal{F}$. Cualquier $z \in N$ pertenece a un loop positivamente transversal a la foliación: si tomo entornos tubulares $U(z)$, $V(F(z))$ entonces $z' \in U$, $z'' \in V$ implica que existe un arco positivamente transversal que une z' con z''. Como z es no errante, $\exists x \in V$, $n > 0$ tales que $F^n(x) \in U(F^{-1}(z))$. Puedo unir entonces con curvas positivamente transversales z con x, x con $F^n(x)$, y $F^n(x)$ con z. Se deduce del teorema de Poincaré-Bendixon que para toda hoja ϕ, el ω- límite $\omega(\phi)$ (resp. el α- límite $\alpha(\phi)$) está contenido en una componente conexa $X_+(\phi)$ (resp. $X_-(\phi)$) de $Fix(F)$, y además que $X_+(\phi) \neq X_-(\phi)$. Tomamos una hoja ϕ y consideramos el anillo $A = S \setminus (X_-(\phi) \cup X_+(\phi))$. Diremos que las dos componentes del complemento de A en la esfera, $X_+(\phi)$ y $X_-(\phi)$ son los dos `fines` de A. Existe un levantamiento natural $\check{F}$ de $F|_A$ al cubrimiento universal $\check{A}$ de A que satisface las siguientes propiedades:

- cualquier preimagen de $z \in Fix(F) \setminus (X_-(\phi) \cup X_+(\phi))$ por la proyección de cubrimiento, es un punto fijo de $\check{F}$
- la superficie $\widetilde{N}$ es el cubrimiento universal de $\check{N} = \check{A} \setminus Fix(\check{F})$, y $\widetilde{F}$ el levantamiento canónico de $\check{F}|_{\check{N}}$.

La foliación $\mathcal{F}$ se levanta a una foliación $\check{\mathcal{F}}$ en $\check{N}$ dinámicamente transversal a $\widetilde{F}$. Observar que ϕ es una curva en A que conecta los dos fines de A, i.e. si parametrizamos ϕ con $\mathbb{R}$ tenemos $\lim_{t\to-\infty} \phi(t) \in X_-(\phi)$ y $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) \in X_+(\phi)$. Observar también que cualquier levantado de ϕ es una línea de Brouwer de $\check{F}$ y que $\check{F}$ tiene puntos fijos porque N no es un anillo. La Proposición 5.1 es una consecuencia del siguiente lema:

Lema 5.1. *Sea f un homeomorfismo isotópico a la identidad de un anillo abierto A y F un levantamiento al cubrimiento universal $\widetilde{A}$ de A. Supongamos que:*

- $\Omega(f) = A$
- *F tiene un punto fijo*
- *existe una curva $\phi \subset A$ que conecta los dos fines de A y tal que cualquier levantado de ϕ es una línea de Brouwer de F.*

Entonces, existe un entero positivo n tal que $T_{-1}F^n$ tiene un punto fijo, donde T_{-1} denota la traslación por una unidad a la izquierda. En particular, f tiene puntos periódicos de cualquier período mayor que n.

Demostración. Sea $\widetilde{\phi}$ un levantamiento de ϕ y U una pequeña ϵ- bola entre $\widetilde{\phi}$ y $F(\widetilde{\phi})$. Como $\Omega(f) = A$ y $F(\widetilde{\phi})$ está a la derecha de $\widetilde{\phi}$, se tiene que existen enteros positivos n y k tales que $F^n(U) \cap (U+k) \neq \emptyset$. Además, podemos elegir un disco U y un entero n tal que el primer k como arriba es mayor o igual a 2: Supongamos entonces que tenemos $F^n(U) \cap (U+1) \neq \emptyset$. Si $F^n(U) \subseteq (U+1)$, entonces se deduce del torema de Brower la existencia del punto fijo de $T_{-1}F^n$. Sino, existe $x \in F^n(U) \cap (U+1)^c$. Podemos tomar una bolita alrededor de x que esté contenida en $F^n(U)$ y una bolita más pequeña

V adentro que quede contenida en $Int(U+1)^c$ y entre $\widetilde{\phi}+1$ y $F(\widetilde{\phi})+1$. Entonces $W = F^{-n}(V) \subset U$ no corta su trasladado por una unidad en n iterados, y por lo tanto necesariamente existen enteros positivos m y $l \geq 2$ tales que $F^m(W) \cap (W+l) \neq \emptyset$. De ahora en más, U denota un disco entre $\widetilde{\phi}$ and $F(\widetilde{\phi})$ tal que el primer entero positivo k con $F^n(U) \cap (U+k) \neq \emptyset$ para algún n positivo, cumple $k \geq 2$. Consideremos ahora el homeomorfismo $T_{-1}F^n$. Es un levantamiento del mapa f^n, que no tiene puntos errantes porque f no tiene puntos errantes (ver Lema 2.1). Además $T_{-1}F^n(U) \cap (U+k) \neq \emptyset$ para algún $k \geq 1$ y también $T_{-1}F^n(U) \cap U = \emptyset$. En otras palabras, U es un disco recurrente para adelante en el sentido del Teorema 2.6. El hecho de que F tenga un punto fijo implica que $T_{-1}F^n$ tiene un disco recurrente para atrás. Se sigue ahora del Teorema 2.6 que $T_{-1}F^n$ tiene un punto fijo.

$\square$

Para concluir la demostración del Teorema 5.1 basta probar la siguiente

Proposición 5.2. *Si N es un anillo, existen puntos periódicos de período arbitrariamente largo.*

Demostración. Al menos una de las componentes conexas de $S \setminus N$ no se reduce a un punto, porque asumimos que $Fix(F)$ tiene al menos tres puntos. La teoría de fines primos de Caratheodory da una compactificación natural del correspondiente fin de N agregando un círculo Σ, tal que $F|_N$ se extiende a un homeomorfismo del anillo semiabierto $N \sqcup \Sigma$ que fija Σ. Tomamos dos copias y las pegamos a lo largo de Σ para obtener un homeomorfismo F_{doble} de un anillo abierto $N_{doble} = N \sqcup \Sigma \sqcup N$. Este homeomorfismo tampoco tiene puntos errantes y admite puntos fijos. Consideramos el levantamiento $\widetilde{F}_{doble}$ que tiene una línea de puntos fijos. La restricción a la preimagen $\widetilde{N}$ de N es un levantamiento de $F|_N$. Podemos encontrar una foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ en $\widetilde{N}$ por líneas de Browuer que se proyecta a una foliación $\mathcal{F}$ en N. Igual que en la proposición anterior deducimos que todas las hojas son errantes, y por lo tanto que la dinámica de $\mathcal{F}$ es norte - sur en N. Al igual que en el Lema 5.1, las "medias líneas de Brouwer"dan discos recurrentes para adelante de $T^{-1}\widetilde{F}^n_{doble}$ para algún $n > 0$ y los puntos fijos de $\widetilde{F}_{doble}$ dan discos recurrentes para atrás de $T^{-1}\widetilde{F}^n_{doble}$, consiguiéndose un punto periódico de F_{doble} de número de rotación $1/n$, y junto con los puntos fijos de $\widetilde{F}_{doble}$ se concluye utilizando la Proposición 2.2. $\square$

5.1. Minimales en el plano multiagujereado

Consideraremos en esta sección una esfera S. Se deduce de nuestro trabajo que no hay minimales en $S \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ con $n \geq 3$.

Definición 5.1. *Un homeomorfismo $F : M \to M$ es* `minimal` *si no existe ningún subconjunto propio no trivial de M cerrado e invariante. Es decir, si $A \subset M$ es cerrado e invariante, entonces $A = \emptyset$ o $A = M$*

Observación 11. *Si $F : M \to M$ es minimal, cualquier órbita de F es densa. En particular, F no tiene puntos periódicos y $\Omega(F) = M$.*

Para ver esto, basta notar que si $x \in M$ y $\mathcal{O}(x)$ es la órbita de x, entonces $\overline{\mathcal{O}(x)}$ es un cerrado invariante no vacío.

Corolario 5.1. *No hay homeomorfismos minimales en $S \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ con $n \geq 3$.*

Demostración. Sea $M = S \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ con $n \geq 3$, y supongamos que $f : M \to M$ es minimal. Tomando una potencia de f si es necesario, podemos extender f a un homeomorfismo F de toda la esfera de forma que $F : S \to S$ fija los puntos x_i, $i = 1 \ldots n$. Como $f = F|_M$ es minimal, se sigue que $Fix(F) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y que $\Omega(F) = S$. Estamos entonces en las hipótesis del Teorema 5.1, de donde se concluye que $S \setminus Fix(F)$ contiene puntos periódicos de período arbitrariamente largo. Ahora bien, $S \setminus Fix(F) = M$, y por lo tanto f tiene órbitas periódicas, contradiciendo que es minimal. $\square$

Si el homeomorfismo es isotópico a la identidad, el corolario anterior se generaliza fácilmente al caso de una esfera con infinitas pinchaduras:

Lema 5.2. *Si $R \subset S$ es tal que $S \setminus R$ es una superficie hiperbólica conexa, entonces no hay minimales isotópicos a la identidad en $S \setminus R$.*

Demostración. Sea $M = S \setminus R$, y supongamos que $f : M \to M$ es un homeomorfismo minimal isotópico a la identidad. Por el Lema 4.1, sabemos que podemos extender f a un homeomorfismo $F : S \to S$ tal que $F|_R = Id_R$. Deducimos como en la demostración anterior que $Fix(F) = R$ y $\Omega(F) = S$. Concluimos como en la demostración anterior. $\square$

Referencias

[Br] L. E. J. Brouwer, Beweis des ebenen Translationssatzes, *Math. Ann.*, **72**, 37-54, 1912.

[DoC] M. Do Carmo, *Geometría Riemanniana*, IMPA, Projeto Euclides, 2005.

[Fr1] John Franks, Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms, *Inventiones mathematicae*, 108:403-418, 1992.

[Fr2] John Franks, Generalizations of the Poincaré - Birkhoff Theorem, *Annals of Math.*, (2) 128:139-151, 1988.

[F-H] John Franks, Michael Handel, Periodic Points of Hamiltonian Surface Diffeomorphisms, *Geometry and Topology*, **7**, 713-756, 2003.

[Han] Michael Handel, There are no minimal homeomorphisms of the multipunctured plane, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **12**, 75-83, 1992.

[Hat] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[KH] A. Katok y B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[LeC1] P. Le Calvez, Une version feuillete équivariante du thorme de translation de Brouwer, Preprint.

[LeC2] P. Le Calvez, Periodic orbits of Hamiltonian homeomorphisms of surfaces, Preprint, 2004.

[M] John W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton University Press, Princeton, 1997.

[Th1] William P. Thurston, *Three - dimensional geometry and topology*, Princeton University Press, Princeton, 1997.

[Th2] William P. Thurston, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces,*Bull. Am. Math. Soc.*, **19**, 417-431, 1988.