

TRABAJO MONOGRÁFICO

# **Transitividad Robusta en Superficies**

Por: Rafael Potrie Altieri

Orientador: Dr. Martín Sambarino

Licenciatura en Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad de la República

Uruguay

# Agradecimientos

De alguna manera esta es la parte más importante de la monografía. No es que no pueda ser una monografía sin que esto aparezca, pero sí no existiría sin la ayuda y el apoyo de la gente que voy a mencionar (probablemente muchísima más).

Antes que nada quiero agradecer a mi abuelo, Gerardo Altieri (1924-2004), que además de haber sido un pilar en toda mi formación, y de haber sido un amigo (al que quise enormemente y sigo queriendo) fue junto con mi madre, la persona que me introdujo el gusto por las matemáticas.

Quiero agradecer también a mi familia en general, en particular a mis padres y hermanas. Entre otras cosas, aprendí de ellos que para que a uno le vaya bien, tiene que hacer lo que le gusta y hacerlo con ganas.

Ni hablar que quiero agradecerle a Nati, por todo el apoyo que me da y por la paciencia que me tiene. Además porque la amo.

Quiero agradecer a mis amigos de toda la vida, en particular al Lalo, al Gami, al Fabo y a Nachito. No tienen nada que ver con la matemática pero no podría no agradecerles por todo.

Obviamente quiero agradecer a Martín (el pelado), mi orientador, por la buena onda, la paciencia, el esfuerzo. El me introdujo en los sistemas dinámicos y es la persona de la que aprendí más matemáticas hasta ahora (aunque no sólo aprendí matemáticas de él). Gracias.

El Rata y el Pulpo son las personas que me convencieron de hacer la Licenciatura y con los que sigo compartiendo todo, pero lo más importante una excelente amistad.

Además de ellos dos, tuve la suerte de pertenecer a una generación (en un sentido amplio) de gente alucinante que además disfruta estudiar matemática y genera ganas de estudiarla. Quiero resaltar dentro de ellos a: Alfonso, el Chingue, Diego, el Frodo, Juan, Juliana, el Leva (aunque nos lleve unos añitos...), Mauri, Mati, Pablito L y Pablito G.

Quiero agradecer al IMERL porque trabajar ahí es no solamente un honor, sino que además, a pesar de algunas dificultades, el trabajo se hace muy cuesta abajo. En particular quiero agradecer a: el Chermi, el Fiori, Jorge G, Jorge L, el Kelo, Maryorí, Nancy, el Pepe, Roberto.

Por último quiero agradecer a Pablo Monzón, por confiar en mi y darme siempre para adelante.

Evidentemente estoy muy agradecido, y la lista debería seguir, pero creo que estaría abusando de este espacio.

## Resumen

Se demuestra que los únicos difeomorfismos  $C^1$ –robustamente transitivos en superficies son los difeomorfismos de Anosov en  $\mathbb{T}^2$  y se presentan ejemplos de difeomorfismos  $C^1$ –robustamente transitivos no hiperbólicos en dimensiones mayores.

## Resumen

We prove that  $C^1$ -robustly transitive diffeomorphisms in a surface must be Anosov in  $\mathbb{T}^2$  and we present examples of  $C^1$ -robustly transitive diffeomorphisms which are robustly non hyperbolic in higher dimensions.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Dinámica en el tangente</b>	<b>8</b>
2.1. Introducción . . . . .	8
2.2. Hiperbolicidad Local . . . . .	8
2.3. Conjuntos Hiperbólicos . . . . .	13
2.3.1. Definiciones . . . . .	14
2.3.2. Propiedades Básicas de los conjuntos hiperbólicos. . . . .	16
2.4. Alternativas a la hiperbolicidad . . . . .	20
2.4.1. Descomposición Dominada . . . . .	21
2.4.2. Hiperbolicidad a partir de descomposición dominada . . . . .	26
<b>3. Transitividad Robusta en Superficies</b>	<b>28</b>
3.1. Introducción . . . . .	28
3.2. $f$ robustamente transitivo $\Rightarrow f \in \mathcal{F}(M)$ . . . . .	29
3.3. $f$ robustamente transitivo $\Rightarrow M$ admite una descomposición dominada . . . . .	32
3.4. Propiedades dinámicas de las variedades invariantes . . . . .	43
3.4.1. Integrabilidad de los fibrados $E$ y $F$ . . . . .	43
3.4.2. Propiedades dinámicas e integrabilidad única . . . . .	50
3.5. Puntos periódicos y sombreado de órbitas. . . . .	57
3.6. Robustamente transitivo implica Anosov . . . . .	61
3.7. Comentarios sobre las pruebas y otros resultados . . . . .	64
3.7.1. Otros Resultados . . . . .	64
3.7.2. Otras posibles pruebas . . . . .	66
3.7.3. El caso $\Omega(f) = M$ robustamente . . . . .	67
3.7.4. El caso de superficies no orientables . . . . .	69

<b>4. Condiciones Suficientes Para Transitividad Robusta</b>	<b>70</b>
4.1. Hiperbolicidad Parcial . . . . .	71
4.2. Primera aproximación . . . . .	73
4.3. Condición suficiente de transitividad robusta . . . . .	76
4.3.1. Ejemplos no hiperbólicos de difeomorfismos robustamente transi- tivos. . . . .	78
4.4. Demostración de la condición suficiente . . . . .	86
<b>A. Resultados utilizados</b>	<b>92</b>
A.1. Lema de Franks . . . . .	92
A.2. Closing Lemma y sus consecuencias . . . . .	95
A.3. Difeomorfismos DA y productos cruzados . . . . .	98

# Capítulo 1

## Introducción

Es un objetivo de los sistemas dinámicos describir el resultado de aplicar reiteradamente una transformación a un espacio de estados. En particular, dada la dificultad que representa estudiar dinámicas específicas, en muchos casos se centra la atención en buscar propiedades satisfechas por conjuntos grandes de sistemas<sup>1</sup>.

Conjunto grande de sistemas hará referencia a un conjunto abierto de difeomorfismos con la topología  $C^r$ .

**Definición 1.0.1.** La métrica  $C^r$  en el espacio  $\mathcal{D}iff^s(M)$  ( $s \geq r \geq 1$ ) está dada por (asumiendo que  $M \subset \mathbb{R}^k$ )

$$d_r(f, g) = \max\left\{\sup_{x \in M}\{d(f(x), g(x))\}, \sup_{x \in M}\{\|Df_x - Dg_x\|\}, \dots, \sup_{x \in M}\{\|D^r f_x - D^r g_x\|\}\right\}$$

Se asumirá durante el trabajo que el lector se encuentra familiarizado con las nociones básicas de variedades y aplicaciones entre estas. En particular, que se conocen propiedades de la topología  $C^1$  (específicamente, se hará uso de que  $\mathcal{D}iff^1(M)$  es un espacio de Baire, ver [Less]). Lo necesario para seguir el trabajo se encuentra en [Mil] o [PdM].

Históricamente, la dinámica hiperbólica tuvo un gran éxito en cumplir estos objetivos, describiendo casi completamente la dinámica de un conjunto importante de difeomorfismos (los difeomorfismos Axioma A sin ciclos forman un conjunto abierto para las topologías  $C^r$  con  $r \geq 1$ ).<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Por una introducción a los objetos de estudio, objetivos básicos y técnicas utilizadas en la teoría de sistemas dinámicos, ver [KH], [Rob] ó [BDV].

<sup>2</sup>Para una exposición introductoria completa de la dinámica hiperbólica ver [Sh2] ó [KH].

Sin embargo, los difeomorfismos hiperbólicos introducidos por Smale en [Sm2] probaron no ser tantos como se pensaba, encontrándose en [AS] conjuntos abiertos de difeomorfismos no hiperbólicos<sup>3</sup>.

Para subsanar esto, se comenzaron a estudiar otros comportamientos, en particular las bifurcaciones homoclínicas (ver [PT]) para intentar “llenar” el conjunto de difeomorfismos con dinámicas conocidas.

Otro mecanismo utilizado fue alivianar el concepto de hiperbolicidad mediante nuevas propiedades como pueden ser la hiperbolicidad parcial y la descomposición dominada.

Estos caminos se cruzaron, aportando al entendimiento del área. En [PS1], Pujals y Sambarino muestran, utilizando la descomposición dominada, que las tangencias homoclínicas (un tipo de bifurcación homoclínica) son densas en el complemento  $C^1$  de la clausura de los difeomorfismos hiperbólicos de superficies, logrando describir, mediante dinámicas conocidas, la “mayoría” de los sistemas dinámicos (en superficies). También se cruzan las metodologías en [BD] donde Bonatti y Díaz utilizan la hiperbolicidad parcial para construir conjuntos abiertos con ciclos heterodimensionales (el otro tipo de bifurcación homoclínica)<sup>4</sup>.

En este trabajo, se estudiarán conjuntos abiertos de difeomorfismos presentando una fuerte propiedad de recurrencia, la transitividad.

**Definición 1.0.2.** Un homeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  (donde  $M$  es un espacio topológico) se dice *transitivo* si existe  $x \in M$  tal que su órbita  $(\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\})$  es densa en  $M$ .

La transitividad es una propiedad puramente topológica, pero el pedir algo tan sencillo como puede ser tener una órbita densa, tiene consecuencias bastante impresionantes. Un teorema que muestra posibles equivalencias es el siguiente (si bien es muy sencillo se usará varias veces durante el trabajo).

**Teorema 1.0.1.** *Sea  $f$  un homeomorfismo de un espacio topológico  $M$  con base numerable (por ejemplo un espacio métrico compacto). Entonces, son equivalentes:*

1.  $\forall U, V$  abiertos, existe  $n$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .
2. Existe un residual  $\mathcal{R}$  tal que para todo  $x \in \mathcal{R}$  la órbita de  $x$  es densa.
3. Existe  $x \in M$  tal que la órbita de  $x$  es densa.

---

<sup>3</sup>Es todavía una pregunta abierta determinar si con la topología  $C^1$  los difeomorfismos hiperbólicos constituyen un conjunto abierto y denso dentro de los difeomorfismos de superficies. En otras topologías y otras dimensiones se conoce que es falso.

<sup>4</sup>Es recomendable la lectura de [PS3], [D] y [BDV] como introducción a estos resultados.



DEMOSTRACIÓN.  $2. \Rightarrow 3.$  es trivial.  $3. \Rightarrow 1.$  es sencillo pues si se considera  $n$  de forma tal que  $f^n(x) \in U$  y  $m$  tal que  $f^m(x) \in V$  entonces  $f^m(x) \in f^{m-n}(U) \cap V$ .

Para ver  $1. \Rightarrow 2.$ , sea  $\{B_n\}$  una base de la topología de  $M$  y sean los conjuntos abiertos  $A_n = \{x \in M : \exists m \text{ tal que } f^m(x) \in B_n\}$ , que además son densos por  $1.$ . Ahora si se considera  $\mathcal{R} = \bigcap_n A_n$  se obtiene la conclusión buscada.

□

Una propiedad robusta es una propiedad que se cumple en un conjunto abierto de difeomorfismos. Un ejemplo importante de esto, es la estabilidad estructural (i.e.  $f$  es  $C^r$ -estructuralmente estable si existe un entorno  $C^r$  de  $f$  de forma tal que todo difeomorfismo en ese entorno es conjugado a  $f$ , es decir, posee las mismas propiedades dinámicas a menos de un cambio de coordenadas topológico<sup>5</sup>).

Se ha estudiado mucho como propiedades topológicas robustas caracterizan la dinámica de la aplicación tangente. Por ejemplo, en [M4] se prueba que los  $C^1$ -estructuralmente estables son hiperbólicos.

En este trabajo, se estudiarán los difeomorfismos  $C^1$ -robustamente transitivos. En particular, se presentará una demostración de un resultado de Mañé en [M2] que asegura que los difeomorfismos  $C^1$ -robustamente transitivos en superficies son Anosov (globalmente hiperbólicos).

**Definición 1.0.3.** Un difeomorfismo  $f$  es  $C^r$ -robustamente transitivo si y solo si existe un entorno  $\mathcal{U}(f)$  de  $f$  en la topología  $C^r$  de forma tal que si  $g \in \mathcal{U}(f)$  entonces  $g$  es transitivo.

En general no se estudian propiedades  $C^0$  robustas pues es sencillo observar como mediante perturbaciones  $C^0$  pequeñas se pueden obtener comportamientos patológicos (por ejemplo, si  $M$  es compacta, todo homeomorfismo se puede perturbar  $C^0$  para que tenga un abierto de puntos periódicos del mismo período y también perturbar  $C^0$  para no tenerlo).

Estamos en condiciones de enunciar el resultado principal de este trabajo.

**Teorema 1.0.2.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo  $C^1$ -robustamente transitivo y  $M$  una superficie compacta, conexa, orientable<sup>6</sup> y sin borde. Entonces,  $f$  es un difeomorfismo de Anosov en el toro  $\mathbb{T}^2$ .

---

<sup>5</sup>Como el cambio de coordenadas es topológico, no necesariamente se preservan por conjugación las propiedades dinámicas de la aplicación tangente.

<sup>6</sup>No es necesario que sea orientable, eso se comentará en la Sección 3.7

El recíproco de este Teorema también se cumple, pues los difeomorfismos de Anosov son estructuralmente estables y en superficies se sabe son transitivos. Esto es gracias a un resultado de Franks en [F1].

Este resultado es consecuencia directa de un teorema probado por Mañé en [M2], sin embargo, la prueba que se presentará es más directa y fue sugerida por Martín Sambarino.

Para completar el trabajo, se mostrará la importancia de trabajar en superficies, introduciendo ejemplos de difeomorfismos robustamente transitivos y al mismo tiempo robustamente no hiperbólicos.

**Teorema 1.0.3.** *Existen difeomorfismos  $C^1$ -robustamente transitivos y  $C^1$ -robustamente no hiperbólicos en variedades de dimensiones mayores o iguales a 3.*

Estos ejemplos son debidos a Mañé [M1] y a Shub [Sh1].

Para probar que estos ejemplos cumplen efectivamente con las propiedades deseadas, no se hará uso de las técnicas aplicadas originalmente por Mañé y Shub sino que se recurrirá a un resultado de Pujals y Sambarino ([PS4]) que permite asegurar la transitividad robusta.

No se estudiará el caso (aún abierto) de verificar estos resultados con otras topologías (en particular la topología  $C^2$ ) aunque se hará mención a posibles dificultades, marcando los argumentos que fallan en ese contexto.

La técnica utilizada empieza por encontrar descomposición dominada en la clausura de los puntos periódicos (siguiendo las ideas de [M2] y haciendo uso continuo del Lema de Franks [F2]) y luego extendiéndola a toda la variedad mediante una técnica tomada de [PS2] y el Closing Lemma de Pugh [Pu].

Una vez alcanzado este objetivo, la demostración se alejará de la prueba de [M2], siguiendo ideas de [PS1] (simplificadas pues se cuenta con más hipótesis) para probar que se tiene variedades estables e inestables invariantes. Esto dará puntos periódicos densos y permitirá concluir la hiperbolicidad del difeomorfismo <sup>7</sup>.

Es importante remarcar que las herramientas utilizadas son características de la topología  $C^1$ . En particular, el Closing Lemma es un problema abierto en la topología  $C^2$  y el Lema de Franks es falso en la topología  $C^2$  (ver [PS5]). Vale la pena aclarar también que la dificultad se encuentra en encontrar la descomposición dominada en la superficie ya que resultados de [PS5] permitirían concluir la hiperbolicidad a partir de la descomposición dominada teniendo en cuenta la transitividad robusta.

---

<sup>7</sup>Esto no es tan directo pues hay que encontrar puntos periódicos que satisfagan ciertas propiedades de sombreado así traspasan sus propiedades hiperbólicas al resto de las órbitas, contradiciendo consecuencias del Lema de Franks.

En dimensiones mayores es cierto, que los difeomorfismos robustamente transitivos admiten descomposición dominada (ver [BDP]), sin embargo, esto no permite encontrar una descomposición hiperbólica como en el caso de las superficies. De hecho, se presentarán ejemplos de difeomorfismos robustamente transitivos donde si bien se cuenta con hiperbolicidad parcial (más fuerte que la descomposición dominada), serán robustamente no hiperbólicos. Sin embargo, se encuentra aún abierto el problema de encontrar una caracterización necesaria y suficiente de la transitividad robusta en dimensiones mayores.

El mecanismo que se empleará para impedir la hiperbolicidad será el de obtener puntos periódicos hiperbólicos de distinto índice en la misma pieza transitiva (en nuestro caso toda la variedad). Para probar que estos ejemplos (producto cruzado [Sh1] y derivado de Anosov [M1]) son robustamente transitivos, se utilizará una condición suficiente propuesta en [PS4] que exige algo de hiperbolicidad en la dirección central.

El trabajo se organiza de la siguiente forma: en el capítulo 2 se introducirán los requisitos para comprender las pruebas de los teoremas mencionados, en particular, se estudiará (de forma no-autocontenida) la dinámica a partir del conocimiento de propiedades de su derivada (estudiando hiperbolicidad y descomposición dominada).

En el capítulo 3 se probará que los difeomorfismos robustamente transitivos en superficies son Anosov en el toro  $\mathbb{T}^2$ .

Por último, en el capítulo 4, se introducirá la noción de foliación minimal y se buscarán condiciones para que las foliaciones sean robustamente minimales. Esa herramienta se empleará para probar que los ejemplos de Shub y de Mañé son robustamente transitivos (de hecho se probará que sus foliaciones son robustamente minimales) a pesar de ser robustamente no hiperbólicos.

En el Apéndice, se podrán encontrar las pruebas de algunos resultados clásicos que se ha considerado desviarían la atención de la idea de la demostración del teorema principal.

# Capítulo 2

## Dinámica en el tangente

### 2.1. Introducción

En este capítulo daremos una breve introducción a las formas conocidas de obtener información de la dinámica de un difeomorfismo a partir del conocimiento de propiedades de su aplicación tangente. Dado que no es el objetivo de este trabajo profundizar en este tema, la presentación no contendrá todas las pruebas de los resultados enunciados y nos referiremos a [KH], [Sh2] y [BS] para pruebas de resultados referidos a la hiperbolicidad y a [BDV] y [PS3] para el resto. Además de estos, la exposición de la parte de hiperbolicidad está basada en [S1] y [S2].

### 2.2. Hiperbolicidad Local

**Definición 2.2.1.** Dado  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo y  $p$  tal que  $f(p) = p$ , se dice que es un *punto fijo hiperbólico* sii  $Df_p : T_pM \rightarrow T_pM$  es una transformación lineal hiperbólica, es decir, no tiene valores propios de módulo uno.

Un teorema muy importante que se enunciará a continuación afirma que cuando un difeomorfismo tiene un punto fijo hiperbólico, la dinámica en un entorno es relativamente simple y conocida. El teorema lo que afirma es que existe una conjugación local entre la función y su diferencial (ver figura 2.1).

**Teorema 2.2.1 (Hartman).** *Sea  $f : M \rightarrow M$  difeomorfismo y  $p$  un punto fijo hiperbólico entonces,  $\exists U$  entorno de  $p$ ,  $V$  entorno del 0 en  $T_pM$  y  $h : U \rightarrow V$  homeomorfismo tal que  $h \circ f = Df_p \circ h$ . Es decir,  $f$  es localmente conjugado a su parte lineal.*

ESBOZO DE DEMOSTRACIÓN.

Para demostrar el teorema, dado que la afirmación es local, se puede suponer que  $M = \mathbb{R}^n$  y  $p = 0$ . La idea entonces es ver que  $f(x) = Ax + \phi(x)$  es localmente conjugada a  $A$  (donde  $A = Df_0$ ) y donde  $\phi$  es una función  $C^1$  con derivada nula en 0. La demostración de eso es sencilla pero se basa en la estabilidad estructural de los mapas lineales que asegura que si una transformación lineal  $A$  es hiperbólica y una función cercana  $G$  (en el sentido de que  $\sup\{|G(x) - Ax|\} < \infty$ ) es tal que  $G - A$  tiene constante de Lipschitz suficientemente pequeña entonces son conjugadas. En vista de ese resultado es fácil encontrar la conjugación local entre  $f$  y  $A$  considerando  $G(x) = Ax + \rho(x)\phi(x)$  donde  $\rho$  es una función “chichón” adecuada para entrar en las hipótesis del teorema mencionado (ver [S1]).

□

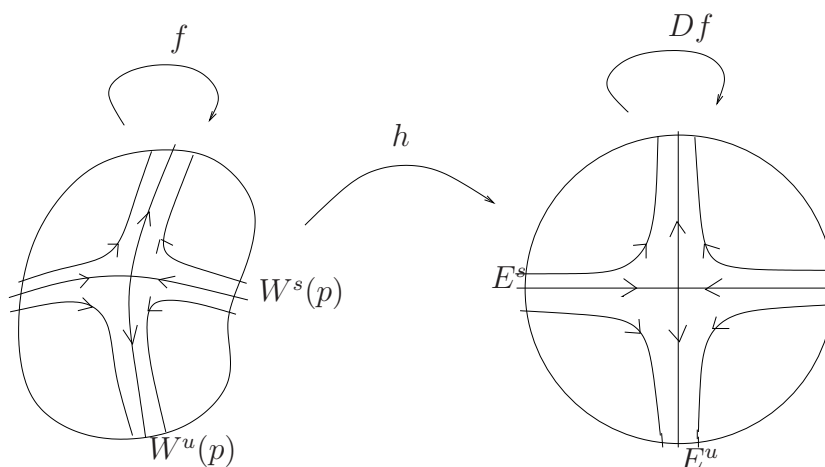


Figura 2.1: Teorema de Hartman

**Proposición 2.2.2 (Norma Adaptada para transformaciones lineales).** *Si  $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una transformación lineal hiperbólica, entonces existe una norma en  $\mathbb{R}^N$  y un número  $a \in (0, 1)$  tal que  $\|A|_{E^s}\| < a$  y  $\|A^{-1}|_{E^u}\| < a$  (Donde  $\mathbb{R}^N = E^s \oplus E^u$  es la descomposición en los subespacios propios asociados a los valores propios de módulo menor y mayor que uno respectivamente).*

*Observación 2.2.1.* Es sencillo ver que existen constantes  $C > 0$  y  $\lambda \in (0, 1)$  de forma que se cumple que:

$$\|A^n v_s\| \leq C \lambda^n \|v_s\| \quad \forall v_s \in E^s, n \geq 0$$

$$\|A^{-n}v_u\| \leq C\lambda^n \|v_u\| \quad \forall v_u \in E^u, n \geq 0$$

◇

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 2.2.2. Primero se puede suponer que  $R^N = E^s$  y se cumple entonces que para todo  $v \in R^N$  se tiene  $\|A^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|$  si  $n \geq 0$ . Si se considera  $n_0$  de forma tal que  $C\lambda^{n_0} < 1$  y la siguiente norma:

$$\|v\|_s = \sum_{i=0}^{n_0-1} \|A^i v\|$$

Se verifica inmediatamente que esta norma cumple lo deseado. Luego, considerando una norma análoga en  $E^u$  y tomando como norma

$$\|v\|_1 = \max\{\|v_s\|_s, \|v_u\|_u\} \quad \text{donde } v = v_s + v_u$$

se llega a lo deseado.

□

*Observación 2.2.2.* También se podría haber considerado la suma de las dos normas en vez del máximo entre ambas.

## Variedades Invariantes

**Definición 2.2.2.** El *conjunto estable local* de un punto fijo  $p$  es

$$W_\beta^s(p) = \{x \in B(p, \beta) : f^n(x) \in B(p, \beta) \quad \forall n \geq 0\}$$

El *conjunto estable* de un punto fijo  $p$  es

$$W^s(p) = \{x \in M : f^n(x) \rightarrow p \quad n \rightarrow +\infty\}$$

Análogamente se definen los *conjuntos inestables*  $W_\beta^u(p, f) = W_\beta^s(p, f^{-1})$  y  $W^u(p, f) = W^s(p, f^{-1})$ .

*Observación 2.2.3.* A partir del Teorema de Hartman (Teorema 2.2.1) se observa que los conjuntos estables e inestables locales son variedades topológicas inmersas y se ve también que

$$W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\beta^s(p)) \quad \text{y} \quad W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\beta^u(p))$$

◇

La comprensión global de estos conjuntos es esencial para el estudio de la dinámica. En el caso de los puntos periódicos hiperbólicos se tiene una descripción bastante completa de estos conjuntos en vista del siguiente teorema, cuya demostración completa se puede encontrar tanto en [Sh2] o [HPS](esas demostraciones no siguen la misma idea que esbozaremos, sacada de [S2]).

**Teorema 2.2.3 (Variedad Estable).** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^r$  y  $p$  un punto fijo hiperbólico.  $T_p M = E^s \oplus E^u$  la descomposición del espacio tangente según los valores propios de módulo mayor o menor que uno. Entonces,  $\exists \beta > 0$  tal que  $W_\beta^s(p)$  es una subvariedad encajada de clase  $C^r$  en  $M$  que cumple que  $T_p W_\beta^s(p) = E^s$  y  $W_\beta^s(p) \subset W^s(p)$ . Además, si  $f_n \xrightarrow{C^r} f$  entonces  $W_\beta^s(p_n, f_n) \rightarrow W_\beta^s(p, f)$  uniformemente  $C^r$  en compactos.*

ESBOZO DE DEMOSTRACIÓN. Por tratarse de un teorema local se puede suponer que se tiene  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $f(0) = 0$  y llamando  $A = DF_0$  se obtiene que  $f = A + \phi$  (donde  $\phi(0) = 0$  y  $D\phi_0 = 0$ ). Utilizando la norma adaptada de la Proposición 2.2.2, se considera un  $\varepsilon$  de forma tal que  $a^{-1} - \varepsilon > 1 > a + \varepsilon$  y  $\beta > 0$  tal que si  $\|x\| < \beta$  valga que  $\|\phi(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$  y  $\|D\phi_x\| \leq \varepsilon$ .

La idea es definir la variedad estable como un gráfico de una función de  $E^s$  en  $E^u$  y luego ver que es una función diferenciable y que su derivada se anula en 0. Para eso, se definen los conos estables e inestables de la siguiente forma:

$$C^{s(u)} = \{(v_s, v_u) : \|v_{s(u)}\| \geq \|v_{u(s)}\|\}$$

Es sencillo ver que estos conos son invariantes por el diferencial de  $f$  (el cono estable para el pasado y el inestable al futuro).

Se define también lo que se le llamará variedades casi verticales (ver figura 2.2) como variedades de igual dimensión que  $E^u$  en  $B(0, \beta)$  que cumplan que su tangente en todo punto esté contenido en el cono inestable. No es difícil ver que al iterar al futuro estas variedades por  $f$  e intersectar con  $B(0, \beta)$  se obtiene nuevamente una variedad casi vertical. Es así que se prueba que  $W_\beta^s(0)$  es el gráfico de una función pues para todo punto  $x \in E^s$  se considera la variedad casi vertical  $x + B^u(0, \beta)$  (el supraíndice  $u$  indica que es una bola en  $E^u$ ), al iterarla hacia el futuro se ve que sólo un punto de ella puede permanecer en  $B(0, \beta)$  en todos los iterados y de esa forma se define la función buscada.

Para testear la diferenciabilidad se observa primero que la función tiene que ser Lipchitz y luego se buscan candidatos a espacio tangente iterando hacia atrás los conos

estables de las imágenes de un punto de  $W_\beta^s(0)$  e intersectandolos todos. Por argumentos de contracción exponencial en la intersección se corrobora que son subespacios y para ver que son el tangente a la variedad se trabaja por absurdo asumiendo que no lo son y contradiciendo que la función sea Lipchitz.

□

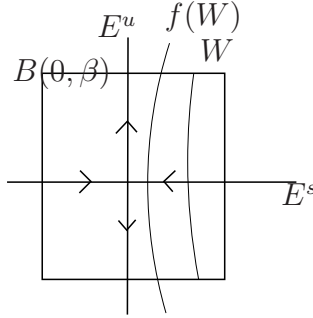


Figura 2.2: Variedades casi verticales

*Observación 2.2.4.* Las observaciones hechas anteriormente valen ahora en un contexto diferenciable concluyendo que tanto  $W^s(p)$  y  $W^u(p)$  son variedades inmersas en  $M$  (en particular se puede observar que no pueden tener autointersecciones, aunque si pueden tener intersecciones entre ellas, lo que conduce a comportamientos muy ricos que estarán muy presentes en nuestro estudio)

◇

Otro teorema clásico y de gran importancia es el  $\lambda$ -lemma o lema de Inclinación (ver [PdM]) que permite comprender el comportamiento local de los puntos fijos hiperbólicos a partir de sus variedades invariantes. Tampoco se presentará una demostración formal del teorema y se sugiere al lector leer [PdM] por más detalles.

**Teorema 2.2.4 ( $\lambda$ -Lemma).** *Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo,  $p$  un punto fijo hiperbólico y  $D^u$  un disco compacto en  $W^u(p)$  cualquiera. Sea  $D$  una variedad de igual dimensión que  $W^u(p)$  tal que  $D \cap W^s(p) \neq \emptyset$  y la intersección es transversal. Entonces  $\forall \varepsilon > 0$  existe un  $n_0$  tal que  $\forall n > n_0$  existe  $D_n \subset D$  tal que  $f^n(D_n)$  está  $\varepsilon - C^1$  cerca de  $D^u$ .*

ESBOZO DE DEMOSTRACIÓN. La clave de la demostración consiste en que puede ser hecha localmente pues al valer que  $W^u = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\beta^u)$  se puede pedir que la variedad



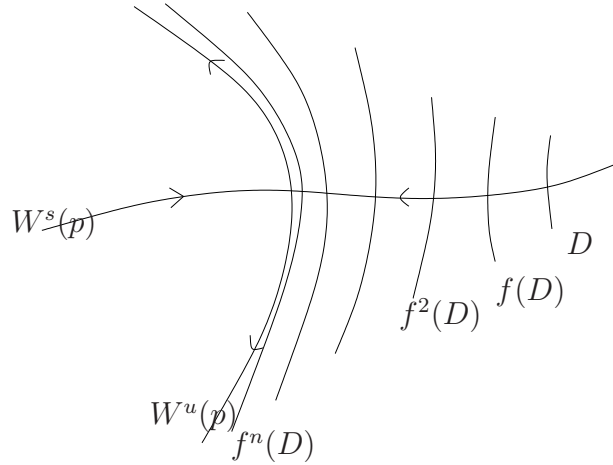


Figura 2.3:  $\lambda$ - Lemma.

se acerque a  $f^{-n_1}(D^u)$  un cierto valor  $\varepsilon_1$  de forma tal que al iterar luego  $n_1$  veces hacia adelante este  $\varepsilon$  cerca de  $D^u$ . Al mismo tiempo, dado que el diferencial de  $f$  es siempre un isomorfismo, la intersección de los iterados de  $D$  por  $f$  seguirá siendo transversal y cada vez más cercana a  $p$ . Dado que localmente se tiene una norma adaptada y se sabe que iterando hacia al futuro todo se hace cada vez más “vertical”, se sabe también que en algún momento, un iterado de  $D$  será lo que se le llamó anteriormente una variedad casi vertical. A partir de ahí, por lo menos parece bastante intuitivo el resultado final.  $\square$

Vale observar que todo lo expuesto para puntos fijos hiperbólicos vale también para puntos periódicos.

**Definición 2.2.3.** Un punto  $p$  es periódico hiperbólico para  $f$  si existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $p$  es fijo hiperbólico para  $f^k$ . Le definimos sus variedades estables e inestables como las variedades estables de  $p$  para  $f^k$

Se desprende de la definición que valen todos los teoremas enunciados cambiando puntos fijos por periódicos y las demostraciones son análogas.

## 2.3. Conjuntos Hiperbólicos

La idea de punto periódico hiperbólico, se extiende a lo que se le llamará conjuntos hiperbólico.

### 2.3.1. Definiciones

**Definición 2.3.1.** Sea  $f : M \rightarrow M$  difeomorfismo  $C^r$  con  $M$  variedad riemanniana y  $\Lambda \subset M$   $f$ -invariante. Se dirá que es *hiperbólico* para  $f$  si es posible escribir  $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$  donde  $E^s, E^u$  son dos subfibrados  $Df$  invariantes y existen  $C > 0$  y  $0 < \lambda < 1$  tal que  $\forall n > 0$

$$\|Df^n|_{E^s}\| \leq C\lambda^n \quad \text{y} \quad \|Df^{-n}|_{E^u}\| \leq C\lambda^n$$

*Observación 2.3.1.* Dado que todas las normas de  $R^n$  son equivalentes y la variedad es compacta se ve que ser hiperbólico no depende de la métrica de la variedad, de hecho lo único que modifica un cambio de métrica es la constante  $C$ . Se probará que existe una métrica para la cual  $C = 1$  (posiblemente cambiando el valor de  $\lambda$ ).

*Observación 2.3.2.* Si se tiene  $\mathcal{O}(p) = \{p, f(p), \dots, f^{n-1}(p)\}$  una órbita periódica hiperbólica, el conjunto  $\mathcal{O}(p)$  es un conjunto hiperbólico y la descomposición es la misma que como punto periódico hiperbólico. Más aún, dado que la descomposición es única por estar caracterizada por el decrecimiento exponencial de sus vectores tangentes, si en un conjunto hiperbólico hay un punto periódico, entonces este debe ser hiperbólico y su descomposición coincidir con la del conjunto.

Un resultado importante que será utilizado a lo largo del trabajo permite caracterizar el decrecimiento exponencial por medio de una propiedad más débil pero que en algunos momentos resulta ser lo ideal para contradecir la hiperbolicidad (u otras formas de decrecimiento exponencial por el absurdo).

**Proposición 2.3.1.** *Sea  $\Lambda$  un conjunto compacto invariante cuyo tangente se descompone como  $T_\Lambda M = E \oplus F$  con  $E, F$  subfibrados invariantes por  $Df$  y además se cumple que  $\exists m \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $\forall x \in \Lambda \exists 0 < k_1(x) \leq m$  tal que  $\|Df^{k_1}|_{E(x)}\| < \frac{1}{2}$  y  $\exists 0 < k_2(x) \leq m$  tal que  $\|Df^{-k_2}|_{F(x)}\| < \frac{1}{2}$  entonces  $\Lambda$  es hiperbólico. Además, vale el recíproco.*

DEMOSTRACIÓN. El recíproco vale trivialmente (basta elegir  $m$  de forma tal que  $C\lambda^m < \frac{1}{2}$ ).

La prueba es sencilla. Se desea probar que  $Df$  contrae exponencialmente en el subfibrado  $E$  (el caso de  $F$  es análogo).

La clave de la demostración es observar que

$$\|Df^n|_{E(x)}\| \leq \|Df^k|_{E(x)}\| \|Df^{n-k}|_{E(f^k(x))}\| \leq \frac{1}{2} \|Df^{n-k}|_{E(f^k(x))}\|$$

donde  $0 < k(x) \leq m$ . Entonces, para un  $n$  cualquiera, si  $n - k(x) \geq m$  se puede aplicar el mismo procedimiento para  $f^{n-k(x)}$ . Esto se puede realizar al menos  $\left[\frac{n}{m}\right]$  (parte entera de  $n/m$ ) veces concluyendo que

$$\|Df^n|_{E(x)}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n}{m}\right]} \|Df^{n-l}|_{E(f^{n-l}(x))}\|$$

con  $l \in \mathbb{Z}^+$  y  $n - l \leq m$ .

Y con la siguiente cota

$$\|Df^{n-l}|_{E(f^{n-l}(x))}\| \leq \text{máx}\{\|Df^i|_{E(y)}\| : y \in \Lambda ; 0 < i \leq m\} = C_0$$

se tiene la siguiente acotación

$$\|Df^n|_{E(x)}\| \leq C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\frac{n}{m}\right]} \leq C_0 \lambda^n$$

donde  $\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m}}$ .

□

*Observación 2.3.3.* Lo interesante de esta proposición es que ahora, suponer que un conjunto con dos subfibrados invariantes no es hiperbólico es equivalente a decir que  $\forall m \in \mathbb{Z}^+$  existe un punto  $x_m \in \Lambda$  de forma tal que

$$\|Df^i|_{E(x_m)}\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall 0 < i \leq m$$

ó

$$\|Df^{-i}|_{F(x_m)}\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall 0 < i \leq m$$

Si  $\Lambda$  es compacto, se puede considerar  $x$  de acumulación de  $x_m$  para el cual valdrá

$$\|Df^n|_{E(x)}\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 0$$

◇

En particular, se probó el siguiente Lema que será de utilidad en el trabajo.

**Lema 2.3.2.** *Si un subfibrado invariante  $E$  no es hiperbólico en un conjunto compacto, entonces  $\exists x$  de forma tal que*

$$\|Df^n|_{E(x)}\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 0$$

### 2.3.2. Propiedades Básicas de los conjuntos hiperbólicos.

**Proposición 2.3.3.**  $E_x^s$  y  $E_x^u$  dependen continuamente de  $x$  y su dimensión es localmente constante.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que  $M \subset \mathbb{R}^N$  donde tenemos una noción clara de convergencia de subespacios. Sea  $x_n \rightarrow x$  en  $M$  y  $\{w_1^{(n)}, \dots, w_{k_n}^{(n)}\}$  base ortonormal de  $E_{x_n}^s$ .

Tomando subsucesiones, podemos suponer tanto que  $k_n = k$  constante y que  $w_i^{(n)} \rightarrow w_i \subset T_x M$ . Es sencillo verificar que  $\{w_1, \dots, w_k\}$  es un conjunto ortonormal contenido en  $E_x^s$  (basta verificar, intercambiando límites, que los vectores  $w_i$  decrecen exponencialmente en norma por  $Df^n$ ).

Para ver que  $E_x^s$  está generado por esos vectores, basta tomar bases ortonormales de  $E_{x_n}^u$  de forma que complementen a  $\{w_1^{(n)}, \dots, w_k^{(n)}\}$ . Con los mismos argumentos (volviendo a tomar subsucesiones si es necesario) se llega a que esos vectores convergen a vectores de  $E_x^u$  y por un argumento dimensional se concluye la tesis.

□

**Definición 2.3.2.** Dado un punto periódico hiperbólico  $p$ , se dice que tiene *índice*  $k$  si  $k = \dim(E_p^u)$ . Al conjunto de puntos periódicos de índice  $j$  de  $f$  se le denotará  $\text{Per}_j(f)$

*Observación 2.3.4.* De la proposición juntamente con la observación 2.3.2 se deduce que si  $\Lambda$  es un compacto transitivo y hay dos puntos periódicos hiperbólicos en  $\Lambda$  de diferente índice entonces  $\Lambda$  no puede ser un conjunto hiperbólico. Esto se debe a que la descomposición debe coincidir con la descomposición como punto periódico, pero la dimensión de los subfibrados es localmente constante (y como los subfibrados son invariantes y el conjunto transitivo, deben coincidir las dimensiones en ambos puntos periódicos).

◇

*Observación 2.3.5.* La proposición anterior permite afirmar que si  $\Lambda$  es hiperbólico entonces  $\bar{\Lambda}$  también lo será considerando su descomposición de forma obvia. En general se considerarán conjuntos hiperbólicos compactos.

**Proposición 2.3.4.** Existe una métrica donde se puede elegir  $C = 1$ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración es muy parecida a la ya vista para el caso lineal en la proposición 2.2.2. Se considera  $n_0$  tal que  $C\lambda^{n_0} < 1$  y consideremos la métrica en  $E^s$  dada por

$$\langle v, w \rangle_1 = \sum_{n=0}^{n_0-1} \langle Df_x^n v, Df_x^n w \rangle$$

Luego, haciendo lo mismo para  $E^u$  y tomando la suma tenemos una métrica que cumple lo deseado. Se observa que esta métrica hace que  $E_x^s \perp E_x^u \forall x \in \Lambda$  pero es solamente continua pues los fibrados varían continuamente y no necesariamente  $C^r$ . Tomando una métrica  $C^\infty$  cerca de esta se seguirá cumpliendo la tesis pero no necesariamente los subespacios invariantes sean perpendiculares (aunque si van a encontrarse suficientemente “separados”).

□

La definición que se introdujo de conjunto hiperbólico es en muchos casos difícil de verificar, algunas definiciones que se introducirán a continuación van a permitir caracterizar los conjuntos hiperbólicos de una forma en algunos casos más sencilla. En particular, van a permitir verificar su robustez en la topología  $C^1$ .

**Definición 2.3.3.**  $C \subset T_x M$  es un *cono* si  $\exists B_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  forma cuadrática no degenerada tal que  $C = \{0\} \cup \{v : sg(B_x(v)) = \text{constante}\}$ . Le llamamos dimensión del cono a la dimensión de el mayor subespacio contenido en  $C$ .

Se tiene la siguiente equivalencia para conjuntos hiperbólicos:

**Teorema 2.3.5.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  difeomorfismo  $C^1$  y  $\Lambda \subset M$  compacto e invariante entonces son equivalentes:*

1)  $\Lambda$  es hiperbólico.

2)  $\forall x \in \Lambda$  existen conos  $C_x^s, C_x^u$  y existen constantes  $n_0 > 0$  y  $\mu > 1$  tal que:

(i)  $Df_x^{n_0}(C_x^u) \subset C_{f^{n_0}(x)}^u$  y  $Df_x^{-n_0}(C_x^s) \subset C_{f^{-n_0}(x)}^s$

(ii)  $\|Df_x^{n_0}v\| > \mu\|v\|$  si  $v \in C_x^u$  y  $\|Df_x^{-n_0}v\| > \mu\|v\|$  si  $v \in C_x^s$ .

(iii) Las dimensiones de los conos son complementarias (suman la dimensión de  $M$ ) y son constantes en las trayectorias.

Este teorema permite demostrar algunas propiedades de los conjuntos hiperbólicos:

**Corolario 2.3.6.** *Sea  $\Lambda$  compacto e hiperbólico para  $f : M \rightarrow M$  difeomorfismo  $C^1$  entonces, existe  $U$  abierto entorno de  $\Lambda$  y  $\mathcal{U}(f)$  entorno  $C^1$  de  $f$  tal que si  $K \subset U$  compacto invariante para  $g \in \mathcal{U}$  entonces  $K$  es hiperbólico para  $g$ .*

**Definición 2.3.4.**  $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$  es un *difeomorfismo de Anosov* si  $M$  es un conjunto hiperbólico para  $f$ .

A partir del Teorema anterior, resultados que serán mencionados y resultados de Franks en [F1] se cumple el siguiente Teorema que será utilizado en el trabajo.

**Teorema 2.3.7.**  $f$  es Anosov  $\Rightarrow$

1. Existe un abierto  $\mathcal{U}(f)$  donde todo difeomorfismo es de Anosov
2.  $f$  es estructuralmente estable
3. En  $\mathbb{T}^2$  es transitivo.

Otra consecuencia del teorema 2.3.5 es la expansividad del difeomorfismo en los conjuntos hiperbólicos, pero para eso es necesario trabajar un poco más, utilizando funciones de Lyapunov. La expansividad también puede ser vista como consecuencia del Teorema de la variedad estable como se verá más adelante.

Para completar la introducción a la teoría hiperbólica se enunciarán un par de teoremas importantes en la teoría (ver [Sh2] o [KH]).

**Definición 2.3.5.** La *variedad estable local* de un punto  $x$  es

$$W_\beta^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \beta \forall n \geq 0\}$$

La *variedad estable* de un punto  $x$  es

$$W^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ con } n \rightarrow +\infty\}$$

Análogamente se definen las *variedades inestables*  $W_\beta^u(p, f) = W_\beta^s(p, f^{-1})$  y  $W^u(p, f) = W^s(p, f^{-1})$ .

Vale observar la simetría en las definiciones que implica que si  $x \in W_\beta^s(y) \Rightarrow y \in W_\beta^s(x)$  y que  $y \in W^s(x) \Rightarrow W^s(x) = W^s(y)$ .

**Teorema 2.3.8 (Variedad Estable).** Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $C^r$  y  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico.  $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$  la descomposición hiperbólica del tangente. Entonces,  $\exists \beta > 0$  tal que  $\forall x \in \Lambda$   $W_\beta^s(x)$  es una subvariedad encajada de clase  $C^r$  en  $M$  que cumple que  $T_p W_\beta^s(x) = E_x^s$  y  $W_\beta^s(x) \subset W^s(p)$ . Además, estas variedades varían continuamente en subconjuntos compactos al variar  $f$  y  $x$ .

Las variedades varían continuamente, en caso que  $W_\varepsilon^s \cap W_\varepsilon^u \subset \Lambda, \forall x, y \in \Lambda$  se dirá que el conjunto presenta *estructura de producto local* (está claro que con  $\varepsilon$  pequeño, si existe el corte, es en a lo sumo un punto). En el caso Anosov, estas variedades definen foliaciones estables e inestables  $\mathcal{F}^s$  y  $\mathcal{F}^u$ .

**Corolario 2.3.9.** *Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico cerrado e invariante para un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ . Entonces,  $f$  es expansivo en  $\Lambda$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\varepsilon$  de forma tal que si se cortan variedades estables e inestables de tamaño  $\varepsilon$  lo hacen en a lo sumo un punto, si  $\sup_n d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$  entonces  $x \in W_\varepsilon^s(y)$  y  $x \in W_\varepsilon^u(y)$  y por lo tanto  $x = y$ . □

La hiperbolicidad tiene una propiedad muy importante de sombreado (Shadowing Lemma) que enunciaremos a continuación. Esta permite entre otras cosas probar la densidad de los puntos periódicos en un conjunto hiperbólico (con algunas propiedades) y además es pieza clave para encontrar conjugaciones para difeomorfismos cercanos (y probar la estabilidad estructural).

**Proposición 2.3.10 (Shadowing Lemma).** *Sea  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico cerrado para  $f : M \rightarrow M$  difeomorfismo  $C^r$ . Si  $\Lambda$  tiene estructura de producto local entonces para todo  $\beta > 0$  existe  $\alpha > 0$  de forma tal de que toda  $\alpha$ -pseudo órbita ( $d(x_{n+1}, f(x_n)) \leq \alpha$ ) es  $\beta$ -sombreada por una órbita de  $\Lambda$  (es decir que existe  $y \in \Lambda$  tal que  $d(f^n(y), x_n) < \beta$ ).*

Un teorema muy importante de esta teoría (de la hiperbolicidad uniforme) es el que sigue y da propiedades de los difeomorfismos que satisfacen el Axioma A (nombre que viene del artículo de Smale [Sm2]). Este teorema es de gran importancia pues muestra como en presencia de hiperbolicidad la dinámica se descompone en piezas básicas que contienen a todos los puntos con formas de recurrencia y permite reducir el estudio de la dinámica al estudio de estos conjuntos. En [Sh2] se estudian generalizaciones de esta descomposición a difeomorfismos u homeomorfismos más generales pero no se obtienen resultados tan completos como éste.

**Definición 2.3.6.** Un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  es *Axioma A* si cumple que  $\overline{\text{Per } f} = \Omega(f)$  y  $\Omega(f)$  es un conjunto hiperbólico<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Recordar que  $\Omega(f)$  es el conjunto de los puntos *no errantes* de  $f$ , es decir,

$$\Omega(f) = \{x \in X : \forall U \text{ entorno de } x \exists n \text{ tal que } f^n(U) \cap U \neq \emptyset\}$$

*Observación 2.3.6.* Está claro, que gracias al Shadowing Lemma, si se tiene un conjunto hiperbólico con estructura de producto local también se cumple que el conjunto recurrente por cadenas  $\mathcal{R}(f)$  (son los puntos tales que para todo  $\varepsilon > 0$  existe una  $\varepsilon$ -pseudoorbita, o también llamada  $\varepsilon$ -cadena, de  $x$  a  $x$ ) también cumple  $\overline{\text{Per}(f)} = \mathcal{R}(f)$ . Esto resulta más general pues en general se puede dar que las inclusiones  $\overline{\text{Per}(f)} \subset \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$  sean estrictas (ver [Sh2]).

◇

**Teorema 2.3.11 (Descomposición Espectral).** *Si  $f$  es Axioma A entonces se puede descomponer  $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_N$  donde los  $\Lambda_j$  son disjuntos invariantes compactos y transitivos. Además, cada  $\Lambda_j = \Lambda_{j_1} \cup \dots \cup \Lambda_{j_k}$  donde los  $\Lambda_{j_k}$  son disjuntos y cíclicos ( $f(\Lambda_{j_i}) = \Lambda_{j_{i+1}}$  por lo tanto, invariantes por  $f^k$ ) y además,  $f^k$  es topológicamente mixing<sup>2</sup> en  $\Lambda_{j_i}$ .*

ESBOZO DE DEMOSTRACIÓN. La idea es considerar la siguiente relación de equivalencia en los puntos periódicos:  $p_1 \sim p_2$  si  $W^s(p_1) \cap W^u(p_2) \neq \emptyset$  y  $W^s(p_2) \cap W^u(p_1) \neq \emptyset$ . Llamemos  $X_i$  a las clases de equivalencia y  $H_i$  a sus clausuras. No es difícil probar que los conjuntos  $H_i$  son finitos y disjuntos. Luego, utilizando el  $\lambda$ -lemma se pueden probar el resto de las afirmaciones (ver [Sh2]).

□

Los difeomorfismos Axioma A no sólo son importantes por cumplir este teorema que da importante información sobre la dinámica y sobre que conjuntos se han de estudiar. Además, sumándoles algunas hipótesis son los únicos difeomorfismos  $C^1$  estructuralmente estables (ver [M4]), es decir, si los perturbamos en la topología  $C^1$  se mantienen conjugados (iguales a menos de un cambio de coordenadas). Un ejemplo de difeomorfismos Axioma A (y estructuralmente estables) son los difeomorfismos de Anosov (donde toda la variedad es un conjunto hiperbólico).

## 2.4. Alternativas a la hiperbolicidad

La hiperbolicidad permite tener una descripción de la dinámica de un difeomorfismo a partir del estudio de su derivada. Se vio como para un punto periódico, la hiperbolicidad brinda mucha información acerca del comportamiento de la dinámica localmente, esto

---

<sup>2</sup>Un homeomorfismo es *topológicamente mixing* si para todos  $U$  y  $V$  abiertos, existe  $n_0$  tal que para todo  $n > n_0$  se cumple que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .



a partir del teorema de Hartman (2.2.1). Cuando un difeomorfismo es hiperbólico, se tiene una información de su dinámica mucho más rica y global y esto se debe a que a la información que se tenía de los puntos periódicos, se le agrega una descripción clara de que puntos se acompañaran tanto en el presente como en el futuro teniendo una comprensión importante de las variedades invariantes (ver teorema 2.3.8).

Hay dinámicas hiperbólicas de estudio sencillo, ese es el caso de los difeomorfismos de Morse-Smale, en los cuales el conjunto no errante es finito (por lo cual la hiperbolicidad no resulta muy exigente) y por lo tanto la dinámica queda (esencialmente) dada por el comportamiento local en los puntos periódicos (el no errante) y por el conocimiento que todos los puntos errantes morirán eventualmente en alguna órbita periódica.

Sin embargo, la hiperbolicidad resulta ser un requerimiento muy exigente cuando el conjunto no errante es mayor, de hecho, existen conjuntos abiertos de difeomorfismos en los cuales no hay hiperbolicidad (ver [AS], también se presentarán ejemplos en el capítulo 4). Un impedimento de la hiperbolicidad (que es el que se tratará en este trabajo) es la existencia de puntos periódicos con diferente índice en las mismas “piezas” (entendiendo piezas como conjuntos dinámicamente conectados). Ese fenómeno, impide la elección de fibrados estables e inestables en el tangente como fue explicado en la Observación 2.3.4.

### 2.4.1. Descomposición Dominada

Se pretende en esta sección introducir el concepto de descomposición dominada y mostrar algunas de sus propiedades básicas más interesantes, en particular comparándolas con las propiedades ya conocidas para conjuntos hiperbólicos. La exposición está fundamentalmente basada en [BDV] y [PS3].

De todas las generalizaciones (desde el punto de vista de estudiar la dinámica de un difeomorfismo a partir de su aplicación tangente) de la hiperbolicidad esta resulta ser la más general. La descomposición dominada, esencialmente pide que el fibrado tangente se pueda dividir en subfibrados invariantes por la derivada del difeomorfismo para los cuales se cumpla una condición de “dominación” que se expresará en la siguiente definición.

**Definición 2.4.1.** Sea  $f : M \rightarrow M$  difeomorfismo  $C^1$  y  $\Lambda \subset M$  un subconjunto invariante. Se dice que una descomposición de  $T_\Lambda M = E \oplus F$  es una *descomposición dominada* sii es  $Df$  invariante, las dimensiones de los fibrados son constantes<sup>3</sup> y además se cumple que existe un valor  $n > 0$  de forma tal que

---

<sup>3</sup>Esta no es la definición más general, ver [BDV].

$$\|Df_x^n|_{E(x)}\| \left\| Df_{f^n(x)}^{-n}|_{F(f^n(x))}\right\| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in \Lambda$$

*Observación 2.4.1.* La definición es equivalente a pedir que exista  $n$  tal que  $\forall s \in E$  y  $u \in F$  de norma 1 se cumpla que:

$$\frac{\|Df^n s\|}{\|Df^n u\|} < \frac{1}{2}$$

Además, teniendo en cuenta que si se toma  $s$  y  $u$  de forma tal que  $\|Df^{-n} s\| = \|Df^{-n} u\| = 1$  tenemos que

$$\frac{\|s\|}{\|u\|} = \frac{\|Df^n Df^{-n} s\|}{\|Df^n Df^{-n} u\|} < \frac{1}{2}$$

por lo tanto es también equivalente a que para todos  $\|s\| = \|u\| = 1$  se cumpla que

$$\frac{\|Df^{-n} u\|}{\|Df^{-n} s\|} < \frac{1}{2}$$

◇

A partir de esta observación, se probará la unicidad de la descomposición dominada fijada la dimensión de esta.

**Proposición 2.4.1.** *Si  $T_\Lambda M = E \oplus F$  descomposición dominada con  $\dim E = k$ . Entonces,*

*$s \in E \Leftrightarrow$  fijados  $k + 1$  vectores *l.i.* existe uno de ellos  $w$  de forma tal que existe  $n_0$  que cumple que si  $n > n_0$*

$$\frac{\|Df^n s\|}{\|Df^n w\|} < \frac{1}{2}$$

Es importante notar como esta Proposición caracteriza el subespacio  $E$  (análogamente  $F$  hacia el pasado) dado que indica como el subespacio  $E$  es el de los vectores que crecen más lento que los que no se encuentran en  $E$ .

DEMOSTRACIÓN. ( $\Rightarrow$ ) fijados  $k + 1$  vectores *l.i.* tiene que existir por lo menos 1, que se le llamará  $w$  de forma tal que  $w = w_E + w_F$  y  $w_F \neq 0$ . Por la descomposición dominada, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0(\varepsilon)$  de forma tal que si  $n > n_0$  vale que

$$\frac{\|Df^n s\|}{\|Df^n w_F\|} < \varepsilon$$

Al mismo tiempo, para existe un valor de  $m_0$  de forma tal que si  $m > m_0$

$$\frac{\|Df^m w_E\|}{\|Df^m w_F\|} < \frac{1}{2} \Rightarrow \|Df^m w\| \geq \frac{1}{2} \|Df^m w_F\|$$

pues  $\|Df^m w\| \geq \| \|Df^m w_F\| - \|Df^m w_E\| \|$ . Considerando entonces,  $k_0 = \max\{m_0, n_0(1/4)\}$  se cumple que

$$\frac{\|Df^{k_0} s\|}{\|Df^{k_0} w\|} \leq 2 \frac{\|Df^{k_0} s\|}{\|Df^{k_0} w_F\|} \leq 2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

( $\Leftarrow$ ) Supongamos  $s \notin E$  entonces  $s = s_E + s_F$  con  $s_F \neq 0$ . Por lo tanto, si  $\{e_1, \dots, e_k\}$  es una base de  $E$ , entonces  $\{e_1, \dots, e_k, s\}$  será un conjunto *l.i.*. Pero por la cuenta realizada en el directo se observa fácilmente que esto es un absurdo pues

$$\frac{\|Df^n s\|}{\|Df^n e_i\|} \geq 2 \quad \forall n > n_i$$

y además,

$$\frac{\|Df^n s\|}{\|Df^n s\|} = 1 \quad \forall n > 0$$

□

También es interesante el siguiente Lema, que si bien no será utilizado, su recíproco jugará un rol fundamental en la prueba del Teorema 1.0.2.

**Lema 2.4.2.** *Si  $T_\Lambda M = E \oplus F$  es una descomposición dominada, entonces, el ángulo entre  $E$  y  $F$  está uniformemente lejos de 0.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que si  $s \in E$ ,  $u \in F$  de norma 1 se cumple que  $\|s - u\|$  está acotado lejos de 0 (observar que el seno del ángulo entre  $E$  y  $F$  está dado por  $\|s - u\|/2$ ).

Si por absurdo se supone que no es cierto, existirán  $s_n \in E(x_n)$  y  $u_n \in F(x_n)$  de norma 1 y de forma tal que  $\|s_n - u_n\| \rightarrow 0$ .

Como la derivada de  $f$  se encuentra acotada ( $M$  es una variedad compacta), se tiene que para todo  $m > 0$  existe  $\varepsilon(m) > 0$  de forma tal que si  $\|v - w\| < \varepsilon$  entonces

$$\frac{1}{2} < \frac{\|Df^k(v)\|}{\|Df^k(w)\|} < 2 \quad \forall 0 \leq k \leq m$$

lo cual contradice la dominación pues dado  $l > 0$  podemos encontrar  $s_n \in E(x_n)$  y  $u_n \in F(x_n)$  de norma 1 de forma tal que  $\|s_n - u_n\| < \varepsilon(l)$  y por lo tanto

$$\frac{1}{2} < \frac{\|Df^k(s_n)\|}{\|Df^k(u_n)\|} < 2 \quad \forall 0 \leq k \leq l$$

contradiciendo la dominación. □

Como en el caso hiperbólico, se tiene una forma alternativa de caracterizar el decrecimiento exponencial (ver Proposición 2.3.1) que también será de utilidad. Lo explicado en la Observación 2.3.3 vale en este caso también haciendo las modificaciones necesarias.

**Proposición 2.4.3.** *Sea  $\Lambda$  un conjunto compacto invariante cuyo tangente se descompone como  $T_\Lambda M = E \oplus F$  con  $E, F$  subfibrados invariantes por  $Df$  y además se cumple que  $\exists m \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $\forall x \in \Lambda \exists 0 < k(x) \leq m$  tal que  $\|Df^k|_{E(x)}\| \|Df^{-k}|_{F(x)}\| < \frac{1}{2}$  entonces la descomposición de  $\Lambda$  dominada. Además, vale el recíproco.*

DEMOSTRACIÓN. El recíproco es la definición de descomposición dominada.

La prueba es muy similar al caso hiperbólico.

De nuevo se observa que

$$\begin{aligned} \|Df^n|_{E(x)}\| \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| &\leq \|Df^k|_{E(x)}\| \|Df^{-k}|_{F(f^n(x))}\| \|Df^{n-k}|_{E(f^k(x))}\| \|Df^{-n+k}|_{F(f^{-n+k}(x))}\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|Df^{n-k}|_{E(f^k(x))}\| \|Df^{-n+k}|_{F(f^{-n+k}(x))}\| \end{aligned}$$

donde  $0 < k(x) \leq m$  entonces, si  $n - k(x) > m$  se aplica el mismo razonamiento para  $f^{n-k(x)}(x)$ . Esto se puede realizar  $\lceil \frac{n}{m} \rceil$  (parte entera de  $n/m$ ) veces concluyendo que

$$\|Df^n|_{E(x)}\| \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\lceil \frac{n}{m} \rceil} \|Df^{n-l}|_{E(f^{n-l}(x))}\| \|Df^{-n+l}|_{F(f^{-n+l}(x))}\|$$

con  $l \in \mathbb{Z}^+$  y  $n - l \leq m$ .

Es sencillo entonces acotar (ver la demostración de la Proposición 2.3.1)

$$\|Df^{n-l}|_{E(f^{n-l}(x))}\| \|Df^{-n+l}|_{F(f^{-n+l}(x))}\| \leq \max\{\|Df^i|_{E(y)}\| \|Df^{-i}|_{F(f^i(y))}\| : y \in \Lambda; 0 < i \leq m\} = C_0$$

Y tomando  $n$  suficientemente grande (independiente de  $x$ ) se tiene

$$\|Df^n|_{E(x)}\| \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| \leq C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\lceil \frac{n}{m} \rceil} \leq \frac{1}{2}$$

□

Otra propiedad que se hereda del caso hiperbólico es la continuidad de la descomposición y el pasaje de la descomposición a la clausura de un conjunto. Esta propiedad será de gran utilidad en el transcurso del trabajo.

**Proposición 2.4.4.** *Los fibrados  $E(x)$  y  $F(x)$  varían continuamente en  $\Lambda$ . Además, es posible extender la descomposición a  $\overline{\Lambda}$  de forma de que continúe siendo dominada.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $x \in \overline{\Lambda}$  y  $x_n \in \Lambda$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Se puede (tomando subsucesiones) asumir que los subespacios  $E(x_n)$  y  $F(x_n)$  convergen a subespacios  $E(x)$  y  $F(x)$  con iguales dimensiones (por ejemplo tomando bases ortonormales y viendo que convergen). Si se toma  $s \in E(x)$  y  $u \in F(x)$ , tomando sucesiones  $s_m \in E(x_m)$  y  $u_m \in F(x_m)$  que converjan a  $s$  y  $u$ , se llega entonces a que

$$\frac{\|Df_x^n s\|}{\|Df_x^n u\|} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\|Df_{x_m}^n s_m\|}{\|Df_{x_m}^n u_m\|} < \frac{1}{2}$$

Lo cual caracteriza a  $E$  por lo visto en la Proposición 2.4.1 (de donde se deduce que no depende de la sucesión  $x_m$ ) y por un argumento análogo  $F$  también está bien definido.

□

Otra propiedad importante de los difeomorfismos que presentan descomposición dominada es que esta es persistente frente a perturbaciones. Para ser más precisos, vale la siguiente proposición:

**Proposición 2.4.5.** *Sea  $\Lambda$  un conjunto  $f$ -invariante con descomposición dominada, entonces, para todo  $\varepsilon$  existe un entorno  $U$  de  $\Lambda$  y un entorno  $C^1$   $\mathcal{U}$  de  $f$  tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$  el conjunto invariante maximal de  $g$  en  $\overline{U}$  admite una descomposición dominada. En particular, si  $\Lambda = M$  el conjunto invariante maximal será siempre  $M$ .*

La descomposición dominada resulta una herramienta útil en el estudio de la dinámica. Sin embargo, a diferencia de la hiperbolicidad, en este caso no se cuenta con la poderosa herramienta que resultan ser las variedades estables e inestables para el estudio de propiedades globales de la dinámica de difeomorfismos. Lo más parecido con lo que se cuenta es con los Teoremas de Hirsh-Pugh-Shub ([HPS]) que dan integrabilidad local de los subfibrados (sin unicidad) obteniendo variedades localmente invariantes pero sin poseer necesariamente propiedades dinámicas. A pesar de ser mucho más débiles, pueden ser útiles en algunos contextos (ver por ejemplo [Less]).

Es importante también resaltar, que a pesar de que la descomposición dominada no da mucha información acerca de la dinámica, en [PS5] se demuestra un análogo al Teorema de Descomposición Espectral (Teorema 2.3.11) para difeomorfismos  $C^2$  con descomposición dominada en superficies.

Valen muchas versiones de teoremas vistos para hiperbolicidad en este contexto con algunas modificaciones, en particular, a veces es útil la caracterización mediante familias de conos (Teorema 2.3.5). Estos resultados no serán utilizados, el lector interesado puede recurrir a [Less].

## 2.4.2. Hiperbolicidad a partir de descomposición dominada

En esta sección se probará un resultado que ilumina un camino para conseguir hiperbolicidad cuando se cuenta con descomposición dominada en una variedad (o en un subconjunto compacto e invariante)<sup>4</sup>. El resultado es el Lema 3.1.1. de [PS1] y permite a partir de la Proposición 2.3.1 desprenderse de la necesidad de encontrar decaimiento exponencial por parte del diferencial.

**Proposición 2.4.6.** *Sea  $\Lambda$  compacto invariante que admite descomposición dominada  $T_\Lambda M = E \oplus F$  y tal que para todo  $x \in \Lambda$  vale que  $\|Df^n|_{E(x)}\| \rightarrow 0$  y  $\|Df^{-n}|_{F(x)}\| \rightarrow 0$  entonces  $\Lambda$  es hiperbólico.*

Es interesante mencionar que para probar resultado se utiliza solamente la descomposición y en ningún momento se utiliza la dominación. La prueba es idéntica al Lema 2.3.2 y además, se puede considerar como una consecuencia directa de ese Lema, pero se presenta la prueba por utilizar ideas que se reiteraran varias veces en el trabajo.

DEMOSTRACIÓN. La clave es que a partir de la Proposición 2.3.1 y la Observación 2.3.3 se ve que si  $\Lambda$  no es hiperbólico entonces  $\forall m \in \mathbb{Z}^+$  existe  $x_m \in \Lambda$  de forma tal que (suponiendo que no contrae exponencial en  $E$ , en  $F$  es análogo):

$$\|Df^i|_{E(x_m)}\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall 0 < i \leq m$$

Tomando subsucesiones si es necesario se puede suponer que  $x_m \rightarrow x$  y  $E(x_m) \rightarrow E(x)$  y esto resultará absurdo pues

$$\|Df^n|_{E(x)}\| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|Df^n|_{E(x_m)}\| \geq \frac{1}{2}$$

llegando a un absurdo y concluyendo la prueba.

---

<sup>4</sup>Agradezco a José Vieitez por hacerme notar esto.



# Capítulo 3

## Transitividad Robusta en Superficies

### 3.1. Introducción

En este capítulo se demostrará el Teorema 1.0.2 que asegura que un difeomorfismo  $C^1$ -robustamente transitivo en una superficie ha de ser un difeomorfismo de Anosov (en el toro  $\mathbb{T}^2$ ).

Se verá en el próximo capítulo como es posible encontrar difeomorfismos robustamente transitivos y robustamente no hiperbólicos al mismo tiempo. De hecho, hay ejemplos conocidos con esta propiedad en variedades de dimensión mayor o igual a 3.

Esta sección es la más complicada del trabajo y tiene partes bastante técnicas. Para aliviar eso, se intentó incluir previo a las demostraciones alguna idea central de forma tal que en una primera leída esos argumentos permitan continuar la lectura sin necesidad de entender (o incluso leer) la demostración por completo. Para eso se buscó en algunos casos dar la idea general y en otros mostrar la idea en un contexto más sencillo donde se pueda entender geoméricamente.

Antes de comenzar con la prueba del resultado principal, se presenta un resumen de esta:

1. Ser robustamente transitivo implica que los puntos periódicos son robustamente hiperbólicos. Para eso, se utilizará el Lema de Franks (Teorema 3.2.1) observando que un difeomorfismo robustamente transitivo no admite pozos ni fuentes (sección 3.2).
2. A partir del item anterior, se encontrará una descomposición dominada en la clausura de los puntos periódicos de tipo silla y se extenderá a toda la variedad utilizando el Closing Lemma (ver Apéndice A.2). La dificultad de este item es esencialmente



técnica; la idea sin embargo es bien simple, el hecho de que los puntos periódicos sean robustamente hiperbólicos (que entre otras cosas implica que no pueden haber pequeños ángulos entre los subespacios) permitirá extender la descomposición a la clausura de los puntos periódicos (sección 3.3).

3. Como se trabaja en superficies, la descomposición dominada contará con fibrados unidimensionales que podremos integrar utilizando el Teorema de Peano ([Sot]). Se buscarán propiedades dinámicas para estas variedades invariantes probando que efectivamente son estables e inestables. La idea es que si no tienen propiedades dinámicas no habrá contracción en una de las direcciones y la descomposición dominada obligará a que la haya en la otra permitiendo construir variedades estables fuertes. De esa forma se construirán “cajas” que llevarán a un absurdo construyendo conjuntos atractores que violan la transitividad (sección 3.4).
4. El hecho de que sean estables e inestables permitirá probar la hiperbolicidad. La dificultad de este punto se encuentra en que el hecho de que las variedades tiendan a cero no implica que la derivada tienda a cero en su tangente, sin embargo, en caso de que no tienda a cero se podrán encontrar puntos periódicos cercanos, que acompañen a los puntos que no contraen, que se podrán perturbar a pozos o fuentes mediante el Lema de Franks (esto será pues haber acompañado a un punto que no es “hiperbólico” hará que el periódico “herede” esa propiedad y sea fácilmente perturbable contradiciendo la transitividad)(secciones 3.5 y 3.6).

En la sección 3.7 se realizarán comentarios generales sobre otras posibles pruebas y otros resultados vinculados.

Durante todo el capítulo, a menos que se haga referencia, se trabajara con la topología  $C^1$  en  $\mathcal{D}iff^1(M)$ .

## 3.2. $f$ robustamente transitivo $\Rightarrow f \in \mathcal{F}(M)$

**Definición 3.2.1.**  $f \in \mathcal{F}(M) \Leftrightarrow$  todos sus puntos periódicos son hiperbólicos y existe un entorno  $\mathcal{U}(f)$  tal que si  $g \in \mathcal{U}$  entonces todos los puntos periódicos de  $g$  son hiperbólicos.

Para ver que los difeomorfismos robustamente transitivos pertenecen a  $\mathcal{F}(M)$  se realizará la siguiente observación, que si bien es prácticamente evidente, va a ser el argumento fundamental para lograr el objetivo de esta sección.

*Observación 3.2.1.* Si  $f$  es transitivo, entonces,  $f$  no tiene puntos periódicos hiperbólicos atractores (pozos) ni repulsores (fuentes).

Antes de pasar a la prueba, se recuerda que  $\omega(x) = \{y \in M : \exists n_k \rightarrow +\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \rightarrow y\}$  y  $\alpha(x) = \{y \in M : \exists n_k \rightarrow -\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \rightarrow y\}$ .

*Demostración.* Vale recordar que un punto periódico hiperbólico atractor es un punto periódico  $p$  para el cual todos los valores propios de  $Df_p^n$  (donde  $n$  es el período) tienen módulo menor que 1. Sea  $U$  un entorno de dicho punto que cumpla que  $\{U, f(U), \dots, f^{n-1}(U)\}$  sean disjuntos. Aplicando el teorema de Hartman (2.2.1) a  $f^n$  se concluye que existe un  $k_0 \in \mathbb{N}$  de forma que  $f^{kn}(U) \subset U \forall k > k_0$ .

Esto asegura 2 cosas, por un lado, si la órbita de un punto  $x$  entra a  $U$ , entonces  $w(x) = \mathcal{O}(p)$  y por otro lado, si  $\alpha(x) \subset U$  entonces  $x = p$  lo que impide que exista un punto con órbita densa. El argumento se aplica de forma idéntica para repulsores hiperbólicos.

□

Para completar el argumento, se hará uso de un resultado que se encuentra en [F2] (que se volverá a utilizar en reiteradas ocasiones) y cuya demostración se encuentra en el apéndice de este trabajo. El resultado, conocido como “Lema de Franks” es una técnica de perturbación muy fuerte dado que permite realizar perturbaciones en entornos arbitrariamente pequeños y lo interesante es que permite hacerlo en la topología  $C^1$ . El enunciado preciso es el siguiente:

**Teorema 3.2.1 (Lema de Franks [F2]).** *Sea  $f \in \text{Diff}^1(M)$ . Dado  $\mathcal{U}(f)$  entorno  $C^1$  de  $f$ ,  $\exists \mathcal{U}_0(f)$  y  $\varepsilon > 0$  tal que si  $g \in \mathcal{U}_0(f)$ ,  $\theta = \{x_1, \dots, x_m\}$  y*

$$L : \bigoplus_{x_i \in \theta} T_{x_i}M \rightarrow \bigoplus_{x_i \in \theta} T_{g(x_i)}M \quad \text{tal que} \quad \|L - Dg|_{\bigoplus T_{x_i}M}\| < \varepsilon$$

*Entonces, existe  $\tilde{g} \in \mathcal{U}(f)$  tal que  $D\tilde{g}_{x_i} = L|_{T_{x_i}M}$  y si  $R$  es un conjunto compacto disjunto de  $\theta$  se puede considerar  $\tilde{g} = g$  en  $R$ .*

Ahora se puede probar:

**Proposición 3.2.2.**  *$f$  robustamente transitivo en  $M^2 \Rightarrow f \in \mathcal{F}(M)$*

**DEMOSTRACIÓN.** Por ser  $f$  robustamente transitivo,  $\exists \mathcal{U}(f)$  entorno de  $f$  que cumple que si  $g \in \mathcal{U}$  entonces  $g$  es transitivo. En particular, por la Observación 3.2.1 no posee pozos ni fuentes. Utilizando  $\mathcal{U}$  como entorno de  $f$ , el Lema de Franks nos da un abierto  $\mathcal{U}_0$  y un valor de  $\varepsilon > 0$ .

Supongamos entonces que  $f \notin \mathcal{F}(M)$ , entonces, existe  $g \in \mathcal{U}_0$  y  $p \in \text{Per}(g)$  de forma tal que  $p$  no es hiperbólico para  $g$ . Eso significa que  $Dg_p^n : T_pM \rightarrow T_pM$  no es una transformación lineal hiperbólica.

Por no ser hiperbólica, la transformación lineal  $Dg_p^n$  ha de tener al menos un valor propio de módulo 1. Es muy sencillo ver que se puede perturbar la derivada para construir un pozo o una fuente.

Como  $Dg_p^n$  no es hiperbólica, si se compone con una transformación lineal que realice una homotecia (en el caso que haya un valor propio mayor que uno, una homotecia de razón mayor que uno, en cualquier otro caso una de razón menor que uno funciona) de razón arbitrariamente cercana a 1 se logra que la transformación lineal resultante tiene ambos valores propios menores que uno (o mayores en caso que hubiese un valor propio de módulo mayor que uno).

Sea  $h : T_pM \rightarrow T_pM$  esa homotecia, que como fue mencionado, se puede elegir muy cerca de la identidad, en particular, de forma tal que

$$\|h - Id\| < \frac{\varepsilon}{\|Dg_{g^{n-1}(p)}\|}$$

Si consideramos en el Lema de Franks  $\theta = \{g^{n-1}(p)\}$  (el conjunto de puntos que se perturban) y la transformación  $L : T_{g^{n-1}(p)}M \rightarrow T_pM$  dada por  $L = h \circ Dg_{g^{n-1}(p)}$  se ve que

$$\|L - Dg_{g^{n-1}(p)}\| = \|(h - Id)Dg_{g^{n-1}(p)}\| \leq \|h - Id\| \|Dg_{g^{n-1}(p)}\| < \varepsilon$$

y por lo tanto, el Lema de Franks nos asegura que existe  $\tilde{g} \in \mathcal{U}$  para el cual  $p$  es periódico y al mismo tiempo se cumple  $D\tilde{g}_p^n = h \circ Dg_p^n$  lo cual es absurdo pues  $p$  sería un pozo (o una fuente) para  $\tilde{g}$  pero por estar en  $\mathcal{U}$  debería ser transitivo.

□

*Observación 3.2.2.* Si todos los puntos periódicos de  $f$  son hiperbólicos, entonces, hay finitos puntos periódicos de período menor o igual que cierto número.

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que hay infinitos. Entonces, se puede suponer que todos tienen el mismo período (pues tiene que haber infinitos de algún período), digamos  $n_0$ . Pero esto lleva a un absurdo pues si se considera  $p_0$  de acumulación de  $p_n$  (recordar que la superficie es compacta) se puede ver que  $p_0$  será un punto periódico no hiperbólico.

De hecho, tomando cartas locales y una potencia de  $f$ , supongamos que  $p_0$  es el origen en el plano y  $x_n \rightarrow 0$  puntos fijos. Entonces,  $f(x_n) = x_n$  por lo tanto, tomando un vector

$w$  de acumulación de

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} = \frac{f(x_n) - f(0)}{\|x_n - 0\|}$$

se tiene que  $Df_0 w = w$  lo cual es absurdo pues todos los puntos periódicos son hiperbólicos.

◇

### 3.3. $f$ robustamente transitivo $\Rightarrow M$ admite una descomposición dominada

Se presentará una prueba de un resultado que se encuentra en [M2]. La prueba que se dará se basa fundamentalmente en juntar algunas ideas de [PS1], [PS3] y [BDV].

La idea esencialmente está dividida en dos grandes etapas. Por un lado, ver que si un difeomorfismo está en  $\mathcal{F}(M)$  entonces, los ángulos que forman los espacios estables e inestables de sus puntos periódicos se encuentran acotados lejos de cero utilizando de nuevo el Lema de Franks (Teorema 3.2.1). Una vez hecho eso, se pasa a probar tener los ángulos acotados lejos de cero es condición suficiente para tener una descomposición dominada (esto se encuentra probado en [PS1]). Para probar eso, primero se mostrará que los módulos de los valores propios del diferencial en los puntos periódicos se alejan de 1 exponencialmente con el período. Eso volverá a ser útil más adelante.

La ventaja de trabajar en dimensión 2 es la simpleza en algunos argumentos de álgebra lineal, ya que teniendo puntos periódicos de índice uno, los diferenciales van a ser transformaciones lineales diagonalizables con un valor propio de módulo menor que uno y uno mayor.

Antes de empezar, se definirá la noción de ángulo entre subespacios.

**Definición 3.3.1.** Sean  $E, F$  subespacios de  $\mathbb{R}^N$  tal que  $E \oplus F = \mathbb{R}^N$  y sea  $L : E^\perp \rightarrow E$  la única transformación lineal de forma tal que  $F = \text{graf } L = \{v + Lv : v \in E^\perp\}$ . Entonces, se define el ángulo entre  $E$  y  $F$  como  $\text{ang}(E, F) = \|L\|^{-1}$ .

*Observación 3.3.1.* Se toma la transformación lineal  $L : E^\perp \rightarrow E$  y no al revés pues si las dimensiones son diferentes no tendría sentido. Como se va a trabajar en dimensión 2 se considerarán transformaciones  $L : E \rightarrow E^\perp$  donde valdrá  $\text{ang}(E, F) = \|L\|$ .

Es importante observar que si se considera uno de los vectores propios como el  $(0, 1)$  (en alguna base ortonormal, por ejemplo el contractivo) entonces la matriz asociada a  $Df_p^n$  será de la forma:

$$Df_p^n = A = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ K & \lambda \end{pmatrix}$$

donde  $0 < |\lambda| < 1 < |\mu|$ .

Se puede observar que un vector propio asociado a  $\mu$  es  $(1, \frac{K}{\mu-\lambda})$  y por lo tanto el ángulo entre ambos subespacios será dado por la transformación lineal  $L : \langle(0, 1)\rangle \rightarrow \langle(0, 1)\rangle^\perp = \langle(1, 0)\rangle$  dada por  $L((0, 1)) = \frac{\mu-\lambda}{K}(1, 0)$ . La norma de este operador es exactamente  $\frac{\mu-\lambda}{K}$ , lo cual muestra como el ángulo entre ambos subespacios tiende a cero cuando  $K$  se hace muy grande.

Está claro que los valores propios de esa matriz son  $\lambda$  y  $\mu$  que posiblemente se encuentren lejos de tener norma 1, además, es sabido (por el teorema de función implícita) que los valores propios varían continuamente al variar los coeficientes de la matriz (no es relevante especificar en que topología pues son todas equivalentes). Sin embargo, paradójicamente, si se agranda  $K$  lo suficiente, será posible, realizando una perturbación arbitrariamente pequeña, variar sensiblemente los valores propios de la matriz. ¿A qué se debe?, a que los valores propios de  $A$  se calculan como los ceros de  $\det(A - \alpha I) = (\mu - \alpha)(\lambda - \alpha)$  pero si en la matriz  $A$  se agrega una entrada de  $\varepsilon$  donde se tenía un 0, se llega a la matriz:

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mu & \varepsilon \\ K & \lambda \end{pmatrix}$$

los valores propios pasan a ser  $\det(A_\varepsilon - \alpha I) = (\mu - \alpha)(\lambda - \alpha) - K\varepsilon$  que si bien  $\varepsilon$  puede ser muy chico, dejando  $\varepsilon$  fijo (que es el caso que se utilizará, pues el Lema de Franks permite perturbar una cierta constante dada las derivadas) al hacer crecer  $K$  da valores propios arbitrariamente lejos de los iniciales.

Si bien la prueba que se presentará a continuación utiliza esa idea, la demostración es un tanto distinta, debido a que hay que formalizar la idea. Lo que se hará es lo siguiente, teniendo un ángulo pequeño, se encontrará un punto cuya imagen este muy cercana y por lo tanto, componiendo con una transformación lineal pequeña se podrá realizar un valor propio 1, fácilmente perturbable a un pozo o una fuente (ver figura 3.1).

**Lema 3.3.1.** *Sea  $f \in \mathcal{F}(M)$  donde  $M$  es una superficie. Entonces, existe  $\mathcal{U}_0(f)$  entorno  $C^1$  de  $f$  y  $\gamma > 0$  de forma tal que para toda  $g \in \mathcal{U}_0$  y  $p \in \text{Per}(g)$  se cumple:*

$$\text{ang}(E_p^s, E_p^u) > \gamma$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el Lema de Franks a  $f$  y  $\mathcal{U}(f) = \mathcal{F}(M)$  se tiene un entorno  $\mathcal{U}_0$  de  $f$  y un valor  $\varepsilon$ .

Supongamos que el teorema no vale, entonces, se puede considerar un difeomorfismo  $g \in \mathcal{U}_0$  para el cual hay un punto periódico  $p$  que cumple que

$$\text{ang}(E_p^s, E_p^u) < \varepsilon_0$$

donde  $\varepsilon_0$  es suficientemente chico (a ser especificado después). Para aliviar la notación, llamemos  $E = E_p^s$  y  $F = E_p^u$ . Sea  $L : E \rightarrow E^\perp$  con  $\|L\| < \varepsilon_0$  de forma tal que  $F = \text{graf}(L)$ .

Si  $n$  es el período de  $p$ , llamense  $0 < \lambda < 1 < \mu$  a los valores propios de  $A = Dg_p^n$  (se puede, sin pérdida de generalidad, suponer que son todos positivos, pues sino se considera  $f^2$ ).

Dado  $v \in T_p M$  se puede escribir como  $v = \alpha e + \beta f$  donde  $\|e\| = 1$ ,  $e \in E$  y  $f = e + Le$  con lo que  $v = (\alpha + \beta)e + \beta Le$ . Por lo tanto, se tiene que  $Av = (\lambda\alpha + \mu\beta)e + \mu\beta Le$ .

Haciendo cálculos, se llega a que

$$\|v\| = \alpha + \beta + \beta\|L\| \quad \text{y} \quad \|Av\| = \lambda\alpha + \mu\beta + \mu\beta\|L\|$$

y tomando  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \frac{1-\lambda}{(\mu-1)(1+\|L\|)}$  se tiene que ambas normas son iguales. Además, vale observar, que dado que  $\alpha$  y  $\beta$  son positivos, y se supuso que también lo eran  $\lambda$  y  $\mu$ , el ángulo que forman  $v$  y  $Av$  es menor que el que forman  $E$  y  $F$  (el ángulo entre dos vectores está dado por el ángulo entre los subespacios generados por estos).

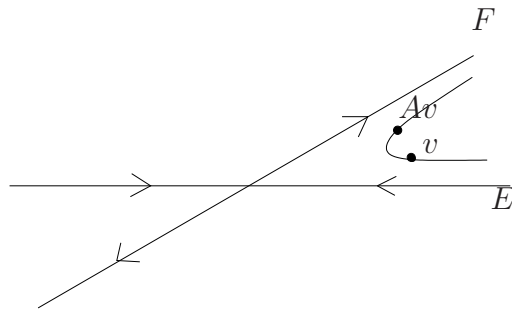


Figura 3.1: Si hay ángulos pequeños, hay puntos cuya imagen está cerca.

Esto muestra (ver figura 3.1), que mediante una pequeña perturbación (componer con una pequeña rotación de ángulo menor que  $\varepsilon_0$  que se puede elegir de forma tal que la perturbación sea menor que el  $\varepsilon$  dado por el Lema de Franks) en la derivada se

podrá hacer que la imagen de  $v$  sea  $v$  logrando un valor propio 1 y llegando por lo tanto a un absurdo.

Por ser  $Av$  y  $v$  de igual norma, existen 2 rotaciones que llevan  $Av$  en  $v$ . Por lo visto (elegimos  $Av$  y  $v$  en el cuadrante de ángulo pequeño entre  $E$  y  $F$ ), el ángulo entre  $Av$  y  $v$  es menor que  $\varepsilon_0$ . Si se considera  $\varepsilon_0$  de forma tal que para todo  $0 \leq \gamma \leq \varepsilon_0$  se cumpla que

$$\|Rot_\gamma - Id\| < \frac{\varepsilon}{\|Dg_{g^{n-1}(p)}\|}$$

Se tiene que para algún  $\gamma \in (0, \varepsilon_0)$  vale que  $Rot_\gamma \circ A(v) = v$  por lo cual  $Rot_\gamma \circ A$  no es hiperbólica.

Si se aplica ahora el Lema de Franks a  $\theta = \{g^{n-1}(p)\}$  y se considera  $L : T_{g^{n-1}(p)}M \rightarrow T_pM$  dada por  $L = Rot_\gamma \circ Dg_{g^{n-1}(p)}$  se ve que

$$\|L - Dg_{g^{n-1}(p)}\| = \|(Rot_\gamma - Id)Dg_{g^{n-1}(p)}\| \leq \|Rot_\gamma - Id\| \|Dg_{g^{n-1}(p)}\| < \varepsilon$$

Obteniendo  $\tilde{g} \in \mathcal{U} = \mathcal{F}(M)$  lo cual es absurdo pues  $p$  no es hiperbólico para  $\tilde{g}$ . □

Ahora, se pasará a probar el siguiente Lema que permitirá probar el resultado principal de esta sección.

**Lema 3.3.2.** *Si  $f \in \mathcal{F}(M)$  existe  $\alpha > 0$  y  $\mathcal{U}_0(f)$  de forma tal que para todo  $p \in \text{Per}_1(g)$ ,  $g \in \mathcal{U}_0(f)$  se cumple que*

$$|\lambda_p| < (1 - \alpha)^n \quad y \quad |\sigma_p| > (1 + \alpha)^n$$

donde  $\lambda_p$  y  $\sigma_p$  son los valores propios de  $Dg_p^n : T_pM \rightarrow T_pM$  con  $n$  el período de  $p$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\varepsilon > 0$  y  $\mathcal{U}_0$  dados por el Lema de Franks aplicado a  $f$  y  $\mathcal{U}(f) = \mathcal{F}(M)$ .

Sea  $p$  un punto periódico de período  $n$  y se considera

$$V_p = \bigoplus_{i=0}^{n-1} E_{f^i(p)}^s$$

donde  $E_p^s$  es el subespacio asociado al valor propio menor que 1. Se puede considerar entonces la siguiente transformación lineal en ese espacio vectorial  $L_p : V_p \rightarrow V_p$  definida de forma natural como  $L_p = Df|_{V_p}$ .

Sea  $\lambda$  un valor propio de  $L_p$ , entonces,  $L_p(v_1, \dots, v_n) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n)$  por lo tanto:

$$\begin{aligned}\lambda v_1 &= Df_{f^{n-1}(p)}v_n \\ \lambda v_2 &= Df_p v_1 \\ &\vdots \\ \lambda v_n &= Df_{f^{n-2}(p)}v_{n-1}\end{aligned}$$

De aquí se ve que  $\lambda$  es valor propio de  $L_p$  si y sólo si  $\lambda^n$  es valor propio de  $Df_p^n$  (el directo es trivial aplicando  $L_p^n$ , el recíproco también es cierto pues sabiendo que  $Df^n v_1 = \lambda^n v_1$  y considerando  $v_i = \lambda^{1-i} Df^{i-1} v_1$  entonces  $(v_1, \dots, v_n)$  será vector propio de  $L_p$  con valor propio  $\lambda$ ).

De esto comentado, basta ver que los valores propios de  $L_p$  están acotados lejos de 1 para todo  $p$ .

Si no fuese así, existiría  $p \in \text{Per}_1(g)$  con  $g \in \mathcal{U}_0$  de forma tal que  $L_p$  tiene un valor propio con módulo arbitrariamente cercano a 1 (digamos  $\gamma$ ), pero eso no puede pasar pues si se considera que  $|\gamma|^{-1} - 1 < \varepsilon$  y se define

$$Q_p = \bigoplus_{i=0}^{n-1} T_{f^i(p)}M$$

y también se define  $G : Q_p \rightarrow Q_p$  como  $G = |\gamma|^{-1} Dg|_{Q_p}$  se cumple que  $G$  tiene un valor propio de módulo 1 y se cumple que  $\|Dg|_{Q_p} - G\| < \varepsilon$  lo cual contradice el Lema de Franks pues se podría perturbar a  $g$  sacándolo de  $\mathcal{U}(f) = \mathcal{F}(M)$ .

Una demostración análoga vale para los valores propios inestables. □

Ahora se enunciará el resultado principal de esta sección y se procederá con su demostración.

**Teorema 3.3.3.** *Sea  $f \in \text{Diff}^1(M)$  robustamente transitivo donde  $M$  es una superficie compacta. Entonces,  $M$  admite una descomposición dominada para  $f$ .*

*Observación 3.3.2.* Antes de escribir la prueba formalmente, se realizará una observación acerca de el problema que se presenta.

La información que se tiene es que en el período, los puntos son hiperbólicos, pero si se supone que no hay dominación, se tiene que antes de “cerrar” la órbita, por un tiempo se mantiene sin “dominación”. Más específicamente, si no hay dominación en  $\text{Per}_1(f)$  entonces existen puntos periódicos  $p_n$  que cumplen que



$$\|Df^m|_{E_{p_n}^s}\| \left\| Df^{-m}|_{E_{f^m(p_n)}^u} \right\| \geq \frac{1}{2}$$

Simplificando el problema, supongamos que  $p$  es periódico de período  $n + 1$  y su diferencial (suponiendo que se pudiesen identificar todos los espacios tangentes) fuese la identidad en los primeros  $n$  iterados y una matriz hiperbólica en el último iterado (con valores propios por ejemplo  $1/2, 2$ ) entonces, en alguna base (de nuevo aclarando que esto no tiene mucho sentido “formal” en una superficie) entonces se cumpliría que los diferenciales serían

$$Df_{f^i(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall 0 \leq i \leq n-1 \quad \text{y} \quad Df_{f^n(p)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Df_p^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde se ve que el ángulo entre el espacio estable e inestable es recto ( $\text{ang}(E_p^s, E_p^u) = \infty$ ). Se puede ver como con una perturbación pequeña en cada diferencial se logra hacer (si se considera  $n$  arbitrariamente grande) que el ángulo entre ambos subespacios sea arbitrariamente pequeño (este argumento va a ser el que lleve a culminar la prueba, pues se sabe que si se mantiene en un entorno de  $f$  los ángulos han de estar acotados y utilizando el Lema de Franks este argumento conducirá a un absurdo).

La idea es agregar una entrada de tamaño  $\varepsilon$  en los primeros  $n$  iterados observando lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si se perturba todas las identidades de esa forma (encontrando un difeomorfismo  $g$  cercano a  $f$  con el Lema de Franks), se llega a que al volver se tiene lo siguiente:

$$Dg_p^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{n\varepsilon}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Y ya se vio que con  $n\varepsilon$  suficientemente grande, el ángulo entre los subespacios estable e inestable será arbitrariamente pequeño.

Una vez entendida esta observación, la única dificultad de la prueba es lograr formalizar esta idea para el caso general (obviamente en la exposición que se acaba de hacer se realizaron muchas simplificaciones que hay que levantar). En particular, dado que sabemos que no hay dominación por los primeros  $m$  iterados, se intentará modificar el espacio

estable e inestable por esos iterados (generando ángulos arbitrariamente pequeños a medida que  $m$  se hace arbitrariamente grande) y luego “deshacer” la perturbación de forma tal que al final del período los espacios estables e inestables sean iguales.

◇

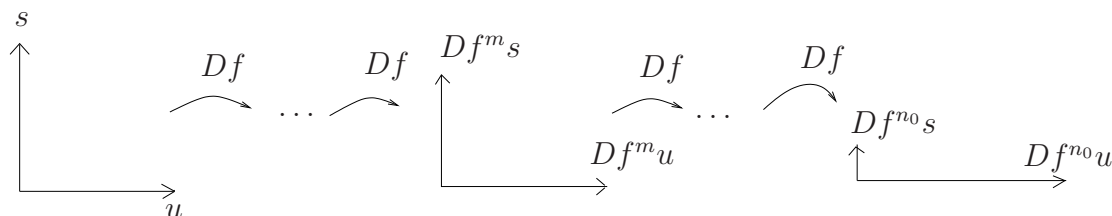


Figura 3.2: Diferencial de  $f$  en  $p_n$

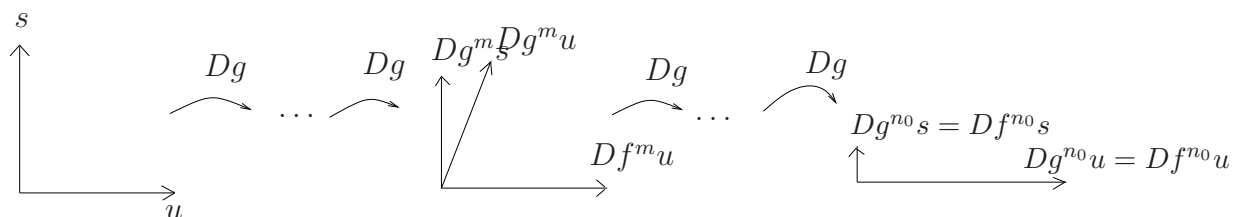


Figura 3.3: Modificación del diferencial mediante pequeñas perturbaciones

Antes de realizar la prueba del Teorema, probaremos el siguiente Lema que prueba parte del resultado principal.

**Lema 3.3.4.** *Sea  $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$  robustamente transitivo en  $M$  superficie compacta. Entonces,  $\exists \mathcal{U}_0(f)$  y  $n_0$  de forma tal que si  $g \in \mathcal{U}_0$  y  $p \in \text{Per}(g)$  entonces*

$$\|Dg^{n_0}|_{E^s(p)}\| \|Dg^{-n_0}|_{E^u(g^{n_0}(p))}\| < \frac{1}{2}$$

DEMOSTRACIÓN. Recopilando lo obtenido, por ser  $f$  robustamente transitivo en una superficie, se sabe, por la sección anterior (Observación 3.2.1 y Proposición 3.2.2) que todos los puntos periódicos de  $f$  son silla y  $f \in \mathcal{F}(M)$ .

Sea  $\mathcal{U}$  un entorno de  $f$  para el cual se cumpla que si  $g \in \mathcal{U}$  entonces  $g \in \mathcal{F}(M)$  y  $g$  transitivo (en particular, como  $\mathcal{U}$  es un entorno de  $g$ , también será robustamente transitivo).

Gracias a los resultados anteriores (Lemas 3.3.1 y 3.3.2) se sabe que por un lado los ángulos entre los espacios estables e inestables están acotados lejos de cero, y que los módulos de los valores propios están lejos de uno. En particular, se puede restringir  $\mathcal{U}$  de forma tal que si  $g \in \mathcal{U}$  y  $p \in \text{Per}(g)$  con período  $n_0$  entonces el ángulo entre  $E_p^s(g)$  y  $E_p^u(g)$  es mayor que  $\gamma > 0$  y los valores propios de  $Dg_p^{n_0}$  cumplen  $0 < |\lambda| < (1 - \alpha)^{n_0} < 1 < (1 + \alpha)^{n_0} < |\mu|$ .

Para el abierto  $\mathcal{U}$ , el Lema de Franks (Teorema 3.2.1) proporciona un abierto  $\mathcal{U}_0$  y un valor de  $\varepsilon > 0$  de forma que si  $g \in \mathcal{U}_0$  se puede perturbar su derivada en una cantidad finita de puntos menos de  $\varepsilon$  y que el perturbado se mantenga en  $\mathcal{U}$ .

Supongamos ahora que el Lema no se cumple para  $\mathcal{U}_0$  entonces, existen  $f_n \in \mathcal{U}_0$  y  $p_n \in \text{Per}(f_n)$  de forma tal que

$$\|Df_n^m|_{E^s(p)}\| \|Df_n^{-m}|_{E^u(f_n^m(p))}\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall 0 \leq m \leq n$$

Esto conducirá a un absurdo pues para  $n$  suficientemente grande esto no será posible.

Para simplificar la notación, se le llamará  $f = f_n$  (ojo, no confundir con el  $f$  inicial) y  $p = p_n$  y  $n_0$  su período.

Primero, es sencillo ver que  $n_0$  se puede considerar arbitrariamente grande, pues

$$\|Df^{kn_0}|_{E^s(p)}\| \|Df^{-kn_0}|_{E^u(f^{kn_0}(p))}\| \leq (1 - \alpha)^{kn_0} (1 + \alpha)^{-kn_0} \rightarrow 0 \quad k \rightarrow +\infty$$

Entonces, existe  $k_0$  de forma tal que

$$\|Df^{k_0 n_0}|_{E^s(p)}\| \|Df^{-k_0 n_0}|_{E^u(f^{k_0 n_0}(p))}\| < \frac{1}{2}$$

lo que implica que  $n_0 \geq n/k_0$  y como se puede considerar  $n$  arbitrariamente grande, se podrá hacer lo mismo con  $n_0$ .

Ahora, se considerarán dos nuevos subespacios de  $T_p M$  mediante las siguientes transformaciones lineales.

Sea  $L : E_p^u \rightarrow E_p^s$  de forma tal que  $L(u) = \delta s$  (donde  $u \in E_p^u$  y  $s \in E_p^s$  de norma 1) por lo que se puede considerar  $\|L\| \leq \delta$  (donde  $\delta$  es una constante arbitrariamente pequeña que será elegida).

También se define  $\tilde{L} : E_p^u \rightarrow E_p^s$  dada por  $\tilde{L} = (1 + \delta)^{n_0} (Df^{n_0}|_{E_p^s}) \circ L \circ (Df^{-n_0}|_{E_p^u})$ . Vale observar que se puede elegir  $\delta$  de forma tal que

$$\|\tilde{L}\| \leq (1 + \delta)^{n_0} \frac{(1 - \alpha)^{n_0}}{(1 + \alpha)^{n_0}} \|L\| \leq \|L\|$$

Con  $L$  y  $\tilde{L}$  se construyen los siguientes subespacios  $G = \{u + Lu : u \in E_p^u\}$  y  $\tilde{G} = \{u + \tilde{L}u : u \in E_p^u\}$  que se pueden ver en la figura 3.4.

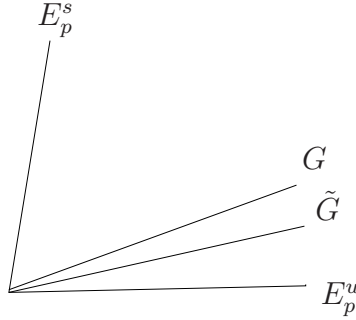


Figura 3.4: Subespacios  $G$  y  $\tilde{G}$ .

Ahora se puede construir una familia de transformaciones lineales  $L_j : T_{f^j(p)}M \rightarrow T_{f^{j+1}(p)}M$  cercanas a  $Df_{f^j(p)}$  (a menos del  $\varepsilon$  dado por el Lema de Franks). Para eso, se considerarán las siguientes transformaciones lineales auxiliares:

$$P : E_p^s \oplus E_p^u \rightarrow E_p^s \oplus E_p^u \quad \text{tal que} \quad P(s, u) = (Lu, 0)$$

$$S : E_p^s \oplus \tilde{G} \rightarrow E_p^s \oplus \tilde{G} \quad \text{tal que} \quad S(s, \tilde{g}) = (-\tilde{L}u, 0) \quad \text{con} \quad \tilde{g} = u + \tilde{L}u \text{ y } u \in E_p^u$$

En resumen, cumplen  $P|_{E_p^s} = 0$  y  $(Id + P)(E_p^u) = G$ ;  $S|_{E_p^s} = 0$  y  $(Id + S)(\tilde{G}) = E_p^u$ . Además, dado que el ángulo entre  $E^s$  y  $E^u$  está acotado por abajo, se puede elegir  $\delta$  de forma tal que  $\|P\|$  y  $\|S\|$  sean arbitrariamente pequeños independientemente de el punto periódico que se tome.

También se considerará  $T_j : T_{f^j(p)}M \rightarrow T_{f^{j+1}(p)}M$  con  $0 \leq j < n_0$  tal que  $T_j|_{E^s} = \delta Id$  y  $T_j|_{E^u} = 0$  que por lo mismo se puede asumir que tiene norma arbitrariamente pequeña (independientemente del punto periódico) tomando  $\delta$  pequeño.

Ya se está en condiciones de definir las transformaciones  $L_j$  mencionadas anteriormente. Es sencillo comprobar que cumplen  $\|L_j - Df_{f^j(p)}\| < \varepsilon$ . La definición es la siguiente:

$$L_0 = (Id + T_1) \circ Df_p \circ (Id + P)$$

$$L_j = (Id + T_{j+1}) \circ Df_{f^j(p)} \quad \forall 0 < j < n_0 - 1$$

$$L_{n_0-1} = (Id + S) \circ (Id + T_0) \circ Df_{f^{n_0-1}(p)}$$

Sea  $g : M \rightarrow M$  el difeomorfismo en  $\mathcal{U}$  dado por el Lema de Franks (Teorema 3.2.1) donde

$$L : \bigoplus_{i=0}^{n_0-1} T_{f^i(p)}M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n_0} T_{f^i(p)}M$$

dado por  $L|_{T_{f^i(p)}M} = L_i$ . Se verá que encontrando un punto  $p$  con período suficientemente grande (y para el cual  $n$  sea muy grande) se puede hacer que  $g$  tenga puntos periódicos para los cuales el ángulo entre los subespacios estable e inestable sea arbitrariamente pequeño.

Antes que nada, se puede observar que  $E_{f^j(p)}^s(f) = E_{g^j(p)}^s(g)$  para todo  $j$  dado que el subespacio  $E^s$  es invariante tanto para  $(Id + T_j)$  como para  $(Id + P)$  y  $(Id + S)$  (además de obviamente ser invariante para  $Df$ ) y además, al retornar en el período, el tamaño crece  $(1 + \delta)^{n_0}$  pero como se sabía que decrecía más que  $(1 - \delta)^{n_0}$  y  $((1 + \delta)(1 - \delta))^{n_0} = (1 - \delta^2)^{n_0} < 1$  por lo que se tiene que es estable.

Por otra parte, con un poco más de cuidado se observa que  $E_p^u(f) = E_p^u(g)$  pues si se considera  $T_pM = E^s \oplus E^u$  se tiene

$$(Id + S)^{-1} \circ L_{n_0-1} \circ \dots \circ L_0(0, u) = ((1 + \delta)^{n_0} Df_p^{n_0} \circ Lu, Df_p^{n_0} u) \in \tilde{G}$$

y por lo tanto  $Dg_p^{n_0}(0, u) = (Id + S)(\tilde{g}) \in E_p^u$ .

Resta ver que si se toma  $m$  suficientemente grande entonces el ángulo entre  $E_{g^m(p)}^s(g) = E_{f^m(p)}^s(f) = E_m^s$  y  $E_{g^m(p)}^u(g) = E_m^u$  es pequeño.

Se cumple entonces, que si se consideran las coordenadas de  $T_{f^m(p)}M$  dadas por  $E^s(f) \oplus E^u(f)$  (y llamando como ya fue hecho  $s = (1, 0)$  y  $u = (0, 1)$ ) vale que

$$E_m^s = \langle s \rangle \text{ y } E_m^u = \langle ((1 + \delta)^m Df_p^m(Lu), Df_p^m(u)) \rangle$$

Recordando que

$$\frac{1}{2} \|Df^m u\| \leq \|Df^m s\|$$

se puede ver fácilmente que el ángulo entre ambos subespacios está dado por

$$\frac{\|Df^m u\|}{(1 + \delta)^m \delta \|Df^m s\|} \leq \frac{2}{(1 + \delta)^m \delta} \rightarrow 0 \quad m \rightarrow +\infty$$

Lo que resulta absurdo y por lo tanto se concluye que  $\text{Per}_1(f)$  admite una descomposición dominada.

□

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.3.3. Gracias al Lema anterior, tenemos que si  $f$  es robustamente transitivo, existe  $\mathcal{U}_0(f)$  entorno para el cual existe  $n_0$  de forma tal que si  $g \in \mathcal{U}_0$  entonces  $\text{Per}_1(g)$  admite una descomposición dominada que cumple

$$\|Dg^{n_0}|_{E^s(p)}\| \|Dg^{-n_0}|_{E^u(g^{n_0}(p))}\| < \frac{1}{2}$$

Gracias a la Proposición 2.4.4 podemos pasar la descomposición a  $\Lambda = \overline{\text{Per}_1(g)}$  y obtener  $T_\Lambda M = E \oplus F$  verificando

$$\|Dg^n|_E(x)\| \|Dg^{-n}|_F(g^n(x))\| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in \Lambda$$

Como esto vale  $\forall g \in U_0$  y allí son todos transitivos, se cumple que  $\Omega(g) = M$   $\forall g \in \mathcal{U}_0$ . Ahora, utilizando los resultados del Apéndice A.2 se tiene que para un residual de difeomorfismos se cumple que  $\overline{\text{Per}(g)} = \Omega(g)$ , entonces, tenemos que existe  $g_n \rightarrow f$  (dado que  $\mathcal{D}iff^1(M)$  es un espacio de Baire) para los cuales  $\overline{\text{Per}(g_n)} = M$  y por lo tanto  $M$  admite descomposición dominada para ellos.

Sea entonces  $x \in M$ , tomando subsucesiones se puede considerar que  $E(x, g_n) \rightarrow E$  y  $F(x, g_n) \rightarrow F$  y utilizando la uniformidad de la descomposición dominada, se ve que se tiene que cumplir que

$$\|Df^n|_E\| \|Df^{-n}|_F\| < \frac{1}{2}$$

lo cual caracteriza a los subespacios  $E$  y  $F$  (ver Observación 2.4.1) y por lo tanto no depende de la sucesión  $g_n$  tomada y en particular va a coincidir con la descomposición hallada en los puntos periódicos (pues cumplen la caracterización) y la va a extender a toda la variedad concluyendo la prueba (esta prueba se basó fundamentalmente en [PS2]).

□

*Observación 3.3.3.* Que admita descomposición dominada en toda la superficie ya implica que la superficie es un toro pues está es la única superficie orientable que admite un campo continuo que no se anule ([Mil]).

## 3.4. Propiedades dinámicas de las variedades invariantes

En esta sección se probará que las curvas que integran los campos  $E$  y  $F$  (en realidad  $E$  y  $F$  son subespacios, se hace referencia al campo definido por vectores unitarios de ellos) son efectivamente estables e inestables y son únicamente integrables.

El Teorema que se probará es el siguiente (se especificará con más detalle el significado de los términos utilizados):

**Teorema 3.4.1.** *Sea  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  un difeomorfismo que admite descomposición dominada  $T\mathbb{T}^2 = E \oplus F$  y es transitivo. Entonces,  $E$  y  $F$  son únicamente integrables y tienen propiedades dinámicas.*

### 3.4.1. Integrabilidad de los fibrados $E$ y $F$

En esta sección se estudiará la integrabilidad única de los fibrados  $E$  y  $F$  bajo algunas condiciones. Se seguirán las ideas de [PS6]. Los resultados son de alguna manera técnicos y quien desee creerselos, en una primera leída puede saltar a la sección 3.4.2.

**Definición 3.4.1.** ■ La distribución<sup>1</sup>  $E$  en  $M$  es *integrable* sii  $\forall x \in M$  existe  $W^{cs}(x)$  inmersión de  $\mathbb{R}^k$  (con  $k = \dim E$ ) tal que:

- $x \in W^{cs}(x)$
- Si  $y \in W^{cs}(x)$  entonces  $T_y W^{cs}(x) = E(y)$ .

A  $W^{cs}(x)$  se le llama *variedad centro estable* por  $x$  (si  $\dim(E) = 1$  se le llamará también *curva integral* de  $E$ ). En el caso de la distribución  $F$  se notará  $W^{cu}(x)$  y se le llamará *variedad centro inestable*.

- La distribución  $E$  es *únicamente integrable* sii cuando  $J(x)$  y  $W(y)$  son variedades centro estables entonces  $J(x) \cap W(y)$  es abierta (relativa a las inmersiones de  $J(x)$  y  $W(y)$ ). La definición es análoga para  $F$ .

Se notará como  $W_\varepsilon^{cs}(x)$  a una curva integral de longitud  $2\varepsilon$  centrada en  $x$ . Es importante tener en cuenta que no necesariamente es única. También se utilizara la siguiente notación  $W_\varepsilon^{ss}(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ y es menor que } \varepsilon \forall n \geq 0\}$ <sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Una distribución es una función que a cada punto de la variedad le asocia un subespacio del espacio tangente y en este caso, pedimos que esa asociación sea de forma continua. Ver [H].

<sup>2</sup>Ya utilizamos la notación  $W_\varepsilon^s = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \forall n \geq 0\}$ .

**Definición 3.4.2.** Se dirá que es *únicamente integrable* en  $x$  si existe  $\varepsilon > 0$  de forma tal que para toda curva integral  $J(x)$  se cumple que  $W_\varepsilon^{cs}(x) \cap J(y)$  es un abierto relativo a la inmersión de  $W_\varepsilon^{cs}(x)$ .

Se pretende probar que contar con propiedades dinámicas es suficiente para asegurar la unicidad de estas variedades.

El tema es que si se cuenta con propiedades dinámicas y no hubiese unicidad, se podría trazar una centro inestable que intersekte a dos centro estables que pasan por el mismo punto y eso indefectiblemente llevará a un absurdo como se probará a continuación.

La idea es que teniendo propiedades dinámicas el arco centro inestable que une las dos centro estables se tendrá que mantener muy pequeño lo cual contradecirá la descomposición dominada (para eso hay que hacer una cuenta, no es evidente ya que podría en principio una centro inestable mantenerse pequeña para el futuro, pero si las cuentas dan, dan...).

Antes es importante hacer unas cuantas observaciones de demostración simple pero muy importantes.

*Observación 3.4.1.* ■ La integrabilidad es muy fácil de probar. Basta considerarse un campo unitario con vectores en  $E$  y el teorema de Peano ([Sot]) asegura la integrabilidad dado que el campo es continuo.

- Si  $W(x)$  es curva integral por  $x$  entonces  $f(W(x))$  es curva integral por  $f(x)$ . Esto es también muy sencillo, si se considera  $\alpha : I \rightarrow W(x)$  una parametrización tenemos que  $\alpha'(t) \in E(\alpha(t)) \forall t$  (de hecho se podría definir integrabilidad de esta forma). Por lo tanto, si consideramos  $f \circ \alpha$  como parametrización de  $f(W(x))$  se cumple que  $(f \circ \alpha)'(t) = Df_{\alpha(t)}\alpha'(t) \in E(f \circ \alpha(t))$  puesto que  $E$  es  $Df$  invariante.
- Para ver que las variedades centro estables son únicas hay que corroborar que la intersección con cualquier otra es un abierto con la topología relativa a la inmersión. Es importante notar que si  $J(x)$  y  $W(y)$  son variedades centro estables encajadas y cerradas  $J(x) \cap W(y)$  es un conjunto cerrado para la topología relativa de ambos encajes. Esto se da por ejemplo cuando se toman imágenes de intervalos (es decir variedades centro estables locales).
- La distribución es únicamente integrable si y solo si lo es en cada punto de la variedad.

◇



Dadas las dificultades técnicas que aparecen en la prueba, primero se dará una prueba asumiendo ciertos detalles que luego se saldrán.

**Lema 3.4.2.** *Sea  $x \in \mathbb{T}^2$  tal que dado  $\varepsilon$  existe  $\varepsilon_1$  tal que  $W_{\varepsilon_1}^{cs}(x) \subset W_{\varepsilon}^{ss}(x)$  (para cualquier  $W_{\varepsilon_1}^{cs}$ ) entonces,  $E$  es únicamente integrable en  $x$ .*

ESBOZO DE DEMOSTRACIÓN.

La idea es que si la variedad centro estable no es única entonces se puede considerar una centro inestable que atraviese ambas como se ve en la figura 3.5.

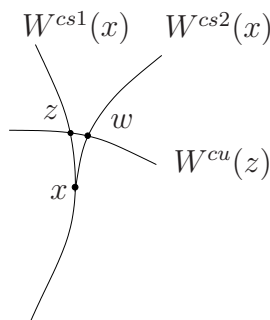


Figura 3.5: Variedades centro estables no únicas.

Primero se puede ver que las distancias entre los iterados de  $z$  y  $w$  serán comparables a las longitudes de los iterados de la centro inestable que los une.

Se cumple entonces que

$$d(z, w) = d(f^{-n}(f^n(z)), f^{-n}(f^n(w))) \approx \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| d(f^n(z), f^n(w))$$

pues los puntos  $z$  y  $w$  se mantendrán cercanos a  $x$  y la curva centro inestable que los une también, entonces se puede aproximar el diferencial de  $f^n$  en la curva con el diferencial en  $F(f^n(x))$ . Con el mismo argumento se llega a que

$$d(f^n(z), f^n(w)) = d(f^n(x), f^n(z)) + d(f^n(x), f^n(w)) \approx \|Df^n|_{E(x)}\| (d(x, z) + d(x, w))$$

Pero esto lleva a un absurdo con la descomposición dominada puesto que nos asegura que

$$d(z, w) \approx \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| \|Df^n|_{E(x)}\| (d(x, z) + d(x, w)) \leq C\lambda^n (d(x, z) + d(x, w)) \rightarrow 0$$

que no puede ser pues  $z \neq w$ .

□

Veamos que cosas falta responder o formalizar:

1. ¿Por qué se puede conseguir la variedad centro inestable que atraviese y corte ambas?
2. ¿Por qué la variedad centro inestable que une a  $z$  y  $w$  se mantiene cerca de  $x$ ?
3. Completar las cuentas un poco más rigurosamente.

Las preguntas 1. y 2. se responden mediante el siguiente Lema después del cual se finalizará la prueba.

**Lema 3.4.3.** *Dado  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, existe  $\delta$  tal que para todo  $x \in \mathbb{T}^2$  se cumple que podemos considerar un entorno  $B$  de  $x$  de tamaño  $\varepsilon$  de forma tal que  $\partial B$  tiene cuatro lados y de forma tal que si  $y \in B(x, \delta)$  entonces  $W^{cs}(y)$  cruza  $\partial B$  por dos lados opuestos y  $W^{cu}(y)$  cruza  $\partial B$  por los dos restantes. Los lados en que cortan la centro inestable y la centro estable no dependen de  $y$ .*

Es más sencillo entender el enunciado a través de un dibujo, véase la figura 3.6.

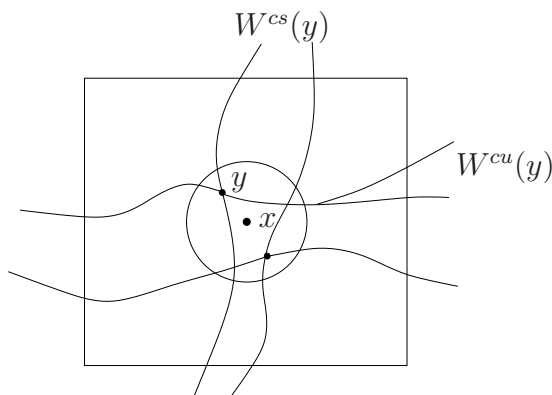


Figura 3.6: Enunciado del lema 3.4.3.

**DEMOSTRACIÓN.** Se puede pensar en cartas locales y poner a  $x$  en el origen. Además, es posible considerar que los ejes coordenados coinciden con las direcciones  $E(0)$  y  $F(0)$  (basta hacer un cambio de coordenadas lineal). Se utilizará la distancia dada por la norma 1 (las bolas son cuadrados).

Ahora se puede considerar  $\varepsilon$  suficientemente pequeño de forma tal que si un punto se encuentra en la  $B(0, \varepsilon)$  entonces el ángulo<sup>3</sup> entre su dirección  $E$  y la dirección  $E$  del origen no es mayor a 30 grados (por decir un número, lo importante es que sea menor que 45). Lo mismo se puede pedir a la dirección  $F$ .

Ahora, considerando  $\delta$  de forma tal que si se toma un punto en  $B(0, \delta)$  y se trazan las rectas por ahí con 30 grados de diferencia con los ejes salgan por costados del cuadrado (ver figura 3.7).

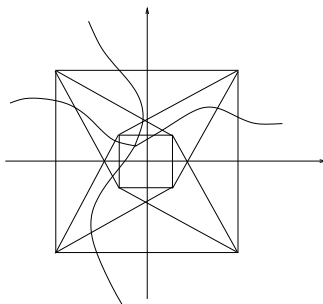


Figura 3.7: Construcción de  $\delta$ .

Emulando pruebas de teoremas clásicos de ecuaciones diferenciales (Teorema de Escape de Compactos, comparación entre ecuaciones de primer orden, ver [H] o [Sot]) se llega a la conclusión del teorema pues tenemos que  $W^{cs}$  y  $W^{cu}$  son curvas que integran campos en  $E$  y  $F$  respectivamente y por como fue construido  $\delta$  se puede ver que las soluciones sólo pueden salir de  $B(0, \varepsilon)$  por los lados correctos (para la prueba del Lema) pero tienen que salirse dado que podemos utilizar el Teorema de Escape de Compactos (la prueba es idéntica para un campo continuo, basta utilizar la definición de solución maximal y la existencia local de soluciones que vale para campos continuos).

□

Ahora se puede completar la prueba del Lema 3.4.2.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3.4.2..

Sea  $\tilde{C} = \tilde{C}(\varepsilon)$  de forma tal que si  $y \in W_{loc}^{cs(u)}(z)$  entonces  $\tilde{C}^{-1}d_{cs(u)}(y, z) < d(y, z) < \tilde{C}d_{cs(u)}(y, z)$ . Donde  $d_{cs(u)}$  denota la longitud del arco de variedad centro estable (inestable) que une  $y$  con  $z$ .

Supongamos que  $E$  no es únicamente integrable en  $x$ . Se puede tomar entonces  $W_1$  y  $W_2$  variedades centro estables que contienen a  $x$  y cuya intersección no es abierta. Se

---

<sup>3</sup>Es posible medir ángulos entre puntos distintos ya que nos encontramos en una carta local.

puede también considerarlas pequeñas (se busca probar la unicidad local) de forma que sean un encaje y cerradas, por lo que su intersección también lo será.

Por lo tanto, el complemento de la intersección entre ambas será abierto, como son curvas, una unión numerable de intervalos abiertos.

Si se toma uno de ellos en  $W_1$  suficientemente cercano a  $x$  y  $z_1$  un punto del borde de  $W_1 \setminus W_2$ .

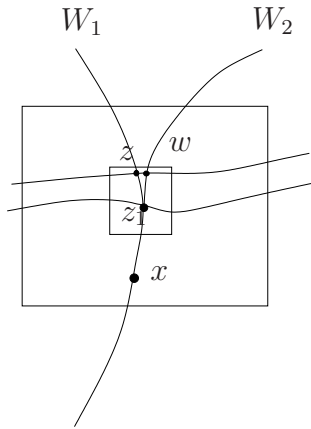


Figura 3.8: Curva que cruza  $W_1$  y  $W_2$ .

Gracias al Lema 3.4.3 se puede asegurar que cerca de  $z_1$  habrá un punto  $z \in W_1$  de forma tal que su variedad centro inestable cortará a  $W_2$  en un punto  $w$  como se puede ver en la figura 3.8.

Además, como  $z$  y  $w$  están en  $W_\varepsilon^{ss}(x)$ , se puede suponer que la variedad centro inestable que une sus iterados futuros siempre estará cerca de los iterados de  $x$  (digamos que si se busca que estén a menos de  $\gamma$ , se puede considerar  $\varepsilon$  como en el Lema 3.6 y se sabe que la centro inestable por  $f^n(z)$  debe salir por el “otro” lado y por lo tanto cortar a  $f^n(W_2)$  antes de alejarse una distancia mayor que  $\gamma$  de  $x$ ).

Se puede considerar  $\delta$  y  $\gamma$  de forma tal que si  $d(u, v) < \gamma$  entonces

$$\|Df|_{E(u)}\| < (1 + \delta)\|Df|_{E(v)}\| \quad \|Df^{-1}|_{F(u)}\| < (1 + \delta)\|Df^{-1}|_{F(v)}\|$$

y además  $(1 + \delta)^2\lambda < 1$ , donde  $\lambda$  es la constante de dominación.

Esto lleva a un absurdo pues:

$$d(z, w) = d(f^{-n}(f^n(z)), f^{-n}(f^n(w))) \leq \tilde{C}d_{cu}(f^{-n}(f^n(z)), f^{-n}(f^n(w))) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tilde{C}^2(1 + \delta)^n \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| d(f^n(z), f^n(w)) \leq \\
&\leq \tilde{C}^2(1 + \delta)^n \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| (d(f^n(x), f^n(z)) + d(f^n(x), f^n(w))) \leq \\
&\leq \tilde{C}^2(1 + \delta)^n \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| \tilde{C}^2(1 + \delta)^n \|Df^n|_{E(x)}\| (d(x, z) + d(x, w)) \leq \\
&\leq \tilde{C}^4(1 + \delta)^{2n} C \lambda^n (d(x, z) + d(x, w)) = \tilde{C}^4 C (d(x, z) + d(x, w)) ((1 + \delta)^2 \lambda)^n \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Lo cual resulta absurdo pues  $z \neq w$ .

□

Para completar la prueba del Teorema 3.4.1 será necesario utilizar el siguiente Teorema:

**Teorema 3.4.4 (Variedad Estable Fuerte).** *Sea  $f : M^2 \rightarrow M^2$  un difeomorfismo que admite descomposición dominada  $TM = E \oplus F$ . Entonces, para todo  $\rho < 1$  existe  $\varepsilon$  de forma tal que si para  $x \in M$  se cumple que  $\|Df^n|_{E(x)}\| < C\rho^n$  entonces existe  $W_\varepsilon^s$  arco de longitud  $\varepsilon$  para cada lado de  $x$ , único que integra a  $E$  (es decir que  $TW_\varepsilon^s = E|_{W_\varepsilon^s}$ ). Además, la longitud de los iterados futuros de este arco tiende a cero exponencialmente.*

DEMOSTRACIÓN. Primero hay que observar que a menos de cambiar constantes (tamaños), la variedad estable de  $x$  con  $f$  es igual a la variedad estable de  $x$  con  $f^k$ . Por lo tanto, se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $\|Df^n|_{E(x)}\| < \rho^n$ .

Ahora, se considera en  $E$  un campo unitario y se toma  $\gamma$  una curva integral del campo que pasa por  $x$  y tiene longitud  $\varepsilon$  para cada lado. Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una parametrización por longitud de arco.

Se probará por inducción en  $n$  que  $\ell(f^n \circ \alpha) \leq (1 + \delta)^n \rho^n \varepsilon$ .

Primero, tomando  $\delta$  de forma tal que  $(1 + \delta)\rho < 1$ , se puede considerar  $\varepsilon$  de forma tal que si  $d(z, w) < \varepsilon$  entonces<sup>4</sup>

$$\|Df|_{E(z)}\| < (1 + \delta)\|Df|_{E(w)}\|$$

Para  $n = 1$  es muy sencillo pues como todos los puntos están a menos de  $\varepsilon$  de  $x$  se ve que

---

<sup>4</sup>Es importante notar que la elección de  $\varepsilon$  depende sólo de  $\rho$  y no de  $x$ .

$$\ell(f \circ \alpha) = \int_I \|Df_{\alpha(t)}\dot{\alpha}(t)\| \leq (1 + \delta)\|Df|_{E(x)}\|\ell(\alpha)$$

Ahora, si se cumple para  $k = n - 1$ , el mismo argumento permite ver que se cumple para  $k = n$  dado que como los puntos de  $f^{n-1} \circ \alpha$  están a menos de  $\varepsilon$  de  $f^{n-1}(x)$  la misma cuenta nos permite ver que

$$\ell(f^n \circ \alpha) \leq (1 + \delta)\|Df|_{E(x)}\|\ell(f^{n-1} \circ \alpha) \leq (1 + \delta)^n \rho^n \ell(\alpha)$$

como se buscaba.

Usando el Lema 3.4.2 se obtiene la unicidad de esta variedad.

□

### 3.4.2. Propiedades dinámicas e integrabilidad única

En esta sección se completará la prueba del Teorema 3.4.1. Esto será consecuencia de unir el Lema 3.4.2 (de la sección anterior) y el Teorema 3.4.8 que se probará en esta sección y muestra como en las hipótesis que se está trabajando las curvas integrales de  $E$  y  $F$  son estables e inestables.

La idea de la prueba es la siguiente (basada en [PS1] y [PS3]), si las variedades no fueran estables e inestables, van a haber trozos de curvas tangentes a alguna de las direcciones (por ejemplo  $F$ ) para las cuales en el pasado no hay contracción. Eso va a implicar que en algunos puntos, la dirección de  $F$  no va a ser contraída por  $Df^{-1}$  y utilizando la descomposición dominada tendremos buena contracción exponencial en la dirección de  $E$  por  $Df$ .

Esto permitirá encontrar para un entorno de puntos variedades estables de tamaño uniforme (para eso hay que estudiar propiedades de las curvas integrales de  $E$  y  $F$ , se utilizarán las ideas de [PS6]). A partir de eso, se conseguirán una especie de “cajas” foliadas por variedades estables<sup>5</sup> (ver figura 3.9). Estas cajas tendrán interior no vacío (pues las variedades estables tendrán tamaño uniforme) y por lo tanto (dado que  $\Omega(f) = M$ ) algún iterado de esta se cortará consigo mismo. Se probará luego que eso conduce a un absurdo encontrando en esas condiciones algún conjunto atractor que sabemos contradice la transitividad.

---

<sup>5</sup>En la sección 3.5 se utilizará una noción de caja un poco modificada, se le pedirá que se encuentren foliadas en ambos sentidos. Creo que no da lugar a confusiones.

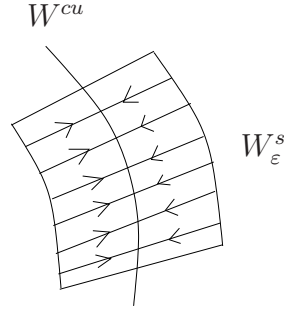


Figura 3.9: Cajas de variedades estables.

Como fue adelantado, lo primero que se hará es probar que si una variedad centro no tiene propiedades dinámicas localmente, entonces se podrá encontrar una caja como la ya mencionada.

Se enunciará ahora el primer resultado extraído de [PS1]. Se le llamarán variedades centro estable y centro inestable a las curvas obtenidas al integrar campos unitarios en  $E$  y  $F$  respectivamente.

**Lema 3.4.5.** *Existe  $\delta$  tal que si  $I$  es un trozo de variedad centro inestable de forma tal que  $\ell(f^n(I)) \leq \delta \forall n \geq 0$  entonces existe  $\gamma \in (0, 1)$  y  $C > 0$  tal que para todo  $x \in I$  y  $n \geq 0$  se cumple que  $\|Df^n|_{E(x)}\| < C\gamma^n$ .*

DEMOSTRACIÓN. La descomposición dominada da que

$$\|Df^n|_{E(x)}\| \|Df^{-n}|_{F(f^n(x))}\| < C\lambda^n$$

Si se toma  $\delta_1$  y  $c$  suficientemente pequeño de forma tal que si  $d(x, y) < \delta_1$  entonces

$$\frac{\|Df|_{E(x)}\|}{\|Df|_{E(y)}\|} < 1 + c$$

$$\frac{\|Df|_{F(x)}\|}{\|Df|_{F(y)}\|} > 1 - c$$

Es fácil ver que existe  $0 < \lambda_1 < 1$  de forma tal que si  $x \in I$  (tomando  $\ell(I) \leq \delta \leq \delta_1$ ) entonces  $\|Df^n|_{F(x)}\| \leq \lambda_1^{-n}$  a partir de algún  $n$  grande (o sea que la expansión está acotada). Esto pasa pues si no fuera así, existiría  $n_k \rightarrow +\infty$  que cumpliría que  $\|Df^{n_k}|_{F(x)}\| \geq \lambda_1^{-n_k}$ . Entonces, como  $\ell(I) \leq \delta_1$  tenemos que para todo  $y \in I$  se cumpliría que

$$\|Df^{n_k}|_{F(y)}\| > ((1-c)\lambda_1^{-1})^{n_k} = \mu^{n_k}$$

con  $\mu \in (0,1)$ . Pero tomando  $n_k$  suficientemente grande como para que  $\mu^{n_k}\ell(I) > \delta$  concluimos que

$$\ell(f^{n_k}(I)) > \mu^{n_k}\ell(I) > \delta$$

lo cual es absurdo<sup>6</sup> pues por hipótesis se cumple que  $\ell(f^n(I)) \leq \delta \forall n \geq 0$ .

Entonces se tiene que  $\|Df^n|_{F(x)}\| \leq \lambda_1^{-n}$  para todo  $n$  suficientemente grande. Ahora, por la descomposición dominada vale que

$$\|Df^n|_{E(x)}\| < C\lambda^n \|Df^n|_{F(x)}\| < C\lambda^n C' \lambda_1^{-n} < K\gamma_1^n$$

Para algún  $K > 0$  y  $\gamma_1 < 1$  (habiendo elegido  $0 < \lambda < \lambda_1 < 1$ ) y como para todo  $y \in I$ ,  $d(f^n(y), f^n(x)) \leq \delta_1$  se tiene (con buenas elecciones de  $c$  y  $\gamma_1$ )

$$\|Df^n|_{E(y)}\| < K'\gamma^n$$

con  $K'$  y  $\gamma$  convenientes.

□

En resumen, se probó que si un arco “inestable” se mantiene pequeño al futuro existe una contracción fuerte en la dirección de  $E$ . Se verá ahora, que si las variedades centro inestables no tienen propiedades dinámicas, existe un arco con esta propiedad<sup>7</sup>.

**Lema 3.4.6.** *Si existe un arco  $I$  de variedad centro inestable con  $\ell(I) < \delta$  y tal que  $\ell(f^{-n}(I)) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  entonces existe un arquito  $J$  de variedad centro inestable que cumple que  $\ell(f^n(J)) \leq \delta \forall n \geq 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. La prueba se separa en dos etapas, primero, se probará que el Lema es cierto si la longitud de los iterados pasados del arco se mantienen con longitud menor a  $\delta$ . Luego, se verá el caso general en donde eso no se puede asegurar, reduciendolo al primer caso.

**Caso I:** Supongamos que  $\ell(f^{-n}(I)) < \delta \forall n \geq 0$ . Entonces, podemos tomar un arco  $J$  definido como de “acumulación” de arcos  $I_k = f^{-n_k}(I)$  que verifican  $\ell(I_k) > \varepsilon$ . Los  $I_k$  existen por la hipótesis de que  $\ell(f^{-n}(I)) \rightarrow 0$  y el arco límite  $J$  se puede construir de la

---

<sup>6</sup>Observar que la primera desigualdad ocurre dado que los puntos se mantienen siempre a menos de  $\delta$ .

<sup>7</sup>Todos estos argumentos valen de forma análoga para arcos centro estables



siguiente forma concluyendo también que es curva integral de  $F$ : como todas las curvas  $I_k$  son integrales y tienen longitud lejos de cero y acotada, se pueden reparametrizar (por longitud de arco) obteniendo una sucesión equicontinua y equiacotada de curvas que por el Teorema de Arzelá-Ascoli [Sot] tiene subsucesión convergente, además, será curva integral pues calculando su derivada en un punto  $t_0$  (de la parametrización  $\alpha = \lim \alpha_{n_j}$ ) se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t_0 + h) - \alpha(t_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{n_j}(t_0 + h) - \alpha_{n_j}(t_0)}{h} = \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha_{n_j}(t_0 + h) - \alpha_{n_j}(t_0)}{h} = \lim u_j \end{aligned}$$

con  $u_j \in F(\alpha_{n_j}(t_0))$  por lo que  $\alpha'(t_0) \in F(\alpha(t_0))$ . Además,  $\ell(f^n(J)) \leq \delta$  pues dado  $n \geq 0$  existen curvas arbitrariamente cercanas a  $J$  para las cuales la longitud en esos iterados no pasa de  $\delta$ .

**Caso II:** Si no se cumple que  $\ell(f^{-n}(I)) < \delta \forall n \geq 0$  existe un primer natural  $n_1$  donde se verifica que  $\ell(f^{-n_1}(I)) \geq \delta$ , pero entonces, es posible “partir” el arco  $f^{-n_1}(I)$  en una cantidad finita de arcos con longitud menor a  $\delta$  y mayor a  $\delta/2$ . Todos estos arcos verificarán que su longitud es menor a  $\delta$  y por lo menos uno de ellos verificará que su longitud no tiende a cero en el pasado pues si la longitud de todos se fuese a cero, la longitud de  $f^{-n}(I)$  también tendería a 0. Además, es fácil observar como estos arcos se mantendrán de longitud menor a  $\delta$  por lo menos en los primeros  $n_1$  iterados al futuro (recordar que se eligió  $n_1$  como el primer iterado en el cual se alcanzaba longitud  $\delta$ ).

Este nuevo arco (que mide más de  $\delta/2$ ) puede estar en las hipótesis del Caso I, con lo cual se finalizaría la prueba o sino, se le podrá repetir el argumento.

Esto se puede realizar indefinidamente (en caso de que nunca se encuentre en el Caso I) construyendo una sucesión  $I_k$  de arcos que verifican que miden menos de  $\delta$  y más de  $\delta/2$  y que al mismo tiempo, sus iterados futuros se mantienen con longitud menor a  $\delta$  por al menos  $n_1 + n_2 + \dots + n_k > k$  iterados. Ahora, se puede considerar  $J$  como un arco límite de los  $I_k$  y verificará la tesis del Lema (la construcción de  $J$  a partir de los  $I_k$  es idéntica al Caso I).

□

Como fue mencionado, estos lemas permitirán crear “cajitas” (ver figura 3.9) foliadas por variedades estables. El hecho de que  $\Omega(f) = M$  implica que estas “cajitas” se cortarán en el futuro. Según como se corten se encontrarán conjuntos atractores que conducirán a una contradicción con la transitividad y se terminará probando que las variedades

centro estables y centro inestables son efectivamente estables e inestables. Por ejemplo, es fácil ver que si llamando a una cajita  $B$  y se cumple que  $f^n(B) \subset B$  existirá un punto periódico atractor (violando la transitividad). No es tan fácil ver que pasa cuando simplemente se cortan (ver figura 3.10).

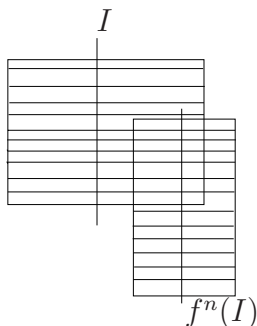


Figura 3.10: Intersección de cajas estables.

Se notará  $\omega(I) = \bigcup_{x \in I} \omega(x)$ . La siguiente proposición también es de [PS1].

**Proposición 3.4.7.** *Existe  $\delta_0$  tal que si  $I$  es un intervalo de variedad centro inestable que cumple que  $\ell(f^n(I)) \leq \delta \leq \delta_0 \forall n \geq 0$  entonces se cumple una de las siguientes:*

1.  $\omega(I)$  está contenido en una curva periódica cerrada y simple atractor.
2.  $\omega(I)$  contiene un punto periódico que no es hiperbólico de tipo silla.

Vale observar que probando esta proposición se concluye que las variedades centro estables y centro inestables son efectivamente estables e inestables finalizando el objetivo de esta sección pues en el Lema 3.4.6 se prueba que si no fuesen estables e inestables existirían arcos como en las hipótesis de esta Proposición, pero esta Proposición da tres alternativas incompatibles con la transitividad.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos  $B = W_{\varepsilon/2}^s(I) = \bigcup_{x \in I} W_{\varepsilon/2}^s(x)$  donde  $\varepsilon$  es tal que la contracción dada por el Lema 3.4.5 teniendo en cuenta el Lema 3.4.6 da que utilizando el Teorema de la Variedad Estable Fuerte (Teorema 3.4.4) asegure variedades estables de tamaño  $\varepsilon$  para los puntos de  $I$ .

El hecho de que  $\Omega(f) = M$  asegura que existe  $n_0$  de forma tal que  $f^{n_0}(B) \cap B \neq \emptyset$  (y por como fue elegido  $B$  se cumplirá que  $f^{n_0}(I) \cap W_{\varepsilon}^s(I) \neq \emptyset$ ).

Hay dos posibilidades:

**Caso I:** Si se cumple que  $\ell(f^{kn_0}(I)) \rightarrow 0$  con  $k \rightarrow +\infty$  entonces  $\omega(I)$  será una órbita periódica.

Esto es porque si  $\ell(f^{k n_0}(I)) \rightarrow 0$  entonces se cumple que  $\ell(f^k(I)) \rightarrow 0$  (por la continuidad uniforme de  $f$ ) si se toma entonces un punto  $p$  de acumulación de  $x_k \in f^k(I)$ . Entonces  $p = \lim f^{k_j}(x) \forall x \in I$ . Pero como  $f^{n_0}(I) \cap W_\varepsilon^s(I) \neq \emptyset$  existe  $x \in I$  tal que  $f^{n_0}(x) \in W_\varepsilon^s(I)$  entonces  $p = \lim f^{k_j+n_0}(x)$  y por lo tanto  $p$  es periódico.

Es fácil ver que la existencia de este punto periódico contradice la transitividad robusta pues si el punto periódico fuese hiperbólico tendría una dirección inestable (y por no tenerla se puede perturbar  $C^r$  a un pozo).

**Caso II:** Si  $\ell(f^{k n_0}(I)) \not\rightarrow 0$ , se toma  $k_j$  tal que  $f^{k_j n_0}(I) \rightarrow L$  donde  $L$  será un intervalo cuya dirección tangente es  $F$  (ver argumento en la demostración del Lema 3.4.6).

Por un argumento similar (dado que  $f^{n_0}(I) \cap W_\varepsilon^s(I) \neq \emptyset$ ) se tiene que  $f^{k_j n_0 + n_0}(I) \rightarrow L'$  y  $f^{n_0}(L) = L'$ . Obviamente, dado que  $f^{n_0}(I) \cap W_\varepsilon^s(I) \neq \emptyset$ ,  $L \cup L'$  será también un intervalo tangente a  $F$  (pues  $L \cap L' \neq \emptyset$ ).

Se considera ahora

$$J = \bigcup_{k \geq 0} f^{k n_0}(L)$$

$J$  será unión de intervalos. Por ser límites de  $f^m(I)$  tienen en su dirección  $E$  variedades estables de longitud  $\varepsilon$  en todos sus puntos. Esto implica que  $J$  es o bien un círculo periódico o un intervalo periódico (en ambos casos atractores por tener las variedades estables de longitud  $\varepsilon$ )

Para ver eso, sea  $x \in J$  entonces  $x \in f^{k n_0}(L)$  para algún  $k$  y se considera  $S = B_{\varepsilon/2}(x) \cap J$ , basta entonces ver que  $S$  es un intervalo probando que  $J$  es una variedad de dimensión 1 (que por lo tanto es un intervalo o un círculo, ver [Mil]).

Supongamos que  $S$  no es un intervalo, entonces, existe  $y \in B_{\varepsilon/2}(x) \cap J$  que no se encuentra en la componente conexa de  $S$  que contiene a  $x$ . Por lo tanto, pertenece a  $f^{l n_0}(L)$  para algún  $l$  distinto de  $k$ .

Pero entonces, se pueden encontrar iterados de  $I$  muy cercanos a  $f^{k n_0}(L)$  y de la misma forma cercanos a  $f^{l n_0}(L)$ , pero se puede ver (por el tamaño uniforme de las variedades estables fuertes) que las estables de los puntos de  $f^{k n_1 n_0 + k n_0}(I)$  y de  $f^{k n_2 n_0 + l n_0}(I)$  (donde  $f^{k_j n_0}(I) \rightarrow L$ ) se cortarían en  $B_{\varepsilon/2}(x)$ , indicando que  $f^{k n_0}(L) \cup f^{l n_0}(L)$  es un intervalo y que  $y$  pertenece a la misma componente conexa que  $x$  de  $S$  (ver [PS1]).

En el caso de ser un intervalo, por ser  $J$  invariante por  $f^{n_0}$ , ha de tener un punto periódico y este no podrá ser hiperbólico de tipo silla pues localmente su dinámica no puede ser conjugada a un lineal de tipo silla.

□

Por lo tanto, se puede probar con facilidad el siguiente Teorema que engloba los resultados de esta sección.

**Teorema 3.4.8.** *Sea  $f$   $C^1$ -robustamente transitivo y  $TM = E \oplus F$  su descomposición dominada. Sea  $\gamma : I = [-1, 1] \rightarrow M$  una curva tal que  $\gamma'(t) \in E(\gamma(t)) \forall t \in I$ . Entonces, para todo  $\varepsilon$  existe  $\varepsilon_0$  de forma tal que si consideramos  $\alpha = \gamma|_{[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]}$  se cumple que  $\ell(f^n(\alpha)) \leq \varepsilon \forall n \geq 0$  y además,  $\ell(f^n(\alpha)) \rightarrow 0$  con  $n \rightarrow +\infty$ .*

DEMOSTRACIÓN. El hecho de que tiende a 0 la longitud es lo que se probó en esta sección.

Para ver que se puede considerar  $\varepsilon_0$  de forma que la longitud se mantenga acotada es sencillo<sup>8</sup>. Si no fuese así, se podrían considerar  $\alpha_k = \gamma|_{[-1/k, 1/k]}$  de forma tal que existiese  $n_k \rightarrow +\infty$  para los cuales  $\ell(f^{n_k}(\alpha_k)) \geq \varepsilon$  ( $n_k$  tiene que irse a  $+\infty$  pues las longitudes de  $\alpha_k$  tienden a 0 y por lo tanto necesita más tiempo para pasar  $\varepsilon$ ). Además se puede suponer que  $n_k$  es el primer valor donde superan la longitud de  $\varepsilon$ .

Ahora, si se considera  $J$  un arco límite de  $f^{n_k}(\alpha_k)$  (que se puede ver que existe pues las longitudes de  $f^{n_k}(\alpha_k)$  están acotadas por abajo y por arriba y se pueden reparametrizar y utilizar el Teorema de Arzelá-Ascoli) será un arco que integra a  $E$  y que al mismo tiempo mantiene su longitud acotada en el pasado contradiciendo la transitividad robusta teniendo en cuenta la Proposición 3.4.7.

□

Queda claro que juntando el Teorema 3.4.8 con el resultado de unicidad alcanzado en el Lema 3.4.2 queda completamente probado el Teorema 3.4.1.

*Observación 3.4.2.* La unicidad de estas variedades, junto con un buen uso del Lema 3.4.3 permiten probar que se tiene una estructura de producto local, es decir,  $\exists \varepsilon$  y  $\delta$  de forma tal que si  $d(x, y) \leq \delta$  entonces,  $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y)$  es un único punto. La estructura de producto local permite ver es que la variedad queda foliada por hojas estables y hojas inestables.

*Observación 3.4.3.* Si  $f$  es  $C^1$ -robustamente transitivo entonces es expansivo.

DEMOSTRACIÓN. Siguiendo la prueba del corolario 2.3.9, si se toma  $\varepsilon$  de forma que haya estructura de producto local y si se cumpliera que

$$d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

---

<sup>8</sup>La demostración está basada en argumentos muy similares a los utilizados en [Lew].

se tendría que  $x \in W_\varepsilon^s(y) \cap W_\varepsilon^u(y) = \{y\}$  y por lo tanto  $x = y$ .

◇

### 3.5. Puntos periódicos y sombreado de órbitas.

La idea de esta sección es presentar las herramientas restantes para probar la hiperbolicidad de los difeomorfismos robustamente transitivos. Como se vio, (ver Proposición 2.4.6), lo necesario para culminar la prueba es ver que el diferencial contrae a cero los vectores de  $E$  en el futuro y los de  $F$  al pasado.

Además, se sabe, por el Lema 3.3.2 que los valores propios de los puntos periódicos están alejados exponencialmente de 1 con el período. Entonces, para llegar a la tesis se buscará probar que los puntos periódicos son densos en la variedad y de esta forma probar que se cumplen las hipótesis de la Proposición 2.4.6.

El motivo por el cual se busca encontrar muchos puntos periódicos, se basa en que si un punto no contrae o expande correctamente en alguno de los subespacios de la descomposición, se podrá encontrar un punto periódico cercano, lo cual conducirá a un absurdo, pues esta no contracción o expansión, será “heredada” por el punto periódico y se sabía que la transitividad robusta tenía fuertes implicancias en la hiperbolicidad de los puntos periódicos.

Lamentablemente, ese argumento presenta una dificultad. Para que el punto periódico “herede” las propiedades de contracción o expansión del punto cercano, no basta con que este muy cerca, sino con que durante toda su órbita se mantenga cercano. En otras palabras, se podría tener un punto periódico cercano de período muy grande, que a pesar de acompañar al punto en cuestión por muchos iterados (por estar cerca), luego se aleje durante mucho más tiempo de forma tal de poder alcanzar las condiciones de hiperbolicidad necesarias.

En resumen, no solamente es necesario encontrar muchos puntos periódicos, sino que también es importante que estos puntos periódicos acompañen a los puntos que se desee acompañar. La solución a este problema es una especie de Shadowing Lemma que permitirá concluir la prueba.

Explicado esto, se puede repasar la idea de la prueba. Si el difeomorfismo no fuese hiperbólico, habrían puntos para los cuales en la dirección  $E$  (por ejemplo) no hay contracción. Por lo tanto, si se consigue encontrar un punto periódico muy cercano y que además se mantenga cerca por mucho tiempo, se podrá llegar a un absurdo dado que el punto periódico no tendrá más opción que no tener contracción.

Vale la pena observar, que para esto basta que el punto periódico acompañe al punto durante tiempos arbitrariamente largos siempre y cuando se sepa que el tiempo de “regreso” se mantenga acotado. Es decir, si  $x$  es el punto que no contrae suficiente, basta con encontrar  $p_n \rightarrow x$  de forma tal que el período de  $p_n$  sea  $k_n + N$  donde  $k_n \rightarrow \infty$ ,  $N \in \mathbb{N}$  y se cumpla que la órbita de  $p_n$  acompañe la de  $x$  por  $k_n$  iterados.<sup>9</sup>

**Definición 3.5.1.** A un conjunto  $B \subset M$  se le llamará *caja* si existe un homeomorfismo  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$  que lleva verticales en centro estables y horizontales en centro inestables.

*Observación 3.5.1.* Si  $B$  es una caja, entonces,  $f^k(B)$  también  $\forall k \in \mathbb{Z}$ .

Se le llamará lado estable de la caja a cualquiera de los bordes de esta que corresponda a variedades centro estables. Análogamente, se definen lados inestables. La mejor forma de entender la definición es por medio de un dibujo, ver la figura 3.11.

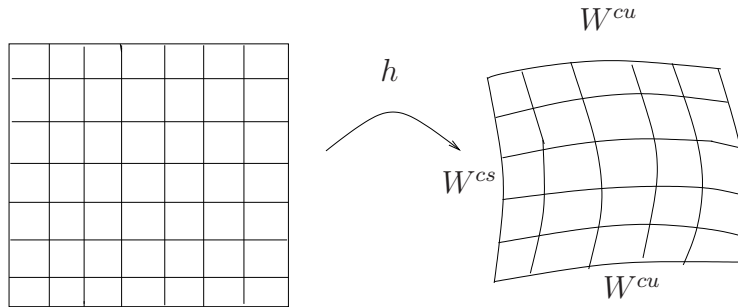


Figura 3.11: Cajas

Antes de pasar a demostrar que se puede encontrar puntos periódicos que acompañen, se probará un Lema que permitirá expresar la idea de la prueba de forma más clara.

**Lema 3.5.1.** *Sea  $B$  una caja tal que existe  $n$  tal que  $f^n(B) \cap B$  es una caja  $C$  cuyos lados estables e inestables están contenidos en los lados estables de  $B$  e inestables de  $f^n(B)$  respectivamente. Entonces, hay un punto fijo de  $f^n$  en  $C$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La idea queda bastante clara en vista de la figura 3.12.

En definitiva, las hipótesis que se requieren aseguran que  $f^n(B)$  “atraviesa” a  $B$ . Como las cajas están foliadas por variedades centro estables y centro inestables que son invariantes, podemos concluir la existencia de una variedad centro estable que es

<sup>9</sup>Los motivos por los cuales esto lleva a un absurdo se profundizarán en la próxima sección.

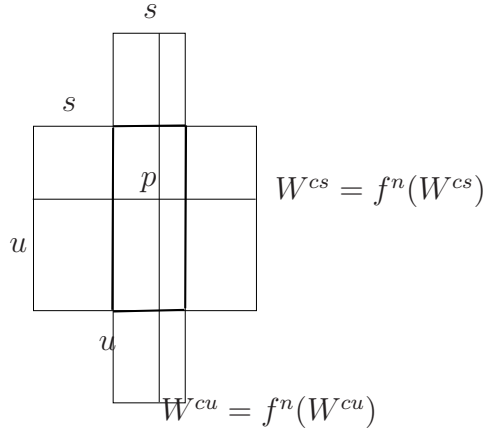


Figura 3.12: Puntos periódicos en el corte de cajas

invariante para  $f^n$  y un centro inestable que es invariante para  $f^n$ . Es claro que el punto de intersección entre ambas será un punto fijo de  $f^n$ .

□

Ahora se pasa a probar el Teorema que se mencionó solucionarían los problemas restantes para probar el teorema central de este capítulo.

**Teorema 3.5.2.** *Sea  $x \in M$  y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo  $C^1$ -robustamente transitivo. Entonces,  $\forall \varepsilon > 0$  existe un  $N > 0$  que satisface que para todo  $n > 0$  existe un punto periódico  $p$  de período  $k + N$  mayor que  $n$  y que verifica que*

$$d(f^j(p), f^j(x)) < \varepsilon \quad \forall 0 \leq j \leq k$$

La idea de la prueba no es complicada pero no es muy sencilla de expresar. Lo recomendable es hacer un dibujo mientras se lee la demostración siguiendo los pasos de esta.

En resumen, se tomará un punto del  $\omega(x)$  al cual se puede acercarse tanto como se desee por iterados arbitrariamente grandes de  $x$ . Al mismo tiempo, se puede ir (gracias a la transitividad) desde cerca del punto límite a muy cerca de  $x$  en una cantidad fija de pasos (ese va a ser el  $N$ ). De esa manera, si se quiere que el período del punto periódico sea muy grande, uno se toma un tiempo muy grande (llámese  $k$ ) para llegar desde  $x$  al punto límite y luego se construye una caja cerca de  $x$  que se atraviese en el iterado  $k + N$ -ésimo. Para eso, se utilizarán las propiedades dinámicas de las variedades centros que se probaron anteriormente.

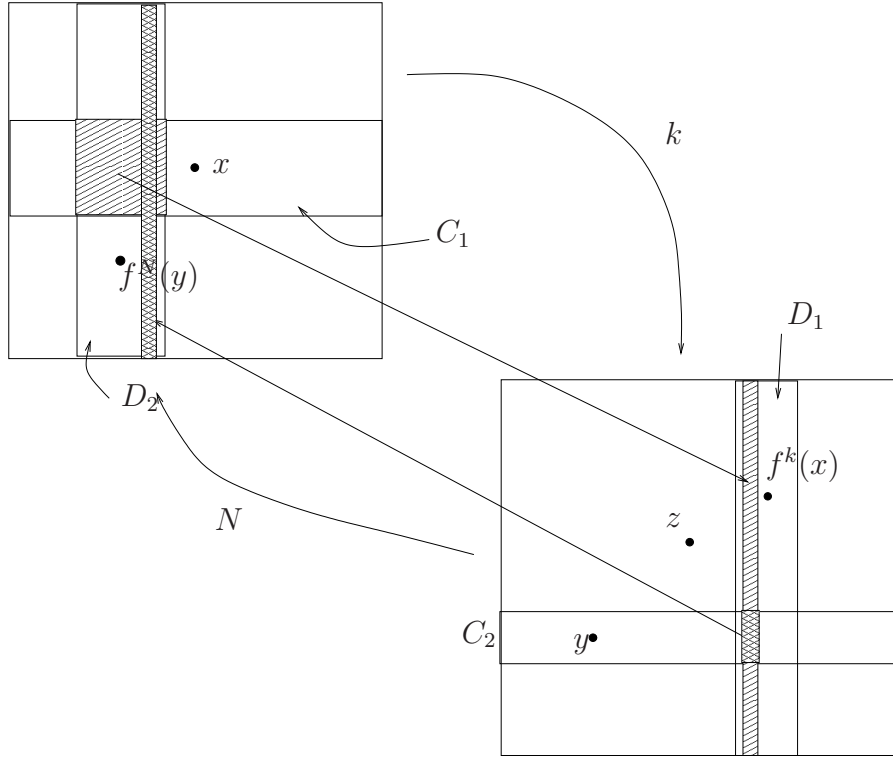


Figura 3.13: Demostración del teorema

DEMOSTRACIÓN. Sea  $z \in \omega(x)$ , entonces, se sabe que existen iterados arbitrariamente grandes de  $x$  que se acercan a  $z$ .

Fijado  $\varepsilon$ , se considera  $\delta$  de forma tal que  $f^n(W_\delta^{cs}(w)) \subset W_\varepsilon^{cs}(w) \forall n > 0, w \in M$  y que  $f^{-n}(W_\delta^{cu}(w)) \subset W_\varepsilon^{cu}(w) \forall n > 0, w \in M$  y se consideran cajas  $B(x)$  y  $B(z)$  centradas en  $x$  y  $z$  respectivamente de forma tal que su diámetro sea menor que  $\delta/2$ .

Utilizando la transitividad, se sabe que hay un punto  $y \in B(z)$  cuya órbita es densa. En particular, su órbita acumula en  $x$ .

Sea  $N$  suficientemente grande de forma tal que  $f^N(W_{loc}^{cs}(y) \cap B(z)) \subset B(x)$ <sup>10</sup> y que  $f^{-N}(W_{loc}^{cu}(f^N(y)) \cap B(x)) \subset B(z)$ . Esto se puede hacer debido a las propiedades dinámicas de las variedades centro ya que como su tamaño tiende a cero, se puede asegurar que a partir de un momento, la longitud de estas variedades es menor que la distancia de  $y$  al borde de  $B(z)$  sobre dos por un lado y menor que  $\delta/4$  al mismo tiempo<sup>11</sup>. Entonces,

<sup>10</sup>Se considera la variedad centro estable local para indicar que es solo la componente conexa de la intersección que contiene a  $y$  lo que interesa.

<sup>11</sup>Es claro que a partir de un momento  $\ell(f^N(W^{cs}(y) \cap B(z)))$  pues su longitud tiende a cero con  $N$ . Para ver que  $\ell(f^{-N}(W^{cu}(f^N(y)) \cap B(x)))$  tiende a cero, se puede proceder por el absurdo observando



tomando un punto cuyo iterado asegure eso y que al mismo tiempo  $f^N(y)$  este a menos de  $\delta/4$  de  $x$  se obtiene lo afirmado.

Ahora, si se fija un valor de  $n > 0$ . Se puede considerar entonces  $k > n$  de forma que se cumplan las siguientes condiciones similares a las que pedimos a  $y$  y  $f^N(y)$ . Por un lado, se busca que  $f^k(W_{loc}^{cs}(x) \cap B(x)) \subset B(z)$  y además, se quiere que  $f^{-k}(W_{loc}^{cu}(f^k(x)) \cap B(z)) \subset B(x)$ . Esto se puede hacer por los mismos argumentos por los cuales valía para  $y$ .

Ahora se va a buscar una caja que en su iterado  $k + N$  se “atraviesa” quedando en las hipótesis del Lema 3.12 y encontrando un punto periódico de período  $k + N$  y que acompaña a  $x$  en sus primeros  $k$  iterados<sup>12</sup>.

Se definen las siguientes cajas (ver figura 3.13),  $C_1 = f^{-k}(B(z)) \cap B(x)$ ,  $C_2 = f^{-N}(B(x)) \cap B(z)$ ,  $D_1 = f^k(C_1)$  y  $D_2 = f^N(C_2)$ .

Se ve que para la caja  $C_1 \cap D_2$  se cumplen las hipótesis del Lema con el iterado  $k + N$ , es decir,  $f^{k+N}(C_1 \cap D_2) \cap (C_1 \cap D_2)$  es una caja cuyos lados estables e inestables están contenidos en los lados estables e inestables de  $C_1 \cap D_2$  y  $f^{k+N}(C_1 \cap D_2)$  respectivamente.

Esto es directo ya que  $f^k(C_1 \cap D_2) \subset D_1$  y atraviesa  $C_2$  (pues va de lado a lado de  $B(z)$ ). Si ahora se ve  $f^k(C_1 \cap D_2) \cap C_2$  y se observa que  $f^N(f^k(C_1 \cap D_2) \cap C_2)$  es una franja de  $D_2$  se llega a lo deseado<sup>13</sup>.

Además, es fácil observar que los puntos de  $C_1 \cap D_2$  se mantienen cercanos a  $x$  durante  $k$  iterados. Esto se debe a que los puntos de  $D_1$  se mantienen a menos de  $\varepsilon$  de  $x$  por  $k$  iterados para el pasado (pues se encuentran en arcos inestables de tamaño  $\delta$ ) y lo mismo pasa para los puntos de  $D_2$  para el futuro.

□

### 3.6. Robustamente transitivo implica Anosov

Las propiedades dinámicas, en vista de la Proposición 2.4.6 que asegura que basta con que  $\|Df^n|_{E(x)}\| \rightarrow 0$  y que  $\|Df^{-n}|_{F(x)}\| \rightarrow 0$  para tener hiperbolicidad, parecerían liquidar el problema, dado que el hecho de que las curvas integrales de los campos  $E$  y  $F$  cumplen que  $\ell(f^n(I_E)) \rightarrow 0$  y  $\ell(f^{-n}(I_F)) \rightarrow 0$  uno podría verse tentado a asegurar que se encuentra en las hipótesis de la Proposición 2.4.6. Lamentablemente esto no es cierto

---

que si no fuese así, encontraríamos un arco atractor, un círculo atractor o una orbita periódica que se puede perturbar a un pozo como ya hicimos en demostraciones anteriores.

<sup>12</sup>Ahora más que recomendable, resulta casi esencial seguir los argumentos con un dibujo.

<sup>13</sup>En realidad, la imagen del resto de la caja podría tener otros cortes, que si bien aleja el problema de las hipótesis del Lema, es claro que el resultado es igual de cierto utilizando la misma demostración.

y se puede observar mediante un muy sencillo ejemplo en dimensión 1.

Sea la siguiente transformación de  $\mathbb{R}$  dada por la función  $f(x) = x - x^3$  que tiene a 0 como punto fijo (ver figura 3.14). 0 como punto fijo no es hiperbólico pues  $f'(0) = 1$  por lo tanto no es cierto que  $(f^n)'(0) = (f'(0))^n$  tienda a 0 (de hecho vale 1 para todo  $n$ ).

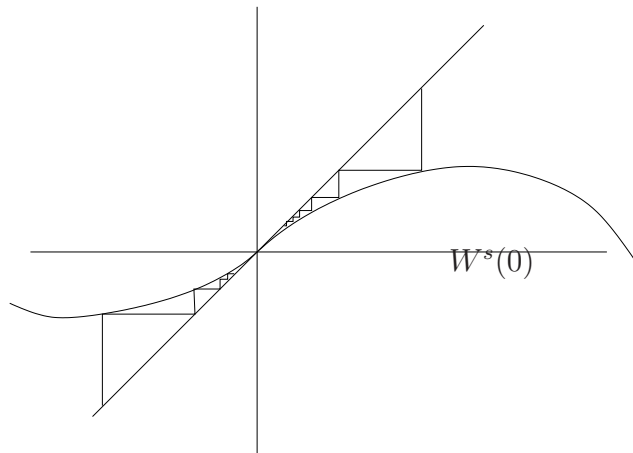


Figura 3.14: Dinámica de  $f(x) = x - x^3$ .

Sin embargo, es fácil corroborar como si se considera un entorno cualquiera  $I$  del 0 (que pertenece a  $W^s(0)$  pues para todo  $x \in \mathbb{R}$  se cumple que  $\lim f^n(x) = 0$  se cumple que  $\ell(f^n(I)) \rightarrow 0$ ).

Por esta razón es que el argumento que se va a realizar en esta sección es un poco más delicado. La idea es la siguiente. Como ya se sabe, por cumplirse que  $f \in \mathcal{F}(M)$  gracias al Lema 3.3.2 que los valores propios de los puntos periódicos están lejos de uno exponencialmente en el período. Será posible ver que si se supone que  $\|Df^n|_{E(x)}\| \rightarrow 0$  se podrán encontrar puntos periódicos con valores propios cercanos a 1 y períodos arbitrariamente grandes. Para eso, se hará uso de los resultados vistos en la sección anterior, en particular del Teorema 3.5.2.

Se llegará a un absurdo de esta forma, dado  $\mu < 1$  podremos encontrar un punto periódico  $p$  (de período  $k$ ) de forma tal que

$$\|Df^k|_{E(p)}\| \geq \mu^k$$

contradiciendo el Lema 3.3.2.

Suponiendo que  $f$  no es Anosov, gracias al Lema 2.3.2 se tiene que existe  $x \in M$  de forma tal que

$$\prod_{i=0}^n \|Df|_{E(f^i(x))}\| = \|Df^n|_{E(x)}\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 0$$

o que pasa algo análogo con  $F$  para el pasado. Por simplicidad se supondrá que pasa lo descrito<sup>14</sup>.

En particular, lo supuesto indica que  $\forall \lambda < 1$  existe un  $y$  de forma tal que

$$\prod_{i=0}^n \|Df|_{E(f^i(y))}\| \geq \lambda^n ; \quad \forall n > 0$$

Esto se debe a que dado  $\lambda < 1$ , como  $\|Df\|$  está acotada, si existiera una sucesión  $\|Df|_{E(f^{n_k}(x))}\| < \lambda$  entonces  $\prod_{i=0}^n \|Df|_{E(f^i(x))}\| \rightarrow 0$  con  $n$ . Por lo tanto, existe  $k_0$  de forma tal que para todo  $k > k_0$   $\|Df|_{E(f^{n_k}(x))}\| > \lambda$  y por lo tanto considerando  $y = f^{k_0}(x)$  se tiene lo deseado.

Ahora, fijado  $\mu < 1$  se pueden considerar valores  $\delta$  de forma tal que  $\lambda(1 - \delta) > \mu$ . Entonces, existe  $\varepsilon > 0$  de forma tal que si  $d(z, w) < \varepsilon$ :

$$\|Df|_{E(w)}\| \geq (1 - \delta)\|Df|_{E(z)}\|$$

Utilizando el Teorema 3.5.2 se obtiene un valor de  $N$  de forma tal que se pueden encontrar puntos periódicos de período arbitrariamente grande que se mantienen a menos de  $\varepsilon$  de la órbita de  $y$  exceptuando a lo sumo, los últimos  $N$  iterados. Entonces, si considerando  $n$  suficientemente grande de forma tal que para todo  $k > n$  valga que

$$\lambda^k(1 - \delta)^k c^N \geq \mu^{k+N}$$

donde  $c$  es la mínima norma del diferencial (es decir que nada es contraído más de  $c$  por el diferencial en un iterado). Es claro que dicho  $n$  existe ya que esa desigualdad se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\lambda(1 - \delta)}{\mu}\right)^k \geq \left(\frac{\mu}{c}\right)^N$$

donde un lado de la desigualdad es una exponencial creciente y el otro una constante.

Visto esto, se puede encontrar un punto periódico  $p$  de período  $k + N$  (usando el Teorema 3.5.2) que va a satisfacer

$$\|Df^{k+N}|_{E(p)}\| \geq \lambda^k(1 - \delta)^k c^N \geq \mu^{k+N}$$

---

<sup>14</sup>La demostración en el otro caso es idéntica.

llegando a un absurdo con el Lema 3.3.2 y concluyendo la prueba del Teorema central de este capítulo (Teorema 1.0.2).

□

## 3.7. Comentarios sobre las pruebas y otros resultados

### 3.7.1. Otros Resultados

El Teorema 1.0.2 fue probado por primera vez en [M2] donde se prueba que en superficies,  $f \in \mathcal{F}(M) \Leftrightarrow f$  es Axioma A y cumple la condición de no ciclos (esto representa una generalización de la conjetura de estabilidad en superficies).

Eso implica que un difeomorfismo robustamente transitivo es Anosov pues por ser robustamente transitivo pertenece a  $\mathcal{F}(M)$  y por ende (gracias al resultado de Mañé) es Axioma A. Pero siendo  $\Omega(f) = M$  y Axioma A, ha de ser Anosov.

Lo que prueba Mañé en [M2] es en realidad mucho más rico, pues en ese artículo prueba que en cualquier dimensión vale que si  $f \in \mathcal{F}(M)$  entonces  $\overline{\text{Per}_j(f)}$  admite descomposición dominada.

Las técnicas utilizadas son similares a las que fueron utilizadas en este capítulo, solo que aparecen dificultades técnicas vinculadas con el hecho de que en dimensiones mayores el álgebra lineal se torna más complicado (por ejemplo, hay que lidiar con formas de Jordan y valores propios complejos conjugados).

Su prueba se distancia de la acá presentada en la forma de obtener puntos periódicos pues utiliza lo que él llamó “Closing Lemma Ergódico” que asegura que si  $\mu$  es una medida invariante, entonces el conjunto de puntos que se pueden “cerrar” (hacer periódicos) mediante una pequeña perturbación y que acompañen a su órbita original durante el período, tiene medida total.

Este resultado fue importante y entre otras cosas, con él probó en [M2] la conjetura de estabilidad para superficies que luego generalizó (sin utilizar el “Closing Lemma Ergódico”), en [M4] probando la conjetura de estabilidad en cualquier dimensión (probó que si  $f$  es  $C^1$ -estructuralmente estable entonces es Axioma A).

Acerca de la obtención de una descomposición dominada a partir de la transitividad robusta es bueno mencionar el resultado de [BDP] que asegura que si  $f$  es  $C^1$ -robustamente transitivo entonces  $M$  admite descomposición dominada para  $f$ . Si bien

se sabe que no se puede probar hiperbolicidad a partir de la transitividad robusta en dimensiones mayores (como será visto en el próximo capítulo) este resultado no es tan completo como en el caso de superficies pues no se conoce una condición suficiente de transitividad robusta <sup>15</sup>.

Las ideas presentadas aquí hay que trabajarlas más para llegar a este resultado pues en dimensiones mayores la no existencia de pozos ni fuentes no prueba que  $f \in \mathcal{F}(M)$  (de hecho, no es necesariamente cierto, como se verá en el próximo capítulo). Una buena introducción a ese resultado se puede encontrar en [BDV].

Dado que se cuenta con más hipótesis, hay otro resultado que se prueba a medias en este capítulo.

**Teorema 3.7.1 (Lema 2.0.1 de [PS1]).** *Sea  $f \in \text{Diff}^1(M)$  y supongamos que existe  $\gamma > 0$  y un entorno  $\mathcal{U}(f)$  de  $f$  de forma tal que para toda  $g \in \mathcal{U}$  y para todo  $p \in \text{Per}_1(g)$  se cumple que*

$$\text{ang}(E_p^s, E_p^u) > \gamma$$

*Entonces, vale que  $\overline{\text{Per}_1(f)}$  admite una descomposición dominada.*

De hecho, en [PS1] se prueba también que lejos de tangencias hay descomposición dominada (como paso intermedio se prueba que lejos de tangencias hay ángulos grandes) y eso permite probar que las tangencias son densas en el complemento de la clausura de los Axioma A en superficies (conjetura de Palis, ver [PT]).

Otra herramienta utilizada en [PS1] para ese objetivo son las técnicas presentadas en la sección 3.4.

Más adelante, en [PS5] Pujals-Sambarino, mejoran esos resultados y prueban el siguiente Teorema (que representa una especie de descomposición espectral para difeomorfismos con descomposición dominada) que entre otras cosas puede ser un paso adelante hacia la prueba del Teorema 1.0.2 en la topología  $C^2$ .

**Teorema 3.7.2 ([PS5]).** *Sea  $f$  un difeomorfismo  $C^2$  en una superficie compacta  $M$  de forma tal que el conjunto límite<sup>16</sup>  $L(f)$  admita una descomposición dominada, entonces,*

<sup>15</sup>Es fácil construir un ejemplo de un difeomorfismo transitivo con descomposición dominada que no es robustamente transitivo. Por ejemplo, el producto de un Anosov en  $\mathbb{T}^2$  por una rotación irracional en el círculo.

<sup>16</sup>El conjunto límite de un homeomorfismo es

$$L(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \omega(x) \cup \alpha(x)}$$

$L(f) = \mathcal{I} \cup \tilde{L} \cup \mathcal{R}$  unión disjunta tal que:

- $\mathcal{I}$  es un conjunto de puntos periódicos de períodos acotados contenidos en una unión disjunta de arcos periódicos atractores o repulsores.
- $\mathcal{R}$  es una unión finita de círculos periódicos cuya dinámica es conjugada a una rotación irracional.
- $\tilde{L}$  se descompone como unión finita y disjunta de compactos transitivos donde los puntos periódicos son densos y a lo sumo finitos de ellos nos son hiperbólicos. Además,  $f|_{\tilde{L}}$  es expansivo.

Pasando al problema de probar el Teorema 1.0.2 en el caso de la topología  $C^2$  es sencillo observar como el Teorema recién expuesto permite probar que si un difeomorfismo  $C^2$ -robustamente transitivo admite descomposición dominada entonces es Anosov, puesto que los conjuntos  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{R}$  violarían la transitividad y argumentos similares a los de este capítulo se pueden utilizar para ver que  $\tilde{L}$  ha de ser hiperbólico.

La prueba entonces radica en demostrar que un difeomorfismo  $C^2$ -robustamente transitivo admite descomposición dominada. Por ejemplo, bastaría con probar que  $C^2$ -lejos de tangencias hay descomposición dominada (siguiendo a [PS1]) pero esto continua abierto.

La dificultad viene dada (entre otras cosas) por que en la topología  $C^2$  no se cuenta con el Lema de Franks (es falso en la topología  $C^2$ , ver [PS5]) ni con el Closing Lemma (problema aún abierto).

### 3.7.2. Otras posibles pruebas

Ya fue comentado que en [M2] lo realizado en las secciones 3.4 y 3.5 es obviado y se utiliza el Closing Lemma Ergódico para conseguir puntos periódicos que acompañen los puntos donde supuestamente no hay hiperbolicidad y llegar a un absurdo como en la sección 3.6.

Otra técnica puede ser eliminar la sección 3.5 y utilizar el hecho de que si  $f$  es  $C^1$ -robustamente transitivo entonces  $f$  es expansivo en  $\mathbb{T}^2$  (ver Observación 3.4.3) y utilizando los resultados de [Lew] se concluye que  $f$  ha de ser conjugado a un Anosov lineal y por lo tanto “hereda” el Shadowing Lemma que permite realizar los argumentos de la sección 3.6.

Ambos caminos fueron realizados con objetivos más ambiciosos y por eso sus pruebas son más complicadas, sin embargo, se consideró interesante mencionarlos, sobre todo

en el caso que algún lector se encuentre familiarizado con estos resultados y le permita ahorrarse gran parte de la maquinaria técnica del capítulo.

### 3.7.3. El caso $\Omega(f) = M$ robustamente

Primero, es fácil observar que la observación 3.2.1, que asegura que un difeomorfismo transitivo no tiene pozos ni fuentes, vale en el contexto de difeomorfismos cuyo conjunto no errante es toda la variedad. La prueba es muy similar, y basta observar que teniendo una conjugación local, con el Teorema de Hartman es muy sencillo encontrar abiertos no errantes en caso de haber un pozo o una fuente (simplemente basta considerar un entorno del punto periódico que no se corte con sus iterados antes del período y encontrar el abierto errante en la conjugación con el lineal).

Fuera de eso, el único momento en el que se utilizó la transitividad en lugar de el hecho de que  $\Omega(f) = M$  robustamente fue en el Teorema 3.5.2 donde se encuentran puntos periódicos que acompañan las órbitas por períodos largos.

Se presentarán algunas formas de salvar eso utilizando algunos resultados más pesados.

Una forma es utilizar el siguiente Teorema conocido como Lema de Pliss (ver [Pl] o [M3] por una prueba). El enunciado que se presentará no es el usual pero es equivalente.

**Teorema 3.7.3 (Lema de Pliss inverso).** *Dado  $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$  y  $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$ , existen, un entero positivo  $N = N(\gamma_1, \gamma_2, f)$  y  $c = c(\gamma_1, \gamma_2, f) > 0$  con la siguiente propiedad: Si  $x \in M$ ,  $S \subset T_x M$  cumple que existe  $n > N$  donde vale (si  $S_i = Df^i(S)$ ),*

$$\prod_{i=0}^n \|Df|_{S_i}\| \geq \gamma_2^n$$

*Entonces, existen  $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_l \leq n$  tal que*

$$\prod_{i=n_r}^{n_r+j} \|Df|_{S_i}\| \geq \gamma_1^j ; r = 1, \dots, l ; 1 \leq j \leq n - n_r$$

*Además,  $l \geq cn$ .*

Como el hecho de que no sea Anosov implica (ver sección 3.6) que  $\forall \lambda > 1$  existe  $y \in M$  tal que

$$\prod_{i=0}^n \|Df|_{E(f^i(y))}\| \geq \lambda^n ; \forall n > 0$$

se esbozará como con ayuda del Lema de Pliss esto conduce a un absurdo.

Con los resultados de la sección 3.4 (de las variedades invariantes), para estar en condiciones de llegar a un absurdo como el de la sección 3.6 (encontrar un punto periódico que acompañe un punto con poca contracción) basta encontrar un punto con poca contracción que luego de una cantidad arbitrariamente grande de iterados retorne cerca de si mismo, de forma de utilizar el argumento de las cajas utilizado en el Teorema 3.5.2.

Esto se logra mediante el Lema de Pliss pues permite encontrar muchos puntos donde no hay buena contracción en ningún paso, entonces, como  $M$  es compacta estos iterados de  $y$  se comenzarán a aglomerar y por lo tanto se encontrará un punto para el cual no hay buena contracción en  $E$  y que retorna cerca de si mismo muchas veces y por lo tanto se puede utilizar el argumento de las cajas (ver Teorema 3.5.2) y encontrar un punto periódico que acompañe y conduzca a un absurdo de la misma forma que en la sección 3.6.

Otra forma de probar esto es utilizar argumentos ergódicos. También se hará un pequeño esbozo sin entrar en detalles.

Si no hay hiperbolicidad entonces, existe una sucesión  $x_m$  de forma tal que

$$\|Df^n|_{E(x_m)}\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall 0 \leq n \leq m$$

Sea

$$\mu_m = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \delta_{f^i(x_m)}$$

se cumple entonces que

$$\int \log \|Df|_E\| d\mu_m \geq \frac{1}{m} \log \frac{1}{2}$$

Por el Teorema de Banach-Alaoglu (ver [Rud]) se cumple que  $\mu_{m_k} \rightarrow \mu$  débilmente y mediante un simple cálculo se puede ver que  $\mu$  ha de ser  $f$ -invariante ([RS]) y verificar que  $\int \log \|Df|_E\| d\mu \geq 0$ .

Como lo que se busca es un punto recurrente (para utilizar el argumento de las cajas, encontrar un punto periódico y llegar a un absurdo) para el cual no haya mucha contracción, bastaría con ver que los promedios temporales de un punto  $x$  recurrente cumplen

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \log \|Df|_{E(f^i(x))}\| \geq 0$$



Siempre que se trate con medidas invariantes existirán puntos recurrentes gracias al Teorema de recurrencia de Poincaré (ver [M3]), para que los promedios sean mayores que 0 hay que utilizar el Teorema de Birkhoff ([M3]) pero sería necesario contar con una medida ergódica que cumpla la condición de la integral del logaritmo. Para eso, se utiliza que toda medida invariante se puede “descomponer” en medidas ergódicas usando el Teorema de Krein-Milman (ver [Rud]) y observando que las medidas ergódicas son extremales ([RS]).

Ver [M2] o [M4] por más detalles sobre estas técnicas.

### 3.7.4. El caso de superficies no orientables

En este capítulo se trabajo con superficies orientables, pero todo el trabajo hecho funciona para superficies no orientables. De hecho, el único momento donde se utilizó el hecho de que  $M$  era orientable fue cuando se concluyó que la existencia de una descomposición dominada en toda la variedad implicaba que la variedad era un toro  $\mathbb{T}^2$ .

Levantando la hipótesis de orientabilidad, quedaría descartar a la botella de Klein que también tiene característica de Euler cero. Eso se logra luego de probar que es un difeomorfismo de Anosov, pues de hecho, tampoco se volvió a utilizar que la variedad era un toro, ni siquiera que era orientable, por lo tanto, se podría haber esperado a probar que era Anosov para concluir que la superficie ha de ser un toro  $\mathbb{T}^2$  (la única superficie que admite un difeomorfismo de Anosov es el toro  $\mathbb{T}^2$ , en [F1] se prueba que un difeomorfismo de Anosov transitivo en una variedad de dimensión menor o igual a 3 ha de ser conjugado a un Anosov lineal en un toro).

# Capítulo 4

## Condiciones Suficientes Para Transitividad Robusta

En este capítulo se buscará encontrar criterios para asegurar la transitividad robusta. Por lo visto en el capítulo anterior, en dimensión 2 se tiene una condición necesaria y suficiente que es ser un difeomorfismo de Anosov en el toro  $\mathbb{T}^2$ .<sup>1</sup> En este capítulo, sin embargo, se presentarán ejemplos de difeomorfismos robustamente transitivos (en dimensiones mayores a 2) que son robustamente no hiperbólicos.

Para probar que dichos ejemplos son robustamente transitivos, se presentará una condición suficiente de transitividad robusta para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos (con la definición de la sección 4.1), y se probará con ella que los ejemplos presentados son robustamente transitivos a pesar de no ser hiperbólicos.

La idea es encontrar una condición que asegura una propiedad más fuerte que la transitividad, que es que alguna foliación (estable o inestable) sea minimal, es decir, que todas sus hojas sean densas.

Para asegurar la robustez de esta propiedad, será necesario pedir condiciones sobre la expansión o contracción exponencial en la dirección central.

La robustez de la no hiperbolicidad, estará dada por el criterio dado por la Observación 2.3.4 que asegura que si en un compacto transitivo  $\Lambda$  hay puntos periódicos hiperbólicos de distinto índice entonces  $\Lambda$  no puede ser hiperbólico.

En particular, se probará el Teorema 1.0.3:

**Teorema 4.0.4.** *Existen difeomorfismos  $C^1$ -robustamente transitivos y  $C^1$ -robustamente no hiperbólicos en variedades de dimensiones mayores o iguales a 3.*

---

<sup>1</sup>Ya fue mencionado que los difeomorfismos de Anosov en  $\mathbb{T}^2$  son estructuralmente estables y son transitivos. Ver [F1], [Lew].

Este capítulo está basado en [PS4] (ver también [PS3] por una exposición más heurística). Para la presentación de los ejemplos, también se tuvieron en cuenta [BDV], [M1] y [Sh1].

## 4.1. Hiperbolicidad Parcial

La definición de descomposición dominada se puede generalizar aún más, permitiendo que haya más de dos subfibrados cumpliendo la misma relación (en general se escriben de derecha a izquierda según la dominación). Un ejemplo particularmente interesante es el de los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos que según el caso pueden ser agregando una condición de contracción en  $E$  (o de expansión en  $F$ ) o simplemente teniendo una descomposición de la forma  $E^s \oplus E^c \oplus E^u$  dominada y que además presente contracción en  $E^s$  y expansión en  $E^u$ .

La exposición es en base a los requerimientos de este capítulo, el lector puede recurrir a [HPS] para las demostraciones. Por una presentación más completa se sugiere [BDV].

Se utilizará la notación  $m\{L\} = \|L^{-1}\|^{-1}$  donde  $L$  es un isomorfismo lineal entre espacios normados. El valor  $m\{L\}$  mide la mínima expansión del operador  $L$ .

**Definición 4.1.1.**  $f : M \rightarrow M$  difeomorfismo es *parcialmente hiperbólico*<sup>2</sup> sii el tangente se descompone en tres subfibrados no triviales  $TM = E^{ss} \oplus E^c \oplus E^{uu}$  invariantes por  $Df$  para los cuales existen constantes  $0 < \lambda < \mu < 1$  para las cuales se cumple que para todo  $x \in M$  vale que

$$\|Df|_{E^{ss}(x)}\| < \lambda \quad \|Df^{-1}|_{E^{uu}(x)}\| < \lambda$$

$$\|Df|_{E^c(x)}\| < \mu^{-1} \quad m\{Df|_{E^c(x)}\} > \mu$$

De la misma forma que en el caso de la descomposición dominada, se puede asegurar la robustez de esta descomposición más general (ver Proposición 2.4.5).

Al igual que fue mencionado en el caso hiperbólico (y que también es válido para el caso de tener descomposición dominada), se puede caracterizar la hiperbolicidad parcial mediante la existencia de conos invariantes cumpliendo ciertas propiedades.

**Teorema 4.1.1.** Sea  $f : M \rightarrow M$  difeomorfismo  $C^1$  de forma tal que existen existen conos  $C_x^s, C_x^{cs}, C_x^{cu}, C_x^u \forall x \in \Lambda$  y existen constantes  $n_0 > 0$  y  $\mu > 1$  tal que:

---

<sup>2</sup>Esta definición tampoco es la más general.

$$(i) \ Df_x^{n_0}(C_x^{u(cu)}) \subset C_{f^{n_0}(x)}^{u(cu)} \text{ y } Df_x^{-n_0}(C_x^{s(cs)}) \subset C_{f^{-n_0}(x)}^{s(cs)}$$

$$(ii) \ \|Df_x^{n_0}v\| > \mu\|v\| \text{ si } v \in C_x^u \text{ y } \|Df_x^{-n_0}v\| > \mu\|v\| \text{ si } v \in C_x^s.$$

(iii) Las dimensiones de los conos  $C^u$  y  $C^{cs}$  son complementarias (suman la dimensión de  $M$ ) al igual que las de  $C^s$  y  $C^{cu}$  y son constantes.

Entonces,  $f$  es parcialmente hiperbólico en toda la variedad.

Se presentarán resultados (sin prueba) acerca de las consecuencias de la hiperbolicidad parcial sobre la existencia de variedades invariantes. La referencia para estos resultados es [HPS]. Como introducción a esos resultados es recomendable leer [Sh2] (que si bien no contiene todas las demostraciones, presenta los resultados y las ideas generales).

Por un lado, se tiene que los fibrados  $E^{ss}$  y  $E^{uu}$  son únicamente integrables y dan lugar a  $\mathcal{F}^{ss}$  y  $\mathcal{F}^{uu}$ .

**Teorema 4.1.2 (Foliaciones Estables e Inestables).** *Sea  $\mathcal{U}$  un entorno de  $f$  de forma tal que toda  $g \in \mathcal{U}$  sea parcialmente hiperbólica con iguales constantes. Entonces, para toda  $g \in \mathcal{U}$  hay dos particiones  $\mathcal{F}^{ss}(g)$  y  $\mathcal{F}^{uu}(g)$  de  $M$  tal que para todo  $x \in M$  el elemento de cada partición que contiene a  $x$  (los denotamos  $\mathcal{F}^{ss}(x, g)$  y  $\mathcal{F}^{uu}(x, g)$ ) es una variedad  $C^1$  de forma tal que  $T_x\mathcal{F}^{ss}(x, g) = E_g^{ss}(x)$  y  $T_x\mathcal{F}^{uu}(x, g) = E_g^{uu}(x)$ . Además, estas subvariedades dependen continuamente (en la topología  $C^1$  en compactos) del punto  $x \in M$  y el difeomorfismo  $g \in \mathcal{U}$ .*

El caso de la variedad centro es más complicado ya que, en general, no es únicamente integrable. Sin embargo, considerando  $E^{cu} = E^c \oplus E^{uu}$  se puede enunciar el siguiente teorema. Se le llamará  $I_\varepsilon$  a la bola de radio  $\varepsilon$  en  $\mathbb{R}^k$  (con  $k$  adecuado).

**Teorema 4.1.3 (Variedad Centro Inestable).** *Sea  $\mathcal{U}$  un entorno de  $f$  de forma tal que toda  $g \in \mathcal{U}$  sea parcialmente hiperbólica con iguales constantes. Existe una función continua  $\Phi : M \times \mathcal{U} \rightarrow \text{Emb}(I_1, M)$  de forma tal que si se le denota  $W_\varepsilon^{cu}(x, g) = \Phi(x, g)(I_\varepsilon)$  entonces:*

- $T_xW_\varepsilon^{cu}(x, g) = E_g^{cu}(x)$ .
- $\forall \varepsilon > 0$  existe  $r = r(\varepsilon)$  que cumple que  $g^{-1}(W_r^{cu}(x, g)) \subset W_\varepsilon^{cu}(g^{-1}(x), g)$ .

Esta claro que como  $W_1^{cu}(x, g)$  es una subvariedad de  $M$  y se puede considerar que hereda su métrica riemanniana, se puede reenunciar el teorema anterior con respecto a esta métrica (y no con respecto a la métrica dada por el encaje).

Por último, se enunciará un Lema que permite asegurar propiedades dinámicas a las variedades centrales siempre que se tenga contracción o expansión exponencial del diferencial en esa dirección. La demostración no es complicada pero se omitirá (es similar a una prueba que si se presentará en la sección 3.4, por una demostración, ver [PS4]).

**Lema 4.1.4.** *Sea  $\mathcal{U}$  un entorno de  $f$  de forma tal que toda  $g \in \mathcal{U}$  sea parcialmente hiperbólica con iguales constantes. Dado  $0 < \lambda < \lambda_1 < 1$  existe  $r_0$  tal que si  $g \in \mathcal{U}$  y  $x \in M$  cumple que*

$$\prod_{j=0}^n \|Dg^{-1}|_{E^{cu}(g^{-j}(x))}\| < \lambda^n \quad 1 \leq n \leq m$$

entonces  $g^{-m}(W_{r_0}^{cu}(x, g)) \subset W_{\lambda_1^m r_0}^{cu}(g^{-m}(x), g)$ .

## 4.2. Primera aproximación

**Definición 4.2.1.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Se dice que su foliación estable<sup>3</sup>  $\mathcal{F}^{ss}$  es *minimal* si  $\mathcal{F}^{ss}(x)$  es densa  $\forall x \in M$ . Se dice que es *robustamente minimal* si existe  $\mathcal{U}(f)$  entorno de  $f$  de forma que  $\forall g \in \mathcal{U}$  se cumple que  $\mathcal{F}^{ss}(g)$  es minimal.

**Proposición 4.2.1.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  parcialmente hiperbólico y  $\mathcal{F}^{ss}$  la foliación estable. Si  $\mathcal{F}^{ss}$  es minimal, entonces  $f$  es transitivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $U$  y  $V$  abiertos. Se considera  $x \in M$ , como  $\mathcal{F}^{ss}$  es minimal, existe  $I \subset \mathcal{F}^{ss}(x) \cap V$  intervalo de variedad estable. Tomemos  $y \in I$  y  $z$  un punto de acumulación de  $\{f^{-n}(y)\}$  ( $f^{-n_j}(y) \rightarrow z$ ). Por ser  $I$  parte de una variedad estable, se cumple que  $\mathcal{F}^{ss}(z) \subset \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n_j}(I)}$  y como  $\mathcal{F}^{ss}(z)$  es densa, se tiene que corta a  $U$  y por lo tanto, existe  $n_0$  de forma tal que  $f^{-n_0}(V) \cap U \neq \emptyset$  y  $f$  es transitivo.

□

*Observación 4.2.1.* Es importante observar que lo importante en la prueba es que  $f^{-n}(y)$  acumule en algún punto cuya variedad estable sea densa. En particular, si se tiene un punto periódico cuya variedad estable es densa y su variedad inestable también, se puede asegurar la transitividad (pues se puede considerar  $y \in W^u(p)$ ).

Vale observar también, que no conociendo eso, nada puede asegurar que la hoja por el punto  $z$  de acumulación de  $f^{-n}(y)$  sea densa.

---

<sup>3</sup>Las mismas definiciones valen para la foliación inestable.

◇

Antes de continuar con el capítulo, se dará una definición que será utilizada a lo largo de este.

**Definición 4.2.2.** Sea  $W^{s(u)}(x)$  la variedad estable (inestable) de un punto de  $M$ . Se dice que es  $(K, \varepsilon)$ -densa si  $\forall y \in M$  se cumple que  $W_K^{s(u)}(x) \cap B(y, \varepsilon) \neq \emptyset$ .

### Una condición para $\mathcal{F}^{ss}$ minimal

Antes que nada, se mostrará como esta condición se cumple en los ejemplos conocidos, en particular, se verá que se cumple en el caso de difeomorfismos de Anosov.

Como se puede ver en el Apéndice A.3, las variedades estables e inestables de los Anosov lineales son densas y por lo tanto, sus foliaciones estables e inestables son minimales.

Para un difeomorfismo de Anosov transitivo<sup>4</sup> cualquiera,  $f : M \rightarrow M$ , se mostrará que las foliaciones estables e inestables son minimales. Esto motivará un criterio más general para el caso de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos.

Primero, es sencillo observar que las variedades estables e inestables de puntos periódicos son densas. Esto se debe a tener en cuenta la demostración del Teorema de Descomposición Espectral 2.3.11 (recordar que los difeomorfismos de Anosov son Axioma A) donde se determinan las piezas básicas como clases de equivalencia homoclínica (dos puntos periódicos son equivalentes si se intersectan sus variedades estables e inestables), como en el caso de un Anosov transitivo  $\Omega(f) = M$  y las clases son abiertas (gracias a la estructura de producto local), la densidad de los puntos periódicos (dada por el Shadowing Lemma 2.3.10) implica la densidad de las variedades estables e inestables.

Vale observar, que este argumento utiliza la conexión de la variedad, en caso contrario se podría tener que el difeomorfismo permute las componentes conexas siendo de todas maneras transitivo y que sus foliaciones trivialmente no sean densas.

Se pasa entonces a probar la siguiente Proposición.

**Proposición 4.2.2.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  difeomorfismo de Anosov transitivo en  $M$  conexa. Entonces,  $\mathcal{F}^{ss}$  es minimal.*

Dado que los difeomorfismos de Anosov son estructuralmente estables, esta Proposición implica que la foliación estable es de hecho, robustamente minimal.

---

<sup>4</sup>Es un problema abierto determinar si existen difeomorfismos de Anosov no transitivos.

DEMOSTRACIÓN. Como fue mencionado, para todo  $p$  periódico, las variedades estables e inestables son densas.

En particular, fijado  $p$  periódico, es sencillo observar que se cumple que  $\forall \varepsilon$ , existe  $K$  de forma tal que  $W^u(p)$  es  $(K, \varepsilon)$ -densa (ver Definición 4.2.2).

Por la estructura de producto local entonces, a menos de cambiar un poco las constantes, se puede asegurar que existen  $\varepsilon, \varepsilon_0$  y  $K$  de forma tal que  $\forall x \in M$  se cumple que  $W_K^u(p) \cap W_\varepsilon^s(x) \neq \emptyset$  y que existe  $D_{\varepsilon_0} \subset W_\varepsilon^s(x)$  un disco de diámetro  $\varepsilon_0$  centrado en un punto de  $W_K^u(p)$ . Se verá ahora que estas condiciones son suficientes para asegurar que  $\mathcal{F}^{ss}$  es minimal.

Se observa que se puede considerar que  $p$  es fijo, pues las foliaciones, al igual que la descomposición del tangente, no cambian al tomar una potencia del difeomorfismo.

Sea  $U$  un abierto de  $M$  y  $x \in M$  un punto cualquiera. Se le llamará  $W \in W^s(p) \cap U$  algún subconjunto compacto.

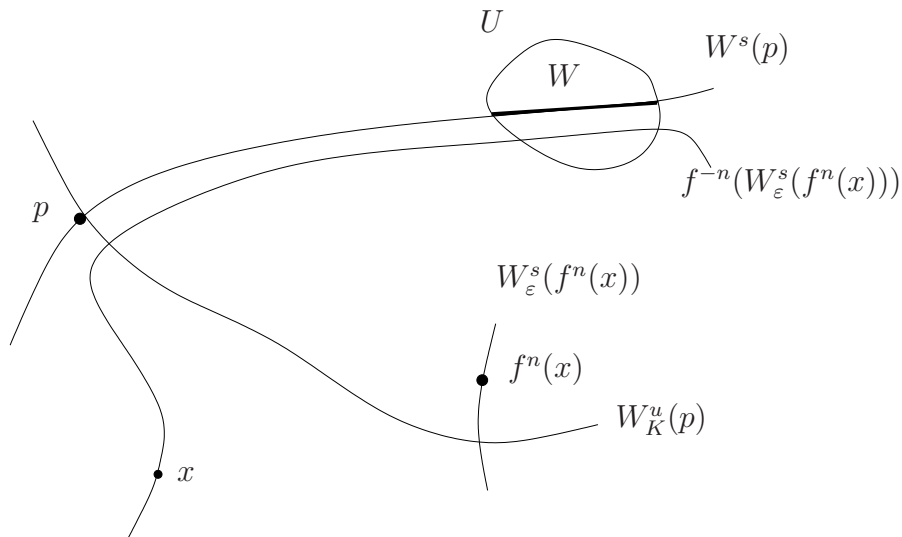


Figura 4.1: Variedades estables densas.

Utilizando el  $\lambda$ -lemma (Teorema 2.2.4) que  $\exists n_0$  de forma tal que si  $D_{\varepsilon_0}$  es un disco de diámetro  $\varepsilon_0$  que corta  $W_K^u(p)$  transversalmente y está centrado en un punto de corte, entonces, se cumple que  $f^{n_0}(D_{\varepsilon_0}) \cap U \neq \emptyset$ .

Ahora, la prueba es sencilla, pues considerando  $f^{n_0}(x)$  se cumple que  $W_\varepsilon^s(f^{n_0}(x))$  contiene un disco  $D_{\varepsilon_0}$  con las propiedades recién mencionadas. Por lo tanto, se tiene que cumplir que  $f^{-n_0}(W_\varepsilon^s(f^{n_0}(x))) \subset W^s(x)$  corte a  $U$  probando que  $W^s(x)$  es densa y concluyendo la prueba.

□

El mismo argumento permite probar el siguiente Lema, más general, que da una condición suficiente para la minimalidad de una foliación dinámicamente definida.

**Lema 4.2.3.** *Sea  $f : M \rightarrow M$  parcialmente hiperbólico con  $TM = E^{ss} \oplus E^c \oplus E^{uu}$  y supongamos que existe un punto periódico  $p$  que verifica que  $E^s(p) = E_p^{ss}$  y  $E^u(p) = E_p^c \oplus E_p^{uu}$  y que también se cumple que  $W^s(p)$  es densa y existen  $\varepsilon, \varepsilon_0$  y  $K$  de forma tal que  $W_\varepsilon^{ss}(x) \cap W_K^u(p) \neq \emptyset \forall x \in M$  y  $W_\varepsilon^{ss}(x)$  contine un disco de diámetro  $\varepsilon_0$  centrado en un punto de intersección. Entonces,  $\mathcal{F}^{ss}$  es minimal.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración está contenida en la de la Proposición anterior, basta observar que estas son las únicas hipótesis utilizadas para llevar a cabo la prueba.

□

### 4.3. Condición suficiente de transitividad robusta

Se presentará una condición que garantiza la transitividad robusta. De hecho, la condición que se introducirá, garantiza una propiedad más fuerte.

**Definición 4.3.1.** Se dice que  $f : M \rightarrow M$  difeomorfismo parcialmente hiperbólico es *robustamente minimal* si existe un entorno  $C^1 \mathcal{U}(f)$  tal que  $\forall g \in \mathcal{U}$  se cumple que  $\mathcal{F}^{ss}(g)$  es minimal (i.e. todas sus hojas son densas)<sup>5</sup>.

La condición suficiente para que un difeomorfismo sea robustamente minimal permitirá probar que los ejemplos que se presentarán, tanto el de Shub como el de Mañe son robustamente transitivos. Eso, terminará probando que además son robustamente no hiperbólicos pues se verá que tienen puntos fijos (o periódicos) hiperbólicos de diferente índice en la misma componente dinámica (por ser transitivo habrá una única componente dinámica) no podrá ser hiperbólico (ver Observación 2.3.4).

La idea es trabajar con difeomorfismos parcialmente hiperbólicos para los cuales una foliación es minimal (por ejemplo,  $\mathcal{F}^{ss}$ ). Para que esta propiedad persista frente a perturbaciones se pedirá algo de expansión en algunos puntos de el fibrado  $E^c$ . No es conocido que esta condición sea necesaria para que la foliación se mantenga minimal frente a perturbaciones, pero facilitará la prueba y es sencillo ver que se verifica en los casos concretos que interesan en este trabajo. Esta condición fue introducida en [PS4].

---

<sup>5</sup>También se hará uso de foliaciones robustamente minimales con el mismo significado.



¿Por qué se pide esa cierta hiperbolicidad en el fibrado  $E^c$ ? La intención es mostrar que la foliación permanece minimal con el conocimiento de que la original lo es. Que la foliación sea minimal da una especie de densidad uniforme de las hojas, es decir, que dado  $\varepsilon$  existe un valor de  $K$  para el cual las hojas de tamaño  $K$  son  $\varepsilon$ -densas (i.e. cortan todo entorno de radio  $\varepsilon$ ).

Fijado el  $\varepsilon$  y el  $K$  se puede encontrar un entorno de el difeomorfismo con la misma propiedad (que las hojas de tamaño  $K$  sean  $\varepsilon$ -densas, pero solamente, en principio, para este valor particular de  $\varepsilon$ )<sup>6</sup>. La idea entonces es que si se elige bien el valor de  $\varepsilon$  dados dos puntos cualesquiera, se cortarán la variedad estable de tamaño  $K$  de uno con la centro inestable (de tamaño arbitrariamente pequeño) del otro.

Entonces, si se pudiese asegurar que la variedad centro inestable de algunos puntos se comporta como variedad inestable será posible mostrar que el difeomorfismo cercano también tiene su foliación estable minimal (con argumentos similares a los utilizados en el Lema 4.2.3). Eso es porque si tomando un abierto cualquiera y un punto en el donde la variedad centro inestable se comporta como inestable, se puede iterar al futuro y ahí cortar con la estable de tamaño  $K$ . Tomando preimágenes, se podrá asegurar que la estable (por la invariancia) cortará el abierto deseado.

La hiperbolicidad en algunos puntos (que garantizará que algunas variedades centro inestables se comporten como estables utilizando lo visto en la Sección 4.1) se expresará mediante la siguiente propiedad que se le llamará Propiedad SH (siguiendo a [PS4], que asumo refiere a “Some Hyperbolicity”). Lo importante de esta propiedad, y de hecho es la parte más trabajosa de la prueba, es que así considerada (ese algo de hiperbolicidad) es robusta frente a perturbaciones  $C^1$ .

**Definición 4.3.2.** Sea  $f \in \text{Diff}^1(M)$  parcialmente hiperbólico. Se dice que  $f$  exhibe la Propiedad SH si  $\exists \lambda_0 > 1$  y  $C > 0$  tal que para todo  $x \in M$  existe un  $y^u \in \mathcal{F}_1^{uu}(x, f)$  que verifica

$$m\{Df^n|_{E^c(f^m(y^u))}\} > C\lambda_0^n \quad \forall n, m > 0$$

El Teorema que da una condición suficiente para que las foliaciones sean robustamente minimales es el siguiente.

**Teorema 4.3.1 (Pujals-Sambarino [PS4]).** Sea  $f \in \text{Diff}^1(M)$  parcialmente hiperbólico que satisface la Propiedad SH y tal que  $\mathcal{F}^{ss}(f)$  es minimal. Entonces,  $\mathcal{F}^{ss}(f)$  es robustamente minimal.

---

<sup>6</sup>En realidad las constantes se tienen que tomar con más cuidado pero eso se hará con cuidado en la prueba para la prueba

La idea de la prueba consiste en probar antes que nada que la Propiedad SH es robusta y luego ver como implica que algunas variedades centro inestables se comportan como inestables (además de ver que son suficientes las que tienen ese comportamiento). La prueba del Teorema será pospuesta para la próxima sección.

### 4.3.1. Ejemplos no hiperbólicos de difeomorfismos robustamente transitivos.

Además de los difeomorfismos de Anosov, existen varios ejemplos de difeomorfismos robustamente transitivos. Algunos de los fenómenos que dan lugar a estos difeomorfismos son:

1. Perturbados de tiempos-uno de flujos de Anosov transitivos (no son de Anosov por tener la dirección del flujo que no expande ni contrae, son parcialmente hiperbólicos por ese motivo, ver [BD]).
2. Productos cruzados de Anosov y derivados de Anosov (Ejemplo de Shub, [Sh1]).
3. Derivados de Anosov en dimensiones altas (Ejemplo de Mañe, [M1] y también ver [BV] por un ejemplo no parcialmente hiperbólico).
4. Intersecciones robustas entre variedades estables e inestables de puntos periódicos con distinto índice (Ciclos Heterodimensionales, ver [D] y [BD]).

El objetivo de esta sección es presentar los ejemplos 2 y 3, para probar el Teorema 1.0.3. El Teorema queda completamente probado a partir del ejemplo de Mañe, y queda probado para dimensiones mayores o iguales a 4 con el ejemplo de Shub. Si bien eso indica que no es necesario introducir el ejemplo de Shub, se presenta para mostrar diferentes tipos de ejemplo.

#### Ejemplo de Shub

Se estudiará un ejemplo presentado en [Sh1] (también se encuentra en [HPS], capítulo 8), la exposición estará basada en [PS3] y [BDV].

La idea es la siguiente, se busca un difeomorfismo transitivo (en realidad robustamente transitivo) y no hiperbólico. Como ya fue mencionado, el mecanismo que se utilizará para crear no hiperbolicidad es obtener puntos periódicos de distinto índice

(recordar la Observación 2.3.4) en la misma pieza dinámica, en este caso, como se busca que el difeomorfismo sea transitivo, dos puntos periódicos cualquiera con distinto índice.

Una primera aproximación podría ser tomar un producto entre un Anosov y un derivado del Anosov (en  $\mathbb{T}^2$  cada uno, o sea, el resultante sería en  $\mathbb{T}^4$ ) y de esta manera lograr puntos periódicos de índice 2 y de índice 1 (suponiendo que se hace un DA con un pozo). Sin embargo, es fácil ver que este ejemplo no es transitivo pues como no lo es el DA (se eligió de forma de tener un pozo) se pueden considerar en la “segunda coordenada” dos abiertos que no se corten,  $U, V$  por iterados del DA y considerando entonces los abiertos  $\mathbb{T}^2 \times U$  y  $\mathbb{T}^2 \times V$  se contradice la transitividad.

Para solucionar esto, lo que se hace es tomar un producto cruzado con cierto cuidado. Se presentará una construcción particular, pero puede ser hecha con más generalidad (ver [PS3] o [BDV]).

Sea  $a : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  un difeomorfismo de Anosov lineal y  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  una potencia de este suficientemente grande, en particular, teniendo 2 puntos fijos,  $p$  y  $q$ .

Sea también  $g : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  (también puede ser pensado como  $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{D}iff^1(\mathbb{T}^2)$ ) de forma tal que  $g_x = a$  para todo punto fuera de un pequeño entorno  $U$  de  $q$  que no contiene a  $p$ .  $G_q$  es un DA de  $g$  para el cual  $p$  es un punto fijo atractor. La deformación al DA se hace en el entorno  $U$  con la isotopía presentada en el Apéndice A.3 en cada “rayo” que une  $q$  con el borde de  $U$  (ver figura 4.2) manteniendo en todo momento a  $p$  como punto fijo.

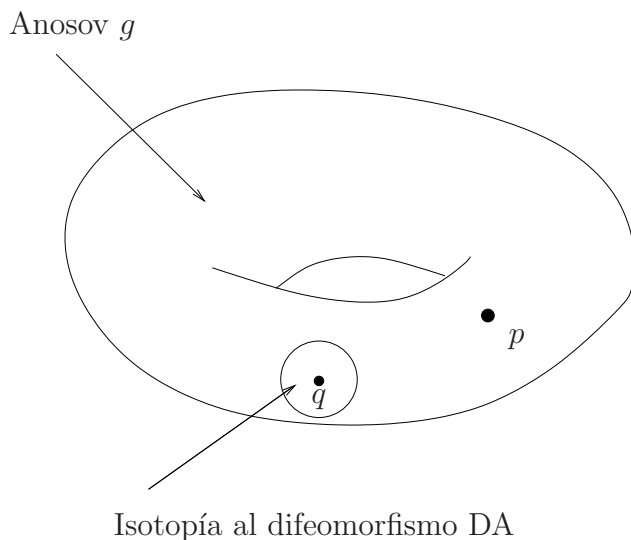


Figura 4.2:  $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{D}iff^1(\mathbb{T}^2)$

De esta manera, no es difícil ver que el producto cruzado entre  $f$  y  $g$  es parcialmente hiperbólico. Se recuerda que el producto cruzado es  $F : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$  dado por

$$F(x, y) = (f(x), g_x(y))$$

Por un lado, se tiene que la foliación  $\{x\} \times \mathbb{T}^2$  es invariante. Por otro lado, es sencillo ver que se cumple que

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} Df_x & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & D(g_x)_y \end{pmatrix}$$

Recordar que  $f = a^n$  con  $n$  suficientemente grande. Sea  $\{e_1, e_2\}$  una base (paralela, si se desea se puede pensar en el levantamiento, recordar que  $f$  es un Anosov lineal) de  $T\mathbb{T}^2$  de forma tal que en ella valga

$$Df_x = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

Sea también  $\{e_3, e_4\}$  una base (de la misma forma) para la cual

$$D(g_x)_y = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Donde  $\lambda < \mu < 1$  y  $\gamma$  variando en  $(\mu, \mu^{-1}]$ . Además, se puede asumir que si se toma un  $n$  suficientemente grande (donde  $f = g^n$ ) los valores propios de  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$  se encuentren acotados por un valor suficientemente pequeño en comparación con  $\lambda^{-1}$ .

La inversa de  $DF(x, y)$  en esta base será de la siguiente forma

$$DF^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} & 0 \\ A & \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

donde  $A$  también se puede considerar acotado por un valor pequeño en comparación con  $\lambda^{-1}$ .<sup>7</sup>

Es fácil entonces ver, si se considera  $v_i$  la proyección de un vector  $v \in T\mathbb{T}^4$  sobre  $e_i$  se cumple que los conos

---

<sup>7</sup>Acotando groseramente, si se le pide a  $\lambda^{-1}$  que verifique que  $\lambda^{-1} > 100\mu^{-1}$  y que si  $K$  es una cota de los valores propios de  $\frac{\partial g}{\partial x}$  y de  $A$ , entonces  $\lambda^{-1} - K > \frac{\lambda^{-1}}{2}$  es suficiente para que  $F$  sea parcialmente hiperbólico. Se hará alguna cuenta para mostrar como se utilizan las cotas.

$$C^{ss} = \{v \in T\mathbb{T}^4 \quad : \quad \|v_1\| \geq \|v_2 + v_3 + v_4\|\}$$

$$C^s = \{v \in T\mathbb{T}^4 \quad : \quad \|v_1 + v_3\| \geq \|v_2 + v_4\|\}$$

y

$$C^{cs} = \{v \in T\mathbb{T}^4 \quad : \quad \|v_1 + v_3 + v_4\| \geq \|v_2\|\}$$

son invariantes para el pasado (y además los conos  $C^{ss}$  y  $C^s$  tienen expansión exponencial) mientras que los conos

$$C^{uu} = \{v \in T\mathbb{T}^4 \quad : \quad \|v_2\| \geq \|v_1 + v_3 + v_4\|\}$$

y

$$C^{cu} = \{v \in T\mathbb{T}^4 \quad : \quad \|v_1 + v_3\| \leq \|v_2 + v_4\|\}$$

son invariantes para el futuro (con expansión exponencial en el cono  $C^{uu}$ ). Se realizará una de las comprobaciones, el resto es idéntica: sea  $v \in C^{uu}$  por lo tanto, en coordenadas  $v$  se escribe como  $(a, b, c, d)$  donde se cumple que  $|b| \geq |a| + |c| + |d|$ . Al aplicar  $DF$  se tiene que

$$DF((a, b, c, d)) = (\lambda a, \lambda^{-1}b, \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)_1 + \mu c, \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)_2 + \gamma d)$$

Si  $\lambda^{-1}$  es grande en comparación a los valores propios de  $\frac{\partial g}{\partial x}$  es posible suponer que (por ejemplo)  $|\lambda^{-1}b| - |\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)_1| - |\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)_2| > \lambda^{-1}\frac{b}{2}$ . Y además, se asumiendo que  $\lambda^{-1} > 2\mu^{-1}$  se concluye que  $DF((a, b, c, d)) \in C^{uu}$  y además, es fácil ver como la norma de  $v$  crece con  $DF$ , ya que si se tiene en cuenta que  $\|v\| \leq 4|b|$  es fácil ver como tomando  $\lambda^{-1} > 10$  se tiene que  $\|DF(v)\| \geq 5|b|$  dando expansión exponencial. El resto de las cuentas son iguales salvo por ver que  $C^s$  expande a los vectores para lo cual hay que pedir que la cota de los valores propios de  $A$  sea pequeña en relación a  $\mu^{-1}$  lo cual no es difícil de lograr pues la isotopía se puede hacer “despacio”.

Este argumento permite obtener una descomposición de  $T\mathbb{T}^4 = E^{ss} \oplus E^s \oplus E^c \oplus E^{uu}$  parcialmente hiperbólica donde el espacio estable es  $E^{ss} \oplus E^s$ .

Es importante observar que  $E^{ss}$  y  $E^{uu}$  no van a ser los espacios estables e inestables de  $f$  y tampoco vale que  $E^s$  y  $E^c$  sean los espacios estable y centro de  $g_q$ .

Se verá que la foliación estable  $\mathcal{F}^{ss}$  (tangente a  $E^{ss} \cup E^s$ ) es minimal (siguiendo a [PS3]). Se utilizará la siguiente notación:  $W^s(\alpha, h)$  denotará la variedad estable de el punto  $\alpha$  con respecto a la transformación  $h$ ; la misma notación la aplicaremos para variedades inestables, centro, centro estable, estable fuerte, etc. y para variedades estables e inestables de tamaño dado. Cuando no se especifique la transformación  $h$  referirá a  $F$ .

Es muy sencillo observar que

$$W^s(\{p\} \times \mathbb{T}^2) = \bigcup_{z \in \mathbb{T}^2} W^{ss}((p, z)) = W^{ss}(p, f) \times \mathbb{T}^2$$

Esto se puede ver de la siguiente forma. Todo punto que converja a  $\{p\} \times \mathbb{T}^2$  acompañará a una órbita de  $\mathbb{T}^2$  pues cerca de  $\{p\} \times \mathbb{T}^2$   $F$  es un producto entre 2 Anosov y por lo tanto, para estar en  $W^s(\{p\} \times \mathbb{T}^2)$  ha de pertenecer a  $W_\varepsilon^{ss}(p, f) \times \{z\}$  con  $z \in \mathbb{T}^2$ . Por lo tanto, como  $W^{ss}((p, z)) = \bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(W_\varepsilon^{ss}(p, f) \times \{z\})$ . Esto prueba que  $W^s(\{p\} \times \mathbb{T}^2) \subset \bigcup_{z \in \mathbb{T}^2} W^{ss}((p, z))$ , la otra inclusión es trivial al igual que la otra igualdad.

Por lo tanto, se ve que  $W^s(\{p\} \times \mathbb{T}^2)$  es claramente denso en  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$  por serlo  $W^{ss}(p, f)$  en  $\mathbb{T}^2$ .

Se cumple también que

$$W^s((p, p)) = \bigcup_{w \in W^s(p, g_p)} W^{ss}(p, w)$$

pues si  $(x, y) \in \bigcup_{w \in W^s(z, g_p)} W^{ss}(p, w)$  entonces  $(x, y) \in W^{ss}(p, w)$  donde  $w \in W^s(z, g_p)$  por lo tanto  $F^n((x, y)) \rightarrow (p, z)$  ya que

$$F^n((x, y)) = (f^n(x), g_{f^n(x)} \circ \dots \circ g_x(y))$$

y por ser  $g_p$  Anosov lineal,  $W^s(z, g_p)$  es denso en  $\mathbb{T}^2$ , por lo tanto,  $W^s((p, z))$  es denso en  $W^s(\{p\} \times \mathbb{T}^2)$  y por lo tanto en  $\mathbb{T}^4$ . En particular, vale que  $\mathcal{F}^{ss}((p, p))$  es densa en  $\mathbb{T}^4$ .

Observando que

$$F^{-1}(x, y) = (f^{-1}(x), (g_{f^{-1}(x)}})^{-1}(y))$$

se puede concluir también que

$$W^u(\{p\} \times \mathbb{T}^2) = \bigcup_{z \in \mathbb{T}^2} W^{uu}((p, z)) = W^u(p, f) \times \mathbb{T}^2$$

por el mismo argumento ya que localmente (cerca de  $p$ )  $F$  es un producto y por lo tanto  $W^{uu}((p, z)) = F^n(W_\varepsilon^u(p, f) \times \{z\})$ . De la misma manera, se observa que

$$W^u((p, p)) = \bigcup_{w \in W^u(p, gp)} W^{uu}(p, w)$$

concluyendo de igual manera que  $W^u((p, p))$  es densa.

En particular, se obtuvo que  $W^s((p, p))$  y  $W^u((p, p))$  son densas permitiendo, a partir del Lema 4.2.3, probar que  $\mathcal{F}^{ss}$  es minimal (observar que por ser  $\mathcal{F}^{ss}$  de dimensión 2 de igual forma que  $W^u((p, p))$  y por ser transversales, la densidad de  $W^u((p, p))$  hace que se cumplan las hipótesis del Lema).

De esta manera, gracias a la Proposición 4.2.1 el difeomorfismo es transitivo y por la Observación 2.3.4 no puede ser hiperbólico (es transitivo y  $(p, p)$  es un punto fijo de índice 2 mientras que  $(q, p)$  es de índice 1). Si se prueba que la transitividad es robusta, automáticamente se probará que la no hiperbolicidad también lo es, pues los puntos fijos hiperbólicos no pueden cambiar de índice bajo pequeñas perturbaciones.

Ver que el difeomorfismo es robustamente transitivo sale de aplicar el Teorema 4.3.1 que, verificandose sus hipótesis aseguraría que el difeomorfismo es robustamente minimal y por lo tanto robustamente transitivo. Habiendo probado que  $F$  es parcialmente hiperbólico y que  $\mathcal{F}^{ss}$  es minimal, resta ver que se verifica la Propiedad SH.

Esto es bien sencillo pues no es difícil observar (dado que  $W^s(\{p\} \times \mathbb{T}^2)$  es denso) que existen  $\varepsilon$  y  $K$  de forma tal que  $\forall (z, w) \in \mathbb{T}^4$

$$\mathcal{F}_\varepsilon^{uu}((z, w)) \cap W_K^s(\{p\} \times \mathbb{T}^2) \neq \emptyset$$

Asegurando la Propiedad SH pues se tiene que para un punto de intersección (llamémoslo  $y^u$ ) valdrá que a partir de cierto valor  $n_0$  (que no dependerá de  $(z, w)$  pues se tiene que existe  $n_0$  para el cual  $F^{n_0}(W_K^s(\{p\} \times \mathbb{T}^2))$  está contenido en la región donde  $F$  es un producto de dos Anosov lineales) se cumplirá que  $y^u$  tendrá expansión exponencial en la dirección central, es decir, valdrá que existe  $\sigma > 1$  de forma tal que

$$m\{DF^n|_{E^c(F^m(y^u))}\} > \sigma^n \quad \forall n > 0 \text{ y } \forall m \geq n_0$$

y esto valdrá para todo  $(z, w)$  y con la misma constante  $\sigma$ . Como  $n_0$  no depende de  $(z, w)$ , se puede encontrar un valor de  $C$  de forma tal que

$$m\{DF^n|_{E^c(F^m(y^u))}\} > C\sigma^n \quad \forall n > 0 \text{ y } \forall m \geq 0$$

verificando la Propiedad SH.

Esto concluye la prueba del Teorema 1.0.3 para dimensiones mayores o iguales a 4 (observar que el difeomorfismo  $f$  podría ser tomado en  $\mathbb{T}^n$  con  $n \geq 2$  sin cambiar ningún argumento).

### Ejemplo de Mañe

El ejemplo de Mañe permitirá completar la prueba del Teorema 1.0.3 aunque por sí sólo la completa pues el ejemplo se puede realizar en  $\mathbb{T}^n$  con  $n \geq 3$  obteniendo en esas variedades difeomorfismos robustamente transitivos y robustamente no hiperbólicos.

Este ejemplo fue propuesto por Mañe en [M1] consiguiendo un difeomorfismo robustamente transitivo no hiperbólico en una variedad de dimensión 3 a decir el toro  $\mathbb{T}^3$ . De nuevo la exposición se apoyará en [PS3] y [BDV].

La idea de este ejemplo es aprovechar que en dimensión 3 hay dos formas en las cuales un punto periódico hiperbólico no sea un atractor o repulsor (índice 1 o 2) y entonces un Anosov con índice 2 y deformarlo (mediante un DA) en un punto para que tenga índice 1 teniendo cuidado de no perder la transitividad.

Se parte de un Anosov lineal  $A : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  con valores propios  $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2 < \lambda_3$  para el cual la matriz asociada es diagonalizable y por lo tanto se pueden integrar tres foliaciones (una asociada a cada valor propio) que son cada una densa en todo  $\mathbb{T}^3$ .

Ahora se puede hacer un derivado de Anosov en un pequeño entorno del punto fijo  $p = \pi(0)$  de forma tal de no alterar la foliación dada por el valor propio  $\lambda_2$  (que ahora será una foliación central por pasar de ser valor propio mayor a menor que uno). La construcción se puede hacer igual que en el Apéndice A.3 perturbando únicamente el valor propio  $\lambda_2$  al diagonalizar.

Es sencillo observar que la perturbación creará dos nuevos puntos fijos con índice diferente que  $p$  pues al mantenerse la foliación central y expandir lejos de la perturbación pero contraer en  $p$ , inevitablemente aparecerán dos nuevos puntos fijos con índice 2 a diferencia de  $p$  que pasará a tener índice 1.

Se puede ver que es posible realizar esta construcción y tener transitividad, el argumento que se utilizará, siguiendo a [PS4], se basará en que esta construcción (la del derivado del Anosov) es isotópica a un Anosov y por lo tanto, si se piensa como una deformación a un parámetro, va a existir un valor de frontera donde dejará de ser Anosov (aunque se mantendrá conjugado) y allí se probará la transitividad robusta, concluyendo en definitiva que hay abiertos robustamente no hiperbólicos en  $\mathbb{T}^3$  de difeomorfismos transitivos.

Siguiendo a [PS4] se trabajará con una variante del ejemplo de Mañe que permite



ver que hay abiertos de difeomorfismo de  $\mathbb{T}^n$  ( $n \geq 3$ ) que son robustamente transitivos y robustamente no hiperbólicos.

Si se considera un difeomorfismo de Anosov  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  con descomposición  $T\mathbb{T}^n = E^{ss} \oplus E^u \oplus E^{uu}$  de forma que ninguno de los subfibrados sea trivial (en particular obligando que  $n \geq 3$ ). Se asumirá por simplicidad, que  $\dim(E^u) = 1$  (si se desea para que sea aun más visual, se puede suponer  $n = 3$ ).

Se toma un entorno  $U$  de un punto fijo  $p$  de  $f$  y se considera una isotopía  $g_t : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  soportada en  $U$  con  $t \in [0, 1]$  de forma tal que  $g_0 = f$  y que  $g_t$  sea Anosov para todo  $t \in [0, 1)$  (recordar que los Anosov son abiertos).

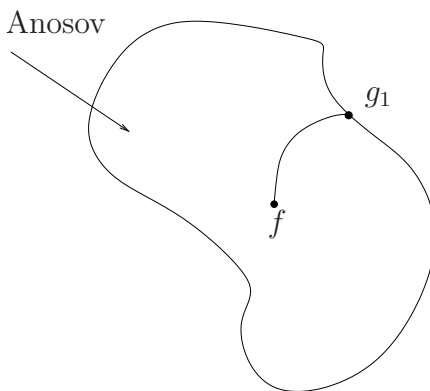


Figura 4.3: Construcción del Derivado de Anosov

Se puede suponer que  $g_1$  no es Anosov, pero si tendrá asociados subespacios invariantes de la forma  $T\mathbb{T}^n = E^{ss}(g_1) \oplus E^c(g_1) \oplus E^{uu}(g_1)$  (recordar que sólo se modifica el valor propio correspondiente a  $E^u$ ) que será invariante como se puede fácilmente observar tomando límites de los subespacios  $E^{uu}$ ,  $E^{ss}$  y  $E^u$  de  $g_t$  con  $t \rightarrow 1$ .

Además, se puede observar que  $g_1$  es conjugado a  $f$ .<sup>8</sup>

La conjugación permite concluir que la foliación  $\mathcal{F}^{ss}(g_1)$  es minimal. Para ver que cumple la propiedad SH basta observar que si se toma  $U$  suficientemente pequeño se

---

<sup>8</sup>Esto se puede probar de la siguiente forma, con la misma idea utilizada en [Lew]. Por estar en la misma clase de isotopía del lineal, se tiene una semiconjugación (pues se puede ir al levantamiento y utilizar la propiedad del sombreado de los mapas lineales hiperbólicos), entonces basta probar que  $g_1$  es expansivo con constante de expansividad infinita para probar que existe la conjugación. Eso no resulta muy complicado pues se tiene que en las direcciones  $E^{ss}$  y  $E^{uu}$  hay trivialmente, y en la dirección  $E^c$  que podría ser la complicada, si se hace con cuidado la isotopía, también se cumple pues es solo en un entorno que se modifica el comportamiento y solo en un punto que hay derivada de módulo 1 por estar en la frontera .

puede ver que para cualquier punto  $x \in \mathbb{T}^n$  tiene que haber un punto en  $\mathcal{F}_1^{uu}(x, g_1)$  de forma que su órbita futura no entra a  $U$  en ningún momento.

Para encontrar dicho punto se puede proceder por inducción como se explicará. Antes, se puede suponer que todo arco inestable fuerte de longitud 1 tiene un arco de tamaño  $\varepsilon$  fuera de  $U$  (basta elegir  $U$  suficientemente pequeño). Al mismo tiempo, se puede también suponer que la expansión  $\lambda$  en la dirección inestable fuerte verifica que  $\lambda\varepsilon > 1$  (para esto basta elegir el Anosov inicial con suficiente expansión en la dirección inestable). Ahora, dado  $x$ , hay un arco de longitud  $\varepsilon$  en  $\mathcal{F}_1^{uu}(x, g_1)$  que no corta  $U$ . Al iterar ese arco, se obtiene un arco de longitud mayor que 1 que por lo tanto tiene un subarco de longitud  $\varepsilon$  que no corta  $U$ . De esta manera (tomando la preimagen de ese arco) se encuentra un arco en  $\mathcal{F}_1^{uu}(x, g_1)$  que no corta a  $U$  y que su primer iterado tampoco. De esta manera, se puede construir una sucesión encajada de arcos en  $\mathcal{F}_1^{uu}(x, g_1)$  los cuales no cortan  $U$  en sus primeros  $n$  iterados. La intersección de sus clausuras será un punto cuya órbita futura no entra a  $U$  y por lo tanto, un punto para el cual la dirección central se comporta como inestable pues el punto no se ve afectado por la perturbación. Esto prueba que  $g_1$  cumple la propiedad SH como se buscaba.

Para concluir, se observa que tan cerca como se desee de  $g_1$  hay difeomorfismos derivados de Anosov arbitrariamente cercanos y por lo tanto también robustamente transitivos. Como estos poseen puntos periódicos o fijos con distintos índices, se concluye también que son robustamente no hiperbólicos.

Esto concluye la prueba del Teorema 1.0.3 a menos de la prueba del Teorema 4.3.1.

## 4.4. Demostración de la condición suficiente

En esta sección se probará el Teorema 4.3.1. Como fue mencionado, eso requerirá probar que la propiedad SH es robusta si  $\mathcal{F}^{ss}$  es minimal. La prueba de la robustez de la propiedad SH se dejará para el final, enunciando antes el resultado.

**Teorema 4.4.1.** *Sea  $f \in \text{Diff}^1(M)$  parcialmente hiperbólico que exhibe la propiedad SH. Entonces, existe  $\mathcal{U}(f)$  entorno  $C^1$ ,  $C' > 0$  y  $\sigma > 1$  tal que para todo  $g \in \mathcal{U}$  y  $\forall x \in M$  se cumple que existe un  $y^u \in \mathcal{F}_1^{uu}(x, g)$  tal que*

$$m\{Dg^n|_{E^c(g^m(y^u))}\} > C'\sigma^n \quad \forall n, m > 0$$

La prueba estará fuertemente basada en los resultados de la Sección 4.1.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.3.1.

Sean  $\mathcal{U}_1$ ,  $C'$  y  $\sigma$  dados por el Teorema 4.4.1.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $C' = 1$  (pues se puede tomar iterados de todas las  $g \in \mathcal{U}_1$  ya que las variedades estables e inestables serán las mismas).

Fijado un valor de  $\delta > 0$ , como  $\mathcal{F}^{ss}(f)$  es minimal, existe un valor de  $K$  tal que  $\mathcal{F}_K^{ss}(x, f)$  es  $\delta/2$ -densa para todo  $x \in M$  <sup>9</sup>.

Ahora se busca que todas las estables corten centro inestables suficientemente pequeñas, de forma tal que cuando se utilize la propiedad SH para darles propiedades inestables se pueda llevar las estables a donde se desee.

Para darles propiedades inestables a las variedades centro inestables (se recuerda que la centro inestable denota la que integra  $E^c \oplus E^{uu}$ ) se utilizará el Lema 4.1.4 en cuyas hipótesis se puede identificar una propiedad similar a la SH.

Para eso, se considera  $\lambda = \sigma^{-1}$ , un valor de  $\lambda_1$  tal que  $0 < \lambda < \lambda_1 < 1$  y un valor de  $r_0$  de forma tal que si  $g \in \mathcal{U}_1$  y  $x \in M$  cumple que

$$\prod_{j=0}^n \|Dg^{-1}|_{E^{cu}(g^{-j}(x))}\| < \lambda^n \quad 1 \leq n \leq m$$

entonces se sabe que  $g^{-m}(W_{r_0}^{cu}(x, g)) \subset W_{\lambda_1^m r_0}^{cu}(g^{-m}(x), g)$  (ver Lema 4.1.4). Esta es la propiedad inestable de las variedades centro inestables.

Ahora, si se elige  $\delta$  suficientemente pequeño, se puede suponer que

$$\mathcal{F}_K^{ss}(x, f) \cap W_{r_0/2}^{cu} \neq \emptyset \forall x, z \in M \Rightarrow \exists \mathcal{U}(f) \subset \mathcal{U}_1 \text{ tal que } \forall g \in \mathcal{U} \text{ y } x, z \in M$$

$$\text{vale que } \mathcal{F}_{2K}^{ss}(x, g) \cap W_{r_0}^{cu}(z, g) \neq \emptyset$$

Se probará entonces que la foliación estable de  $g$  es minimal.

Sea  $U$  abierto de  $M$  y  $x \in M$  cualquiera.

La idea es la siguiente, para ver que la estable de  $x$  corta a  $U$  se buscará un punto que este en  $U$  y de forma tal que su centro inestable se comporte como inestable para iterados futuros de él. Entonces, tomando su centro inestable de tamaño  $r_0$  cortará la estable de una imagen de  $x$  y luego iterando al pasado hasta que el punto vuelva a  $U$  junto con su centro inestable (dado que actuaba como inestable se hizo pequeña tomando preimágenes) y por lo tanto la estable de  $x$  tendrá puntos en  $U$ .

Se elige entonces  $z \in U$  y  $\beta > 0$  tal que  $\mathcal{F}_\beta^{uu}(z, g) \subset U$ . Sea  $n_0$  tal que  $\mathcal{F}_1^{uu}(g^{n_0}, g) \subset g^{n_0}(\mathcal{F}_\beta^{uu}(z, g))$  (que existe pues  $\mathcal{F}^{uu}$  es inestable fuerte) y tomamos, usando la propiedad SH, un punto  $y^u \in \mathcal{F}_1^{uu}(g^{n_0}, g)$  dado por el Teorema 4.4.1 que cumpla que

---

<sup>9</sup>Observar que las hojas son uniformemente densas y que varían continuamente con el difeomorfismo.

$$m\{Dg^n|_{E^c(g^m(y^u))}\} > \sigma^n \quad \forall n, m > 0$$

Se puede elegir un valor de  $\gamma$  de forma tal que  $g^{n_0}(W_\gamma^{cu}(y^u, g)) \subset U$ . Ahora, existe un punto en  $U$  para el cual su variedad centro inestable se comporta como estable gracias al Lema 4.1.4. Se puede elegir  $m$  tal que  $\lambda_1^m r_0 < \gamma$  y se toma  $k = n_0 + m$ . La idea entonces es que la estable de  $g^k(x)$  cortará a la centro inestable de  $g^m(y^u)$  y eso obligará a la estable de  $x$  a entrar a  $U$ .

Y efectivamente pues ya se vio que valía que

$$\mathcal{F}_{2K}^{ss}(g^k(x), g) \cap W_{r_0}^{cu}(g^m(y^u), g) \neq \emptyset$$

Pero ahora, la dominación obliga a que

$$\prod_{j=0}^n \|Dg^{-1}|_{E^{cu}(g^m(y^u))}\| < \lambda^n \quad 1 \leq n \leq m$$

pues se sabe que

$$\prod_{j=0}^n \|Dg^{-1}|_{E^c(g^m(y^u))}\| < \lambda^n \quad 1 \leq n \leq m$$

y la mayor contracción de  $Dg^{-1}$  en  $E^c$  es menor que la menor contracción de  $Dg^{-1}$  en  $E^{uu}$ . Por lo tanto se concluye que

$$g^{-m}(W_{r_0}^{cu}(g^m(y^u), g)) \subset W_{\lambda_1^m r_0}^{cu}(y^u, g) \subset W_\gamma^{cu}(y^u, g)$$

De donde se deduce el resultado buscado pues se tiene (recordando que  $g^{n_0}(W_\gamma^{cu}(y^u, g)) \subset U$ )

$$g^{-k}(W_{r_0}^{cu}(g^m(y^u), g)) \subset U \Rightarrow \mathcal{F}^{ss}(x, g) \cap U \neq \emptyset$$

□

#### DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.4.1.

La idea de la prueba es que si se toma un perturbado de  $f$ , las propiedades del tangente se cumplirán de forma similar para puntos cercanos pero solamente por períodos de tiempo acotado. Lo que se buscará es construir una sucesión de puntos que hereden la propiedad (por estar cercanos a alguna órbita de  $f$ ) durante tiempos cada vez mayores. Esto podrá darse gracias a que se buscan puntos en la variedad inestable que se hace muy pequeña en el pasado y será posible considerar estos puntos por inducción.

Antes que nada, se empieza por ver que basta con encontrar un entorno  $\mathcal{U}(f)$  y un  $k_0 > 0$  tal que  $\forall x \in M$  existe un  $y^u \in \mathcal{F}_2^{uu}(x, g)$  que cumpla que

$$m\{Dg^{k_0 n}|_{E^c(g^{k_0 m}(y^u))}\} > 2^n \quad \forall n, m > 0 \quad (4.1)$$

Esto es sencillo de ver pues por un lado, el hecho de que se tome una potencia no afecta pues se soluciona considerando una constante  $C'$  mayor. Por otro lado, el que el punto este en  $\mathcal{F}_2^{uu}$  tampoco afecta pues se puede considerar un entero  $l$  arbitrario para el cual se cumpla que  $g^{-l}(\mathcal{F}_2^{uu}(g^l(x), g)) \subset \mathcal{F}_1^{uu}(x, g)$  y esto para todo  $x \in M$ . Entonces, ajustando la constante  $C'$  nuevamente para que valga en los primeros  $l$  iterados la desigualdad, se puede considerar para  $x \in M$  el punto de  $\mathcal{F}_1^{uu}$  conseguido como la preimagen del  $y^u$  conseguido para  $g^l(x)$  utilizando (4.1).

Como se cumple la propiedad SH para  $f$ , es posible, considerando una potencia de  $f$  (y teniendo en cuenta lo mencionado acerca de que el resultado vale si vale para potencias, ajustando la constante  $C'$ ) asumir que existe  $\lambda_0$  de forma tal que para todo  $x \in M$  se cumple que existe un  $y^u \in \mathcal{F}_1^{uu}(x, f)$  con la siguiente propiedad:

$$m\{Df^n|_{E^c(f^m(y^u))}\} > \lambda_0^n \quad \forall n, m > 0$$

O sea que si se considera el conjunto

$$H_{\lambda_0}^u = \{y \in M : m\{Df^n|_{E^c(f^m(y))}\} \geq \lambda_0^n \quad \forall n, m > 0\}$$

se cumple que es un conjunto cerrado y que  $\forall x \in M$  se tiene  $\mathcal{F}_1^{uu}(x, f) \cap H_{\lambda_0}^u \neq \emptyset$ .

La idea es que si se perturba poco a  $f$  en la topología  $C^1$  las variedades  $\mathcal{F}_1^{uu}$  se moverán poco y por lo tanto se cumplirá que si  $g$  está cerca de  $f$  valdrá que  $\mathcal{F}_1^{uu}(x, g)$  estará cerca de  $H_{\lambda_0}^u(f)$  y se buscará comparar la acción del diferencial de  $g$  en la dirección central con la de  $f$  en los puntos de  $H_{\lambda_0}^u$ . Para eso se estimará cuanto se puede perturbar.

Primero que nada, es fácil ver que se puede considerar  $1 < \lambda_1 < \lambda_0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  y  $\mathcal{U}_0(f)$  cumpliendo que si  $x \in H_{\lambda_0}^u(f)$ ,  $y \in M$  y  $g \in \mathcal{U}_0$  cumplen que  $d(f^i(x), g^i(y)) < \varepsilon_0$   $\forall 0 \leq i \leq n$  entonces se cumple que

$$m\{Dg^k|_{E^c(g^j(x), g)}\} \geq \lambda_1 \quad \forall 0 \leq j \leq n \quad 0 < k \leq n - j$$

Ya que por ser  $\mathcal{U}_0$  un entorno  $C^1$  se puede considerar suficientemente pequeño como para que se preserven las propiedades del diferencial y teniendo en cuenta que  $x$  e  $y$  se mantienen cercanos se concluye lo afirmado.

La prueba ya se encuentra encaminada pues lo que resta hacer es encontrar algún punto en  $\mathcal{F}_2^{uu}(x, g)$  (con  $x$  cualquiera) que se mantenga cerca de  $H_{\lambda_0}^u$  en el futuro. Para eso, se hará uso de la contracción en  $\mathcal{F}^{uu}$ .

Sea  $m_0$  de forma tal que para toda  $g \in \mathcal{U}_0$  y para todo  $x \in M$  valga que

$$\mathcal{F}_2^{uu}(g^m(x), g) \subset g^m(\mathcal{F}_{\varepsilon_0/2}^{uu}(x, g)) \quad \forall m > m_0$$

Además, dado que en  $\mathcal{U}_0$  son todos parcialmente hiperbólicos, se puede considerar  $n_0$  de forma tal que para toda  $g \in \mathcal{U}_0$  valga que:

$$\lambda_1^{n_0} \inf\{m\{Dg^{n_0}|_{E^c(z)}\} : z \in M\} > 2$$

Para completar los requerimientos se considerará  $\varepsilon_1$  y  $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0$  de forma tal que si  $g \in \mathcal{U}_1$  y se cumple que

$$d(x, y) < \varepsilon_1 \Rightarrow d(g^i(x), f^i(y)) < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \forall 1 \leq i \leq n_0$$

Y como ya fue mencionado, por la continuidad de las foliaciones, se puede considerar  $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$  de forma tal que si  $g \in \mathcal{U}_2$  se cumpla que

$$d(\mathcal{F}_1^{uu}(x, g), H_{\lambda_0}^u) < \varepsilon_1 \quad \forall x \in M$$

Ahora, se considera  $\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}_2$  y  $k_0 = m_0 + n_0$  y se verificará (4.1) para  $g \in \mathcal{U}$  y  $x \in M$  concluyendo la prueba del teorema.

Hay que encontrar  $y^u \in \mathcal{F}_2^{uu}(x, g)$  que verifique (4.1). Para eso, se considera una sucesión  $\{z_n\}$  de la siguiente forma:

- (i)  $z_0 \in \mathcal{F}_1^{uu}(x, g)$  y  $d(z_0, H_{\lambda_0}^u(f)) < \varepsilon_1$ .
- (ii)  $z_{j+1} \in \mathcal{F}_1^{uu}(g^{k_0}(z_j), g)$
- (iii)  $d(z_j, H_{\lambda_0}^u(f)) < \varepsilon_1$

Que se puede construir pues  $d(\mathcal{F}_1^{uu}(y, g), H_{\lambda_0}^u) < \varepsilon_1 \quad \forall y \in M$ .

Se ve que  $y_n^u = g^{-k_0 n}(z_n) \in \mathcal{F}_2^{uu}(x, g)$  y que si se toma  $i, j$  con  $0 \leq j \leq n$  y  $1 \leq i \leq n-j$  vale

$$m\{Dg^{k_0 i}|_{E^c(g^{k_0 j}(y_n^u))}\} > 2^i$$

Lo que concluiría la prueba pues si se considera  $y^u$  punto de acumulación de  $\{y_n^u\}$  se habrá encontrado el punto deseado.

Para ver que  $y_n^u \in \mathcal{F}_2^{uu}(x, g)$  se observa que  $z_n \in \mathcal{F}_1^{uu}(g^{k_0}(z_{n-1}), g)$  por lo tanto, recordando que  $g^m(\mathcal{F}_{\varepsilon_0/2}^{uu}(y, g)) \supset \mathcal{F}_2^{uu}(g^m(y), g) \forall y \in M, \forall m \geq m_0$  se cumple que  $g^{-k_0}(z_n) \in \mathcal{F}_{\varepsilon_0/2}^{uu}(z_{n-1}, g) \subset \mathcal{F}_2^{uu}(g^{k_0}(z_{n-2}), g)$  (pues  $z_{n-1} \in \mathcal{F}_1(g^{k_0}(z_{n-2}), g)$  y se puede suponer que  $\varepsilon_0/2 < 1$ ). Con el mismo argumento, se llega a que  $g^{-2k_0}(z_n) \in \mathcal{F}_{\varepsilon_0/2}^{uu}(z_{n-2}, g) \subset \mathcal{F}_2^{uu}(g^{k_0}(z_{n-3}), g)$  y continuando por inducción (recordando que  $z_0 \in \mathcal{F}_1^{uu}(x, g)$ ) se llega a que  $y_n^u \in \mathcal{F}_2^{uu}(x, g)$ .

Para probar la otra condición se aprovechará nuevamente la contracción en  $\mathcal{F}^{uu}$  y se utilizará el hecho de que si dos puntos se mantienen cerca con sus órbitas por  $f$  y  $g$  entonces se cumple lo que buscado para el diferencial de  $g$ .

Con la misma inducción que ya fue hecha, vale también que  $g^{-m_0-k_0(j-1)}(z_n) \in \mathcal{F}_{\varepsilon_0/2}^{uu}(g^{n_0}(z_j))$ . Por lo tanto, si  $l = 0, \dots, n$  y  $d = 0, \dots, n_0$  se tiene que  $d(g^{d+lk_0}(y_n^u), g^d(z_l)) < \varepsilon_0/2$  (pues  $g^{d+lk_0}(y_n^u) = g^{d+k_0(l-n)}(z_n) \in \mathcal{F}_{\varepsilon_0/2}^{uu}(g^d(z_l), g)$ ).

Como además  $d(z_l, H_{\lambda_0}^u(f)) < \varepsilon_1$  y por como fue elegido  $\varepsilon_1$  se cumple que  $d(g^d(z_l), f^d(x_l)) < \varepsilon_0/2$  (con  $x_l \in H_{\lambda_0}^u(f)$ ). Entonces, por la desigualdad triangular se tiene que:

$$d(g^{d+lk_0}(y_n^u), f^d(x_l)) < \varepsilon_0$$

y por la elección de  $\varepsilon_0$  vale que

$$m\{Dg^{n_0}|_{E^c(g^{lk_0}(y_n^u))}\} > \lambda_1^{n_0}$$

Pero entonces, por como fue elegido  $n_0$  se cumple que

$$\begin{aligned} m\{Dg^{k_0}|_{E^c(g^{lk_0}(y_n^u))}\} &\geq m\{Dg^{n_0}|_{E^c(g^{lk_0}(y_n^u))}\}m\{Dg^{m_0}|_{E^c(g^{lk_0+n_0}(y_n^u))}\} > \\ &> \lambda_1^{n_0} \inf\{m\{Dg^{n_0}|_{E^c(z)}\} : z \in M\} > 2 \end{aligned}$$

Terminando la prueba <sup>10</sup>.

□

---

<sup>10</sup>Observar que como  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \Rightarrow m\{AB\} \geq m\{A\}m\{B\}$

# Apéndice A

## Resultados utilizados

### A.1. Lema de Franks

**Teorema A.1.1 (Lema de Franks [F2]).** *Sea  $f \in \text{Diff}^1(M)$ . Dado  $\mathcal{U}(f)$  entorno  $C^1$  de  $f$ ,  $\exists \mathcal{U}_0(f)$  y  $\varepsilon > 0$  tal que si  $g \in \mathcal{U}_0(f)$ ,  $\theta = \{x_1, \dots, x_m\}$  y*

$$L : \bigoplus_{x_i \in \theta} T_{x_i}M \rightarrow \bigoplus_{x_i \in \theta} T_{g(x_i)}M \quad \text{tal que} \quad \|L - Dg|_{\bigoplus T_{x_i}M}\| < \varepsilon$$

*Entonces, existe  $\tilde{g} \in \mathcal{U}(f)$  tal que  $D\tilde{g}_{x_i} = L|_{T_{x_i}M}$  (eso ya implica que  $g(x_i) = \tilde{g}(x_i)$ ) y si  $R$  es un conjunto compacto disjunto de  $\theta$  se puede considerar  $\tilde{g} = g$  en  $R$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\theta \cup g(\theta) = \{y_1, \dots, y_n\}$  y se considera  $\widehat{B}_i = \{v \in T_{y_i}M / \|v\| < \delta\}$  (se puede suponer que  $M \subset \mathbb{R}^N$  y que la métrica es la heredada del ambiente). Se considera también  $B_i = \exp_{y_i}(\widehat{B}_i)$ .

Se elige  $\delta > 0$  cumpliendo las siguientes propiedades:

- (I) Todas las  $B_i$  son disjuntas entre si y de  $R$ .
- (II)  $\|\exp v - v\| < \varepsilon$  si  $v \in \widehat{B}_i$  (se considera la norma de  $\mathbb{R}^N$  donde  $M$  está inmersa y el plano tangente trasladado de forma que 0 coincida con  $y_i$ ).

Para restringir más a  $\delta > 0$  se dará alguna definición más. Sea  $\sigma : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow [0, 1]$  una función “chichón”  $C^1$  que cumpla que  $\sigma(x) = 1$  si  $x \leq \delta/4$  y  $\sigma(x) = 0$  si  $x \geq \delta$  y  $0 \leq |\sigma'| \leq 2/\delta$ . Ahora se define  $\rho : TM \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\rho(v) = \sigma(\|v\|)$ .

A partir de esto, se intentará hacer una perturbación de  $g$  en el plano tangente que cumpla con las propiedades deseadas. Para eso se considera  $h : \bigcup \widehat{B}_i \rightarrow \bigoplus T_{g(x_i)}M$



tal que  $h(v) = \exp_{g(x_i)}^{-1} \circ g \circ \exp_{x_i}(v)$ . La función  $h$  es una especie de pasaje de  $g$  al plano tangente, ahora se puede tomar  $\hat{g} : \bigcup \hat{B}_i \rightarrow \bigoplus T_{g(x_i)}M$  definida como  $\hat{g}(v) = \rho(v)L(v) + (1 - \rho(v))h(v)$ . A partir de esto, la forma intuitiva de considerar la perturbación buscada es considerar  $\tilde{g} : M \rightarrow M$  tal que:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \exp_{g(x_i)} \circ \hat{g} \circ \exp_{x_i}^{-1}(x) & \text{si } x \in B_i \\ g(x) & \text{si } x \notin B_i \end{cases}$$

Para ver que  $\tilde{g}$  esta  $C^1$  cerca de  $g$  se darán un par de restricciones más para  $\delta$ .

(III)  $\|L(v) - h(v)\| < 2\varepsilon\|v\|$  si  $v \in \hat{B}_i$  (se cumple que  $h = Dg + \phi$  donde  $\frac{\phi(v)}{\|v\|} \rightarrow 0$ ).

(IV)  $\|D_v \exp\| < 1 + \varepsilon$  y  $\|D_x \exp^{-1}\| < 1 + \varepsilon$  si  $v \in \hat{B}_i$  y  $x \in B_i$  (Recordar que  $D_0 \exp = Id$ ).

(V)  $\|L(u) - Dh_v(u)\| < 2\varepsilon\|u\|$   $u, v \in \hat{B}_i$  (observar que  $Dh_0 = Dg_{x_i}$ )

(VI) Si  $K = \sup_{x \in M} \|Dg_x\|$  entonces  $\|D \exp_u - D \exp_v\| < \varepsilon/K$  con  $u, v \in \hat{B}_i$ .

Sea ahora,  $v = \exp^{-1}(x)$  entonces (se observa que basta ver que están cerca en  $B_i$ ), usando (II) y (III):

$$\|g(x) - \tilde{g}(x)\| = \|\exp \circ h(v) - \exp \circ \hat{g}(v)\| \leq 2\varepsilon + \|h(v) - \hat{g}(v)\| = 2\varepsilon + |\rho(v)| \|h(v) - L(v)\| \leq 4\varepsilon$$

Antes de acotar la distancia entre las derivadas, se realizará el siguiente cálculo basado en la regla de la cadena y del producto para las derivadas y recordando que  $DL = L$ :

$$D\hat{g}_v(u) = \rho(v)L(u) + D\rho_v(u)L(v) + (1 - \rho(v))Dh_v(u) - D\rho_v(u)h(v)$$

Ahora, tomando  $v \in \bigcup \hat{B}_i$  se puede calcular  $\|Dh_v(u) - D\hat{g}_v(u)\|$  obteniendo (recordando el cálculo recién hecho):

$$\|Dh_v(u) - D\hat{g}_v(u)\| = \|\rho(v)(L(u) - Dh_v(u)) + D\rho_v(u)(L(v) - h(v))\| \leq$$

$$\rho(v)\|L(u) - Dh_v(u)\| + \|D\rho_v(u)(L(v) - h(v))\| \leq 6\varepsilon\|u\|$$

Teniendo en cuenta que por (V):

$$\rho(v)\|L(u) - Dh_v(u)\| \leq 2\varepsilon\|u\|$$

y por como fue elegido  $\rho$  y (III) se cumple

$$\|D\rho_v(u)(L(v) - h(v))\| \leq \frac{2}{\delta}\|u\|2\varepsilon\|v\| \leq \frac{2}{\delta}\|u\|2\varepsilon\delta = 4\varepsilon\|u\|$$

Ahora si se le llama  $y = \exp^{-1}(x)$ ,  $z = h(y)$  y  $w = \hat{g}(y)$  entonces

$$A = \|Dg_x(v) - D\tilde{g}_x(v)\| = \|D\exp_z \circ Dh_y \circ D\exp_x^{-1}(v) - D\exp_w \circ D\hat{g}_y \circ D\exp_x^{-1}(v)\|$$

Donde si sumando y restando  $D\exp_w \circ Dh_y \circ D\exp_x^{-1}(v)$  se llega a que:

$$A \leq \underbrace{\|D\exp_z \circ Dh_y \circ D\exp_x^{-1}(v) - D\exp_w \circ Dh_y \circ D\exp_x^{-1}(v)\|}_{A_0} + \underbrace{\|D\exp_w \circ Dh_y \circ D\exp_x^{-1}(v) - D\exp_w \circ D\hat{g}_y \circ D\exp_x^{-1}(v)\|}_{A_1}$$

y gracias a (VI) se sabe que:

$$A_0 \leq \frac{\varepsilon}{K}\|Dh_y \circ D\exp_x^{-1}(v)\|$$

y teniendo en cuenta que  $Dh_0 = Dg_{x_i}$  y por (IV) vale que

$$A_0 \leq \varepsilon\|D\exp_x^{-1}(v)\| \leq \varepsilon(1 + \varepsilon)\|v\|$$

Al mismo tiempo, por (IV) se cumple que

$$A_1 \leq (1 + \varepsilon)\|Dh_y \circ D\exp_x^{-1}(v) - D\hat{g}_y \circ D\exp_x^{-1}(v)\|$$

y por la cota ya obtenida se cumple que

$$A_1 \leq (1 + \varepsilon)6\varepsilon\|D\exp_x^{-1}(v)\| \leq (1 + \varepsilon)^2 6\varepsilon\|v\|$$

Por lo tanto, se logró encontrar una perturbación  $C^1$  de  $g$  que coincide con  $g$  en  $R$  y de forma tal que las derivadas coinciden con  $L$  en un conjunto de puntos arbitrario, y todo esto solamente suponiendo que estas derivadas se encuentren lo suficientemente cerca como para que el perturbado se mantenga en  $\mathcal{U}(f)$ .

□

## A.2. Closing Lemma y sus consecuencias

En esta sección se hará mención a las consecuencias que tiene el Closing Lemma ([Pu]). Lo que dice este resultado, es que dado un punto no errante de un difeomorfismo  $C^1$  de una variedad, se puede encontrar un difeomorfismo  $C^1$  cerca con la propiedad de que ese punto es periódico para el nuevo difeomorfismo. Este resultado, tiene como consecuencia (cosa que se verá en esta sección) que el conjunto de difeomorfismos para los cuales los puntos periódicos son densos en el conjunto no errante es residual (o sea que es una propiedad genérica). En la prueba que se presenta, se van a asumir dos resultados que escapan de los objetivos de este trabajo y uno de ellos es el Closing Lemma.

**Teorema A.2.1 (Closing Lemma [Pu]).** *Sea  $f \in \mathcal{D}iff^1(M)$  y  $x \in \Omega(f)$  entonces,  $\forall \mathcal{U}(f)$  entorno  $C^1$  de  $f$  existe  $g \in \mathcal{U}$  tal que  $x \in \text{Per}(g)$ .*

La demostración de este teorema es realmente difícil a pesar de lo sencillo del enunciado. De hecho, no se sabe nada acerca de una igual versión para el caso  $C^2$  y es uno de los obstáculos mayores para avanzar en la teoría de sistemas dinámicos genéricos con topologías  $C^r$  con  $r \geq 2$ .

En el mismo artículo, a partir del Closing Lemma, Pugh prueba el siguiente resultado que es el que va a interesar a los efectos de este trabajo (y que tampoco se conoce para topologías  $C^r$  con  $r \geq 2$ ).

**Teorema A.2.2.** *Existe un conjunto  $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}iff^1(M)$  residual tal que si  $f \in \mathcal{R}$  entonces  $\Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)}$ .*

La demostración de este teorema se basa en la siguiente idea, sea la función  $\Gamma : \mathcal{D}iff^1(M) \rightarrow \mathcal{H}$  donde  $\mathcal{H} = \{K \subset M : K \text{ compacto}\}$  definida como  $\Gamma(f) = \overline{\text{Per}_\varepsilon(f)}$  (donde  $\text{Per}_\varepsilon(f)$  es el conjunto de los puntos periódicos de  $f$  cuyos valores propios son distintos de 1). Si se considera la topología inducida por la métrica de Hausdorff en  $\mathcal{H}$  se puede ver que la función resultante es semicontinua inferiormente.

La métrica de Hausdorff esta dada por la siguiente distancia:

$$d(A, B) = \max\{d_A(B), d_B(A)\}$$

Donde se define  $d_A(B) = \sup\{d(x, A) : x \in B\}$ . Otra forma interesante de pensar esta distancia es ver a  $d_A(B)$  como el menor valor (el ínfimo) de  $\varepsilon$  tal que si se considera un entorno de  $A$  de radio  $\varepsilon$  entonces  $B$  queda contenido en él.

La demostración hace uso de los siguientes resultados, el primero de los cuales no demostraremos.

**Teorema A.2.3.** Existe  $\mathcal{R}_1 \subset \text{Diff}^1(M)$  tal que  $\forall f \in \mathcal{R}$  se cumple  $\text{Per}_\varepsilon(f) = \text{Per}(f)$ .

1

**Proposición A.2.4.** Si  $\Gamma : \text{Diff}^1(M) \rightarrow \mathcal{H}$  es semicontinua inferiormente<sup>2</sup> entonces existe  $\mathcal{R}_2 \subset \text{Diff}^1(M)$  residual tal que toda  $f \in \mathcal{R}_2$  es un punto de continuidad de  $\Gamma$ .<sup>3</sup>

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathcal{U}_t = \{f : \exists f_n \rightarrow f \text{ tal que } d_{\Gamma(f)}(\Gamma(f_n)) \rightarrow \alpha \geq 1/t\}$

$\mathcal{U}_t$  es cerrado: Sea  $\{g_n\} \subset \mathcal{U}_t$  tal que  $g_n \rightarrow f$  entonces

$$\exists g_n^m \rightarrow g_n \text{ que cumple } d_{\Gamma(g_n)}(\Gamma(g_n^m)) \geq 1/t \quad \Rightarrow \quad \exists x_n \in \Gamma(g_n^m) \text{ tal que } d(x_n, \Gamma(g_n)) \geq 1/t$$

Entonces, como  $g_n \rightarrow f$  basta ver que  $d(x_n, x) \rightarrow \alpha \geq 1/t$  (a menos de subsucesiones) para ver que  $\mathcal{U}_t$  es cerrado.

Por la semicontinuidad inferior, vale que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $d(f, g) < \delta$  entonces  $d_{\Gamma(g)}(\Gamma(f)) < \varepsilon$  por lo tanto, se tiene que

$$1/t \leq d(x_n, \Gamma(g_n)) \leq d(x_n, x) + d(x, \Gamma(g_n)) \quad \forall x \in \Gamma(f)$$

Por lo tanto, se cumple que  $d(x_n, x) \geq 1/t - \varepsilon \forall x \in \Gamma(f)$  por lo tanto, vale que  $d(x_n, \Gamma(f)) \rightarrow \alpha \geq 1/t$  y por lo tanto  $f \in \mathcal{U}_t$  (ver figura A.1).

$\mathcal{U}_t$  tiene interior vacío: La idea es que los conjuntos pueden “explotar” pero no implotar, entonces, se buscará un conjunto discreto infinito lo cual llevará a un absurdo con la compacidad de  $M$ . Supongamos que  $f$  es interior de  $\mathcal{U}_t$  y sea  $\delta_1$  tal que si  $d(f, h) < \delta_1$  entonces  $h \in \mathcal{U}_t$  y  $d_{\Gamma(h)}(\Gamma(f)) < \varepsilon$  (por la semicontinuidad inferior, donde  $2\varepsilon < 1/t$ ), por lo tanto existe  $g_1$  a distancia menor que  $\delta_1$  de  $f$  y tal que exista un punto  $x_1 \in \Gamma(g_1)$  tal que  $d(x_1, \Gamma(f)) \geq 1/t - \varepsilon$ . Ahora, tomando  $\delta_2$  de forma tal de que si  $d(h, g_2) < \delta_2$  se cumpla que  $d(h, f) < \delta_1$  y  $d_{\Gamma(h)}(\Gamma(g_1)) < \varepsilon/2$ . Nuevamente, usando la definición de  $\mathcal{U}_t$ , se tiene  $g_2$  a distancia menor que  $\delta_2$  de  $g_1$  y un punto  $x_2 \in \Gamma(g_2)$  que cumple que  $d(x_2, \Gamma(g_1)) \geq 1/t - \varepsilon/2$ . Además, se sabe que

$$d(x_2, \Gamma(f)) \geq d(x_2, \Gamma(g_1)) - d_{\Gamma(g_1)}(\Gamma(f)) \geq 1/t - \varepsilon/2 - \varepsilon$$

---

<sup>1</sup>Una idea de la prueba del teorema A.2.3 se puede encontrar en [Rob] y también allí se encuentran referencias a la prueba del teorema que utiliza resultados muy particulares de transversalidad en variedades de dimensión infinita.

<sup>2</sup>En este caso, que  $\Gamma$  sea semicontinua inferiormente significa que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $d(f, g) < \delta$  entonces  $d_{\Gamma(g)}(\Gamma(f)) < \varepsilon$ .

<sup>3</sup>El resultado en realidad es válido en contextos más generales con la misma prueba que presentamos.

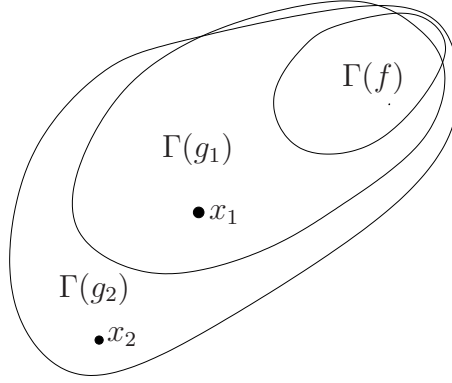


Figura A.1: Construcción de conjunto discreto infinito.

Continuando el proceso se llega a un absurdo.

Para finalizar, se observa, tomando complementos, que  $\mathcal{U}_n^c$  son abiertos densos. Y  $\bigcap_{n < 0} \mathcal{U}_n^c$  son los puntos de continuidad de  $\Gamma$  terminando la demostración.  $\square$

Ahora se puede ver que si  $f \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$  entonces se cumple que  $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$ . Para eso, supongamos que existe  $x \in \Omega(f) - \overline{\text{Per}(f)}$  (véase la figura A.2). Como  $\Gamma$  es continua en  $f$ , se considera un entorno  $V$  de  $\overline{\text{Per}(f)}$  que no contenga a  $x$  entonces se sabe que existe un entorno  $C^1$  de  $f$  para el cual  $\overline{\text{Per}_e(f)} \subset V$ , eso implica que  $x \notin \overline{\text{Per}(f)}$  en ese entorno (pues si  $x$  fuese periódico se podría perturbar para que no tenga valor propio 1); pero eso contradice el Closing Lemma pues se sabe que en ese entorno de  $f$  hay un difeomorfismo  $g$  para el cual  $x$  es periódico.

Eso culmina la demostración del teorema A.2.2 a menos de la siguiente proposición.

**Proposición A.2.5.**  $\Gamma : \text{Diff}^1(M) \rightarrow \mathcal{H}$  es semicontinua inferiormente, es decir, dada  $f$  y dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $d(f, g) < \delta$  entonces  $d_{\Gamma(g)}(\Gamma(f)) < \varepsilon$

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que si  $p$  es un punto periódico elemental de período  $n$  para  $f$  (es decir que  $Df_p^n$  no tiene valor propio 1) existe un entorno  $\mathcal{U}(f)$  y un entorno  $U(p)$  tal que si  $g \in \mathcal{U}$  entonces  $g$  tiene un punto periódico elemental en  $U(p)$  del mismo periodo.

Para eso se utiliza el teorema de la función implícita en dimensión infinita [Lan] (podemos suponer que estamos en  $\mathbb{R}^n$  ya que el problema es local) para la siguiente función:

$$F : \text{Diff}^1(M) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \quad F(g, x) = g^n(x) - x$$

- $x \in \Omega(f)$

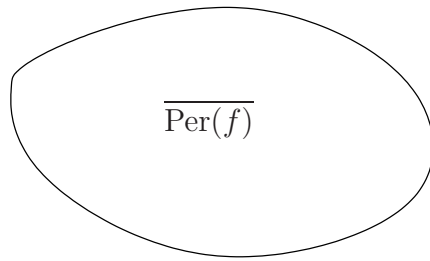


Figura A.2: Punto no errante aislado

Para la cual  $(f, p)$  es un cero. Además,  $DF_{(f,p)} = Df_p^n - Id$  que es invertible por la hipótesis de que  $p$  es elemental. Por lo tanto se llega a lo deseado.

□

### A.3. Difeomorfismos DA y productos cruzados

#### Anosov y Derivado del Anosov

Antes que nada, se introducirán brevemente los difeomorfismos de Anosov lineales siguiendo [S2]. Para encontrar los detalles y las pruebas el lector se puede referir a [S1] o [KH].

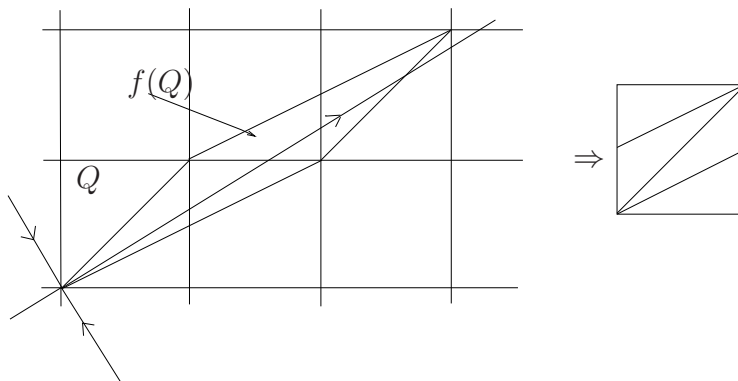


Figura A.3: Difeomorfismo inducido por  $A$

Dada una transformación lineal hiperbólica de  $SL(N, \mathbb{Z})$  (matrices de entradas en-

terras y determinante 1) es inmediato verificar que induce un difeomorfismo en el toro  $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N / \mathbb{Z}^N$  (al mapa cociente lo indicaremos como  $\pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$ ). Se estudiará, por simplicidad, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pero los argumentos son válidos para cualquier otra. Por ser hiperbólica (y tener determinante 1), la transformación va a tener valores propios de módulo mayor y menor que 1 (en este caso uno mayor y uno menor). Además, es sencillo comprobar que el ángulo entre los espacios propios con los ejes es irracional y por lo tanto, al pasar al cociente los subespacios invariantes se enrollan densamente en el toro.

Es fácil comprobar también, que toda la variedad es un conjunto hiperbólico para este difeomorfismo y que los puntos periódicos son densos en la variedad (de hecho son las imágenes por  $\pi$  de los puntos de coordenadas racionales). El hecho de que las variedades estables e inestables se enrollen densamente en todo el toro muestra que el difeomorfismo es transitivo, pues basta tomar dos abiertos y cortarlos con la variedad estable e inestable del origen (punto fijo) respectivamente para encontrarse con que, dado que por cortar la variedad estable contienen una franja transversal a ésta, utilizando el  $\lambda$ -Lemma (Teorema 2.2.4) se concluye la transitividad (de hecho se demuestra que es topológicamente mixing).

Además, por ser un difeomorfismo de Anosov, es estructuralmente estable y el mismo argumento vale en general para probar que estos difeomorfismos son transitivos (en su conjunto no errante) y se estaría frente a un difeomorfismo robustamente transitivo hiperbólico.

Como interesa mostrar difeomorfismos robustamente transitivos no hiperbólicos, se buscará hacer modificaciones a este para lograr ese objetivo.

Para entender la construcción del llamado difeomorfismo DA (derivado del Anosov) se construirá primero a partir del ya mencionado Anosov proveniente de la matriz  $A$  en  $\mathbb{R}^2$  (para encontrar una presentación completa el lector puede recurrir [Rob] y [KH]).

La idea es perturbar (isotópicamente) un punto fijo y convertirlo en un atractor o un repulsor (esto en dimensión dos, pero en dimensiones mayores se buscará simplemente cambiar el índice del punto fijo). Para eso, observando que  $A$  tiene determinante uno, se sabe que su forma diagonal ( $\tilde{A}$ ) es de la forma

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda > 1$ . Ahora se considera  $\lambda \geq \mu > 1$  y una función “chichón”  $\rho : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de forma tal que  $\rho(\pi(B_\varepsilon(0))) = 1$  y  $\rho(\pi(B_{2\varepsilon}(0))^c) = 0$  con  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Sea  $\tilde{\rho}$  el levantado de  $\rho$  a  $\mathbb{R}^2$ , entonces se considera el siguiente mapa, isotópico al Anosov, que baja al toro si  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño como para que  $B_{2\varepsilon}(0)$  se mantenga en un dominio fundamental. Se consideran en  $\mathbb{R}^2$  las coordenadas que hacen que  $A$  sea diagonal:

$$F((x, y)) = (1 - \tilde{\rho}(x, y)) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \tilde{\rho}((x, y)) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

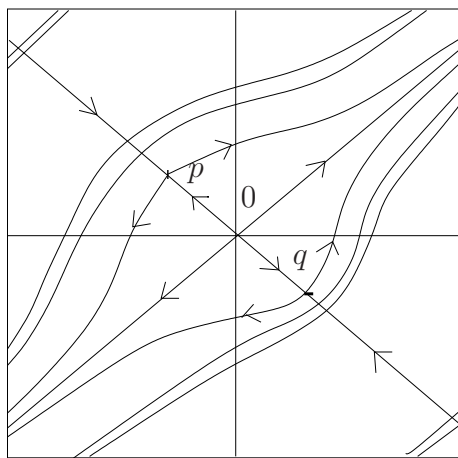


Figura A.4: Derivado del Anosov

El resultado de esta perturbación (se le llamará  $g$ ) se puede observar en la figura A.4, que muestra como se transforma al origen en un punto fijo repulsor y aparecen dos nuevos puntos fijos ( $p$  y  $q$ ) cuyas variedades estables coinciden con la que era variedad estable del origen. Además, la cuenca de repulsión del origen (los puntos que en el pasado convergen al origen) son un abierto denso en el toro pues además de ser abierto (por ser la cuenca de repulsión) es denso pues lo que era la variedad inestable sigue siendo parte de la cuenca de repulsión del origen. No es difícil ver que el complemento de esta cuenca

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g(\mathbb{T}^2 \setminus B_{2\varepsilon})$$

es un conjunto hiperbólico (por una demostración rigurosa ver [KH]) . Además, se puede hilar más fino y ver que es además globalmente parcialmente hiperbólico ya que



una de las direcciones se mantiene y la dirección que se convierte en repulsora cerca del origen repele menos que la repulsora original (formalizar esto implicaría probar que las familias de conos que da el teorema 2.3.5 para el Anosov funcionan para este dando hiperbolicidad parcial).

Una observación también importante es que por cómo fue realizada la perturbación no se afectó la foliación invariante correspondiente al valor propio  $\lambda^{-1}$  de  $A$  pues esta consistía, en la proyección de las curvas de la forma  $(x_0, t)$  con  $t \in \mathbb{R}$  y por como fue realizada la perturbación, su imagen será la curva proyección de  $(\lambda x_0, t)$ .

Resulta claro que esta construcción se puede hacer en cualquier dimensión variando uno o más valores propios de un punto fijo, y si se realiza cuidadosamente se puede lograr que los difeomorfismos resultantes sean parcialmente hiperbólicos o admitan descomposición dominada en toda la variedad (ver [BDV]).

## Productos Cruzados

Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo y  $g : M \rightarrow \mathcal{D}iff(N)$  ( $g_x : N \rightarrow N$  es un difeomorfismo para todo  $x \in M$ ) un mapa continuo donde  $M$  y  $N$  son variedades (compactas, conexas y sin borde aunque no es necesario). Se define el producto cruzado entre  $f$  y  $g$  (o *skew-product*) al difeomorfismo

$$F : M \times N \rightarrow M \times N$$

dado por  $F(x, y) = (f(x), g_x(y))$ .

Esta construcción es bastante utilizada pues en particular es una gran fuente de ejemplos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos (si se considera  $f$  el Anosov del Toro y se toma  $g_x$  de forma tal que nunca expanda o contraiga demasiado, el resultado va a ser un difeomorfismo parcialmente hiperbólico con dirección central  $T_p N \subset T_p(M \times N)$ ).

# Bibliografía

- [AS] R. Abraham y S. Smale, Nongenericity of  $\Omega$ -stability, *Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math. A.M.S* vol. 14 (1970), 5-8.
- [BD] C. Bonatti y L.J. Díaz, Persistence of transitive diffeomorphisms, *Annals of Math.*, **143** (1996), 357-396.
- [BDP] C. Bonatti, L.J. Díaz y E.R. Pujals, A  $C^1$ - generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources, *Annals of Math.* **158** (2003), 355-418.
- [BDV] C. Bonatti, L.J. Díaz y M. Viana, Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity, *Springer-Verlag* (2005).
- [BV] C. Bonatti y M. Viana, SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting, *Israel J. Math.* **115** (2000), 157-193.
- [BS] M. Brin y G. Stuck, Introduction to Dynamical Systems, *Cambridge Univ. Press* (2002).
- [D] L.J. Díaz, Partial hyperbolicity, heterodimensional cycles, and transitivity. *Notas de curso* (2005).
- [F1] J. Franks, Anosov diffeomorphisms, *Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math. A.M.S* vol. 14 (1970), 61-94.
- [F2] J. Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, *Transactions of the A.M.S.* **158**, 301-308 (1971).
- [H] P. Hartman, Ordinary differential equations, *Wiley*, New York (1964).
- [HPS] M. Hirsch, C. Pugh y M. Shub, Invariant Manifolds, *Springer Lecture Notes in Math.*, **583** (1977).

- [KH] A. Katok y B. Hasselblatt; Introduction to the modern theory of Dynamical Systems, *Cambridge Univ. Press* (1995).
- [Lan] S. Lang, Introducción al Análisis Matemático, *Addison-Wesley Iberoamericana* (1990).
- [Lew] J. Lewowicz, Expansive Homomorphisms of Surfaces, *Bol. Soc. Bras. de Mat.* **20** (1989), 113-133.
- [Less] P. Lessa, Dinámica Genérica en Superficies, *Monografía de Licenciatura CMAT* (2006).
- [M1] R. Mañé, Contributions to the stability conjecture, *Topology*, **17** (1978) 397-405.
- [M2] R. Mañé, An Ergodic Closing Lemma, *Annals of Math.*, **116** (1982), 503-540.
- [M3] R. Mañé, Teoría Ergódica, *Projeto Euclides, CNPq IMPA* (1983).
- [M4] R. Mañé, A proof of the  $C^1$  stability conjecture, *Publ. Math. IHES*, **66** (1987), 161-210.
- [Mil] J. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, *The University press of Virginia* (1965).
- [PdM] J. Palis y W. de Melo, Introdução os sistemas dinámicos, *Projeto Euclides, CNPq IMPA* (1978).
- [Pl] V.A. Pliss, On a conjecture of Smale, *Diff. Uravnenija* **8** (1972), 268-282.
- [PS1] E.R. Pujals y M. Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms, *Annals of Math.* **151** (2000), 961-1023.
- [PS2] E.R. Pujals y M. Sambarino, On homoclinic tangencies, hyperbolicity, creation of homoclinic orbits , and variation of entropy , *Nonlinearity* **13** (2000), 921-926.
- [PS3] E.R. Pujals y M. Sambarino, Homoclinic Bifurcations, Dominated Splitting and Robust Transitivity, *Handbook of Dynamical Systems* Eds: B. Hasselblatt y A.Katok, Vol 1B (2006) Capítulo 4, p.327-378.
- [PS4] E.R. Pujals y M. Sambarino, A sufficient condition for robustly minimal foliations, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **26** (2006) 281-289.

- [PS5] E.R. Pujals y M. Sambarino, On the dynamics of dominated splitting, *Annals of Math.* (2006).
- [PS6] E.R. Pujals y M. Sambarino, Integrability on codimension one dominated splitting, *Preprint IMPA A473 / 2006*.
- [PT] J. Palis y F. Takens, Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations, *Cambridge University Press* (1993).
- [Pu] C. Pugh, The closing lemma, *Amer. J. Math* **89**, 956-1009, (1967).
- [Rob] C. Robinson, Dynamical Systems, *CRS Press* (1995).
- [Rud] W. Rudin, Análisis Funcional, *Ed. Reverte* (1979)
- [RS] A. Rovella, A. Sambarino, Análisis Funcional, *Notas de Curso* (2005).
- [S1] M. Sambarino, Topicos de Sistemas Dinámicos, *Curso EMALCA, Costa Rica* (2005).
- [S2] Apuntes del Curso Introducción a la Teoría Hiperbólica dictado por M. Sambarino, *CMAT* (2006).
- [Sh1] M. Shub, Topologically transitive diffeomorphisms of  $\mathbb{T}^4$ , *Lecture Notes in Math.*, **206**, *Springer-Verlag* (1971).
- [Sh2] M. Shub, Global Stability of Dynamical Systems, *Springer-Verlag* (1987).
- [Sm1] S. Smale, Diffeomorphisms with many periodic points, *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, (1964), 63-80.
- [Sm2] S. Smale, Differentiable dynamical systems, *Bulletin A.M.S.* **73** (1967), 747-817.
- [Sot] J. Sotomayor, Licoes de Ecuacoes Diferenciaes, *Projeto Euclides, CNPq IMPA* (1979).