

TÉSIS DE MAESTRÍA

**Coherencia dinámica de difeomorfismos
parcialmente hiperbólicos isotópicos a
Anosov en nilvariedades**

Por: Luis Pedro Piñeyrúa Ramos
Orientador: Dr. Martín Sambarino

Maestría en Matemática
PEDECIBA
Universidad de la República
Uruguay

Resumen

El objetivo de este trabajo es probar la coherencia dinámica de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos en ciertas clases de isotopía de difeomorfismos de Anosov en nilvariedades, extendiendo un resultado debido a T. Fisher, R. Potrie y M. Sambarino [FPS] del caso del toro al caso de nilvariedades.

Abstract

The purpose of this thesis is to obtain dynamically coherence of partially hyperbolic diffeomorphisms in certain classes of Anosov diffeomorphisms on nilmanifolds, extending a result due to T. Fisher, R. Potrie and M. Sambarino [FPS] from the torus case to the nilmanifold case.

Índice general

0. Introducción	3
1. Grupos de Lie	7
1.1. Homomorfismos de grupos de Lie	9
1.2. Subgrupos de Lie	9
1.3. Cubrimientos	10
1.4. Mapa exponencial	10
1.5. Grupos y álgebras de Lie nilpotentes	11
2. Difeomorfismos hiperbólicos	13
2.1. Difeomorfismos de Anosov	13
2.2. Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos	15
2.3. Construcción algebraica	16
2.4. Ejemplos	20
3. Variedades invariantes	23
3.1. Descomposición dominada	23
3.2. Distribuciones y el teorema de Frobenius	26
3.3. Teorema de la variedad estable	28
3.4. Producto Global de foliaciones	34
3.5. Estabilidad de automorfismos hiperbólicos	37
4. Teorema principal	41
4.1. Introducción	41
4.2. Coherencia Dinámica	42
4.2.1. Difeomorfismos σ -propios	42
4.2.2. Criterio de Integrabilidad	46
4.3. SADC y σ -propio es abierto y cerrado en la topología C^1	51
4.4. Preguntas por responder	58

Capítulo 0

Introducción

El principal objetivo de los sistemas dinámicos es entender la evolución temporal de un sistema dado. Dicho de otro modo, fijado un espacio y una ley que gobierna el movimiento del mismo, intentar predecir el comportamiento asintótico o a largo plazo de la mayor cantidad de órbitas posibles.

En algunos casos, este comportamiento resulta trivial dada la simpleza de la dinámica, pero en otros casos la ley de movimiento presenta características especiales que hacen que su comportamiento sea impredecible o caótico. Los ejemplos paradigmáticos de sistemas caóticos son los *difeomorfismos de Anosov*: un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ es *Anosov* o *globalmente hiperbólico*, si en cada punto el espacio tangente se descompone en suma directa de dos fibrados Df -invariantes $TM = E^s \oplus E^u$ tales que E^s y E^u contraen vectores exponencialmente al futuro y al pasado respectivamente (Sección 2.1).

La propiedad de expansión-contracción, que llamamos *hiperbolicidad* induce en la dinámica propiedades interesantes como la expansividad (caos), la transitividad, la presencia de puntos periódicos con períodos arbitrariamente grandes y entropía positiva por nombrar algunas. El concepto de conjunto hiperbólico fue introducido por S. Smale en [Sm] donde hace un estudio detallado de la hiperbolicidad y propone algunos problemas. El más relevante quizás sea el problema de la clasificación topológica de los difeomorfismos de Anosov.

Decimos que dos difeomorfismos $f : M \rightarrow M$ y $g : N \rightarrow N$ son equivalentes topológicamente o *conjugados* si existe un homeomorfismo $h : M \rightarrow N$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Para finales de los años 70 ya se tenía una buena idea de como era esta clasificación debido a los resultados de J. Franks, S. Newhouse y A. Manning. Por un lado los trabajos [Fr], [Ne] dicen que si M es una variedad riemanniana compacta, conexa, sin borde de dimensión n y $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov de codimensión 1, entonces necesariamente $M = \mathbb{T}^n$ y f es conjugado a un automorfismo de Anosov lineal. Por otro [Fr1] y [Man] prueban que si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo de Anosov en una nilvariedad M , entonces f es topológicamente conjugado

a un automorfismo de Anosov lineal.

A pesar de estos dos importantes resultados, aún quedan preguntas relevantes por responder. Por ejemplo, todavía es un problema abierto el determinar que variedades admiten difeomorfismos de Anosov, y si éstos difeomorfismos son siempre transitivos.

En el intento de generalizar estos resultados se flexibiliza la definición de difeomorfismo de Anosov, dando lugar a los llamados difeomorfismos *parcialmente hiperbólicos*. Decimos que un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ es parcialmente hiperbólico si el espacio tangente se descompone en suma directa de 3 fibrados Df -invariantes $TM = E^{ss} \oplus E^c \oplus E^{uu}$ tales que los fibrados E^{ss} y E^{uu} contraen vectores exponencialmente al futuro y pasado respectivamente, y el fibrado central E^c tiene un comportamiento intermedio (Sección 2.2). En este sentido los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos son una generalización de los difeomorfismos de Anosov.

Al igual que en el caso Anosov, nos interesa clasificar los parcialmente hiperbólicos. Una herramienta fundamental para la clasificación de Franks-Newhouse-Manning, es la existencia de foliaciones invariantes tangentes a las distribuciones estables e inestables. Estas foliaciones, siempre existen para los fibrados estables e inestables, tanto para los difeomorfismos de Anosov como para los parcialmente hiperbólicos (capítulo 3). Sin embargo, el fibrado central E^c no siempre es integrable, es decir, no tiene una foliación invariante tangente a E^c en cada punto. Existen ejemplos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos cuya distribución central no es integrable. El primer ejemplo de este tipo es un parcialmente hiperbólico en una nilvariedad de dimensión 6. Este ejemplo apareció originalmente en [Sm] como un difeomorfismo de Anosov en una variedad que no es el toro. Años más tarde A. Wilkinson [W] observó que reagrupando fibrados de manera correcta, uno crea una distribución central que no es integrable ya que no se cumple la condición de Frobenius (sección 2.4). En [RHRHU] aparece un segundo ejemplo en el toro \mathbb{T}^3 .

Decimos que un difeomorfismo parcialmente hiperbólico es *dinámica-mente coherente* si existen foliaciones invariantes, tangentes en cada punto a las distribuciones centro-estables y centro-inestables (y por ende, también existe una foliación tangente a la distribución central).

El primer resultado de coherencia dinámica es debido a M. Brin quien probó en [Br] que un difeomorfismo absolutamente parcialmente hiperbólico¹ es dinámicamente coherente siempre que sus hojas estables e inestables sean quasi-isométricas en el cubrimiento universal. Luego, en [BBI] se obtiene coherencia dinámica para difeomorfismos absolutamente parcialmente hiperbólicos en el toro \mathbb{T}^3 utilizando el criterio de Brin. En los últimos años, R. Potrie y A. Hammerlindl en una serie de trabajos [Po], [HamPo], [HamPo2]

¹absolutamente parcialmente hiperbólico es una forma más fuerte de hiperbolicidad parcial.

prueban la coherencia dinámica para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos en variedades de dimensión 3 con grupo fundamental soluble a menos de una obstrucción topológica.

A pesar de estos resultados, cuando la dimensión de la distribución central es mayor que 1 se sabe realmente muy poco. El primer resultado en este sentido es debido a T. Fisher, R. Potrie y M. Sambarino [FPS] donde prueban que los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos isotópicos a Anosov lineales en el toro \mathbb{T}^n son dinámicamente coherentes, siempre que la isotopía sea por difeomorfismos parcialmente hiperbólicos. En ese trabajo no hay restricción alguna sobre la dimensión de la distribución central y se prueba la coherencia dinámica para conjuntos grandes de difeomorfismos (componentes conexas de Anosov lineales). El objetivo de esta tesis es extender este resultado al caso de las nilvariedades donde podemos aplicar las mismas técnicas que en [FPS] para algunos casos. A continuación presentamos el contexto en el que trabajaremos.

Sea $A : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de Anosov lineal en una nilvariedad $M = G/\Gamma$, donde G es un grupo de Lie conexo, simplemente conexo, nilpotente, y $\Gamma \subset G$ es un subgrupo discreto cocompacto. El espacio tangente T_eM admite una estructura de álgebra de Lie y el diferencial $DA : TM \rightarrow TM$ induce una descomposición del fibrado tangente de la forma $TM = E_A^{ss} \oplus E_A^{ws} \oplus E_A^{wu} \oplus E_A^{uu}$ (Ver capítulo 2). Supondremos a lo largo del trabajo que el *fibrado central* $E_A^c = E_A^{ws} \oplus E_A^{wu}$ es una subálgebra de Lie de T_eM . Esto siempre ocurre en el caso del toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ya que \mathbb{R}^n es un álgebra de Lie abeliana y por esa razón cualquier subespacio vectorial es una subálgebra. Esta representa la única diferencia del resultado original de [FPS] en el caso del toro \mathbb{T}^n respecto al caso general de nilvariedades donde no siempre el fibrado central es cerrado por el corchete de Lie (Sección 2.4).

Llamaremos $PH_A(M)$ al conjunto de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos isotópicos a A y $PH_A^0(M)$ al conjunto de las componentes conexas de $PH_A(M)$ que contienen un parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente. Sabemos de [Fr] que para todo $f \in PH_A(M)$, existe $H_f : G \rightarrow G$ continua y sobreyectiva tal que $A \circ H_f = H_f \circ \tilde{f}$, donde \tilde{f} denota el levantamiento de f al cubrimiento universal G . Decimos que un difeomorfismo $f \in PH_A(M)$ dinámicamente coherente tiene *fibras centrales* si $H_f^{-1}(\tilde{W}_A^c(H_f(x))) = \tilde{W}_f^c(x)$. Es decir, diferentes hojas centrales de f se mapean sobreyectivamente en diferentes hojas centrales de A por H_f . El resultado principal que expondremos es el siguiente:

Teorema 0.1. *Todo $f \in PH_A^0(M)$ es dinámicamente coherente y tiene fibras centrales.*

Para la prueba de este teorema es fundamental una de las hipótesis que hemos hecho: el fibrado central E_A^c es una subálgebra de Lie. Queda abierta la pregunta de si el recíproco también es cierto, es decir, si $f \in PH_A(M)$ es

dinámicamente coherente entonces: ¿el fibrado central E_A^c es una subálgebra de Lie? Una respuesta afirmativa a esta pregunta terminaría de clasificar la coherencia dinámica de todos los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos en clases de isotopía de Anosov. Bastaría con chequear como se comporta el corchete de Lie de la parte lineal de f (una condición puramente algebraica) para determinar la coherencia dinámica de f .

El trabajo está dividido de la siguiente manera. El capítulo 1 es una breve introducción a la teoría básica de grupos de Lie. En él aparecen las definiciones y resultados que utilizaremos a lo largo del trabajo. En el capítulo 2 se definen los conceptos de difeomorfismos de Anosov y parcialmente hiperbólico, y se construyen ejemplos algebraicos en nilvariedades. El capítulo 3 trata de la existencia de variedades invariantes tangentes a distribuciones con algún tipo de hiperbolicidad. Se prueba el teorema de las placas locales debido a Hirsch, Pugh y Shub y el teorema de la variedad estable fuerte. Además se prueba que las foliaciones estables-inestables de un Anosov lineal tienen estructura de producto global y como consecuencia de esto se prueba el lema de sombreado para automorfismos hiperbólicos. El capítulo 4 es el más importante de este trabajo. En él se definen los conceptos principales y se demuestra el teorema 0.1.

Capítulo 1

Grupos de Lie

Este capítulo es una breve guía a la teoría clásica de grupos de Lie. Presentamos definiciones básicas, algunos ejemplos y enunciamos algunos teoremas que vamos a utilizar a lo largo de este trabajo. La presentación será muy escueta y no presentaremos ninguna demostración para no extendernos demasiado y no alejarnos del propósito de este trabajo. Todo lo que exponemos en este capítulo se puede encontrar en cualquier libro sobre grupos de Lie, mencionamos por ejemplo [SW], [Wa].

Definición 1.1. *Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable con una estructura de grupo tal que los mapas $g \mapsto g^{-1}$ y $(g, h) \mapsto g.h$ son diferenciables. Al producto $G \times G$ lo dotamos con la estructura producto.*

Algunos grupos de Lie son \mathbb{R}^n con la operación suma, los números reales no nulos \mathbb{R}^* con la multiplicación y los números complejos no nulos \mathbb{C}^* con el producto usual de los números complejos. El círculo S^1 visto como los números complejos de módulo 1 también es un grupo de Lie.

Dados dos grupos de Lie G y H , su producto $G \times H$ es un grupo de Lie con la estructura diferenciable producto y la estructura de grupo de producto directo. De esta forma tenemos que los toros n -dimensionales $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ son grupos de Lie. Otra familia muy importante de grupos de Lie son los grupos de matrices $M_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$ con el producto usual de matrices.

Definición 1.2. *Un álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre \mathbb{R} es un espacio vectorial real \mathfrak{g} junto con un operador bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ llamado corchete tal que $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$:*

1. $[x, y] = -[y, x]$
2. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$

La propiedad 1 nos dice que el corchete es *anti-conmutativo* y la propiedad 2 recibe el nombre de *identidad de Jacobi*.

Algunos ejemplos de álgebras de Lie son \mathbb{R}^n con el corchete idénticamente nulo, \mathbb{R}^3 con el producto vectorial y el conjunto de matrices $M_n(\mathbb{R})$ con el corchete $[A, B] = AB - BA$.

La importancia del concepto de álgebra de Lie es que está íntimamente relacionado al concepto de grupo de Lie. Veremos que a cada grupo de Lie G le corresponde una única álgebra de Lie \mathfrak{g} y además esta correspondencia refleja propiedades de G en \mathfrak{g} y viceversa.

Un campo de vectores X en una variedad diferenciable G es una función que a cada punto $g \in G$ le asocia un vector $X(g) \in T_g G$. Si esta asociación es diferenciable, decimos que el campo X es diferenciable. Recordamos que los campos de vectores diferenciables pueden ser vistos como operadores (o derivaciones) en el espacio de las funciones C^∞ . Esta interpretación nos permite componer campos de vectores, además de sumarlos, y gracias a esto podemos definir el corchete $[X, Y] = XY - YX$ para todo par de campos X, Y . Es fácil ver que este corchete cumple con las dos condiciones de la definición 1.2. Ver [DoC] capítulo 0 para más detalles.

Definición 1.3. Sea $g \in G$. La traslación por izquierda de g es el difeomorfismo $L_g : G \rightarrow G$ definido por: $L_g(x) = gx$.

Un campo de vectores X en G es *invariante a izquierda* si $D(L_w) \circ X = X \circ L_w$, es decir si para todo $g, w \in G$ tenemos $D(L_w)_g X(g) = X(L_w(g))$. Los campos de vectores invariantes a izquierda quedan completamente determinados por su valor en algún punto de G , esto nos permite identificar el espacio tangente $T_e G$ con los campos de vectores invariantes a izquierda: dado $v \in T_e G$ el campo $X(g) = D(L_g)_e(v)$ es invariante a izquierda y además es el único que verifica $X(e) = v$.

La siguiente proposición, cuya prueba omitimos, nos permite definir el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie.

Proposición 1.4. Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} el conjunto de campos de vectores invariantes a izquierda. Entonces:

1. \mathfrak{g} es un espacio vectorial real, y el mapa $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$ definido por $\alpha(X) = X(e)$ es un isomorfismo lineal.
2. Los campos de vectores invariantes a izquierda son diferenciables.
3. El corchete de Lie de dos campos invariantes a izquierda es un campo de vectores invariante a izquierda.
4. \mathfrak{g} es un álgebra de Lie.

Definición 1.5. El álgebra de Lie de un grupo de Lie G es el álgebra de Lie de los campos de vectores invariantes a izquierda en G .

1.1. Homomorfismos de grupos de Lie

Definición 1.6. *Un homomorfismo de grupos de Lie es un mapa $\varphi : G \rightarrow H$ que es C^∞ y además un homomorfismo de grupos. Diremos que φ es un isomorfismo si además, φ es un difeomorfismo. Si un isomorfismo va de un grupo de Lie en si mismo, lo llamamos automorfismo. Si \mathfrak{g} y \mathfrak{h} son álgebras de Lie, un mapa $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie si es lineal y preserva el corchete, es decir $\psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Análogamente definimos isomorfismo y automorfismo de álgebra de Lie.*

Sea $\varphi : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Como φ es un homomorfismo sabemos que $\varphi(e) = e$, luego el diferencial $D\varphi_e$ es una transformación lineal del espacio tangente T_eG en T_eH . Identificando T_eG y T_eH con \mathfrak{g} y \mathfrak{h} , sus respectivas álgebras de Lie, obtenemos que $D\varphi_e$ induce una transformación lineal $d\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ donde si $X \in \mathfrak{g}$, entonces $d\varphi(X)$ es el único campo de vectores invariante a izquierda en H tal que $d\varphi(X)(e) = D\varphi_e(X(e))$. Es decir: $\alpha \circ d\varphi = D\varphi_e \circ \alpha$.

El siguiente teorema nos dice que $d\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ respeta el corchete de Lie, es decir $d\varphi$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Teorema 1.7. *Sean G y H grupos de Lie con álgebras de Lie \mathfrak{g} y \mathfrak{h} respectivamente. Si $\varphi : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos de Lie entonces $d\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.*

1.2. Subgrupos de Lie

Definición 1.8. *(H, φ) es un subgrupo de Lie del grupo de Lie G si*

1. H es un grupo de Lie.
2. $\varphi : H \rightarrow G$ es una inmersión inyectiva (subvariedad de G).
3. $\varphi : H \rightarrow G$ es un homomorfismo de grupos.

(H, φ) es un subgrupo cerrado de G si además $\varphi(H)$ es un subconjunto cerrado de G .

Definición 1.9. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie y $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ un subespacio vectorial. Decimos que \mathfrak{h} es una subálgebra de Lie si $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$.*

Es claro de la definición anterior que una subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie con el corchete inducido por \mathfrak{g} .

Sea (H, φ) un subgrupo de Lie de G , y sean \mathfrak{h} y \mathfrak{g} sus respectivas álgebras de Lie. Por definición $\varphi : H \rightarrow G$ es un morfismo de grupos de Lie, luego por el teorema 1.7 sabemos que φ induce un morfismo de álgebras de Lie $d\varphi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$. Esto implica que la imagen $d\varphi(\mathfrak{h})$ es una subálgebra de Lie

de \mathfrak{g} . Concluimos entonces que cualquier subgrupo de Lie de G induce una subálgebra de Lie de \mathfrak{g} .

Recíprocamente cualquier subálgebra de Lie proviene de un subgrupo de Lie como muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.10. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} , y sea $\tilde{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie. Entonces existe un único subgrupo de Lie conexo (H, φ) de G tal que $d\varphi(\tilde{\mathfrak{h}}) = \tilde{\mathfrak{h}}$.*

Corolario 1.11. *Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Entonces existe una correspondencia biyectiva entre los subgrupos de Lie conexos de G y las subálgebras de Lie de \mathfrak{g} .*

1.3. Cubrimientos

Un teorema fundamental de topología algebraica nos garantiza la existencia de un cubrimiento universal para ciertos espacios topológicos, en particular para grupos de Lie G . El siguiente teorema nos dice que es posible darle a \tilde{G} una estructura diferenciable y de grupo que hacen que sea un grupo de Lie.

Teorema 1.12. *Todo grupo de Lie conexo tiene un cubrimiento simplemente conexo que es además un grupo de Lie, y tal que $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ es un homomorfismo de grupos de Lie.*

El siguiente teorema, además de ser interesante por si mismo, nos permitirá definir en la próxima sección un concepto fundamental para la teoría de grupos de Lie.

Teorema 1.13. *Sean H y G grupos de Lie con álgebras de Lie \mathfrak{h} y \mathfrak{g} respectivamente y G simplemente conexo. Sea $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo. Entonces existe un único homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $d\varphi = \phi$.*

Corolario 1.14. *Si dos grupos de Lie simplemente conexos G y H tienen álgebras de Lie isomorfas, entonces G y H son isomorfos.*

1.4. Mapa exponencial

Un homomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$ se llama *subgrupo a un parámetro de G* . Sea G es un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Tomamos $X \in \mathfrak{g}$ fijo, luego la función $\lambda \mapsto \lambda X$ es un homomorfismo del álgebra de Lie \mathbb{R} en \mathfrak{g} . Como \mathbb{R} es simplemente conexo el teorema 1.13 nos asegura la existencia y unicidad de un subgrupo a un parámetro $\exp_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ tal que $d\exp_X(\lambda) = \lambda X$. En otras palabras $t \mapsto \exp_X(t)$ es el único subgrupo a un parámetro de G cuyo vector tangente en 0 es $X(e)$. Definimos el *mapa exponencial*

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G \text{ como } \exp(X) = \exp_X(1)$$

El nombre proviene del caso del grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$, donde el mapa exponencial de grupos coincide con la exponencial de matrices.

El mapa exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ es C^∞ y además $D \exp : T_0 \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$ es la Identidad, luego por el teorema de la función inversa sabemos que \exp mapea un entorno del $0 \in \mathfrak{g}$ difeomórficamente en un entorno del neutro $e \in G$. El siguiente teorema nos dice que el mapa exponencial conjuga los mapas φ y $d\varphi$.

Teorema 1.15. *Sea $\varphi : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie, entonces $\varphi \circ \exp = \exp \circ d\varphi$.*

1.5. Grupos y álgebras de Lie nilpotentes

En esta sección introducimos los grupos y álgebras de Lie nilpotentes, y durante todo este trabajo nos enfocaremos en esta clase de grupos y álgebras exclusivamente. La razón de esto es puramente dinámica y quedará más clara en la sección 2.3. Comenzamos con la definición de grupo nilpotente.

Dado un grupo G y dos puntos $x, y \in G$ tenemos la siguientes notaciones:

- Notamos por $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$ al conmutador de x e y .
- Si A y B son subconjuntos de G notamos (A, B) al subgrupo generado por todos los conmutadores (x, y) con $x \in A, y \in B$.
- Si H es un subgrupo normal de G escribimos $H \triangleleft G$ o $G \triangleright H$.

Es claro que si $H \triangleleft G$ y $K \triangleleft G$, entonces $(H, K) \triangleleft G$. Tomamos ahora la siguiente sucesión de subgrupos: $C^0 G = G$ y $C^{n+1} G = (G, C^n G)$ para todo $n > 0$. Es claro que:

$$G = C^0 G \supseteq C^1 G \supseteq C^2 G \supseteq \dots \supseteq C^n G \supseteq \dots$$

De la observación anterior obtenemos la serie

$$C^0 G \triangleright C^1 G \triangleright C^2 G \triangleright \dots \triangleright C^n G \triangleright \dots$$

y la llamamos *serie central descendiente*.

Definición 1.16. *Un grupo G es nilpotente si la serie es finita, es decir si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $C^N G = \{e\}$.*

Si G es abeliano, es decir $xy = yx$ para todo $x, y \in G$, es claro que $C^1 G = \{e\}$. Luego todo grupo abeliano es nilpotente. Además es fácil ver que los subgrupos de un grupo nilpotente son también nilpotentes.

Introducimos ahora la definición de álgebra de Lie nilpotente de manera similar. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie, tenemos las siguientes notaciones:

1.5. GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES

- Si \mathfrak{h} y \mathfrak{n} son subespacios de \mathfrak{g} notamos por $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}]$ al subespacio generado por todos los corchetes $[x, y]$ tales que $x \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{n}$.
- Si \mathfrak{h} es un ideal de \mathfrak{g} escribimos $\mathfrak{h} \triangleleft \mathfrak{g}$ o $\mathfrak{g} \triangleright \mathfrak{h}$.

Definimos la siguiente serie de subespacios: $C^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ y $C^{n+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^n\mathfrak{g}]$. Es claro que

$$\mathfrak{g} = C^0\mathfrak{g} \supseteq C^1\mathfrak{g} \supseteq C^2\mathfrak{g} \supseteq \cdots \supseteq C^n\mathfrak{g} \supseteq \cdots$$

Gracias a la identidad de Jacobi tenemos que si $\mathfrak{h} \triangleleft \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{n} \triangleleft \mathfrak{g}$, entonces $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}] \triangleleft \mathfrak{g}$. Luego obtenemos la *serie central descendente*:

$$\mathfrak{g} = C^0\mathfrak{g} \triangleright C^1\mathfrak{g} \triangleright C^2\mathfrak{g} \triangleright \cdots \triangleright C^n\mathfrak{g} \triangleright \cdots$$

Definición 1.17. *Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es nilpotente si la serie es finita, es decir si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $C^N\mathfrak{g} = \{0\}$.*

Análogamente al caso de grupos, si un álgebra de Lie es conmutativa entonces $C^1\mathfrak{g} = \{0\}$, luego toda álgebra abeliana es nilpotente. También es fácil chequear que una subálgebra de un álgebra nilpotente es nilpotente.

El siguiente teorema clásico de la teoría de Lie nos relaciona ámbos conceptos siempre que el grupo sea conexo.

Teorema 1.18. *Sea G un grupo de Lie conexo y \mathfrak{g} su respectiva álgebra de Lie. Entonces G es un grupo de Lie nilpotente si y solo si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie nilpotente.*

Para terminar este capítulo enunciamos un teorema que utilizaremos más adelante. La prueba se puede encontrar por ejemplo en [K].

Teorema 1.19. *Sea G un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo y \mathfrak{g} su respectiva álgebra de Lie. Entonces el mapa exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ es un difeomorfismo.*

Capítulo 2

Difeomorfismos hiperbólicos

En este capítulo estudiaremos los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos. Se definen los conceptos de difeomorfismos de Anosov e hiperbolicidad parcial y se muestran algunos ejemplos en variedades. El lector interesado podrá consultar [CrPo], [Sa] por una exposición más detallada. Comenzamos con los difeomorfismos de Anosov.

2.1. Difeomorfismos de Anosov

Un difeomorfismo de Anosov f es un difeomorfismo en una variedad diferenciable M conexa, compacta y sin borde que verifica las siguientes propiedades:

a) Existe una descomposición del fibrado tangente $TM = E^s \oplus E^u$ en dos subfibrados continuos y Df -invariantes:

- $Df_x(v^s) \in E^s(f(x))$, si $v^s \in E^s(x)$
- $Df_x(v^u) \in E^u(f(x))$, si $v^u \in E^u(x)$

b) Existe una métrica riemanniana $\|\cdot\|$ y constantes $C > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ tales que:

- $\|Df_x^n(v)\| < C\lambda^n\|v\|$ para todo $v \in E^s(x)$ y $n > 0$.
- $\|Df_x^{-n}(v)\| < C\lambda^n\|v\|$ para todo $v \in E^u(x)$ y $n > 0$.

Llamamos a E^s y E^u fibrados estable e inestable respectivamente.

Observación 2.1. *No es necesario pedir la continuidad de los fibrados estable e inestable ya que la misma se deduce de la expansión y contracción de la descomposición.*

Observación 2.2. *La definición anterior es independiente de la métrica elegida. Es decir si la descomposición es hiperbólica para una métrica, entonces lo es para cualquier otra equivalente aunque las constantes C y λ si dependen de la métrica.*

Más aún, se puede probar que siempre existe una métrica donde podemos tomar $C = 1$. Es decir, una métrica donde vemos la contracción en el primer paso.

Los ejemplos mas conocidos de difeomorfismos de Anosov son los automorfismos lineales en el toro \mathbb{T}^n . Estos ejemplos se construyen en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n como un automorfismo lineal (matriz en $SL(n, \mathbb{Z})$) que preserva el subgrupo cocompacto \mathbb{Z}^n . Al preservar ese lattice podemos tomar el mapa cociente y obtenemos un difeomorfismo de Anosov en $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$. Veremos un ejemplo para el caso $n = 2$ con más detalle en la sección 2.3.

Lo interesante de estos ejemplos lineales en el toro, o en general en nilvariedades, es que resultan ser los únicos desde el punto de vista topológico. Es decir, cualquier difeomorfismo de Anosov en una nilvariedad es equivalente a un difeomorfismo lineal o algebraico gracias a los resultados de Franks y Manning.

Decimos que dos difeomorfismos $f : M \rightarrow M$ y $g : N \rightarrow N$ son *conjugados* o topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h : M \rightarrow N$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

Teorema 2.3 ([Fr1],[Man]). *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de Anosov en una nilvariedad M . Entonces f es conjugado a un automorfismo de Anosov lineal o algebraico.*

A pesar de este resultado en nilvariedades todavía es un problema abierto el determinar que variedades admiten difeomorfismos de Anosov. En codimensión 1 se conocen a la perfección gracias a Franks y Newhouse. Decimos que un Anosov es de codimensión 1 si la dimensión de la distribución estable o la inestable es de dimensión 1.

Teorema 2.4 ([Fr],[Ne]). *Sea M una variedad riemanniana compacta, conexa, sin borde de dimensión n y sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de Anosov de codimensión 1. Entonces, $M = \mathbb{T}^n$ y f es topológicamente conjugado a un automorfismo de Anosov lineal.*

Un difeomorfismo de Anosov en dimensión 2 y 3 siempre es de codimensión 1, por lo que en dimensiones bajas estos difeomorfismos están completamente clasificados.

2.2. Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos

Sea M una variedad diferenciable compacta conexa y sin borde. Un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ es *parcialmente hiperbólico* si se cumplen las siguientes dos propiedades:

- a) Existen una descomposición del fibrado tangente en tres subfibrados Df -invariantes: $TM = E_f^{ss} \oplus E_f^c \oplus E_f^{uu}$.
- b) Existe una métrica riemanniana $\|\cdot\|$ y constantes $C > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ tales que para todo $x \in M$ y vectores unitarios $v^\sigma \in E_f^\sigma(x)$

- i) $\lambda^{-1}\|Df_x v^{ss}\| < \|Df_x v^c\| < \lambda\|Df_x v^{uu}\|$
- ii) $\|Df_x^n v^{ss}\| < C\lambda^n$, $\|Df_x^{-n} v^{uu}\| \leq C\lambda^n$, $\forall n \geq 0$

Análogamente al caso Anosov, la continuidad de los fibrados también es consecuencia de la dominación.

Dentro de los ejemplos más conocidos de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos se encuentran los lineales, los difeomorfismos de Anosov y los productos directos de Anosov por la Identidad. Otros ejemplos interesantes de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos provienen del estudio de la geometría riemanniana: en variedades de curvatura negativa, el flujo geodésico es un flujo de Anosov y por ende el tiempo 1 de este flujo es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Este ejemplo es muy interesante ya que muestra la interacción de la geometría y la dinámica.

Como mencionamos en la introducción, nos interesa trabajar con parcialmente hiperbólicos cuya distribución central es integrable. La razón de esto es variada. Por un lado existe una posible clasificación de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos llamada *conjugación por hojas* que exige la existencia de la foliación central. Por otro lado la integrabilidad de la distribución central es fundamental para obtener propiedades de ergodicidad ([PS1], [PS2]).

Decimos que un difeomorfismo parcialmente hiperbólico f es *dinámica-mente coherente* si las distribuciones $E_f^{cs} := E_f^{ss} \oplus E_f^c$ y $E_f^{cu} := E_f^c \oplus E_f^{uu}$ son únicamente integrables. Es decir, si existen foliaciones f -invariantes \mathcal{W}_f^{cs} , \mathcal{W}_f^{cu} tangentes respectivamente a E_f^{cs} , E_f^{cu} (en particular también E_f^c es integrable, con su respectiva foliación \mathcal{W}_f^c). Veremos en la subsección 2.4 que existen ejemplos de difeomorfismos no dinámicamente coherentes.

En esta tesis nos centraremos en difeomorfismos parcialmente hiperbólicos que se encuentran en clases de isotopía de difeomorfismos de Anosov lineales y probaremos la coherencia dinámica en algunos casos. En la siguiente sección daremos una construcción detallada de los difeomorfismos hiperbólicos lineales así como de las variedades donde trabajaremos concidas como *nilvariedades*.

2.3. Construcción algebraica

En esta sección vamos a construir difeomorfismos de Anosov o parcialmente hiperbólicos lineales en variedades riemannianas de dimensión arbitraria.

Sea G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo de dimensión n , y $A : G \rightarrow G$ un isomorfismo de grupos. El neutro e de G es fijo por A , luego tenemos que el diferencial es un isomorfismo lineal $DA_e : T_eG \rightarrow T_eG$. El teorema 1.7 nos dice que el diferencial induce un isomorfismo de álgebras de Lie $dA : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. La correspondencia entre el álgebra de Lie \mathfrak{g} y T_eG viene dada por el isomorfismo $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow T_eG$ que asocia a $X \in \mathfrak{g}$ el vector $X(e) \in T_eG$ y además conjuga los isomorfismos DA_e y dA .

Decimos que el automorfismo A es *Anosov* si la transformación lineal $dA : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es hiperbólica, es decir no tiene valores propios de módulo 1. Cuando este es el caso podemos descomponer \mathfrak{g} en suma directa de subespacios propios \mathfrak{g}^s y \mathfrak{g}^u , donde \mathfrak{g}^s es la suma directa de los subespacios propios asociados a los valores propios de módulo menor que 1 y \mathfrak{g}^u es la suma directa de los subespacios propios asociados a los valores propios de módulo mayor que 1. Por ser dA hiperbólica obtenemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^s \oplus \mathfrak{g}^u$. Para esta descomposición de \mathfrak{g} tenemos que existe un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en \mathfrak{g} tal que la norma asociada a este producto contrae vectores de \mathfrak{g}^s exponencialmente para el futuro y contrae vectores de \mathfrak{g}^u exponencialmente para el pasado. Esto quiere decir que existen constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que:

- $\|dA^n(v)\| \leq C\lambda^n\|v\|$ para todo $v \in \mathfrak{g}^s$.
- $\|dA^{-n}(v)\| \leq C\lambda^n\|v\|$ para todo $v \in \mathfrak{g}^u$.

La hiperbolicidad de dA implica que los subespacios \mathfrak{g}^s y \mathfrak{g}^u son subálgebras de Lie, es decir, son cerrados por el corchete.

Proposición 2.5. *Sea $A : G \rightarrow G$ un automorfismo de Anosov con una descomposición del álgebra de Lie de la forma: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^s \oplus \mathfrak{g}^u$. Entonces, los subespacios \mathfrak{g}^s y \mathfrak{g}^u son subálgebras de Lie.*

Demostración. Probaremos el caso estable \mathfrak{g}^s . La prueba para el caso inestable es análoga. Tomamos $X, Y \in \mathfrak{g}^s$, tenemos que probar que $[X, Y] \in \mathfrak{g}^s$.

Sabemos que $\|dA^n X\|$ y $\|dA^n(Y)\|$ tienden a cero cuando $n \rightarrow +\infty$ por pertenecer X, Y a \mathfrak{g}^s . Como el corchete de Lie es una aplicación bilineal, tenemos que es continua. Luego, $[dA^n X, dA^n Y] \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Como $dA : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ un morfismo de álgebras de Lie tenemos que respeta el corchete y podemos concluir que $dA^n([X, Y]) = [dA^n X, dA^n Y] \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Esto prueba que $[X, Y] \in \mathfrak{g}^s$. \square

2.3. CONSTRUCCIÓN ALGEBRAICA

Observamos ahora que el isomorfismo $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$ nos permite pasar este producto interno de \mathfrak{g} al espacio tangente $T_e G$:

$$\langle v, w \rangle_e = \langle \alpha^{-1}(v), \alpha^{-1}(w) \rangle$$

Luego trasladando a izquierda el producto interno en e obtenemos un producto interno en cada punto $x \in G$:

$$\langle v, w \rangle_x = \langle D(L_x)_e^{-1}(v), D(L_x)_e^{-1}(w) \rangle_e$$

Es fácil ver que esto define una métrica riemanniana y que es invariante a izquierda (ver por ejemplo [DoC]). Además dado cualquier par de puntos $x, y \in G$ existe una isometría $L_{yx^{-1}}$ que lleva x en y . Una variedad riemanniana con esta última propiedad recibe el nombre de *variedad homogénea*.

Definimos la distribución estable $E^s(x) \subset T_x G$ como $E^s(e) = \alpha(\mathfrak{g}^s)$, y luego multiplicando por izquierda $E^s(x) = d(L_x)_e(E^s(e))$. Análogamente definimos $E^u(x)$.

Veamos ahora que $A : G \rightarrow G$ con esta descomposición y esta métrica es un difeomorfismo de Anosov.

■ Invariancia por el diferencial

Veamos que la descomposición del espacio tangente $TM = E^s \oplus E^u$ es DA -invariante: $DA_x(v) \in E^\sigma(A(x))$ si $v \in E^\sigma(x)$:

Tenemos que

$$v \in E^\sigma(x) = D(L_x)_e(E^\sigma) = D(L_x)_e(\alpha(\mathfrak{g}^\sigma))$$

Entonces existe un vector $w^\sigma \in \mathfrak{g}^\sigma$ tal que $v = D(L_x)_e(\alpha(w^\sigma))$

$$DA_x(v) = DA_e(D(L_x)_e(\alpha(w^\sigma))) = D(A \circ L_x)_e(\alpha(w^\sigma))$$

Como A es morfismo de grupos, tenemos que $f \circ L_x = L_{f(x)} \circ f$, luego

$$\begin{aligned} DA_x(v) &= D(L_{A(x)} \circ A)_e(\alpha(w^\sigma)) = D(L_{A(x)})_e \circ (DA_e \circ \alpha)(\mathfrak{g}^\sigma) \\ &= D(L_{A(x)})_e \circ (\alpha \circ dA)(w^\sigma) \end{aligned}$$

Como \mathfrak{g}^σ es dA -invariante, tenemos que $\alpha(dA(w^\sigma)) \in \alpha(\mathfrak{g}^\sigma) = E^\sigma(e)$. Entonces,

$$DA_x(v) \in D(L_{A(x)})_e(E^\sigma(e)) = E^\sigma(A(x))$$

como queríamos ver.

■ Contracción y expansión

Ahora falta probar que los subespacios $E^s(x)$ contraen vectores exponencialmente. La cuenta para el caso E^u es análoga.

2.3. CONSTRUCCIÓN ALGEBRAICA

Tomamos $v \in E^s(x)$, luego por definición $D(L_x)_x^{-1}(v) \in E^s(e) = \alpha(\mathfrak{g}^s)$. Tenemos entonces que existe un vector $w^s \in \mathfrak{g}^s$ tal que $\alpha(w^s) = D(L_{x^{-1}})_x(v)$. Luego $DA_x^n(v) \in E^s(A^n(x))$ y

$$\|DA_x^n(v)\|_{A^n(x)} = \|D(L_{A^n(x)})_{A^n(x)}^{-1}(DA_x^n(v))\|_e = \|D(L_{A^n(x)}^{-1} \circ A^n)_x(v)\|_e$$

Por ser A homomorfismo de grupos tenemos que

$$L_{A^n(x)}^{-1} \circ A^n = L_{A^n(x)^{-1}} \circ A^n = L_{A^n(x^{-1})} \circ A^n = A^n \circ L_{x^{-1}}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|DA_x^n(v)\|_{A^n(x)} &= \|D(A^n \circ L_{x^{-1}})_x(v)\|_e = \|DA_e^n \circ D(L_{x^{-1}})_x(v)\|_e \\ &= \|DA_e^n \circ \alpha(w^s)\|_e \end{aligned}$$

Finalmente como α conjugua los mapas DA_e y dA obtenemos:

$$\begin{aligned} \|DA_x^n(v)\|_{A^n(x)} &= \|DA_e^n \circ \alpha(w^s)\|_e = \|\alpha \circ dA^n(w^s)\|_e = \|dA^n(w^s)\| \\ &\leq C\lambda^n \|w^s\| = C\lambda^n \|\alpha(w^s)\|_e = C\lambda^n \|D(L_{x^{-1}})_x(v)\|_e \\ &= C\lambda^n \|v\|_x \end{aligned}$$

Esto prueba que $A : G \rightarrow G$ es un difeomorfismo de Anosov en una variedad (grupo de Lie) simplemente conexa. El siguiente teorema de Jacobson [J] nos muestra la primera restricción topológica en la construcción: la hiperbolicidad fuerza al grupo G a ser nilpotente.

Teorema 2.6 ([J]). *Sea $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ un automorfismo de álgebras de Lie que es hiperbólico como transformación lineal. Entonces \mathfrak{g} es nilpotente.*

El teorema anterior nos dice que \mathfrak{g} tiene que ser nilpotente y esto ocurre si y solo si G es nilpotente (Teorema 1.18). Debido a este resultado es que trabajaremos exclusivamente con grupos y álgebras de Lie nilpotentes, como mencionamos en el capítulo anterior.

Nuestro objetivo ahora es construir ejemplos en variedades compactas. Supongamos que G tiene un subgrupo discreto cocompacto Γ invariante por A , es decir $A(\Gamma) = \Gamma$. Luego A induce un mapa f_A en el cociente compacto $M = G/\Gamma$, dado por

$$f_A : M \rightarrow M, \quad f_A(x \cdot \Gamma) = A(x) \cdot \Gamma$$

Es fácil ver que f_A está bien definido, ya que A es un morfismo y Γ es A -invariante. Además es invertible ya que $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$. Como la descomposición y la métrica son invariantes a izquierda, en particular son invariantes por Γ y podemos llevar la métrica riemanniana de G al cociente $M = G/\Gamma$ obteniendo un difeomorfismo de Anosov $f_A : G/\Gamma \rightarrow G/\Gamma$.

2.3. CONSTRUCCIÓN ALGEBRAICA

Decimos que $M = G/\Gamma$ es una *nilvariedad*, es decir, una variedad riemanniana que se obtiene como cociente de un grupo de Lie conexo simplemente conexo nilpotente por la acción de un subgrupo discreto cocompacto.

La misma construcción que acabamos de hacer también es posible cuando tenemos una descomposición del álgebra de Lie \mathfrak{g} en varios subespacios vectoriales dA -invariantes:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{ss} \oplus \mathfrak{g}^{ws} \oplus \mathfrak{g}^{wu} \oplus \mathfrak{g}^{uu}$$

El isomorfismo $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$ conjuga nuevamente los mapas DA_e y dA , y trasladando por izquierda obtenemos las correspondientes distribuciones E^σ para $\sigma = ss, ws, wu, uu$. De esta forma obtenemos difeomorfismos de Anosov con descomposiciones hiperbólicas de la forma

$$TM = E^{ss} \oplus E^{ws} \oplus E^{wu} \oplus E^{uu}$$

Si llamamos $E^c = E^{ws} \oplus E^{wu}$, obtenemos una descomposición parcialmente hiperbólica: $TM = E^{ss} \oplus E^c \oplus E^{uu}$.

A estos ejemplos de difeomorfismos de Anosov (o parcialmente hiperbólicos) los llamamos *automorfismos de Anosov* o *automorfismos hiperbólicos*. En la siguiente sección veremos algunos ejemplos concretos de estas construcciones algebraicas.

Hasta ahora hemos asumido la existencia de un subgrupo Γ discreto y cocompacto. El siguiente teorema, entre otras cosas, nos da condiciones necesarias y suficientes para que exista tal subgrupo.

Teorema 2.7. [Mal]

1. Una condición necesaria y suficiente para que un grupo discreto Γ sea un subgrupo cocompacto de un grupo simplemente conexo nilpotente es que Γ sea finitamente generado, nilpotente, sin elementos de torsión.
2. Dado un grupo de Lie G conexo, simplemente conexo y nilpotente, una condición necesaria y suficiente para que exista un subgrupo $\Gamma \subset G$ discreto y cocompacto es que el álgebra de Lie \mathfrak{g} tenga coordenadas racionales en alguna base.
3. Si Γ_i subgrupo discreto cocompacto de un grupo de Lie simplemente conexo G_i , $i = 1, 2$ entonces todo isomorfismo $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ se extiende únicamente a un isomorfismo $G_1 \rightarrow G_2$.

El teorema anterior nos da una descripción de los subgrupos de G discretos y cocompactos. Más aún, la tercera parte del teorema nos permite extender todo automorfismo $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ a un único automorfismo $\tilde{\varphi} : G \rightarrow G$ tal que $\tilde{\varphi}|_\Gamma = \varphi$. Esto último nos permitirá en la sección 3.5 definir la parte lineal de un difeomorfismo.

2.4. Ejemplos

En esta sección mostraremos dos ejemplos concretos de difeomorfismos hiperbólicos. Comenzamos con los más simples: automorfismos lineales del toro.

Automorfismos lineales en \mathbb{T}^2

Siguiendo con la construcción de la sección anterior, vamos a tomar $G = \mathbb{R}^2$ y $\Gamma = \mathbb{Z}^2$. Es claro que Γ es un subgrupo discreto de G y además es cocompacto, su cociente es el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Comenzamos con la matriz hiperbólica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A induce un morfismo lineal del plano \mathbb{R}^2 en si mismo. Además sus entradas son enteras por lo que obtenemos que $A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$, es decir, el subgrupo \mathbb{Z}^2 es A -invariante. Luego, el difeomorfismo $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ dado por $f_A(\Pi(x, y)) = \Pi(A(x, y))$ está bien definido (es invertible por ser A invertible).

Este difeomorfismo tiene propiedades muy interesantes, algunas de ellas las comentamos brevemente a continuación. Primero que nada, observamos que dado $q \in \mathbb{Z}$, el conjunto $C_q = \{(m/q, n/q) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ verifica que $A(C_q) = C_q$, lo que implica que $f_A(\Pi(C_q)) = \Pi(C_q)$. Como el conjunto $\Pi(C_q)$ es finito, todo punto de $\Pi(C_q)$ es un punto periódico de f_A . Además como la unión $\bigcup_{q \in \mathbb{Z}} C_q$ es densa en \mathbb{R}^2 , concluimos que $\mathbb{T}^2 = \overline{\text{Per}(f_A)}$.

Estudiando valores propios y vectores propios obtenemos los valores

$$0 < \lambda_s = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1 < \lambda_u = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

y los espacios

$$E^s = \left\langle \left(1, \frac{-(1 - \sqrt{5})}{2}\right) \right\rangle \text{ y } E^u = \left\langle \left(1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \right\rangle$$

que son rectas de pendiente irracional por el origen, perpendiculares entre si. Dado que f_A es la proyección de A se puede ver que las variedades estables e inestables (ver capítulo 3) son proyecciones de estas rectas

$$W^s(\Pi(x), f_A) = \Pi(x + E^s) \text{ y } W^u(\Pi(x), f_A) = \Pi(x + E^u)$$

es decir $W^s(\Pi(x), f_A)$ y $W^u(\Pi(x), f_A)$ son densas en \mathbb{T}^2 . Esto además de ser interesante por si mismo, permite probar fácilmente que f_A es topológicamente mixing, y por lo tanto transitivo. Además f_A resulta ser expansivo (debido a la expansividad de A) y preserva el volumen inducido por el cociente en \mathbb{T}^2 ya que $\det(A) = 1$.

Por último comentamos que la misma construcción que acabamos de hacer en el toro \mathbb{T}^2 puede hacerse en el toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ tomando una matriz $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ y repitiendo el procedimiento. Las mismas propiedades que acabamos de ver en el caso bi-dimensional valen para cualquier dimensión.

Ejemplo de Borel-Smale-Wilkinson

El segundo ejemplo que veremos es un difeomorfismo de Anosov en una variedad compacta de dimensión 6 que no es el toro \mathbb{T}^6 . Además de ser un Anosov, existe una manera de verlo como un difeomorfismo parcialmente hiperbólico. El ejemplo apareció originalmente en el artículo de Smale [Sm] como un ejemplo de un difeomorfismo de Anosov en una variedad que no es el toro. En dicho trabajo Smale atribuye el ejemplo a A. Borel. Años más tarde A. Wilkinson observó en [W] que agrupando correctamente fibrados uno crea un parcialmente hiperbólico cuya distribución central no es integrable ya que no se cumple la condición de Frobenius (ver sección 3.2), es decir, un difeomorfismo parcialmente hiperbólico que no es dinámicamente coherente. A continuación presentamos el ejemplo.

Sea \mathcal{H} el grupo de Heisenberg, es decir, el subgrupo de matrices de $SL(3, \mathbb{R})$ de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tenemos que \mathcal{H} es un grupo de Lie difeomorfo a \mathbb{R}^3 , simplemente conexo, nilpotente y claramente es no abeliano. Identificando (x, y, z) con la matriz triangular superior, el producto en \mathcal{H} es de la forma:

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy')$$

Su respectiva álgebra de Lie \mathfrak{h} está generada por las matrices

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estas matrices satisfacen las relaciones $[X, Z] = [Y, Z] = 0, [X, Y] = Z$. Si identificamos (a, b, c) con $aX + bY + cZ \in \mathfrak{h}$ el mapa exponencial $\exp: \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{H}$ es un difeomorfismo y su fórmula está dada por

$$\exp(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & a & c + \frac{1}{2}ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideramos ahora $\mathcal{G} = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ con la estructura de grupo de producto directo y la estructura diferenciable producto de \mathcal{H} . Obtenemos que \mathcal{G} es un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo difeomorfo a \mathbb{R}^6 . Además su álgebra

2.4. EJEMPLOS

de Lie resulta ser $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ y está generada por $\{X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2\}$. Las únicas relaciones no triviales de estos campos de vectores son

$$[X_1, Y_1] = Z_1, [X_2, Y_2] = Z_2$$

Identificamos $(c, b, a, a', b', c') \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ con $aX_1 + bY_1 + cZ_1 + a'X_2 + b'Y_2 + c'Z_2 \in \mathfrak{g}$. Tomamos una matriz $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ y sean $\lambda > 1$ y $\lambda^{-1} < 1$ sus respectivos valores propios. Se puede obtener un lattice $\tilde{\Gamma}$ irreducible y cocompacto de \mathfrak{g} de manera que $\Gamma = \exp(\tilde{\Gamma})$ sea un subgrupo discreto cocompacto de \mathcal{G} . Si tomamos números reales α y β , el mapa lineal B

$$B : (c, b, a, a', b', c') \mapsto (c\lambda^{\alpha+\beta}, b\lambda^\beta, a\lambda^\alpha, a'\lambda^{-\alpha}, b'\lambda^{-\beta}, c'\lambda^{-\alpha-\beta})$$

es un automorfismo de \mathfrak{g} e induce un homomorfismo $F_B : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ cuyo diferencial en la identidad es B . Si α y β son enteros, el automorfismo B preserva $\tilde{\Gamma}$ y obtenemos un difeomorfismo $f_B : \mathcal{G}/\Gamma \rightarrow \mathcal{G}/\Gamma$.

El difeomorfismo f_B es parcialmente hiperbólico si alguno entre $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ es no nulo, y Anosov si los tres son no nulos.

A partir de ahora supondremos $\alpha + \beta > \beta \geq \alpha > 0$. En este caso f_B es Anosov: el fibrado central es trivial, el fibrado estable E^s está generado por los campos X_2, Y_2, Z_2 y el fibrado inestable E^u por los campos X_1, Y_1, Z_1 . De esta forma obtenemos un difeomorfismo de Anosov $f_B : \mathcal{G}/\Gamma \rightarrow \mathcal{G}/\Gamma$ tal que la nilvariedad \mathcal{G}/Γ no es el toro de dimensión 6.

Existe otra forma de ver a f_B y es la siguiente: el fibrado estable E^s está generado por Z_2 , el inestable E^u generado por Z_1 y el fibrado central E^c por los restantes X_1, Y_1, X_2 e Y_2 . Con estas distribuciones f_B es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Lo interesante de este ejemplo es que el fibrado central E^c no es cerrado por el corchete de Lie ya que por ejemplo $[X_1, Y_1] = Z_1 \in E^u$. Esto implica gracias al teorema de Frobenius (sección 3.2) que la distribución central no es integrable, es decir, f_B no es dinámicamente coherente.

Capítulo 3

Variedades invariantes

En este capítulo estudiaremos la existencia y unicidad de variedades invariantes tangentes a distribuciones hiperbólicas así como la estabilidad de los automorfismos de Anosov. Se prueba el teorema de las placas locales [HPS] y el teorema de la variedad estable fuerte siguiendo [CrPo]. En la segunda parte del capítulo probamos el lema de sombreado para automorfismos hiperbólicos y la estabilidad de automorfismos hiperbólicos como consecuencia de este lema. El lector interesado podrá consultar [HPS], [CrPo] y [Sa] para más detalles. Comenzamos presentando la definición de descomposición dominada que aparece naturalmente como una generalización de hiperbolicidad.

3.1. Descomposición dominada

Definición 3.1. Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo en una variedad M compacta, conexa, sin borde. Decimos que f tiene descomposición dominada, si para todo $x \in M$ existe una descomposición del espacio tangente $T_x M = E(x) \oplus F(x)$ tal que:

1. **Invariancia:** Las distribuciones E y F son Df -invariantes:

$$Df_x(E(x)) = E(f(x)) \text{ , } Df_x(F(x)) = F(f(x))$$

2. **Continuidad:** Las distribuciones E , F son continuas. Es decir $E(x)$, y $F(x)$ varían continuamente con $x \in M$.
3. **Dominación:** Existen constantes $C > 0$, y $0 < \lambda < 1$ tales que para todo $x \in M$, $v_E \in E \setminus \{0\}$, $v_F \in F \setminus \{0\}$:

$$\frac{\|Df_x^n(v_E)\|}{\|v_E\|} \leq C\lambda^n \frac{\|Df_x^n(v_F)\|}{\|v_F\|}, \quad n \geq 0$$

3.1. DESCOMPOSICIÓN DOMINADA

La descomposición dominada nos dice que cualquier dirección que no esté contenida en E , converge exponencialmente rápido a F por la acción del diferencial Df . Decimos que el fibrado F *domina* al fibrado E . Aclaremos que la descomposición dominada no implica que haya contracción o expansión en alguna de las distribuciones, simplemente que hay una dirección predominante.

La condición 3 es equivalente a que exista un $N > 0$ tal que para todo $x \in M$, $v_E \in E \setminus \{0\}$, $v_F \in F \setminus \{0\}$:

$$\frac{\|Df_x^N(v_E)\|}{\|v_E\|} \leq \frac{1}{2} \frac{\|Df_x^N(v_F)\|}{\|v_F\|}$$

Si llamamos $m(A)$ a la norma mínima de A o co-norma, la dominación también puede expresarse diciendo que para todo $x \in M$:

$$\|Df^n|_{E(x)}\| \leq C\lambda^n m(Df^n|_{F(x)}), \quad n \geq 0$$

Notamos que la descomposición dominada no depende de la métrica riemanniana. Es decir, si un difeomorfismo tiene descomposición dominada, entonces la seguirá teniendo por más que cambiemos la métrica. Sin embargo, las constantes C y λ si dependen de la métrica.

Observación 3.2. *De la condición 2 en la definición 3.1 se deduce que la dimensión de los subespacios $E(x)$ y $F(x)$ es constante. Decimos que la descomposición dominada es de índice i cuando $\dim(E) = i$. El recíproco también es cierto: Si las dimensiones de los subespacios $E(x)$ y $F(x)$ son constantes, entonces las distribuciones E y F varían continuamente. Esto es consecuencia de la dominación. Ver [CrPo],[Sa2].*

Al igual que en el caso Anosov, muchas veces es difícil chequear que una descomposición es dominada (o hiperbólica), ya que habría que encontrar los subespacios invariantes a mano. A continuación veremos una manera más geométrica de detectar cuando una descomposición es dominada por medio de campos de conos.

Sea V un espacio vectorial con producto interno. Un *cono* en V es un conjunto \mathcal{C} tal que existe una forma cuadrática no degenerada $B : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{C} = \{v \in V : B(v) \leq 0\}$$

De manera equivalente podemos expresar \mathcal{C} respecto a una descomposición $V = E \oplus F$ como

$$\mathcal{C} = \{v = (v_E, v_F) : \|v_E\| \leq a\|v_F\|\}$$

para algún $a > 0$. La dimensión $\dim(\mathcal{C})$ de un cono \mathcal{C} es la dimensión del subespacio F .

3.1. DESCOMPOSICIÓN DOMINADA

Un *campo de conos* en M es una asociación para cada punto $x \in M$ de un cono $\mathcal{C}_x \subset T_x M$ de manera que en cartas locales las formas cuadráticas asociadas $B_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ varíen continuamente y sean de dimensión d para todo $x \in M$.

Decimos que un campo de conos \mathcal{C} en M es *Df*-contractivo, si existe un $N > 0$ tal que para todo $x \in M$,

$$Df_x^N(\mathcal{C}_x) \subset \text{int}(\mathcal{C}_{f^N(x)}).$$

Teorema 3.3 (Criterio de conos). *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo en una variedad M compacta conexa y sin borde. Entonces, son equivalentes:*

1. f admite una descomposición dominada $TM = E \oplus F$ con $\dim(F) = d$.
2. Existe un campo de conos \mathcal{C} en M *Df*-contractivo de dimensión d .

La prueba de la proposición anterior no es muy difícil y se puede encontrar en [CrPo], [Sa].

La caracterización de la descomposición dominada por familias de conos nos permite entonces dos cosas. Primero, detectar la dominación de manera más fácil y además ver que la descomposición dominada es una propiedad C^1 robusta.

Teorema 3.4. *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo C^1 que admite una descomposición dominada de la forma $TM = E \oplus F$. Entonces existe un entorno \mathcal{U}_f en la topología C^1 tal que para todo $g \in \mathcal{U}_f$ tiene una descomposición dominada $TM = \hat{E} \oplus \hat{F}$ tal que $\dim(E) = \dim(\hat{E})$, $\dim(F) = \dim(\hat{F})$. Más aún, la descomposición en un punto x para g depende continuamente con (x, g) .*

Aclaremos que varias descomposiciones dominadas podrían coexistir en una misma variedad M , sin embargo, una vez que fijamos el índice de la descomposición, esta resulta ser única. Esto es consecuencia de la dominación y la continuidad de los fibrados.

Definición 3.5. *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo en una variedad M compacta, conexa, sin borde. Supongamos que para todo $x \in M$ tenemos una descomposición del espacio tangente $T_x M = E_1(x) \oplus \cdots \oplus E_k(x)$. Decimos que la descomposición es dominada si se cumplen*

1. **Invariancia:** Los subespacios E_i son *Df*-invariantes:

$$Df_x(E_i(x)) = E_i(f(x)), \text{ para todo } 1 \leq i \leq k$$

2. **Continuidad:** Los subespacios $E_i(x)$ son continuos para todo $1 \leq i \leq k$

3. **Dominación:** Existen constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tales que para todo $v \in E_i(x) \setminus \{0\}$, $u \in E_{i+1}(x) \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|Df^n(v)\|}{\|v\|} \leq C\lambda^n \frac{\|Df^n(u)\|}{\|u\|}$$

Equivalentemente, decimos que una descomposición $TM = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ es dominada si para todo $1 \leq j \leq k-1$, la descomposición

$$TM = (E_1 \oplus \cdots \oplus E_j) \oplus (E_{j+1} \oplus \cdots \oplus E_k)$$

es dominada. Todas las propiedades que vimos para descomposiciones dominadas en dos subespacios invariantes también valen para descomposiciones en varios fibrados ya que lo único que hacemos es reagrupar fibrados como nos sea conveniente.

Para terminar esta sección enunciamos un resultado técnico pero muy útil a la hora de trabajar con descomposiciones dominadas. La condición 3 en las definiciones 3.1 y 3.5 y sus equivalentes nos dice que para ver la dominación podríamos tener que esperar mucho tiempo. Sin embargo, un resultado debido a N. Gourmelon nos dice que existe una métrica tal que $C = 1$ en 3, es decir, una métrica que nos permite ver la dominación en el primer paso. Decimos que una métrica con esta propiedad es *adaptada* a la descomposición dominada.

Teorema 3.6. [Gou] Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo con una descomposición dominada de la forma $TM = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$. Entonces existe una métrica riemanniana $\|\cdot\|$ que es adaptada a la descomposición dominada y a cualquier fibrado Df -contractivo y a cualquier fibrado Df^{-1} -contractivo.

Los ejemplos más simples de descomposición dominada son los difeomorfismos de Anosov ya que la descomposición hiperbólica $TM = E^s \oplus E^u$ es claramente dominada. También las descomposiciones parcialmente hiperbólicas son dominadas. Existen ejemplos de descomposiciones dominadas que no son hiperbólicas, pero no nos interesaremos en eso en este trabajo. En las siguientes secciones veremos que bajo ciertas hipótesis, podemos integrar algunas distribuciones. Es decir, probar la existencia de foliaciones f -invariantes tangentes a las distribuciones.

3.2. Distribuciones y el teorema de Frobenius

Sea M una variedad riemanniana de dimensión m . Una distribución \mathcal{D} de dimensión k ($1 \leq k \leq m$) es una elección de un subespacio $\mathcal{D}(p) \subset T_pM$ de dimensión k para cada $p \in M$. La distribución es diferenciable si para cada $p \in M$ existe un entorno U de p y k campos de vectores X_1, \dots, X_k

3.2. DISTRIBUCIONES Y EL TEOREMA DE FROBENIUS

diferenciables en U que generan $\mathcal{D}(x)$ para todo punto $x \in U$. Un campo de vectores X en M se dice que pertenece a la distribución \mathcal{D} si $X(x) \in \mathcal{D}(x)$ para todo $x \in M$ (notamos $X \in \mathcal{D}$). Una distribución diferenciable \mathcal{D} se dice involutiva si $[X, Y] \in \mathcal{D}$ para cualquier par de campos diferenciables $X, Y \in \mathcal{D}$.

Una subvariedad (N, ϕ) de M es una variedad integral de la distribución \mathcal{D} si

$$d\phi(T_p N) = \mathcal{D}(p) \quad \forall p \in N$$

La idea de esta sección es mostrar que una condición necesaria y suficiente para que exista una variedad integral para una distribución \mathcal{D} es que la distribución sea involutiva.

Definición 3.7. Dado $\varphi : M \rightarrow N$ diferenciable. Decimos que dos campos de vectores X en M , Y en N están φ -relacionados si $d\varphi \circ X = Y \circ \varphi$.

Proposición 3.8. Sea $\varphi : M \rightarrow N$ diferenciable, y sean X, X_1 campos diferenciables en M e Y, Y_1 campos diferenciables en N . Si X está φ relacionado con Y , y X_1 está φ relacionado con Y_1 , entonces $[X, X_1]$ está φ relacionado con $[Y, Y_1]$.

Demostración. Tenemos que probar que $d\varphi \circ [X, X_1] = [Y, Y_1] \circ \varphi$. Fijamos $p \in N$ y una función f diferenciable en N . Luego tenemos

$$\begin{aligned} d\varphi([X, X_1](p))(f) &= [X, X_1](f \circ \varphi) \\ &= X(X_1(f \circ \varphi))(p) - X_1(X(f \circ \varphi))(p) \\ &= X((d\varphi \circ X_1)(f))(p) - X_1((d\varphi \circ X)(f))(p) \\ &= X(Y_1(f) \circ \varphi)(p) - X_1(Y(f) \circ \varphi)(p) \\ &= d\varphi(X)(p)(Y_1(f)) - d\varphi(X_1)(p)(Y(f)) \\ &= Y(\varphi(p))(Y_1(f)) - Y_1(\varphi(p))(Y(f)) \\ &= [Y, Y_1](f)(\varphi(p)) \end{aligned}$$

□

Proposición 3.9. Sea \mathcal{D} una distribución en M tal que por cada punto pasa una variedad integral de \mathcal{D} . Entonces \mathcal{D} es involutiva.

Demostración. Sean $X, Y \in \mathcal{D}$ y sea $p \in M$. Tenemos que probar que $[X, Y](p) \in \mathcal{D}(p)$. Sea (N, φ) una variedad integral de \mathcal{D} que pasa por p . Supongamos que $\varphi(q) = p$. Como $d\varphi_x : T_x N \rightarrow \mathcal{D}(\varphi(x))$ es un isomorfismo en cada $x \in N$, existen campos de vectores \tilde{X}, \tilde{Y} en N tales que

$$d\varphi \circ \tilde{X} = X \circ \varphi \tag{3.1}$$

$$d\varphi \circ \tilde{Y} = Y \circ \varphi \tag{3.2}$$

3.3. TEOREMA DE LA VARIEDAD ESTABLE

Osea, X y \tilde{X} están φ relacionados. Análogamente con Y e \tilde{Y} . Luego por la proposición anterior tenemos que $[X, Y]$ está φ relacionado con $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$. Es decir

$$[X, Y](p) = [X, Y](\varphi(z)) = d\varphi([\tilde{X}, \tilde{Y}](z)) \in \mathcal{D}(m)$$

□

El recíproco de esta proposición es un teorema debido a G. Frobenius. Una prueba del mismo puede encontrarse en [Wa].

Teorema 3.10. *Sea \mathcal{D} una distribución diferenciable de dimensión k e involutiva en M . Sea $p \in M$. Entonces existe una variedad integral de \mathcal{D} por p . Más aún, existe un sistema de coordenadas (U, φ) centrado en p con funciones coordenadas x_1, \dots, x_m tales que las caras*

$$x_i = \text{constante} \quad \forall i \in \{k+1, \dots, m\}$$

son variedades integrales de \mathcal{D} y si (N, ψ) es una variedad integral conexa de \mathcal{D} tal que $\psi(N) \subset U$, entonces $\psi(N)$ está contenido en alguna de las fibras $x_i = \text{constante}$

Volviendo al ejemplo de la sección 2.4 vemos que la distribución central no preserva el corchete, es decir, la distribución no es involutiva. El teorema anterior nos asegura entonces que ese difeomorfismo no es dinámicamente coherente.

3.3. Teorema de la variedad estable

En esta sección probaremos el teorema de la variedad estable fuerte, además de un teorema sobre placas locales para difeomorfismos con descomposición dominada. El teorema de Frobenius visto en la sección anterior nos da una caracterización de la integrabilidad de las distribuciones siempre que estas sean C^1 . En general, cuando uno tiene un difeomorfismo hiperbólico, tanto parcial como Anosov, las distribuciones estables e inestables resultan ser solo Holder continuas, además de que chequear la involutividad de una distribución no es tan trivial en el caso no lineal. Por esta razón se precisan de otras técnicas para probar la integrabilidad de las distribuciones. El método más conocido para probar el teorema de la variedad estable es debido a Hadamard y se conoce como el *argumento de la transformada del gráfico*. La exposición que haremos trata sobre esta idea y sigue [CrPo].

Sea $f \in \text{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$ un difeomorfismo que admite una descomposición dominada de la forma $TM = E^s \oplus E^c$ tal que $\dim(E^s) \geq 1$.

Definición 3.11. *Si $\epsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño, para todo $x \in K$:*

$$\mathcal{W}_f^{\text{ss}}(x) = \{y \in M, \exists c > 0, \forall n \geq 0 : d(f^n(x), f^n(y)) < ce^{-\epsilon n} \min\{m(Df^n|_{E^c}), 1\}\}$$

3.3. TEOREMA DE LA VARIEDAD ESTABLE

\mathcal{W}_f^{ss} es el conjunto de puntos cuyas órbitas convergen a la órbita de x más rápido que lo que contrae $Df^n|_{E^c(x)}$.

Observación 3.12.

1. El conjunto estable fuerte \mathcal{W}_f^{ss} no depende de la métrica riemanniana.
2. $f(\mathcal{W}_f^{ss}(x)) = \mathcal{W}_f^{ss}(f(x))$

El resultado que vamos a probar en esta sección es el siguiente. La demostración sigue [CrPo].

Teorema 3.13. [HPS] Sea $f \in \text{Diff}^1(M)$ un difeomorfismo que admite una descomposición parcialmente hiperbólica de la forma $TM = E^s \oplus E^c$ y tal que el fibrado E^s contrae uniformemente. Entonces:

1. Para todo $x \in M$, el conjunto estable fuerte $\mathcal{W}_f^{ss}(x)$ es la imagen de una inmersión inyectiva de $\mathbb{R}^{\dim(E^s)}$ y es tangente a $E^s(x)$ en x .
2. $\mathcal{W}_f^{ss}(x)$ no depende del $\epsilon > 0$ si es suficientemente pequeño.
3. Para todo par de puntos $x, y \in M$, los conjuntos estables fuertes $\mathcal{W}_f^{ss}(x)$, $\mathcal{W}_f^{ss}(y)$ son disjuntos o coinciden.
4. Para $\eta > 0$ suficientemente pequeño, la bola $D_f^{ss}(x, \eta) = \{y \in \tilde{\mathcal{W}}_f^{ss}(x) : d_{\tilde{\mathcal{W}}_f^{ss}}(x, y) < \eta\}$ depende continuamente de $x \in M$ y de f en la topología C^1 .

Llamaremos a los conjuntos $\mathcal{W}_f^{ss}(x)$, $\mathcal{W}_f^{uu}(x)$ variedad estable fuerte e inestable fuerte en x .

Observación 3.14.

1. La variedad $\mathcal{W}_f^{ss}(x)$ es tangente a E^s en cada punto de M . Veremos que recíprocamente cualquier subvariedad C^1 tangente a E^s en cada punto está contenida en $\mathcal{W}_f^{ss}(x)$.
2. Como consecuencia del teorema anterior tenemos que la colección de conjuntos estables fuerte forma una foliación. Por más que las hojas sean C^r , la foliación en principio es sólo continua.
3. Para todo $R > 0$ y $\epsilon > 0$, existe un entorno $\mathcal{U}(f)$ en la topología C^1 y $\delta > 0$ tal que para todo $g \in \mathcal{U}(f)$, y para todo $x, y \in \tilde{M}$ con $d(x, y) < \delta$ se cumple que $d_{C^1}(D_g^\sigma(x, R), D_g^\sigma(y, R)) < \epsilon$.

El teorema anterior para la topología C^1 es una consecuencia directa del siguiente teorema local.

3.3. TEOREMA DE LA VARIEDAD ESTABLE

Teorema 3.15. [HPS] Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo C^1 que admite una descomposición dominada de la forma $TM = E \oplus F$. Entonces por cada $x \in M$ existe un encaje C^1 , $\mathcal{D}_E(x) : B(0, 1) \subset E(x) \rightarrow M$ con las siguientes propiedades:

- **Tangencia:** Para cada $x \in M$ tenemos que $\mathcal{D}_E(x)(0) = x$ y la imagen de $\mathcal{D}_E(x)$ es tangente a $E(x)$ en x .
- **Continuidad:** Los encajes $\mathcal{D}_E(x)$ varían continuamente con $x \in M$ y con f en la topología C^1 .
- **Invariancia local:** Existe un $\delta \in (0, 1)$ tal que $\forall x \in K$ tenemos que $f(\mathcal{D}_E(x)(B(0, \delta))) \subset \mathcal{D}_E(f(x))(B(0, 1))$.

El contexto para este teorema es mucho más general que el teorema de la variedad estable fuerte. Por esa razón las placas $\mathcal{D}_E(x)(B(0, 1))$ no están únicamente definidas, son tangentes a E solo en el centro y la unión de dos placas no es necesariamente una subvariedad. Las placas no son C^2 aunque f sea C^r con r grande.

Observación 3.16. Estas familias de placas existen en el ejemplo de Borel-Smale-Wilkinson de la sección 2.4 ya que verifica las hipótesis del teorema 3.15. Sin embargo como ya vimos, el ejemplo no es dinámicamente coherente.

Demostración. La prueba consiste de varias partes:

Levantamiento de la dinámica: Tomamos $x \in M$ fijo. Podemos suponer que el mapa exponencial identifica $B(0, 1)$ en $T_x M$ con un entorno de $x \in M$. Podemos levantar f a un difeomorfismo local $\hat{f}_x := \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x$ C^k de la bola $B(0, \alpha) \subset T_x M$ en un entorno del 0 en $T_{f(x)} M$. Lo extendemos como Df_x en $B(0, \alpha)^c$ con una función chichón. De esta forma obtenemos un difeomorfismo $\hat{f}_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$. Este difeomorfismo está C^1 cerca de Df_x si α es lo suficientemente pequeño.

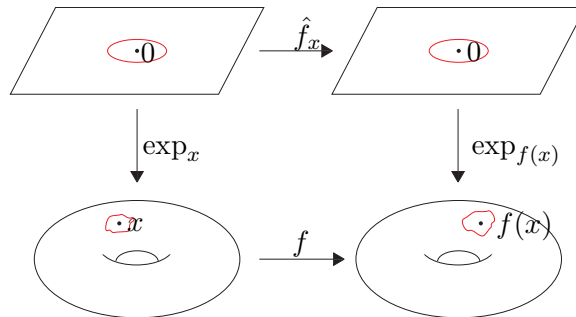


Figura 3.1: Levantamiento de la dinámica

Gráficos Lipschitz: Cada espacio tangente $T_x M$ tiene una descomposición $E_x \oplus F_x$. El criterio de conos del teorema 3.3 nos da la existencia de un campo de conos \mathcal{C} a lo largo de la dirección F que es Df -contractivo y un campo de conos \mathcal{C}^* a lo largo de la dirección E que es Df^{-1} -contractivo. El mapa \hat{f}_x^{-1} también lleva el cono $\mathcal{C}_{f(x)}^*$ dentro del cono \mathcal{C}_x^* . Tomamos la familia L_x de gráficos Lipschitz tangentes a \mathcal{C}_x^* conteniendo el 0. Es decir, el conjunto de los gráficos de funciones $\psi : E_x \rightarrow F_x$ tales que $\psi(0) = 0$ y para todo par de vectores $u, u' \in E_x$, el vector $(u - u', \psi(u) - \psi(u'))$ (para la descomposición $E_x \oplus F_x$) es tangente a \mathcal{C}_x^* . La contracción del cono implica que la imagen por \hat{f}_x^{-1} de cada $\psi \in L_{f(x)}$ es un gráfico en L_x .

El espacio L_x es completo con la métrica

$$d(\psi_1, \psi_2) = \max_{u \in E_x} \{d(\psi_1(u), \psi_2(u))\}$$

que es acotada porque los gráficos son uniformemente Lipschitz.

Contracción: Fijamos n grande. Mostraremos que la distancia en los espacios L_x es contraída en el pasado por iterados grande de $\hat{F} = \hat{f}_{f^{n-1}(x)} \circ \dots \circ \hat{f}_x$. De hecho, sean ψ'_1, ψ'_2 gráficos imágenes por \hat{F}^{-1} de $\psi_1, \psi_2 \in L_{f^n(x)}$ y fijemos $u \in E_x$. Tomamos $(u, \psi'_1(u)), (u, \psi'_2(u))$. Ellos son imágenes por \hat{F}^{-1} de puntos $(\nu, \psi_1(\nu)), (w, \psi_2(w))$. Asumimos $\nu = w$ por simplicidad.

El punto $(\nu, \psi_1(\nu))$ va al $(u, \psi'_1(u))$. Estos dos vectores son tangentes a los conos $\mathcal{C}_{f^n(x)}^*, \mathcal{C}_x^*$ y los mapas \hat{f}_y están cerca de los mapas tangentes Df_y . Entonces:

$$\|u\| \leq \|Df^n(x)_E\| e^{\epsilon n} \|\nu\|$$

Por otro lado, $(0, \psi'_1(u) - \psi'_2(u))$ es tangente al cono \mathcal{C}_x que es contraído por \hat{F} . Esto nos da que

$$d(\psi_1(\nu), \psi_2(\nu)) \geq m(Df^n(x)) e^{-\epsilon n} d(\psi'_1(u), \psi'_2(u))$$

Deducimos que

$$\frac{d(\psi'_1(u), \psi'_2(u))}{\|u\|} \leq e^{2\epsilon n} \frac{\|Df^n(x)\|}{m(Df^n(x))} \frac{d(\psi_1(\nu), \psi_2(\nu))}{\|\nu\|}$$

que junto con la dominación nos da

$$d(\psi'_1, \psi'_2) \leq C \lambda^n e^{2\epsilon n} d(\psi_1, \psi_2)$$

Construcción de los encajes: Sea \mathcal{L}_x el espacio producto $\prod_{n \in \mathbb{Z}} L_{f^n(x)}$ con la distancia del supremo de las distancias en cada $L_{f^n(x)}$. El mapa producto $(\hat{f}_{f^n(x)})$ actúa en \mathcal{L}_x y su inversa contrae este espacio métrico completo. Consecuentemente, existe un único punto fijo $(\psi_{f^n(x)})$. El encaje $\mathcal{D}_E(x)$ es el mapa $\mathcal{D}_E(x) : u \mapsto \exp_x(u, \psi_x(u))$ Como f coincide con $f_x := \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x$ en $B(0, \alpha)$, y como \hat{f}_x manda el gráfico ψ_x en el gráfico

3.3. TEOREMA DE LA VARIEDAD ESTABLE

$\psi_{f(x)}$, obtenemos que para η suficientemente chico el disco $\mathcal{D}_E(x)(B(0, \eta))$ es mapeado por f dentro del disco $\mathcal{D}_E(f(x))(B(0, 1))$.

Regularidad: Las propiedades obtenidas en el capítulo 2 funcionan para los mapas \hat{f}_x , en particular como los conos \mathcal{C}_x son contraídos, existe para cada $u \in T_x M$ una descomposición $\hat{E}_u \oplus \hat{F}_u$ con la propiedad de que E_u es la colección de vectores v tangentes en $u \in T_x M$ tales que sus iterados por $(\hat{f}_{f^n(x)})$ se mantienen en los conos $\mathcal{C}_{f^n(x)}$ y F_u es la colección de vectores v tangentes en $u \in T_x M$ tales que sus iterados por $(\hat{f}_{f^n(x)})$ se mantienen cerca de los conos $\mathcal{C}_{f^n(x)}$. Como los gráficos son Lipschitz, ψ_x es diferenciable en casi todo punto u . Luego tiene un espacio tangente en u cuyo iterados se mantienen cerca de los conos $\mathcal{C}_{f^n(x)}$. Consecuentemente el espacio tangente es \hat{E}_u . Como \hat{E}_u varía continuamente con u , uno deduce que ψ es C^1 y tangente a \hat{E}_u en cada uno de sus puntos. En particular es tangente a E_x en 0.

Continuidad respecto a x : Por construcción, el gráfico ψ_x que construimos está cerca de $\hat{f}_x^{-1} \circ \dots \circ \hat{f}_{f^{n-1}(x)}(\psi')$ para gráficos arbitrarios $\psi' \in \mathcal{L}_{f^n(x)}$ y n grande. Si uno fija n y toma $\psi' = \psi_{f^{-n}(x')}$ para x' cerca de x , esto implica que ψ_x y ψ'_x están cerca en la bola $B(0, 1)$. □

Para finalizar la prueba nos resta ver dos lemas. El primero fue enunciado en la construcción del levantamiento de la dinámica.

Lema 3.17. *Dado $\epsilon > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que $d_{C^1}(\hat{f}_x, D_x f) < \epsilon$*

La idea de la prueba es tomar una función “chichón” adecuada y ver que funciona.

El segundo lema nos dice que nuestro operador lleva gráficos en gráficos.

Lema 3.18. *La imagen por \hat{f}_x^{-1} de una función $\psi \in L_{f(x)}$ está contenida en L_x .*

Demostración. Probaremos que la proyección en E_x es inyectiva en la imagen del gráfico. Tomemos dos puntos $(\nu, \psi(\nu))$ y $(w, \psi(w))$ cuyas imágenes tengan la misma proyección u . La diferencia entre las dos imágenes es tangente a \mathcal{C} . Como el cono \mathcal{C} es contraído por \hat{f} , deducimos que $(\nu - w, \psi(\nu) - \psi(w))$ es tangente a $D\hat{f}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Esto es una contradicción (porque ψ es tangente a \mathcal{C}^*), a menos que los dos puntos sean iguales. Luego, la imagen del gráfico de ψ es un gráfico sobre un subconjunto de E_x . Este conjunto es homeomorfo a E_x (por invariancia del dominio) y propio, luego es E_x . El hecho de que el gráfico sea Lipschitz con las mismas constantes es directo del hecho de que el campo de conos es contraído por $D\hat{f}$. □

Corolario 3.19. *Consideramos una descomposición parcialmente hiperbólica de la forma $TM = E^s \oplus E^c$, los encajes $\mathcal{D}_{E^s}(x)$ del teorema 3.15 aso-*

3.3. TEOREMA DE LA VARIEDAD ESTABLE

ciados al fibrado E^s y $N \geq 1$ grande. Para $\eta > 0$ pequeño definimos $\mathcal{W}_{loc}^{ss}(x) = \mathcal{D}_{E^s}(x)(B(0, \eta))$.

1. Para todo $x \in M$ y $n \geq 0$, $\text{diam}(f^n(\mathcal{W}_{loc}^{ss}(x))) \leq e^{n\epsilon} \prod_{i=0}^{[n/N]} \|Df_{E^s}^{iN}(x)\|$.
2. Para todo $x \in M$ y $n \geq N$, $f^n(\mathcal{W}_{loc}^{ss}(x)) \subset \mathcal{W}_{loc}^{ss}(f(x))$.
3. Para todo $x \in M$, $\mathcal{W}_f^{ss}(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\mathcal{W}_{loc}^{ss}(f^n(x)))$.

Demostración. Usando cartas locales, podemos trabajar en \mathbb{R}^d . Por compacidad, para $\eta > 0$ suficientemente pequeño, los discos encajados $\mathcal{W}_{loc}^{ss}(x)$ son casi lineales y la acción de f^n está cerca de $Df_{E^s}^n(x)$. Obtenemos 1 inductivamente chequeando la invariancia local $f^n(\mathcal{W}_{loc}^{ss}(x)) \subset \mathcal{D}_{E^s}(f^n(x))(B(0, 1))$. En particular se cumple 2. La dominación y 1 nos dan (\supseteq) en 3. Para obtener (\subseteq) en 3 utilizamos el siguiente argumento conocido en la literatura como *The coherence argument*.

Tomamos $z \in \mathcal{W}_f^{ss}(x)$ y asumimos (reemplazando por un iterado) que $d(f^n(z), f^n(x)) \ll \eta$, $\forall n \geq 0$. Consideramos un disco pequeño D , con $z \in D$, $y \in \mathcal{W}_{loc}^{ss}(x)$ y tangente a un campo de conos contractivo \mathcal{C} . Para el futuro, el disco permanece tangente a \mathcal{C} . Por la dominación, la distancia entre $f^n(y)$, $f^n(z)$ en D disminuye más lento que $e^{n\epsilon} \|Df_{E^s}^n(x)\|$ y como todos los iterados permanecen en un entorno pequeño de la órbita de x donde los fibrados son casi constantes, esta distancia es comparable a la distancia en la variedad. Esto contradice que $z \in \mathcal{W}_f^{ss}(x)$ a menos que $y = z$. □

Demostración del teorema 3.13. De las partes 2 y 3 del corolario anterior, tenemos que $\mathcal{W}_f^{ss}(x)$ es una unión creciente de subvariedades $f^{-nN}(\mathcal{W}_{loc}^{ss}(f^{nN}(x)))$, $n \geq 0$. Luego, es una subvariedad inmersa inyectivamente difeomorfa a $\mathbb{R}^{\dim(E^s)}$, por lo que obtenemos la parte 1 del teorema. La parte 3 del corolario anterior también nos dice que $\mathcal{W}_f^{ss}(x)$ no depende del ϵ elegido, es decir, la parte 2 del teorema.

Para probar 3 supongamos que $\mathcal{W}_f^{ss}(x)$ y $\mathcal{W}_f^{ss}(y)$ se intersectan. y supongamos que la distancia $d(f^n(x), f^n(y))$ es pequeña para todo $n \geq 0$. (Podemos suponer esto a partir de un iterado). En particular obtenemos

$$\prod_{i=0}^{[n/N]} \|Df^{iN}|_{E^s(y)}\| \leq e^{n\epsilon} \prod_{i=0}^{[n/N]} \|Df^{iN}|_{E^s(x)}\|$$

Esto implica por 1 del corolario anterior que la distancia $d(f^n(x), f^n(y))$ es más chica que $2e^{2n\epsilon} \prod_{i=0}^{[n/N]} \|Df^{iN}|_{E^s(x)}\|$.

Del mismo modo, para todo punto $z \in \mathcal{W}_f^{ss}(y)$, existe c_z tal que la distancia $d(f^n(y), f^n(z)) \leq c_z e^{2n\epsilon} \prod_{i=0}^{[n/N]} \|Df^{iN}|_{E^s(x)}\|$.

Estas dos desigualdades junto con la hiperbolicidad parcial implican que la distancia $d(f^n(z), f^n(x))$ es menor que $ce^{-n\epsilon} \min\{m(Df^n|_{E^c(x)}), 1\}$, es

3.4. PRODUCTO GLOBAL DE FOLIACIONES

decir $z \in \mathcal{W}_f^{ss}(x)$. Como z es arbitrario obtenemos $\mathcal{W}_f^{ss}(y) \subseteq \mathcal{W}_f^{ss}(x)$. Del mismo modo se prueba que $\mathcal{W}_f^{ss}(x) \subseteq \mathcal{W}_f^{ss}(y)$, por lo que obtenemos 3.

Para probar 4 basta con ver que los encajes $\mathcal{D}_E(x)$ del teorema de las placas locales varían continuamente en la topología C^1 . \square

Terminamos esta sección haciendo una observación que utilizaremos más adelante.

Observación 3.20. *Supongamos que tenemos un difeomorfismo parcialmente hiperbólico f en una variedad compacta M . El teorema de la variedad estable nos dice que por cada punto $x \in M$ existe la variedad inestable $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(x)$. Además como la variedad M es compacta, el diferencial de f restricto al subfibrado inestable es siempre más grande que cierta constante $\lambda_f > 1$, y el diferencial global es siempre más chico que $\Delta_f > 1$ ($\Delta_f > \lambda_f > 1$). Además, las mismas constantes funcionan para todos los difeomorfismos en un entorno C^1 -pequeño $\mathcal{U}(f)$. Luego, para todo $g \in \mathcal{U}(f)$, $x \in \tilde{M}$ y $R > 0$ tenemos:*

$$D_g^{uu}(\tilde{g}(x), \lambda_f R) \subset \tilde{g}(D_g^{uu}(x, R)) \subset D_g^{uu}(\tilde{g}(x), \Delta_f R)$$

El mismo resultado se obtiene para el caso estable $\tilde{\mathcal{W}}_f^{ss}(x)$ tomando iterados hacia el pasado.

3.4. Producto Global de foliaciones

En la sección anterior, vimos la demostración del teorema de la variedad estable, sin embargo, en el caso lineal o algebraico, estas variedades tienen una descripción mucho más simple.

Sea M una nilvariedad de dimensión d , es decir $M = G/\Gamma$ donde G es un grupo de Lie conexo, simplemente conexo, nilpotente, y Γ es un subgrupo discreto cocompacto de G . Sea $A : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de Anosov lineal. Vimos que esto significa que A proviene de un isomorfismo de grupos de Lie $A : G \rightarrow G$, con $A(\Gamma) = \Gamma$, y el morfismo asociado a su respectiva álgebra de Lie $dA : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es una transformación lineal hiperbólica. Luego \mathfrak{g} admite una descomposición en subespacios invariantes $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{ss} \oplus \mathfrak{g}^{ws} \oplus \mathfrak{g}^{wu} \oplus \mathfrak{g}^{uu}$. Definimos $\mathfrak{g}^c = \mathfrak{g}^{ws} \oplus \mathfrak{g}^{wu}$, $\mathfrak{g}^{cs} = \mathfrak{g}^{ss} \oplus \mathfrak{g}^c$, $\mathfrak{g}^{cu} = \mathfrak{g}^c \oplus \mathfrak{g}^{uu}$, $\mathfrak{g}^s = \mathfrak{g}^{ss} \oplus \mathfrak{g}^{ws}$ y $\mathfrak{g}^u = \mathfrak{g}^{wu} \oplus \mathfrak{g}^{uu}$. En la sección 2.3 vimos que \mathfrak{g}^s y \mathfrak{g}^u son subálgebras de Lie, sin embargo, necesitamos hacer la siguiente observación.

Observación 3.21. *Asumiremos en todo lo que resta del trabajo que estamos en este contexto y además que \mathfrak{g}^{cs} y \mathfrak{g}^{cu} son subálgebras de Lie. Como consecuencia de esto tenemos que \mathfrak{g}^c también es una subálgebra de Lie por ser intersección de estas.*

3.4. PRODUCTO GLOBAL DE FOLIACIONES

Sabemos del capítulo 1 que a cada subálgebra \mathfrak{g}^σ le corresponde un único subgrupo de Lie conexo G^σ que es tangente en cada punto a la correspondiente subálgebra de Lie. Además, por ser el grupo G nilpotente tenemos que el mapa exponencial es un difeomorfismo y los subgrupos G^σ son de la forma $G^\sigma = \exp(\mathfrak{g}^\sigma)$.

Para $\sigma = s, ss, u, uu, cs, cu, c$, tenemos las foliaciones correspondientes \mathcal{W}_A^σ definidas por la forma $\mathcal{W}_A^\sigma(x) = L_x(G^\sigma)$ para todo $x \in G$, donde L_x es la multiplicación a izquierda por el elemento x . El subíndice hace referencia al automorfismo A que es de donde provienen los subgrupos y por ende las foliaciones.

Para probar que \mathcal{W}_A^σ es realmente una foliación basta con ver que si dos hojas se intersectan, entonces son la misma hoja. Supongamos que $\mathcal{W}_A^\sigma(x) \cap \mathcal{W}_A^\sigma(y) \neq \emptyset$. Luego existe un P perteneciente a ambas hojas. Esto quiere decir que $P \in \mathcal{W}_A^\sigma(x) = L_x(G^\sigma)$ y $P \in \mathcal{W}_A^\sigma(y) = L_y(G^\sigma)$. Luego existen $g_1, g_2 \in G^\sigma$ tales que $x.g_1 = p = y.g_2$ y podemos escribir x como $x = y.g_2.g_1^{-1}$. Sea $Q \in \mathcal{W}_A^\sigma(x)$, luego existe un $g_3 \in G^\sigma$ tal que $q = x.g_3$. Pero entonces como G^σ es un subgrupo obtenemos que $q = x.g_3 = (y.g_2.g_1^{-1}).g_3 = y.(g_2.g_1^{-1}.g_3) \in L_y(G^\sigma) = \mathcal{W}_A^\sigma(y)$. Como Q es arbitrario, probamos que $\mathcal{W}_A^\sigma(x) \subset \mathcal{W}_A^\sigma(y)$. Análogamente obtenemos $\mathcal{W}_A^\sigma(y) \subset \mathcal{W}_A^\sigma(x)$. Esto prueba que \mathcal{W}_A^σ es efectivamente una foliación.

La siguiente proposición es clave en nuestro trabajo. Antes de entrar en ella, introducimos una definición.

Definición 3.22 (Estructura de Producto Global). *Decimos que dos foliaciones \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 en $M = G/\Gamma$ tienen estructura de producto global, si para todo par de puntos $x, y \in G$ las hojas $\tilde{\mathcal{F}}_1(x)$ y $\tilde{\mathcal{F}}_2(y)$ se intersectan en un único punto.*

Proposición 3.23. *Si estamos en las condiciones de arriba, entonces:*

1. *Las foliaciones \mathcal{W}_A^{cs} y \mathcal{W}_A^{uu} tienen estructura de producto global.*
2. *Las foliaciones \mathcal{W}_A^{cu} y \mathcal{W}_A^{ss} tienen estructura de producto global.*
3. *Las foliaciones \mathcal{W}_A^{ss} y \mathcal{W}_A^c tienen estructura de producto global dentro de la foliación \mathcal{W}_A^{cs} .*
4. *Las foliaciones \mathcal{W}_A^{uu} y \mathcal{W}_A^c tienen estructura de producto global dentro de la foliación \mathcal{W}_A^{cu} .*
5. *Las foliaciones \mathcal{W}_A^s y \mathcal{W}_A^u tienen estructura de producto global.*

Demostración. Demostraremos el caso 1 y veremos que el resto se deducen de la misma prueba. Tenemos que probar que para todo par de puntos $x, y \in G$, la intersección $\mathcal{W}_A^{cs}(x) \cap \mathcal{W}_A^{uu}(y)$ es no vacía y es exactamente un punto.

Unicidad de la intersección

Supongamos que $\mathcal{W}_A^{cs}(x)$ y $\mathcal{W}_A^{uu}(y)$ se intersecan en mas de un punto. Asumimos en una primera instancia que $y = e$. Tenemos por hipótesis que existen $P, Q \in \mathcal{W}_A^{cs}(x) \cap \mathcal{W}_A^{uu}(e)$. Por como están definidas las foliaciones sabemos que existen $g_1^{cs}, g_2^{cs} \in G^{cs}$ y $g_1^{uu}, g_2^{uu} \in G^{uu}$ tales que:

$$P = xg_1^{cs} = g_1^{uu} \text{ y } Q = xg_2^{cs} = g_2^{uu}$$

Como G^{uu} y G^{cs} son subgrupos de G , tenemos que $(g_1^{uu})^{-1} = (xg_1^{cs})^{-1} = (g_1^{cs})^{-1}x^{-1} \in G^{uu}$. Luego

$$(g_1^{uu})^{-1}g_2^{uu} = (g_1^{cs})^{-1}x^{-1}xg_2^{uu} = (g_1^{cs})^{-1}(g_2^{cs}) \in G^{cs} \cap G^{uu} = e$$

y concluimos que $P = Q$. Para el caso general supongamos que existen $P, Q \in \mathcal{W}_A^{cs}(x) \cap \mathcal{W}_A^{uu}(y)$. Aplicamos $L_{y^{-1}}$ y llevamos el problema al caso anterior obteniendo $y^{-1}P, y^{-1}Q \in \mathcal{W}_A^{cs}(y^{-1}x) \cap \mathcal{W}_A^{uu}(e)$. Deducimos que $y^{-1}P = y^{-1}Q$ si y solo si $P = Q$. Esto prueba la unicidad de la intersección.

Existencia de la intersección

Para probar la existencia, vamos a realizar una prueba dinámica, aunque es posible que exista una forma más algebraica de probar esto. Utilizaremos la existencia de estructura producto local de las foliaciones en cuestión. Este producto local existe trivialmente cerca del neutro e y por ende en todo punto ya que la variedad G es homogénea. Llamamos U_e al entorno del neutro e con producto local, y $U_x = L_x U_e$ al entorno de producto local en $x \in G$.

Una vez más asumimos inicialmente que $y = e$. Hay que probar que $\mathcal{W}_A^{uu}(e)$ y $\mathcal{W}_A^{cs}(x)$ tienen intersección no vacía. Los casos triviales son cuando $x \in \mathcal{W}_A^u(e)$ o $x \in \mathcal{W}_A^s(e)$. Supongamos el primero. Iterando el morfismo A hacia el pasado obtenemos un $N > 0$ tal que $A^{-N}(x) \in U_e$, entorno de producto local. Esto implica que existe un $P \in \mathcal{W}_A^{uu}(e) \cap \mathcal{W}_A^{cs}(A^{-N}(x))$. Aplicando A^N obtenemos $A^N(P) \in \mathcal{W}_A^{uu}(e) \cap \mathcal{W}_A^{cs}(x)$, es decir, la intersección buscada. El caso $x \in \mathcal{W}_A^s(e)$ se resuelve de la misma forma, iterando hacia el futuro.

Supongamos ahora que $x \in G$ no está ni en G^s ni en G^u . Nuevamente usando la hiperbolicidad sabemos que existe un $P \in \mathcal{W}_A^u(e)$ y un $n > 0$ tal que $A^n(x) \in U_P$, entorno de producto local de P . Luego, existe un $Q \in \mathcal{W}_A^{uu}(P) \cap \mathcal{W}_A^{cs}(A^n(x))$. Como $Q \in \mathcal{W}_A^{uu}(P)$ y $P \in \mathcal{W}_A^u(e)$, tenemos que existe $m > 0$ tal que $A^{-m}(Q) \in U_e$. Nuevamente existe $z \in \mathcal{W}_A^{uu}(e) \cap \mathcal{W}_A^{cs}(A^{-m}(Q))$. Aplicando A^m tenemos que $A^m(z) \in \mathcal{W}_A^{uu}(e) \cap \mathcal{W}_A^{cs}(Q)$. Pero $Q \in \mathcal{W}_A^{cs}(A^n(x))$, luego $\mathcal{W}_A^{cs}(Q) = \mathcal{W}_A^{cs}(A^n(x))$. Es decir, $A^m(z) \in \mathcal{W}_A^{uu}(e) \cap \mathcal{W}_A^{cs}(A^n(x))$. Aplicamos nuevamente A^{-n} y obtenemos $A^{m-n}(z) \in \mathcal{W}_A^{uu}(e) \cap \mathcal{W}_A^{cs}(x)$ como queríamos probar.

3.5. ESTABILIDAD DE AUTOMORFISMOS HIPERBÓLICOS

Intercambiando los roles de x y e , obtenemos que $\mathcal{W}_A^{uu}(x)$ y $\mathcal{W}_A^{cs}(e)$ también tienen intersección no vacía.

Supongamos ahora el caso general. Sean $x, y \in G$. La parte anterior aplicada al punto $x^{-1}y$ nos da la existencia de un $P \in \mathcal{W}_A^{uu}(x^{-1}y) \cap \mathcal{W}_A^{cs}(e)$. Multiplicando por x a izquierda obtenemos que $xP \in \mathcal{W}_A^{uu}(y) \cap \mathcal{W}_A^{cs}(x)$.

Conclusión de la prueba

Dados dos puntos $x, y \in G$, la existencia probada anteriormente nos dice que $\mathcal{W}_A^{uu}(y) \cap \mathcal{W}_A^{cs}(x) \neq \emptyset$ y la unicidad nos dice que dicha intersección es exactamente un punto, probando el producto global de las foliaciones \mathcal{W}_A^{uu} y \mathcal{W}_A^{cs} .

El caso 2 es igual que el anterior.

El caso 3 se deduce del caso 2 (y análogamente el caso 4 del caso 1): supongamos que tenemos dos puntos x, y en la misma hoja centro-estable. Sabemos por la parte 2 que existe y es único $p \in \mathcal{W}_A^{ss}(x) \cap \mathcal{W}_A^{cu}(y)$. Como $\mathcal{W}_A^{ss}(x) \subset \mathcal{W}_A^{cs}(x) = \mathcal{W}_A^{cs}(y)$, tenemos que $p \in \mathcal{W}_A^{cs}(y) \cap \mathcal{W}_A^{cu}(y) = \mathcal{W}_A^c(y)$. Esto prueba que las hojas $\mathcal{W}_A^{ss}(x)$ y $\mathcal{W}_A^c(y)$ se cortan en un único punto $p \in \mathcal{W}_A^{cs}(x) = \mathcal{W}_A^{cs}(y)$.

El caso 5 es igual que los anteriores ya que la dinámica es Anosov, y los mismos argumentos funcionan, tanto para la existencia como para la unicidad.

□

3.5. Estabilidad de automorfismos hiperbólicos

En esta sección veremos un lema muy importante dentro de la teoría hiperbólica conocido como Lema de Sombreado. La importancia de este lema reside en que nos permitirá obtener una semiconjugación entre un parcialmente hiperbólico y su parte lineal, siempre que esta sea hiperbólica. El resultado fue obtenido por J. Franks [Fr] aunque la prueba que haremos sigue principalmente [Sa] donde se prueba el resultado para el toro \mathbb{T}^n .

Comenzamos dando la definición de *pseudo órbita*.

Definición 3.24. Sea $K > 0$. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en G es una K -pseudo órbita (con respecto a $A : G \rightarrow G$) si $d(A(x_n), x_{n+1}) \leq K$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Estamos ahora en condiciones de enunciar el lema de sombreado.

Lema 3.25 (Lema de Sombreado). Sea $A : G \rightarrow G$ un automorfismo hiperbólico y $K > 0$. Entonces existe $\alpha = \alpha(K) > 0$ tal que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una K -pseudo órbita, entonces existe un único $z \in G$ tal que $d(A^n(z), x_n) \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

3.5. ESTABILIDAD DE AUTOMORFISMOS HIPERBÓLICOS

Demostración. Por simplicidad supondremos que tenemos una métrica adaptada, es decir la constante C en la definición de hiperbolicidad es $C = 1$. Sea $K > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ de la definición de Anosov A y $\alpha = \frac{K}{1-\lambda}$.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una K -pseudo órbita. Utiliando la estructura de producto global entre \mathcal{W}_A^s y \mathcal{W}_A^u definimos la siguiente sucesión de puntos en G de manera siguiente:

- $z_0 = x_0$
- $z_n = \mathcal{W}_A^s(x_n) \cap \mathcal{W}_A^u(A(z_{n-1}))$ para $n \geq 1$

Esta última intersección existe debido a la estructura de producto global.

Observamos primero que como $z_n \in \mathcal{W}_A^s(x_n)$ para todo $j \geq 0$ tenemos que $d(A^n(z_j), A^n(x_j)) \leq K\lambda^j \leq \alpha$.

Por otro lado, si $0 \leq i \leq n$ y $j \geq 0$ entonces

$$d(A^{-j}(z_i), A^{-j+1}(z_{i-1})) = d(A^{-j}(z_i), A^{-j}(A(z_{i-1}))) \leq K\lambda^j$$

esta última desigualdad se debe a que por construcción $A(z_{i-1})$ está en la variedad inestable de z_i .

Entonces si $1 \leq j \leq n$, utilizando la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned} d(A^{-j}(z_n), z_{n-j}) &\leq \sum_{i=0}^{j-1} d(A^{-j+i}(z_{n-i}), A^{-j+i+1}(z_{n-i-1})) \\ &\leq \sum_{i=0}^{j-1} K\lambda^{j-i} = \sum_{i=1}^j K\lambda^i \leq \frac{K}{1-\lambda} = \alpha \end{aligned}$$

Definimos $y_n = A^{-n}(z_n)$, entonces por la desigualdad anterior tenemos para todo $0 \leq j \leq n$:

$$d(A^j(y_n), x_j) = d(A^{j-n}(z_n), z_j) \leq \alpha$$

Sea y un punto de acumulación de $\{y_n\}_{n \geq 0}$ tenemos que $d(A^j(y), x_j) \leq \alpha$ para todo $j \geq 0$. Es decir, dada cualquier K -pseudo órbita futura, encontramos una órbita futura que la α -sombrea. Finalmente para $m > 0$, reindexando la sucesión $\{x_n\}_{n \geq -m}$ encontramos un punto w_m tal que

$$d(A^{n+m}(w_m), x_n) \leq \alpha, \quad \forall n \geq -m$$

Escribiendo $p_m = A^m(w_m)$ concluimos que $d(A^n(p_m), x_n) \leq \alpha$, para todo $n \geq -m$. Nuevamente tomando p un punto de acumulación de $\{p_m\}_{m \geq 0}$ obtenemos que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$:

$$d(A^n(p), x_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(A^n(p_m), x_n) \leq \alpha$$

3.5. ESTABILIDAD DE AUTOMORFISMOS HIPERBÓLICOS

Finalmente el punto p debe ser único. Supongamos por absurdo que existe otro punto $\tilde{p} \in G$ que α -sombrea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$:

$$d(A^n(p), A^n(\tilde{p})) \leq d(A^n(p), x_n) + d(A^n(\tilde{p}), x_n) \leq 2\alpha$$

y esto es imposible a menos que $p = \tilde{p}$ debido a que A tiene expansividad infinita. \square

El siguiente teorema es el objetivo de esta sección.

Teorema 3.26 (Estabilidad de automorfismos hiperbólicos). *Sea $A : G/\Gamma \rightarrow G/\Gamma$ un automorfismo de Anosov y sea $f : G/\Gamma \rightarrow G/\Gamma$ un difeomorfismo en la clase de isotopía de A . Entonces existe una función $h : G/\Gamma \rightarrow G/\Gamma$ continua y sobreyectiva tal que $h \circ f = A \circ h$.*

Demostración. Sea f un difeomorfismo isotópico a A , luego dado un levantamiento $\tilde{f} : G \rightarrow G$, tenemos que $d_{C^0}(\tilde{f}, A) \leq K$. Luego fijado $x \in G$, si llamamos $x_n = \tilde{f}^n(x)$ la órbita de x por \tilde{f} , obtenemos que

$$d(A(x_n), x_{n+1}) = d(A(\tilde{f}^n(x)), \tilde{f}^{n+1}(x)) = d(A(\tilde{f}^n(x)), \tilde{f}(\tilde{f}^n(x))) \leq K$$

es decir la órbita de \tilde{f} es una K -pseudo órbita con respecto a A . Por la propiedad de sombreado del lema 3.25 tenemos que existe α tal que para todo $x \in G$ existe un único $z \in G$ tal que

$$d(A^n(z), \tilde{f}^n(x)) \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

Definimos $H : G \rightarrow G$ como $H(x) = z$ donde z es el único punto que verifica la ecuación 3.3. Es decir $d(A^n(H(x)), \tilde{f}^n(x)) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observamos que como $d(A^n(A \circ H(x)), \tilde{f}^n(fx)) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, la unicidad del sombreado nos dice que $H(f(x)) = A(H(x))$. Luego H semiconjuga A y \tilde{f} .

Veamos que H es continua. Sea $x \in G$ y x_n una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Sea $H(x_{n_k})$ una subsucesión de $H(x_n)$ que converge a un punto y y sea $m \in \mathbb{Z}$. Observamos que

$$d(A^m(y), \tilde{f}^m(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(A^m(H(x_{n_k})), \tilde{f}^m(x_{n_k})) \leq \alpha$$

y por lo tanto $y = H(x)$. Como la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ está acotada, entonces también lo está $\{H(x_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ por lo que concluimos que $H(x)$ es el único punto de acumulación de $\{H(x_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Luego $H(x_n) \rightarrow H(x)$ y probamos que H es continua.

Para probar la sobreyectividad podemos compactificar G a una esfera de dimensión d agregándole un punto ∞ . Luego la función H se extiende a una función $\tilde{H} : S^d \rightarrow S^d$ con un punto fijo en el infinito. Como \tilde{H} es homotópica a la identidad (por estar H a distancia C^0 finita), tenemos que $\deg(\tilde{H}) = \deg(\text{Id}) = 1$ por lo que H resulta sobreyectiva.

3.5. ESTABILIDAD DE AUTOMORFISMOS HIPERBÓLICOS

Hasta ahora hemos obtenido una función $H : G \rightarrow G$ continua y sobreyectiva tal que $A \circ H = H \circ \tilde{f}$. Veamos que podemos pasar esta función al cociente.

Sabemos por hipótesis que f es isotópica al automorfismo A . Luego, tenemos que para todo $\gamma \in G$, se cumple que: $\tilde{f} \circ L_\gamma = L_{A(\gamma)} \circ \tilde{f}$. Inductivamente para todo $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que: $\tilde{f}^n \circ L_\gamma = L_{A^n(\gamma)} \circ \tilde{f}^n$. Luego, para todo $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} d(A^n(L_\gamma(H(x))), \tilde{f}^n(L_\gamma(x))) &= d(L_{A^n(\gamma)}(A^n(H(x))), L_{A^n(\gamma)}(\tilde{f}^n(x))) \\ &= d(A^n(H(x)), \tilde{f}^n(x)) \leq \alpha \end{aligned}$$

donde la última igualdad ocurre por ser la métrica invariante por izquierda. Concluimos por la unicidad del sombreado que $H(L_\gamma(x)) = L_\gamma(H(x))$. Esto prueba que podemos pasar la función H al cociente obteniendo una función $h : G/\Gamma \rightarrow G/\Gamma$ continua y sobreyectiva tal que $\pi \circ h = H \circ \pi$. Finalmente,

$$A \circ h \circ \pi = A \circ \pi \circ H = \pi \circ A \circ H = \pi \circ H \circ \tilde{f} = h \circ \pi \circ \tilde{f} = h \circ f \circ \pi$$

Es decir, $A \circ h = h \circ f$ como queríamos probar. \square

Sea $M = G/\Gamma$ una nilvariedad y $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo. Sabemos de [Hat] que f induce un automorfismo en el grupo fundamental $f_* : \Gamma \rightarrow \Gamma$. Como Γ es un subgrupo discreto cocompacto, y G es nilpotente, tenemos por el teorema 2.7 que existe un único isomorfismo $\bar{f} : G \rightarrow G$ tal que $\bar{f}|_\Gamma = f_*$. Decimos que \bar{f} es la *parte lineal* de f . En el caso en que $f \in PH_A(M)$ es claro que la parte lineal de f es $\bar{f} = A$.

En otras palabras, el teorema anterior (3.26) dice lo siguiente: un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ es semiconjugado a su parte lineal, siempre que esta sea hiperbólica.

Capítulo 4

Teorema principal

En este capítulo presentamos el resultado principal de este trabajo. El mismo asegura la coherencia dinámica de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos en ciertas clases de isotopía de difeomorfismos de Anosov extendiendo un resultado de [FPS] para el caso de nilvariedades. Comenzamos el capítulo introduciendo los conceptos y preliminares necesarios.

4.1. Introducción

Sea $A : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de Anosov lineal en una nilvariedad compacta M con una descomposición dominada $TM = E_A^{ss} \oplus E_A^{ws} \oplus E_A^{wu} \oplus E_A^{uu}$. Recordamos del capítulo 2 que esto significa que $M = G/\Gamma$, donde G es un grupo de Lie conexo simplemente conexo nilpotente, Γ es un subgrupo discreto cocompacto y el difeomorfismo A proviene de un isomorfismo de grupos de Lie, tal que $A(\Gamma) = \Gamma$ (aquí estamos haciendo un abuso de notación ya que el morfismo A está definido en el grupo G y el difeomorfismo en el cociente G/Γ). Vimos también que los subespacios $E_A^\sigma \subset TM$ provienen de subespacios invariantes \mathfrak{g}^σ del morfismo de álgebras de Lie $dA : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Esta correspondencia viene dada por el mapa $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$, que es un isomorfismo lineal y conjugua los mapas dA y A . Asumiremos en todo el trabajo que los subespacios $\mathfrak{g}^{cs} = \mathfrak{g}^{ss} \oplus \mathfrak{g}^c$ y $\mathfrak{g}^{cu} = \mathfrak{g}^c \oplus \mathfrak{g}^{uu}$ son subálgebras de Lie. La razón de esto quedará clara más adelante en el trabajo.

Llamaremos subespacio estable a $E_A^s = E_A^{ss} \oplus E_A^{ws}$, subespacio inestable $E_A^u = E_A^{wu} \oplus E_A^{uu}$ y subespacio central $E_A^c = E_A^{ws} \oplus E_A^{wu}$.

Denotaremos $PH_A(M)$ al conjunto de los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos isotópicos al Anosov lineal A .

Si $X \subset M$, entonces \tilde{X} denotará su levantamiento al cubrimiento universal $\tilde{M} = G$. Análogamente, si $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo, llamaremos $\tilde{f} : G \rightarrow G$ a su levantamiento. En la sección 3.5 vimos que dado $f \in PH_A(M)$ existe un mapa continuo y sobreyectivo $H_f : G \rightarrow G$ tal que $A \circ H_f = H_f \circ \tilde{f}$. Decimos que H_f es una semiconjugación entre \tilde{f} y

A. También vimos que el mapa, H_f es invariante por transformaciones de cubrimiento por lo que podemos pasar H_f al cociente $G/\Gamma = M$ obteniendo un mapa $h_f : M \rightarrow M$ continuo y sobreyectivo tal que $A \circ h_f = h_f \circ f$.

Observación 4.1. *El mapa H_f varía continuamente con f en la topología C^0 . Esto significa que dado $\epsilon > 0$, existe un entorno \mathcal{U}_f en la topología C^0 tal que todo $g \in \mathcal{U}_f$ verifica que $d(H_f(x), H_g(x)) < \epsilon$ para todo $x \in M$.*

Recordamos que un difeomorfismo parcialmente hiperbólico f se dice *dinamicamente coherente* si las distribuciones E_f^{cs} y E_f^{cu} son únicamente integrables, es decir, existen foliaciones f -invariantes \mathcal{W}_f^{cs} , \mathcal{W}_f^{cu} tangentes a $E_f^{ss} \oplus E_f^c$, $E_f^c \oplus E_f^{uu}$ respectivamente. Si este fuera el caso tenemos en particular que E_f^c también es integrable, con su respectiva foliación \mathcal{W}_f^c . Esto se puede ver intersectando las dos foliaciones \mathcal{W}_f^{cs} , \mathcal{W}_f^{cu} . Decimos que un difeomorfismo $f \in PH_A(M)$ dinámicamente coherente tiene *fibras centrales* (CF) si $H_f^{-1}(\mathcal{W}_A^c(H_f(x))) = \mathcal{W}_f^c(x)$. Esto quiere decir que diferentes hojas centrales de f , se mapean sobreyectivamente por la semiconjugación H_f a diferentes hojas centrales del Anosov lineal A . Llamamos $PH_A^0(M)$ al conjunto de las componentes conexas de $PH_A(M)$ que contienen un difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente con fibras centrales.

El teorema que vamos a probar es el siguiente:

Teorema 4.2. *Todo $f \in PH_A^0(M)$ es dinámicamente coherente con fibras centrales.*

Mencionamos aquí que hay formas de partir el ejemplo de Borel-Smale-Wilkinson de la sección 2.4 para que se encuentre en las hipótesis del teorema anterior y este caso no está cubierto por [FPS]. La diferencia es que el resultado de Fisher, Portie y Sambarino ocurre en el toro \mathbb{T}^n donde cualquier Anosov lineal visto como parcialmente hiperbólico, resulta ser dinámicamente coherente.

4.2. Coherencia Dinámica

En esta sección veremos un criterio de integrabilidad de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos debido a [FPS].

Como se mencionó anteriormente, la integrabilidad de las distribuciones estables e inestables de un difeomorfismo de Anosov, o parcialmente hiperbólico, es de vital importancia, tanto para probar propiedades de la dinámica, como para clasificar las mismas.

4.2.1. Difeomorfismos σ -propios

La proposición 3.23 sobre el producto global de las foliaciones nos permite definir proyecciones canónicas sobre las hojas estables e inestables fuertes.

4.2. COHERENCIA DINÁMICA

Dado $x \in G$, definimos la proyección $\Pi_x^{uu} : G \rightarrow \mathcal{W}_A^{uu}(x)$ como

$$\Pi_x^{uu}(y) = \mathcal{W}_A^{cs}(y) \cap \mathcal{W}_A^{uu}(x) \quad \forall y \in G$$

Es decir, el mapa Π_x^{uu} es la proyección sobre la hoja inestable fuerte $\mathcal{W}_A^{uu}(x)$ a través de las hojas centro-estables \mathcal{W}_A^{cs} . Análogamente definimos la proyección Π_x^{ss} . De la misma forma utilizando el producto global podemos definir dentro de \mathcal{W}_A^{cs} la proyección sobre las hojas estables fuertes \mathcal{W}_A^{ss} a través de las hojas centrales \mathcal{W}_A^c .

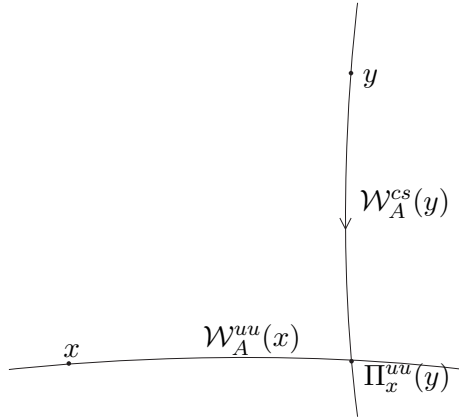


Figura 4.1: Proyecciones canónicas

Observamos de la definición anterior que si componemos el automorfismo A con la proyección Π_x^{uu} , obtenemos

$$A \circ \Pi_x^{uu}(y) = A(\mathcal{W}_A^{cs}(y) \cap \mathcal{W}_A^{uu}(x)) = \mathcal{W}_A^{cs}(A(y)) \cap \mathcal{W}_A^{uu}(A(x)) = \Pi_{A(x)}^{uu}(A(y))$$

Concluimos que $A \circ \Pi_x^{uu} = \Pi_{A(x)}^{uu} \circ A$. Es decir que si nos olvidamos de los subíndices en la notación, obtenemos que A y Π^{uu} conmutan. Lo mismo ocurre para el caso Π^{ss} . A partir de ahora haremos eso, es decir, omitiremos el uso de subíndices en las proyecciones para no recargar la notación y llamaremos $H_f^\sigma := \Pi^\sigma \circ H_f$. Recordamos que

$$D_f^\sigma(x, R) = \{y \in \tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma(x) : d_{\tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma}(x, y) < R\}$$

Definición 4.3 (σ -propio). Para $\sigma = ss, uu$ decimos que $f \in PH_A(M)$ es σ -propio si para todo $x \in G$ el mapa $H_f^\sigma|_{\tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma(x)} : \tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma(x) \rightarrow \mathcal{W}_A^\sigma(H_f(x))$ es uniformemente propio. Es decir si para todo $R > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $(H_f^\sigma)^{-1}(D_A^\sigma(H_f(x), R)) \cap \tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma(x) \subset D_f^\sigma(x, \delta)$ para todo $x \in G$.

Observación 4.4. En la definición anterior, podemos tomar $R = 1$ debido a la hiperbolicidad uniforme y a la compacidad de M . Luego, un difeomorfismo $f \in PH_A(M)$ es σ -propio si y solo si existe un $\delta > 0$ tal que $(H_f^\sigma)^{-1}(D_A^\sigma(H_f(x), 1)) \cap \tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma(x) \subset D_f^\sigma(x, \delta)$ para todo $x \in G$.

4.2. COHERENCIA DINÁMICA

La definición de σ -propio puede ser expresada de manera equivalente y de una forma más geométrica. Los siguientes lemas nos dan esa equivalencia.

Definición 4.5. Sea $f \in PH_A(M)$, decimos que f tiene la condición

(I^σ) Si la función H_f^σ es inyectiva restringida a las hojas de $\tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma$.

(S^σ) Si la función H_f^σ es sobreyectiva restringida a las hojas de $\tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma$.

Veremos ahora que ser σ -propio es equivalente a cumplir las condiciones (I^σ) y (S^σ).

Lema 4.6. Si $f \in PH_A(M)$ es σ -propio, entonces f verifica la condición (I^σ).

Demostración. Dado $f \in PH_A(M)$, vamos a probar la inyectividad de H_f^σ restringida a las hojas $\tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma$. Supongamos que H_f^σ no es inyectiva en alguna hoja. Luego existe un $y \in \tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma(x)$ tal que $H_f^\sigma(x) = H_f^\sigma(y)$ con $x \neq y$. Tenemos que $H_f^\sigma(y) \in \mathcal{W}_A^{c\sigma^c}(H_f(x))$ que es A -invariante ($\sigma^c = ss$ si $\sigma = uu$, y viceversa). Entonces $A^n \circ H_f(y) \in \mathcal{W}_A^{c\sigma^c}(A^n \circ H_f(x))$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, que es equivalente gracias a la semiconjugación a que $H_f \circ \tilde{f}^n(y) \in \mathcal{W}_A^c(H_f \circ \tilde{f}^n(x))$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto

$$\tilde{f}^n(y) \in (H_f^\sigma)^{-1}(D_A^\sigma(H_f(\tilde{f}^n(x)), 1)) \cap \mathcal{W}_f^\sigma(\tilde{f}^n(x)) \subset D_f^\sigma(\tilde{f}^n(x), R)$$

por ser σ -propia. En particular tenemos que $d_{\mathcal{W}^\sigma}(\tilde{f}^n(x), \tilde{f}^n(y)) < R$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esto es absurdo debido a la expansión de \tilde{f} en las hojas estables e inestables fuertes. Esto prueba la inyectividad. \square

Lema 4.7. La condición (I^σ) implica la condición (S^σ).

Demostración. Dado $f \in PH_A(M)$ con la propiedad (I^σ), vamos a probar la sobreyectividad de la función H_f^σ restringida a las hojas $\tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma$ sobre \mathcal{W}_A^σ .

Primero que nada afirmamos que la inyectividad de H_f^σ implica que existe un $\delta > 0$ tal que

$$H_f^\sigma(\partial D_f^\sigma(x, 1)) \cap D_A^\sigma(H_f(x), \delta) = \emptyset$$

Si esto no ocurriese, para todo $n \in \mathbb{N}$ existirían puntos $x_n, y_n \in \partial D_f^\sigma(x_n, 1)$ tales que $H_f^\sigma(y_n) \in D_A^\sigma(H_f(x_n), \frac{1}{n})$. Como el dominio fundamental es compacto podemos suponer que ambas sucesiones convergen a puntos x, y respectivamente. Luego $y \in \partial D_f^\sigma(x, 1)$ y en particular $x \neq y$. Como H_f y Π^σ son continuas, tenemos que $H_f^\sigma(x) = H_f^\sigma(y)$ lo cual contradice la inyectividad. Esto prueba la existencia del δ mencionado arriba.

Debido a la inyectividad y la invariancia del dominio (ver por ejemplo [Hat] Teorema 2B.3), sabemos que para todo $x \in G$ el conjunto $S_x = (H_f^\sigma)(\partial D_A^\sigma(H_f(x), 1))$ es una esfera de dimensión $\dim(E_f^\sigma) - 1$ encajada en

4.2. COHERENCIA DINÁMICA

$\tilde{W}_A^\sigma(H_f(x))$. Como $\dim(E_f^\sigma) = \dim(E_A^\sigma)$, el teorema de separación de Jordan (ver [Hat] Proposición 2B.1) nos dice que S_z separa $\tilde{W}_A^\sigma(H_f(x))$ en dos componentes conexas. Además la imagen por H_f^σ de $D_f^\sigma(x, 1)$ es la componente acotada y contiene a $H_f(x)$. Por la afirmación anterior también contiene a $D_A^\sigma(H_f(x), \delta)$. Ahora sea $p \in \tilde{W}_A^\sigma(H_f(x))$ y $R > d_{\mathcal{W}^\sigma}(H_f(x), p)$.

Afirmación 4.8. *Para este $R > 0$ existe un $N \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$D_A^\sigma(z, R) \subset A^N(D_A^\sigma(A^{-N}(z), \delta))$$

Demostración. Supongamos $\sigma = uu$. En este caso basta tomar $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\lambda_{uu}^{-N} < \frac{\delta}{R}$. Si $p \in A^{-N}(D_A^{uu}(z, R))$, existe un $x \in D_A^{uu}(z, R)$ tal que $A^{-N}(x) = p$. Luego $d_{uu}(A^{-N}(x), A^{-N}(z)) < \lambda_{uu}^{-N} \cdot d_{uu}(x, z) < \delta$, por lo que $p = A^{-N}(x) \in D_A^{uu}(A^{-N}(z), \delta)$. Finalmente $A^{-N}(D_A^{uu}(z, R)) \subset D_A^{uu}(A^{-N}(z), \delta)$, y equivalentemente $D_A^{uu}(z, R) \subset A^N(D_A^{uu}(A^{-N}(z), \delta))$ como queríamos probar. El caso $\sigma = ss$ es completamente análogo. \square

Siguiendo con la prueba, si $z = H_f(x)$ tenemos que

$$D_A^\sigma(H_f(x), R) \subset A^N(D_A^\sigma(A^{-N}(H_f(x)), \delta)) = A^N(D_A^\sigma(H_f(\tilde{f}^{-N}(x)), \delta))$$

Como $D_A^\sigma(H_f(z), \delta) \subset \Pi^\sigma \circ H_f(D_f^\sigma(z, 1))$ tenemos que

$$\begin{aligned} D_A^\sigma(H_f(x), R) &\subset A^N \circ (\Pi^\sigma \circ H_f)(D_f^\sigma(\tilde{f}^{-N}(x), 1)) \\ &= (\Pi^\sigma \circ H_f)(\tilde{f}^N(D_f^\sigma(\tilde{f}^{-N}(x), 1))) \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos la semiconjugación y que Π^σ y A conmutan. Esto prueba la sobreyectividad de H_f^σ sobre $\tilde{W}_A^\sigma(H_f(x))$. \square

Lema 4.9. *Si $f \in PH_A(M)$ verifica la condición (I^σ) , entonces f es σ -propio.*

Demostración. Por hipótesis f verifica la propiedad (I^σ) y el lema 4.7 nos dice que f también cumple (S^σ) , es decir, para cada $x \in G$ tenemos que

$$H_f^\sigma|_{\tilde{W}_f^\sigma(x)} : \tilde{W}_f^\sigma(x) \rightarrow \tilde{W}_A^\sigma(H_f(x))$$

es un homeomorfismo.

Sea $\varphi(x) = \inf\{R > 0 : (H_f^\sigma)^{-1}(D_A^\sigma(H_f(x), 1)) \subseteq D_f^\sigma(x, R)\}$. Para que f sea σ -propio tenemos que probar que φ está uniformemente acotada en G . Como φ es Γ -periódica, basta con restringirse a puntos en un dominio fundamental, que además resulta ser compacto (por ser Γ cocompacto). Luego basta con probar que si $x_n \rightarrow x$ entonces $\limsup \varphi(x_n) \leq \varphi(x)$. Para ver esto, observamos que $H_f^\sigma(D_f^\sigma(x, \varphi(x)))$ contiene a $D_A^\sigma(H_f(x), 1)$. Como es un homeomorfismo (por (I^σ) y (S^σ)) para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$D_A^\sigma(H_f(x), 1 + \delta) \subset \Pi^\sigma \circ H_f(D_f^\sigma(x, \varphi(x) + \epsilon))$$

Usando la continuidad de las hojas \tilde{W}^σ , y la continuidad de las funciones Π^σ y H_f deducimos que para n suficientemente grande $H_f^\sigma(D_f^\sigma(x_n, \varphi(x) + \epsilon))$ contiene a $D_A^\sigma(H_f(x_n), 1)$. Esto muestra que $\limsup \varphi(x_n) \leq \varphi(x) + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos el resultado buscado. \square

4.2.2. Criterio de Integrabilidad

Dado un conjunto $K \subset G$ y $R > 0$ llamaremos $B_R(K)$ al R -entorno de K , es decir, al conjunto de puntos de G que distan menos de R de algún punto de K .

Definición 4.10 (Foliaciones casi paralelas). Sean $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ foliaciones de G . Se dice que son foliaciones casi paralelas si $\exists R > 0 / \forall x \in G, \exists y_1, y_2 \in G$:

- $\tilde{\mathcal{F}}_1(x) \subset B_R(\tilde{\mathcal{F}}_2(y_1))$ y $\tilde{\mathcal{F}}_2(y_1) \subset B_R(\tilde{\mathcal{F}}_1(x))$
- $\tilde{\mathcal{F}}_2(x) \subset B_R(\tilde{\mathcal{F}}_1(y_2))$ y $\tilde{\mathcal{F}}_1(y_2) \subset B_R(\tilde{\mathcal{F}}_2(x))$

Ser casi paralelas es una relación de equivalencia. La condición puede ser descrita en términos de la distancia de Hausdorff: $\forall x \in G, \exists y_1, y_2 \in G$ tales que $D_H(\tilde{\mathcal{F}}_1(x), \tilde{\mathcal{F}}_2(y_1)) < R$ y $D_H(\tilde{\mathcal{F}}_2(x), \tilde{\mathcal{F}}_1(y_2)) < R$.

Definición 4.11 (SADC). Decimos que un difeomorfismo $f \in PH_A(M)$ es **fuertemente casi dinámicamente coherente** (SADC) si existen foliaciones $\mathcal{F}^{cs}, \mathcal{F}^{cu}$ que son transversales a E_f^{uu}, E_f^{ss} y casi paralelas a las foliaciones $\mathcal{W}_A^{cs}, \mathcal{W}_A^{cu}$ respectivamente.

El nombre anterior proviene de [Po] donde se define el concepto de difeomorfismo *casi dinámicamente coherente* como un difeomorfismo parcialmente hiperbólico con foliaciones $\mathcal{F}^{cs}, \mathcal{F}^{cu}$ transversales a E_f^{uu}, E_f^{ss} respectivamente. En [FPS], se pide la hipótesis extra de que estas foliaciones sean casi paralelas a las foliaciones $\mathcal{W}_A^{cs}, \mathcal{W}_A^{cu}$, por lo que le agregan la palabra *fuerte*.

Estamos en condiciones de enunciar el criterio de integrabilidad de las distribuciones centrales. La prueba que expondremos es la misma que aparece en [FPS] adaptada al caso de las nilvariedades.

Teorema 4.12 (Criterio de integrabilidad [FPS]). Supongamos que $f \in PH_A(M)$ y verifica:

- f es *uu-propio*.
- f es SADC.

Entonces, el fibrado $E_f^{ss} \oplus E_f^c$ se integra en una foliación f -invariante \mathcal{W}_f^{cs} que verifica $H_f^{-1}(\mathcal{W}_A^{cs}(H_f(x))) = \tilde{W}_f^{cs}(x)$. Además \tilde{W}_f^{cs} y \tilde{W}_f^{uu} tienen estructura de producto global.

Demostración. La idea de la prueba es bastante clara: partimos de la foliación \mathcal{F}^{cs} dada por la propiedad SADC y la iteramos hacia el pasado por \tilde{f} esperando que en el límite converja a la foliación buscada. Sabemos que $\{H_f^{-1}(\mathcal{W}_A^{cs}(H_f(y))) : y \in G\}$ forma una partición \tilde{f} -invariante de G y además es invariante por transformaciones de cubrimiento. Esto es fácil de chequear y se debe a la relación de semiconjugación y a que H_f es Γ -periódica. Tomamos la foliación \mathcal{F}^{cs} dada por la propiedad SADC. Como sabemos que es casi paralela a la foliación \mathcal{W}_A^{cs} y H_f está a distancia C^0 acotada de la Identidad tenemos que $H_f(\tilde{\mathcal{F}}^{cs}(x))$ está a distancia Hausdorff finita de alguna hoja de \mathcal{W}_A^{cs} para todo $x \in G$.

Afirmación 4.13. *Las foliaciones \mathcal{F}^{cs} y \mathcal{W}_f^{uu} tienen estructura de producto global.*

Demostración. Esto se debe a las propiedades (I^{uu}) y (S^{uu}) . Tomamos $x, y \in G$, vamos a probar primero que $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}(x)$ interseca a $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(y)$. Para esto consideramos el conjunto $Q = G \setminus \tilde{\mathcal{F}}^{cs}(x)$. Un resultado del tipo separación de Jordan (ver [ABP] Lema 2.1) nos dice que la $d - cs - 1$ homología de Q es no trivial. Aquí $d = \dim(G)$ y $cs = \dim(G^{cs})$. Como $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}(x)$ está a distancia Hausdorff finita de \mathcal{W}_A^{cs} deducimos que existe un ciclo no trivial del $d - cs - 1$ grupo de homología $H_{d-cs-1}(Q)$ dentro de \mathcal{W}_A^{cs} . Eligiendo este ciclo suficientemente lejos de $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}(x)$, y usando las propiedades (I^{uu}) y (S^{uu}) deducimos la existencia de un ciclo no trivial contenido en $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(y)$. Esto nos da la intersección buscada (ver [ABP] para más detalles).

Ahora debemos probar que la intersección de $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}(x)$ y $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(y)$ es única. Para esto basta con probar que cualquier hoja $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}(x)$ no puede intersectar $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(y)$ más de una vez. Como f verifica (I^{uu}) tenemos que H_f es inyectiva restringida a hojas $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}$. Además, también por (I^{uu}) , para todo $y \in G$ tenemos que $H_f(\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(y))$ interseca a $\mathcal{W}_A^{cs}(e) = G^{cs}$ en un solo punto. Luego, podemos definir una función $\varphi : \tilde{\mathcal{F}}^{cs}(x) \rightarrow \mathcal{W}_A^{cs}(e) = G^{cs}$ dada por $\varphi(p) = H_f(\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(p)) \cap G^{cs}$.

La función φ es sobreyectiva debido a la existencia de la intersección entre $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}$ con $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}$: dado $P \in G^{cs}$ tomamos $P' \in H_f^{-1}(P)$, luego existe $Q \in \tilde{\mathcal{F}}^{cs}(x) \cap \tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(P')$ y por definición tenemos $\varphi(Q) = P$.

Además es continua debido a la continuidad de H_f y a la continuidad de las hojas de $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}$. Observamos que todos los puntos dentro de $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}(x)$ que sean parte de una misma hoja inestable fuerte tendrán la misma imagen por φ . Si probamos que φ es inyectiva obtenemos la unicidad buscada. Gracias a la continuidad de $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}$ y a la estructura de producto local, tenemos que φ es un cubrimiento. Además $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}(x)$ es contractible, por lo que φ resulta ser un homeomorfismo. Esto prueba la unicidad. \square

La afirmación anterior nos dice que las hojas de la foliación $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}$ (y por ende de $\tilde{f}^{-n}(\tilde{\mathcal{F}}^{cs})$) se pueden ver como gráficos de funciones de \mathbb{R}^{cs} en \mathbb{R}^{uu} .

4.2. COHERENCIA DINÁMICA

Como la foliación \mathcal{F}^{cs} es uniformemente transversal a E_f^{uu} tenemos que existen cajas de producto local de tamaño uniforme en G : Existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall x \in G$, existe un entorno $V_x \supseteq B(x, \epsilon)$ y C^1 -coordenadas locales $\psi_x : \mathbb{D}^{cs} \times \mathbb{D}^{uu} \rightarrow V_x$ tales que:

- $\psi_x(\mathbb{D}^{cs} \times \mathbb{D}^{uu}) = V_x$
- Para todo $y \in B_\epsilon(x) \subseteq V_x$ tenemos que si llamamos $W_n^x(y)$ a la componente conexa de $V_x \cap \tilde{f}^{-n}(\tilde{\mathcal{F}}^{cs}(\tilde{f}^n(y)))$ que contiene a y entonces

$$\psi_x^{-1}(W_n^x(y)) = \text{graf}(h_n^{x,y})$$

donde $h_n^{x,y} : \mathbb{D}^{cs} \rightarrow \mathbb{D}^{uu}$ es una función C^1 con derivadas primeras acotadas.

Como estas funciones tienen derivadas primeras acotadas, el conjunto $\{h_n^{x,y}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es precompacto en el espacio de funciones Lipschitz de $\mathbb{D}^{cs} \rightarrow \mathbb{D}^{uu}$ ([HPS]).

De esta manera como mencionamos en el comienzo de la prueba, obtenemos que las hojas de $\tilde{f}^{-n}(\tilde{\mathcal{F}}^{cs})$ tienen subsucesiones convergentes. A partir de aquí surgen dos problemas: el primero es que en principio una hoja podría tener diferentes límites. El segundo es que aunque una hoja tenga límite único, diferentes hojas podrían tener límites que se intersecten. Veremos que esto no ocurre gracias a la relación de semiconjugación.

Para todo $y \in B_\epsilon(x)$, llamaremos \mathcal{J}_y^x al conjunto de índices tales que para todo $\alpha \in \mathcal{J}_y^x$ existe una función Lipschitz $h_{\infty,\alpha}^{x,y} : \mathbb{D}^{cs} \rightarrow \mathbb{D}^{uu}$ y una subsucesión $n_j \rightarrow +\infty$ tal que

$$h_{\infty,\alpha}^{x,y} = \lim_{j \rightarrow +\infty} h_{n_j}^{x,y}$$

Cada una de las funciones $h_{\infty,\alpha}^{x,y}$ nos da un gráfico, y llamaremos $W_{\infty,\alpha}^x(y)$ a la imagen por ψ_x de este gráfico.

Afirmación 4.14. *Para todo $z \in B(x, \epsilon)$ y todo $\alpha \in \mathcal{J}_z^x$, tenemos que $H_f(W_{\infty,\alpha}^x(z)) \subseteq \mathcal{W}_A^{cs}(H_f(z)) = L_{H_f(z)}(G^{cs})$.*

Demostración. Tomamos $z \in B(x, \epsilon)$ y $\alpha \in \mathcal{J}_z^x$. Por hipótesis, tenemos que existe una subsucesión $n_j \rightarrow +\infty$ tal que $W_{n_j}^x(z) \rightarrow W_{\infty,\alpha}^x(z)$. Dado $y \in W_{\infty,\alpha}^x(z)$, queremos probar que $H_f(y) \in \mathcal{W}_A^{cs}(H_f(z))$.

Llamamos $z_{n_j} = \tilde{\mathcal{F}}^{uu}(y) \cap W_{n_j}^x(z)$. Es claro que $\tilde{f}^{n_j}(z_{n_j}) \in \tilde{\mathcal{F}}^{cs}(\tilde{f}^{n_j}(z))$ y además $z_{n_j} \rightarrow y$ cuando $j \rightarrow \infty$. Si $H_f(y) = H_f(z)$, obtenemos la afirmación. Supongamos por el contrario que $H_f(z) \neq H_f(y)$. La continuidad de H_f implica que $H_f(z_{n_j}) \rightarrow H_f(y) \neq H_f(z)$.

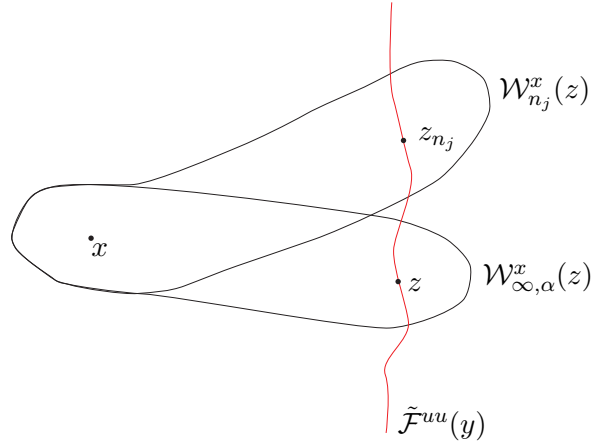


Figura 4.2: $H_f(W_{\infty, \alpha}^x(z)) \subseteq \mathcal{W}_A^{cs}(H_f(z))$

Por definición z y z_j pertenecen a la misma hoja de $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}$, y $\tilde{f}^{n_j}(z)$ y $\tilde{f}^{n_j}(z_{n_j})$ también. Además \mathcal{F} es casi paralela a la foliación \mathcal{W}_A^{cs} . Esto implica que $\tilde{f}^{n_j}(z)$ y $\tilde{f}^{n_j}(z_{n_j})$ se encuentran a distancia uniformemente acotada respecto a la dirección G^{uu} y lo mismo ocurre con $H_f(\tilde{f}^{n_j}(z))$ y $H_f(\tilde{f}^{n_j}(z_{n_j}))$ por estar H_f a distancia C^0 -cerca de la Identidad.

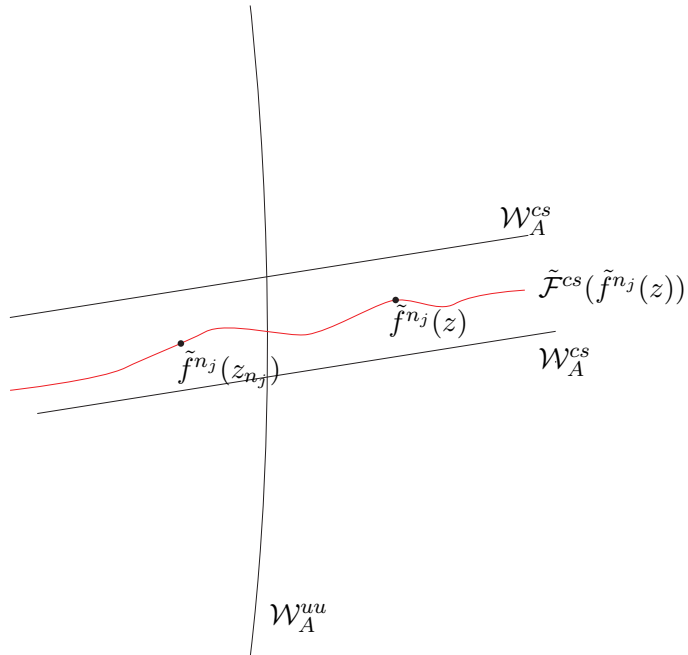


Figura 4.3: Distancia acotada según la dirección inestable.

Usando la semiconjugación, obtenemos que $A^{n_j}(H_f(z_{n_j}))$ y $A^{n_j}(H_f(z))$ están uniformemente acotados respecto a la dirección G^{uu} . Como A es Anosov

4.2. COHERENCIA DINÁMICA

esto ocurre si y solo si $H_f(y) \in \mathcal{W}_A^{cs}(H_f(z))$, como queríamos probar. \square

La afirmación anterior nos permite tratar los dos problemas antes mencionados de la misma forma.

Supongamos primero que $z \in B(x, \epsilon)$ tiene dos hojas límites distintas $W_{\infty, \alpha}^x(z)$ y $W_{\infty, \beta}^x(z)$. Luego existen dos puntos $z_1 \in W_{\infty, \alpha}^x(z)$ y $z_2 \in W_{\infty, \beta}^x(z)$ dentro de una misma hoja inestable fuerte \mathcal{W}_f^{uu} . La afirmación anterior implica que $H_f(z_1)$ y $H_f(z_2)$ pertenecen a $\mathcal{W}_A^{cs}(H_f(z))$ y esto ocurre si y solo si $H_f^{uu}(z_1) = H_f^{uu}(z_2)$ lo cual contradice la inyectividad de H_f^{uu} .

Análogamente para el segundo problema, supongamos que existen dos puntos $z_1 \neq z_2$ en $B(x, \epsilon)$ tales que sus límites $W_{\infty, \alpha}^x(z_1)$ y $W_{\infty, \beta}^x(z_2)$ tienen intersección no vacía. Obtenemos nuevamente dos puntos $y_1 \in W_{\infty, \alpha}^x(z_1)$ e $y_2 \in W_{\infty, \beta}^x(z_2)$ dentro de una misma hoja inestable fuerte \mathcal{W}_f^{uu} . La afirmación anterior nos dice que $H_f^{uu}(z_1) = H_f^{uu}(z_2)$ y esto contradice la inyectividad de H_f^{uu} .

Resumiendo, obtenemos que para todo $x \in G$ y para todo $y \in B(x, \epsilon)$, el límite $W_{\infty}^x(y)$ de las variedades $W_n^x(y)$ es único, y para cualquier par de puntos $y, z \in B(x, \epsilon)$, los límites coinciden o son disjuntos. Además estos límites son f -invariantes.

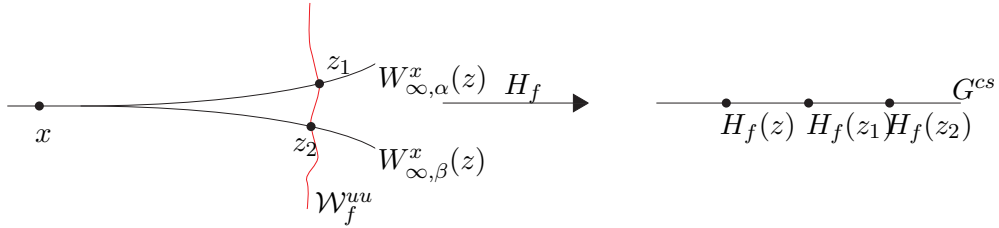


Figura 4.4: Unicidad de las foliaciones

Para probar que efectivamente es una foliación basta con observar lo siguiente: si tomamos dos puntos $z, w \in B(x, \epsilon)$, tenemos que $W_{\infty}^x(z)$ y $\mathcal{W}_f^{uu}(w)$ se cortan en un único punto. Como las hojas de \mathcal{W}_f^{uu} varían continuamente y las placas W_{∞}^x coinciden o son disjuntas, obtenemos una función continua de $\mathbb{D}^{cs} \times \mathbb{D}^{uu}$ en un entorno de x que manda discos horizontales en placas W_{∞}^x . Esto prueba que las placas forman una foliación.

Como las hojas de la foliación son tangentes a conos pequeños alrededor de la dirección E_f^{cs} y además son f -invariantes, obtenemos que la foliación es tangente a E_f^{cs} (ver teorema 3.15).

Por último, observamos que la foliación $\tilde{\mathcal{W}}_f^{cs}$ tiene las mismas propiedades que $\tilde{\mathcal{F}}^{cs}$ por lo tanto obtenemos la estructura de producto global entre \mathcal{W}_f^{cs} y \mathcal{W}_f^{uu} . \square

Análogamente obtenemos el mismo resultado en el caso en que f es ss -propio. Deducimos el siguiente corolario.

4.3. SADC Y σ -PROPIO ES ABIERTO Y CERRADO EN LA TOPOLOGÍA C^1

Corolario 4.15. *Sea f un difeomorfismo en $PH_A(G/\Gamma)$, que verifica*

- f es SADC.
- f es uu -propio y ss -propio.

Entonces, f es dinámicamnte coherente y tiene fibras centrales.

4.3. SADC y σ -propio es abierto y cerrado en la topología C^1

En esta sección veremos que las propiedades del criterio de integrabilidad anterior que nos garantizan coherencia dinámica son abiertas y cerradas en la topología C^1 dentro de los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos isotópicos a Anosov. Luego, podemos aplicar el criterio anterior para probar la integrabilidad en toda la componente conexa donde exista algún difeomorfismo con estas propiedades.

Proposición 4.16. *Ser SADC es una propiedad abierta y cerrada en $PH_A(M)$.*

Demostración.

- Abierto es trivial ya que la misma foliación sirve por la continuidad de los fibrados E^{ss} y E^{uu} : Como f tiene la propiedad SADC, existen foliaciones \mathcal{F}_f^{cs} , \mathcal{F}_f^{cu} transversales a E_f^{uu} , E_f^{ss} y casi paralelas a \mathcal{W}_A^{cs} , \mathcal{W}_A^{cu} respectivamente. Luego $\angle(\mathcal{F}_f^{cs}, E_f^{uu}) > \epsilon > 0$, para todo $x \in G$. Luego, existe $\mathcal{U}(f)$ entorno de f en la topología C^1 tal que para todo $g \in \mathcal{U}(f)$, $\angle(E_g^{uu}(x), E_f^{uu}(x)) < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $x \in G$. Tomamos $\mathcal{F}_g^{cs} = \mathcal{F}_f^{cs}$, entonces,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_g^{cs}, E_g^{uu}) + \frac{\epsilon}{2} &> \angle(\mathcal{F}_g^{cs}(x), E_g^{uu}(x)) + \angle(E_g^{uu}(x), E_f^{uu}(x)) \\ &\geq \angle(\mathcal{F}_g^{cs}(x), E_f^{uu}(x)) \\ &= \angle(\mathcal{F}_f^{cs}(x), E_f^{uu}(x)) > \epsilon > 0 \end{aligned}$$

Entonces $\angle(\mathcal{F}_g^{cs}(x), E_g^{uu}(x)) > \frac{\epsilon}{2}$, para todo $x \in G$. Luego, toda $g \in \mathcal{U}(f)$ tiene foliaciones \mathcal{F}_g^{cs} , \mathcal{F}_g^{cu} transversales a E_g^{uu} , E_g^{ss} . Entonces, toda $g \in \mathcal{U}(f)$ verifica SADC.

- Cerrada: Primero que nada observamos que como f_n es isotópico a A , fija la clase de foliaciones casi paralelas a cualquier subespacio A -invariante.

Sea $f_n \rightarrow f$ en la topología C^1 tal que toda f_n es SADC. Llamamos $E_n^{cs} = E_{f_n}^{ss} \oplus E_{f_n}^c$. Por la convergencia C^1 tenemos que $E_n^{cs} \rightarrow E_f^{cs}$, $E_n^{uu} \rightarrow E_f^{uu}$. Sea $\alpha = \angle(E_f^{cs}, E_f^{uu})$ (cota mínima del ángulo). Tomamos un $N > 0$ tal que $\angle(E_f^{uu}, E_n^{cs}) > \frac{\alpha}{2}$ ($E_n^{cs} \rightarrow E_f^{cs}$ luego existe tal $N > 0$).

4.3. SADC Y σ -PROPIO ES ABIERTO Y CERRADO EN LA TOPOLOGÍA C^1

Tomamos \mathcal{F}_N^{cs} foliación uniformemente transversal a E_N^{uu} . Luego existe un $m > 0$ tal que $f_N^{-m}(\mathcal{F}_N^{cs})$ está contenida en el cono de centro E_N^{cs} y radio $\frac{\alpha}{2}$. Entonces $f_N^{-m}(\mathcal{F}_N^{cs})$ es uniformemente transversal a E_f^{uu} .

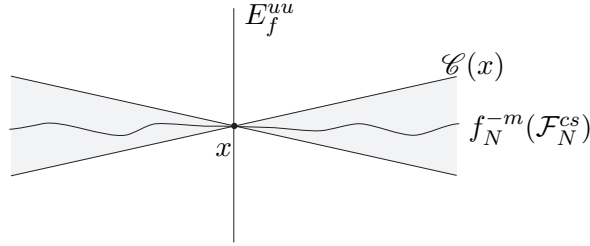


Figura 4.5: Foliación transversal a E^{uu}

□

Proposición 4.17. Ser σ -propio es una propiedad C^1 -abierto en $PH_A(G/\Gamma)$.

Demostración. Dado $f \in PH_A(G/\Gamma)$, debemos encontrar un entorno $\mathcal{U}(f)$ en la topología C^1 tal que todo $g \in \mathcal{U}(f)$ es σ -propio. Gracias a la observación 4.4 basta con encontrar un entorno $\mathcal{U}(f)$ y $R_1 > 0$ tales que para todo $g \in \mathcal{U}(f)$ y $x \in G$:

$$(H_g^\sigma)^{-1}(D_A^\sigma(H_g(x), 1)) \cap \tilde{\mathcal{W}}_g^\sigma(x) \subseteq D_g^\sigma(x, R_1)$$

Como f es σ -propio, sabemos que $H_f|_{\tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma(x)} : \tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma(x) \rightarrow \tilde{\mathcal{W}}_A^\sigma(H_f(x))$ es un homeomorfismo. Luego, existe $R_1 > 0$ tal que

$$H_f^\sigma(D_f^\sigma(x, R_1)^c) \cap D_A^\sigma(H_f(x), 2) = \emptyset$$

Llamaremos $A_{r,R,g}^\sigma(x)$ al anillo $D_g^\sigma(x, R) \setminus D_g^\sigma(x, r)$ para $R > r > 0$. Sea $R_2 > \Delta_f R_1$, luego tenemos que

$$H_f^\sigma(A_{R_1, R_2, f}^\sigma(x)) \cap D_A^\sigma(H_f(x), 2) = \emptyset$$

Observamos ahora que H_f es uniformemente continua por ser un levantamiento de h_f . Luego, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que si $d(x, y) < \epsilon_1$, entonces $d(H_f(x), H_f(y)) < 1/4$. Tomamos los siguientes C^1 -entornos:

- Por la observación 3.20 existe un entorno $\mathcal{U}_1(f)$ tal que las constantes Δ_f y λ_f son uniformes en todo el entorno $\mathcal{U}_1(f)$.
- Dado $\epsilon_1 > 0$ y $R_2 > 0$, la observación 3.14 nos dice que existe un entorno $\mathcal{U}_2(f)$ y $\delta > 0$ tal que para todo $g \in \mathcal{U}_2(f)$ y todo par de puntos x, y con $d(x, y) < \delta$ se cumple $d_{C^1}(D_g^\sigma(x, R_2), D_g^\sigma(y, R_2)) < \epsilon_1$.
- Tomamos $\mathcal{U}_3(f) = \{g \in PH_A(G/\Gamma) : d_{C^0}(H_f, H_g) < 1/4\}$.

4.3. SADC Y σ -PROPIO ES ABIERTO Y CERRADO EN LA TOPOLOGÍA C^1

Definimos $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_1(f) \cap \mathcal{U}_2(f) \cap \mathcal{U}_3(f)$. Ahora, sea $g \in \mathcal{U}(f)$ y dos puntos x, y tales que $y \in A_{R_1, R_2, g}^\sigma(x)$. Luego, existe $z \in A_{R_1, R_2, f}^\sigma(x)$ tal que $d(z, y) < \epsilon_1$ y debido a la continuidad uniforme $d(H_f(z), H_f(y)) < 1/4$.

Como $z \in A_{R_1, R_2, f}^\sigma(x)$ y $d(H_f(z), H_f(y)) < 1/4$, utilizando la desigualdad triangular obtenemos:

$$\begin{aligned} 2 &< d(H_f^\sigma(z), H_f^\sigma(x)) \leq d(H_f^\sigma(z), H_f^\sigma(y)) + d(H_f^\sigma(y), H_f^\sigma(x)) \\ &\leq 1/4 + d(H_f^\sigma(y), H_f^\sigma(x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto $d(H_f^\sigma(y), H_f^\sigma(x)) > 2 - 1/4$. Nuevamente usando la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} 2 - 1/4 &< d(H_f^\sigma(y), H_f^\sigma(x)) \\ &\leq d(H_f^\sigma(y), H_g^\sigma(y)) + d(H_g^\sigma(y), H_g^\sigma(x)) + d(H_g^\sigma(x), H_f^\sigma(x)) \\ &\leq 1/4 + d(H_g^\sigma(y), H_g^\sigma(x)) + 1/4 \end{aligned}$$

y concluimos que $d(H_g^\sigma(y), H_g^\sigma(x)) > 2 - 3/4 > 1$, es decir

$$H_g^\sigma(A_{R_1, R_2, g}^\sigma(x)) \cap D_A^\sigma(H_g(x), 1) = \emptyset \quad (4.1)$$

Finalmente esto implica

$$(H_g^\sigma)^{-1}(D_A^\sigma(H_g(x), 1)) \cap \tilde{W}_g^\sigma(x) \subseteq D_g^\sigma(x, R_1)$$

Si no fuera el caso, existiría $y \in \tilde{W}_g^\sigma(x)$ tal que $H_g^\sigma(y) \in D_A^\sigma(H_g(x), 1)$ pero $y \notin D_g^\sigma(x, R_2)$. Por la elección de Δ_f sabemos que existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{g}^n(y) \in A_{R_1, R_2, g}^\sigma(\tilde{g}^n(x))$ y $H_g^\sigma(\tilde{g}^n(x)) \in D_g^\sigma(\tilde{g}^n(x), 1)$. Esto último contradice 4.1 arriba. \square

La proposición anterior muestra que ser σ -propio es una propiedad C^1 -abierto en $PH_A(M)$. El siguiente teorema nos prueba que también es una propiedad C^1 -cerrada dentro de los difeomorfismos con la propiedad SADC. En principio, podría ser una propiedad cerrada dentro de $PH_A(M)$, pero en la prueba del teorema utilizamos el criterio de integrabilidad 4.12 por lo que necesitamos la propiedad SADC. Esto en realidad no representa ninguna dificultad para la prueba del teorema debido a la proposición 4.16 que nos garantiza que la propiedad SADC es abierta y cerrada en la topología C^1 , aunque la pregunta si es pertinente.

Teorema 4.18. *Ser SADC y σ -propio es una propiedad C^1 -cerrada en $PH_A(M)$.*

Demostración. Tomamos una sucesión $\{f_k\} \subset PH_A(M)$, tal que $f_k \rightarrow f$ en la topología C^1 , tal que f_k es SADC y σ -propio para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la proposición 4.16 sabemos que f también es SADC. Debemos probar que f es σ -propio. Asumimos ahora que $\sigma = uu$, el caso $\sigma = ss$ es completamente análogo.

4.3. SADC Y σ -PROPIO ES ABIERTO Y CERRADO EN LA TOPOLOGÍA C^1

Notamos que los difeomorfismos f_k están en las hipótesis del teorema 4.12, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que existe una foliación f_k -invariante $\mathcal{W}_{f_k}^{cs}$ tangente a $E_{f_k}^{ss} \oplus E_{f_k}^c$ que verifica que

$$\tilde{\mathcal{W}}_{f_k}^{cs}(x) = H_{f_k}^{-1}(\tilde{\mathcal{W}}_A^{cs}(H_{f_k}(x))) \quad (4.2)$$

A partir de ahora notaremos a los subíndices por k en lugar de f_k es decir $H_k^{uu} = \Pi^{uu} \circ H_{f_k}$. Con esta notación la propiedad anterior es equivalente a

$$H_k^{uu}(x) = H_k^{uu}(y) \text{ si y sólo si } y \in \tilde{\mathcal{W}}_k^{cs}(x). \quad (4.3)$$

Afirmación 4.19. *Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, un campo de conos \mathcal{C}^{uu} alrededor de E_f^{uu} , y un k_0 tales que, si $k \geq k_0$ y D es un disco tangente a \mathcal{C}^{uu} centrado en x de radio interno mas grande que ϵ , entonces*

$$D_A^{uu}(H_k(x), \delta) \subset H_k^{uu}(D)$$

Demostración. Consideramos un cubrimiento finito de M por cajas con estructura de producto local para los fibrados de f . Tomando las cajas suficientemente chicas (en particular de tamaño menor que ϵ) podemos asumir que dentro de ellas los fibrados sean casi constantes en cada caja. Además cambiando la métrica podemos hacer estos fibrados ortogonales. Tomando un k_0 suficientemente grande tenemos que para $k \geq k_0$, las cajas también son de producto local para f_k . Esto se debe a $f_k \rightarrow f$ en la topología C^1 implica que $E_k^\sigma \rightarrow E_f^\sigma$ para todo σ .

Si B una de esas cajas, notamos $2B$ y $3B$ a las cajas del doble y triple tamaño centradas en el mismo punto de B .

Podemos considerar el cubrimiento suficientemente chico y k_0 suficientemente grande para que para todo $k \geq k_0$ tengamos

- Las cajas $2B$ y $3B$ también son cajas de producto local para todos los f_k .
- Para toda caja B del cubrimiento, y para todo disco D tangente a \mathcal{C}^{uu} de radio interno mas grande que ϵ centrado en $x \in B$ tenemos que D intersecta en un único punto en $3B$ a toda hoja centro-estable de \mathcal{W}_k^{cs} que intersecta $2B$.

La condición anterior junto con la ecuación 4.3 implica que para todo disco D tangente a \mathcal{C}^{uu} centrado en $x \in B$ de radio interno mas grande que ϵ , tenemos que $H_k^{uu}(2B) \subset H_k^{uu}(D)$. La ecuación 4.3 también implica que H_k es inyectiva restringida a las hojas de $\tilde{\mathcal{W}}_k^{uu}$, luego tenemos que dada una componente conexa $2B$ de un levantado de una caja de producto local tenemos que

$$\text{int}(H_k^{uu}(2B)) \neq \emptyset$$

y todo punto $x \in B$ está en el interior de $H_k^{uu}(2B)$.

4.3. SADC Y σ -PROPIO ES ABIERTO Y CERRADO EN LA TOPOLOGÍA C^1

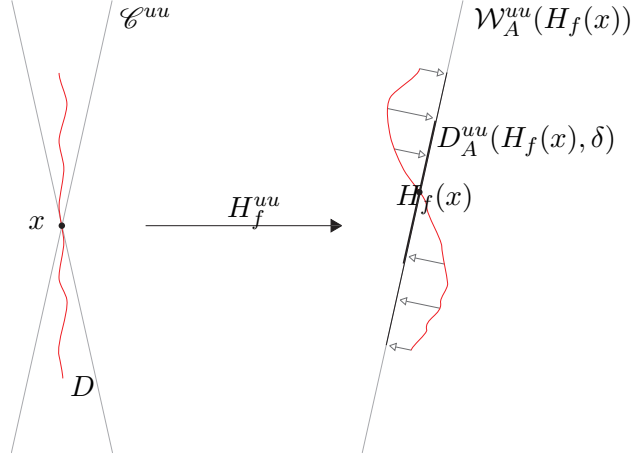


Figura 4.6: $D_A^{uu}(H_k(x), \delta) \subset H_k^{uu}(D)$

Más aún, como las cajas son finitas, tenemos que existe un δ uniforme que hace que $H_k^{uu}(B)$ esté a distancia δ del borde de $H_k^{uu}(2B)$ independientemente de la caja B .

Deducimos que todo disco D centrado en un punto x de radio interno mas grande que ϵ y tangente a un cono pequeño alrededor de E_f^{uu} verifica que $H_k^{uu}(D)$ contiene $D_A^{uu}(H_k(x), \delta)$ como queríamos ver. \square

Afirmación 4.20. Para k suficientemente grande y para todo par de puntos $x, y \in G$, las foliaciones $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}$ y $\tilde{\mathcal{W}}_k^{cs}$ se intersectan en algún punto.

Demostración. Por la afirmación anterior sabemos que para k suficientemente grande tenemos lo siguiente. Sean $x, y \in G$, y llamamos d a la distancia entre $H_k^{uu}(x)$ y $H_k^{uu}(y)$ medida dentro de la hoja $\tilde{\mathcal{W}}_A^{uu}(H_k(x))$, y sea $N \geq \frac{d}{\delta}$, podemos unir $H_k^{uu}(x)$ y $H_k^{uu}(y)$ dentro de la hoja $\tilde{\mathcal{W}}_A^{uu}(H_k(x))$ por una curva que esté contenida por N bolas B_1, \dots, B_N de radio $\delta/2$ y tales que $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$. Aclaremos que las bolas B_i son bolas en $\tilde{\mathcal{W}}_A^{uu}(H_k(x))$.

Luego, tomando $D = D_f^{uu}(x, \epsilon)$ y tenemos que $H_k^{uu}(D_f^{uu}(x, \epsilon))$ contiene a B_1 y entonces $H_k^{uu}(D_f^{uu}(x, 2\epsilon))$ contiene a $B_1 \cup B_2$. Inductivamente tenemos que $H_k^{uu}(D_f^{uu}(x, N\epsilon))$ contiene a $B_1 \cup \dots \cup B_N$ y en particular a $H_k^{uu}(y)$. Esto quiere decir que existe un punto $p \in D_f^{uu}(x, N\epsilon)$ tal que $H_k^{uu}(p) = H_k^{uu}(y)$, o equivalentemente $H_k(p) \in \tilde{\mathcal{W}}_A^{cs}(H_k(y))$. Por la ecuación 4.3 tenemos que $p \in D_f^{uu}(x, N\epsilon) \cap \tilde{\mathcal{W}}_k^{cs}(y)$.

Esto prueba que para $x, y \in G$, tenemos que $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(x)$ intersecta $\tilde{\mathcal{W}}_A^{cs}(y)$. \square

Afirmación 4.21. Para k suficientemente grande, las foliaciones $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}$ y $\tilde{\mathcal{W}}_k^{cs}$ tienen estructura de producto global. Equivalentemente el mapa $H_k^{uu}|_{\tilde{\mathcal{W}}_f^{cs}(x)} : \tilde{\mathcal{W}}_f^{cs}(x) \rightarrow \tilde{\mathcal{W}}_A^{uu}(H_f(x))$ es un homeomorfismo.

4.3. SADC Y σ -PROPIO ES ABIERTO Y CERRADO EN LA TOPOLOGÍA C^1

Demostración. Por la afirmación anterior es suficiente con mostrar que la intersección entre $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(x)$ y $\tilde{\mathcal{W}}_k^{cs}(y)$ es única para todo par de puntos x, y .

Como la hoja $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(x)$ interseca transversalmente a $\tilde{\mathcal{W}}_k^{cs}(y)$ para todo x, y y $H_k(\tilde{\mathcal{W}}_k^{cs}(y)) = \mathcal{W}_A^{cs}(H_k(y))$ tenemos que $H_k(\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(x))$ es topológicamente transversal a $\mathcal{W}_A^{cs}(H_k(y))$ para todo x, y . Esto implica que

$$\Pi^{uu} : H_k(\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(x)) \rightarrow \mathcal{W}_A^{uu}(H_f(x))$$

es un cubrimiento y como $H_k(\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(H_f(x)))$ es contractible sabemos que es inyectivo. Esto prueba que H_k^{uu} restringido a $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(x)$ es un homeomorfismo sobre $\mathcal{W}_A^{uu}(H_f(x))$ y equivalentemente que las foliaciones $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}$ y $\tilde{\mathcal{W}}_k^{cs}$ tienen estructura de producto global. \square

Continuamos con la prueba del teorema.

Para terminar la demostración debemos probar que existe $R > 0$ tal que

$$(H_f^{uu})^{-1}(D_A^{uu}(H_f(x), 1)) \cap \tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(x) \subset D_f^{uu}(x, R)$$

Vamos a probar que para todo $x \in G$, existe un número finito $\psi(x)$ tal que

$$(H_f^{uu})^{-1}(D_A^{uu}(H_f(x), 1)) \cap \tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(x) \subset D_f^{uu}(x, \psi(x))$$

Si obtenemos tal $\psi(x)$ podemos concluir igual que en el lema 4.9 y terminamos con la prueba.

Sabemos que $d_{C^0}(H_k, H_f) < K_0$. La afirmación anterior y el hecho de que f_k es CF implican que H_k^{uu} restringido a $\tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(x)$ es un homeomorfismo sobre $\mathcal{W}_A^{uu}(H_f(x))$, luego existe $R_1 > 0$ tal que

$$H_k^{uu}((D_f^{uu}(x, R_1))^c) \cap D_A^{uu}(H_k(x), 1 + 2K_0) = \emptyset$$

Tomamos $y \in D_f^{uu}(x, R_1)^c$, luego usando la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned} 1 + 2K_0 &< d(H_k^{uu}(x), H_k^{uu}(y)) \\ &\leq d(H_k^{uu}(x), H_f^{uu}(x)) + d(H_f^{uu}(x), H_f^{uu}(y)) + d(H_f^{uu}(y), H_k^{uu}(y)) \\ &< K_0 + d(H_f^{uu}(x), H_f^{uu}(y)) + K_0 \end{aligned}$$

Es decir, $d(H_f^{uu}(x), H_f^{uu}(y)) > 1$, por lo que obtenemos

$$H_k^{uu}((D_f^{uu}(x, R_1))^c) \cap D_A^{uu}(H_k(x), 1) = \emptyset$$

esto implica que

$$(H_f^{uu})^{-1}(D_A^{uu}(H_f(x), 1)) \cap \tilde{\mathcal{W}}_f^{uu}(x) \subset D_f^{uu}(x, R_1)$$

Definiendo $\psi(x) = R_1$ terminamos la prueba. \square

4.3. SADC Y σ -PROPIO ES ABIERTO Y CERRADO EN LA TOPOLOGÍA C^1

De los resultados anteriores obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.22. *Sea $f \in PH_A(M)$ un difeomorfismo en la misma componente conexa de un parcialmente hiperbólico g que es σ -propio ($\sigma = uu, ss$) y tiene la propiedad SADC. Entonces f es dinámicamente coherente y tiene fibras centrales.*

Demostración. Las proposiciones 4.16, 4.17 y el teorema 4.18 nos dicen que ser σ -propio al igual que tener la propiedad SADC son propiedades abiertas y cerradas en la topología C^1 dentro de $PH_A(M)$. Esto implica que cualquier difeomorfismo f en la misma componente conexa de un parcialmente hiperbólico g que sea σ -propio para $\sigma = ss, uu$ y tenga la propiedad SADC, está en las hipótesis del teorema 4.12. Luego f es dinámicamente coherente con fibras centrales. \square

Prueba del teorema 4.2. Para demostrar el teorema basta con probar que todo difeomorfismo parcialmente hiperbólico f en $PH_A^0(M)$ que es dinámicamente coherente con fibras centrales, tiene que ser SADC y σ -propio para $\sigma = ss, uu$.

Tomamos un f en estas hipótesis. Como f es dinámicamente coherente tenemos que existen las foliaciones centro-estables y centro-inestables \mathcal{W}_f^{cs} , \mathcal{W}_f^{cu} . Sabemos que estas foliaciones son uniformemente transversales a E_f^{uu} y E_f^{ss} respectivamente. Para probar que f es SADC resta probar que \mathcal{W}_f^{cs} y \mathcal{W}_f^{cu} son casi paralelas a las foliaciones centro-estables y centro-inestables del Anosov lineal A . Lo probaremos para el caso centro-estable.

Observamos primero que las hojas centro-estables $\tilde{\mathcal{W}}_f^{cs}(x)$ se pueden describir como el conjunto de puntos $y \in G$ que puedo unir concatenando curvas contenidas en $\tilde{\mathcal{W}}_f^{ss}$ y en $\tilde{\mathcal{W}}_f^c$. Es decir, para todo $y \in G$ existen finitos caminos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, tales que $\alpha_i \subset \tilde{\mathcal{W}}_f^{ss}$ o $\alpha_i \subset \tilde{\mathcal{W}}_f^c$, y además la curva $\alpha_1 * \dots * \alpha_n$ une los puntos x e y .

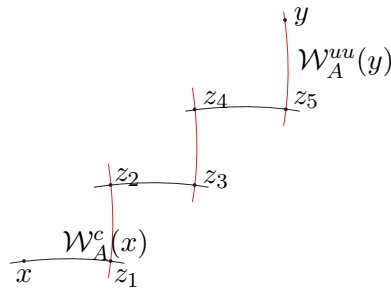


Figura 4.7: Variedad centro-estable

Supongamos ahora que $y \in \tilde{\mathcal{W}}_f^{cs}(x)$. Podemos asumir también por simplicidad $n = 2$ (después aplicamos inducción completa). Luego, existen dos curvas $\alpha_1 \subset \tilde{\mathcal{W}}_f^{ss}(x)$ y $\alpha_2 \subset \tilde{\mathcal{W}}_f^c(y)$ tales que la curva $\alpha_1 * \alpha_2$ une x e y y un

punto $z \in \tilde{\mathcal{W}}_f^{ss}(x) \cap \tilde{\mathcal{W}}_f^c(y) \cap \alpha_1 * \alpha_2$. Como $z \in \tilde{\mathcal{W}}_f^{ss}(x) \cap \tilde{\mathcal{W}}_f^c(y)$ y f es CF tenemos que $H(y) \in \tilde{\mathcal{W}}_A^c(H(z)) = L_{H(z)}G^c$. Luego existe $g^c \in G^c$ tal que $H(y) = H(z)g^c$. Por otro lado $H(z) \in \tilde{\mathcal{W}}_A^s(H(x)) = L_{H(x)}G^s$, por lo que existe $g^s \in G^s$ tal que $H(z) = H(x)g^s$. Concluimos que $H(y) = H(x)g^s g^c \in L_{H(x)}G^{cs} = \tilde{\mathcal{W}}_A^{cs}(H(x))$ por ser G^{cs} un subgrupo.

Como el punto $y \in G$ es arbitrario obtenemos $H_f(\tilde{\mathcal{W}}_f^{cs}(x)) \subset \tilde{\mathcal{W}}_A^{cs}(H_f(x))$.

Nuevamente, como f es CF tenemos que tanto H_f como $\Pi^\sigma \circ H_f$ son inyectivas restringidas a hojas $\tilde{\mathcal{W}}_f^\sigma$. Es decir, f cumple la propiedad (I^σ) . El lema 4.7 nos dice que (I^σ) implica (S^σ) y obtenemos que f es σ -propio.

Para terminar la prueba, observamos que la sobreyectividad (S^σ) y la propiedad CF implican que $\tilde{\mathcal{W}}_A^{cs}(H_f(x)) \subset H_f(\tilde{\mathcal{W}}_f^{cs}(x))$. Concluimos que

$$H(\tilde{\mathcal{W}}_f^{cs}(x)) = \mathcal{W}_A^{cs}(H_f(x))$$

El caso centro-inestable es completamente análogo, por lo que obtenemos

$$H(\mathcal{W}_f^{cu}(x)) = \mathcal{W}_A^{cu}(H_f(x))$$

y de esto deducimos que f es SADC ya que H_f está a distancia finita de la identidad. \square

4.4. Preguntas por responder

El resultado principal de este trabajo dice que un difeomorfismo parcialmente hiperbólico f isotópico a un Anosov lineal A por un camino de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos es dinámicamente coherente siempre que el fibrado central E_A^c sea una subálgebra de Lie. Queda abierta la pregunta de si el recíproco también es cierto, es decir, si $f \in PH_A(M)$ es dinámicamente coherente entonces: ¿el fibrado central E_A^c es una subálgebra de Lie? Una respuesta afirmativa a esta pregunta terminaría de clasificar la coherencia dinámica de todos los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos en clases de isotopía de Anosov. Bastaría con chequear como se comporta el corchete de Lie de la parte lineal de f (una condición puramente algebraica) para determinar la coherencia dinámica de f .

Bibliografía

- [ABP] A. Artigue, J. Brum, and R. Potrie, Local product structure for expansive homeomorphisms, *Topology and its Applications*, 156 (2009), no.4, 674-685.
- [Br] M. Brin, On dynamical coherence, *Ergodic theory and dynamical systems*, vol.23 (2003), 395-401.
- [BBI] M. Brin, D. Burago and S. Ivanov, Dynamical coherence of partially hyperbolic diffeomorphisms of the 3-torus. *Journal of Modern Dynamics*, vol.3 (2009), 1-11.
- [CrPo] S. Crovissier and R. Potrie, Introduction to Partially Hyperbolic Dynamics, notes for a mini course for the School on Dynamical Systems ICTP, 2015.
- [DoC] M. P. do Carmo, Geometria Riemanniana, *Projecto Euclides IMPA* (2015).
- [FPS] T. Fisher, R. Potrie and M. Sambarino, Dynamical coherence of partially hyperbolic diffeomorphisms of tori isotopic to Anosov, *Math.Z* 278 (2014), 149-168.
- [Fr] J. Franks, Anosov diffeomorphisms, *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 14 (1970), 61-93.
- [Fr1] J. Franks, Anosov diffeomorphisms on tori *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 145 (1969), 117-124.
- [Gou] N. Gourmelon, Adapted metrics for dominated splittings, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 27 (2007), 1839-1849.
- [Ham] A. Hammerlindl, Leaf conjugacies in the torus, *Ergodic theory and dynamical systems* 33 (2013), 896-933.
- [HamPo] A. Hammerlindl and R. Potrie, Pointwise partial hyperbolicity in 3-dimensional nilmanifolds, *Journals of the London Math. Society* 89 (3),(2014), 853-875.

BIBLIOGRAFÍA

- [HamPo2] A. Hammerlindl and R. Potrie, Classification of partially hyperbolic diffeomorphisms in 3-manifolds with solvable fundamental group, *Journal of Topology* 8 (3), (2015), 842-870.
- [Hat] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, (2002).
- [HPS] M. Hirsch, C. Pugh and M. Shub, Invariant manifolds, *Springer Lecture Notes in Math.*, 583 (1977).
- [J] N. Jacobson, A note on automorphisms and derivations of Lie algebras, *Proc. Am. Math. Soc.* 6 (1955), 281-283.
- [K] A. W. Knap, Lie Groups Beyond an Introduction, *Progress in Mathematics* (2002).
- [Mal] A. Malcev, On a class of homogeneous spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.* 1 9 (1962), 276-307 (originally 39 (1951)).
- [Man] A. Manning, There are no new Anosov on tori, *Amer. Jour. of Math.* 96 (1974), 422-429.
- [Ne] S. Newhouse, On codimension one Anosov diffeomorphisms, *Amer. Jour. of Math.*, 92 (1970), 761-770.
- [Po] R. Potrie, Partial hyperbolicity and foliations in \mathbf{T}^3 , *Journal of Modern Dynamics* 9 (2015), 81-121.
- [PS1] C. Pugh and M. Shub, Stably ergodic dynamical systems and partial hyperbolicity, *J. Complexity*, 13(1) (1997), 125-179.
- [PS2] C. Pugh and M. Shub, Stable ergodicity and julienne quasiconformality. *J. Eur. Math. Soc.(JEMS)*, 2(1) (2000), 1-52.
- [RHRHU] M. A. Rodriguez Hertz, F. Rodriguez Hertz and R. Ures, A non dynamically coherence example in \mathbf{T}^3 , *Annals IHP (C): Analyse non-lineaire* 33 (4), (2016), 1023-1032.
- [SW] A.A. Sagle and R.E Walde, Introduction to Lie Groups and Lie Algebras, *Pure & Applied Mathematics* (1973).
- [Sa] M. Sambarino, Hiperbolicidad y Estabilidad, *Ediciones IVIC, Caracas* (2009), 134 pp.
- [Sa2] M. Sambarino, A (short) survey on dominated splitting. *Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc.* **656** (2016), 149-183.
- [Sm] S. Smale, Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the AMS* 73 (1967), 747-817.

BIBLIOGRAFÍA

- [Wa] F. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, *Springer* (1971).
- [W] A. Wilkinson, Stable ergodicity of the time-one map of a geodesic flow, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 18 (1998), 1545-1587.