

TESIS DE MAESTRÍA

**Minimalidad y diferenciabilidad en**  
 $\mathbb{T}^2$

Por: Alejandro Passeggi

Orientador: Dr. Martín Sambarino

Maestría en Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad de la República

Uruguay

# Índice general

<b>1. Introducción.</b>	<b>3</b>
1.1. Dinámica en $S^1$ .	3
1.2. Conjunto de rotación para $f \in \text{Hom}_*(\mathbb{T}^2)$ .	6
1.3. Regularidad y dinámica en $\mathbb{T}^2$ .	11
1.4. Teorema.	12
<b>2. El ejemplo de Mañé.</b>	<b>15</b>
2.1. Ejemplo.	15
2.2. Familia $\mathcal{M}$ de difeomorfismos en $\mathbb{T}^3$ .	17
2.2.1. Construcción de difeomorfismos en $\mathbb{T}^3$ .	17
2.2.2. Descomposición Dominada.	20
2.2.3. Minimalidad de la foliación inestable.	23
2.2.4. Semiconjugación de los difeomorfismos construidos con el sistema de Anosov modificado.	24
2.2.5. La familia $\mathcal{M}$ .	30
<b>3. Dinámicas minimales en <math>\mathbb{T}^2</math> a partir de elementos de <math>\mathcal{M}</math>.</b>	<b>31</b>
3.1. Construcción y minimalidad.	32
3.2. Semiconjugación con la traslación.	33
3.3. Propiedad Point-distal, non-distal. Un ejemplo de Mary Rees.	34
3.3.1. Intervalos semiestables.	35
3.4. Ergodicidad única.	38
3.5. Sobre la entropía topológica.	41
<b>4. Diferenciabilidad.</b>	<b>42</b>
4.1. Familia de Matrices hiperbólicas en $SL(3, \mathbb{Z})$ .	43
4.2. Construcción de la familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ .	44

4.3.	Diferenciabilidad de $E^{uu}$ a través del teorema de la sección $C^r$ . . . . .	45
4.3.1.	Teorema de la sección $C^r$ . . . . .	46
4.3.2.	Transformada del gráfico. . . . .	47
4.3.3.	Cálculo de la constante de Lipchitz, $l_\xi$ . . . . .	48
4.3.4.	Cálculo de $\tau_\xi$ . . . . .	49
4.3.5.	Diferenciabilidad $C^r$ con $r \in (0, 3)$ para $E^{uu}$ . . . . .	51
4.4.	Fin de la demostración del teorema 1.4.1. . . . .	52
<b>5.</b>	<b>Preguntas.</b>	<b>53</b>

# Capítulo 1

## Introducción.

En el siglo XIX H.Poincaré (1854–1912) establece un resultado sobre el estudio cualitativo de sistemas dinámicos en el círculo, a partir del cual se desarrolla la teoría que hoy conocemos como *acciones de  $\mathbb{Z}$  sobre  $S^1$* . Ver [P].

### 1.1. Dinámica en $S^1$ .

La idea es describir cualitativamente toda la dinámica dada por homeomorfismos  $f : S^1 \rightarrow S^1$  que preservan orientación. Al conjunto de tales homeomorfismos le llamamos  $Hom_+(S^1)$ .

**Teorema 1.1.1.** *Sea  $f \in Hom_+(S^1)$ , consideramos  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  levantamiento de  $f$  ( $f \circ \pi = \pi \circ F$ ), definimos:*

$$\rho(F) = \lim_n \frac{F^n(x) - x}{n} \quad (1.1)$$

*Se tiene entonces que  $\rho(F)$  siempre existe y es independientemente de  $x$ . Además si se considera  $F_1, F_2$  dos levantados de  $f$ , se tiene  $\rho(F_1) - \rho(F_2) \in \mathbb{Z}$*

Visto el último resultado, se puede definir para  $f \in Hom_+(S^1)$   $\rho(f) = \rho(F) \text{ mod } (\mathbb{Z})$ , donde  $F$  es algún levantado de  $f$ .

El concepto de número de rotación mide la velocidad promedio en el cual se mueve una partícula sobre  $S^1$ , en un movimiento cuyo tiempo 1 es dado por  $f$  (para observar esto, escribir el límite de la definición como una suma telescópica).

*Observación 1.1.1.*  $\rho(f)$  verifica las siguientes propiedades.

Si  $f$  y  $g$  son elementos semiconjugados de  $Hom_+(S^1)$ , entonces  $\rho(f) = \rho(g)$ .

$$\rho(f^{-1}) = -\rho(f).$$

$$\rho(f^n) = n\rho(f) \text{ mod}(\mathbb{Z}).$$

$\rho(f)$  varía continuamente al variar  $f$  según la topología  $C^0$ .

Siendo  $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  la rotación de ángulo  $\alpha$ , se tiene  $\rho(R_\alpha) = \alpha$

El siguiente teorema es conocido en dinámica como teorema de Poincaré, y es un paradigma en el la teoría de los sistemas dinámicos tal como se la conoce hoy.

En el mismo, dado  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  se logra describir cualitativamente su dinámica a partir del número de rotación  $\rho(f)$ .

**Teorema 1.1.2. Teorema de Poincaré.**

Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$ , entonces:

Si  $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $(p, q) = 1$  se tiene  $\Omega(f) = \text{Per}(f)$ . Además todo elemento  $x \in \text{Per}(f)$  tiene período  $q$ , y siendo  $[y, f(y)]_+$  la longitud del intervalo orientado positivamente se tiene  $\sum_{j=0}^{q-1} [f^{j+1}(x), f^j(x)]_+ = p$ .

Si  $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{Q}^c$  entonces

o bien  $\Omega(f) = S^1$  y en ese caso  $f$  es conjugado a la rotación  $R_\alpha$  (por lo tanto  $f$  es minimal).

o bien  $\Omega(f) = K \subset S^1$  conjunto de cantor cuyos gaps son intervalos errantes, y  $f$  es semiconjugado a  $R_\alpha$  mediante una semiconjugación inyectiva en  $K$  y constante sobre los gaps.

El caso  $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{Q}^c$  donde  $\Omega(f) = K$  es un conjunto de cantor, es una construcción posterior al teorema original de Poincaré debida a Bohl, ver [B].

Posteriormente Denjoy establece el siguiente teorema (ver [D]):

**Teorema 1.1.3. Teorema de Denjoy.**

Sea  $f \in \text{Hom}_+(S^1)$  tal que  $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{Q}^c$ . Si  $f$  es de clase  $C^2$ , entonces  $f$  es conjugado a  $R_\alpha$ .

Este resultado es también un paradigma en la teoría de sistemas dinámicos, ya que es el primer resultado en el cual se muestra que la diferenciabilidad del sistema influye en la dinámica del mismo.

Mas allá de lo impresionante del resultado de H. Poincaré, abstraer su idea y generalizarla para acciones de  $\mathbb{Z}$  en cualquier variedad, no surge de forma natural. Como se puede ver al estudiar en detalle el teorema de Poincaré, el resultado utiliza fuertemente la topología del círculo.

El toro bidimensional  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$  es, naturalmente, la variedad de dimensión 2 en la cual se han logrado ideas y obtenido resultados que reflejan el teorema de Poincaré.

Mas en general, hoy en día se conoce para variedades de curvatura no positiva resultados en la dirección de generalizar lo que sería el *número de rotación*, pero no se tienen aún consecuencias dinámicas directas de este concepto (salvo en  $\mathbb{T}^2$ , como se verá a continuación). Ver [L], [Bo].

En  $\mathbb{T}^2$ , se consideran las dinámicas dadas por homeomorfismo homotópicos a la identidad (  $f \in Hom_*(\mathbb{T}^2)$ ).

A través de distintos modelos de la física aparecieron sistemas del tipo  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$

$$f(x, y) = (x + \alpha, f_x(y))$$

A este tipo de sistemas se les llama sistemas cuasiperiódicos, y forman una familia de sistemas de la cual han surgido ejemplos muy interesantes, tanto en dinámica topológica como en teoría ergódica (ver [J-S], [F] y [H]).

Estos sistemas siempre tienen asociado el análogo al número de rotación, que en este caso será siempre un vector de  $\mathbb{R}^2$  ( $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ ) el cual surge del límite (ahora en el plano) que generaliza naturalmente el caso en el círculo.

Recientemente Tobias Jäger y Jaroslav Stark han conseguido resultados muy fuertes en la dirección del teorema de Poincaré para este tipo de sistemas. Esto se puede ver en [J-S].

De cualquier forma no todo sistema dinámico en  $\mathbb{T}^2$  es conjugado a un sistema cuasiperiódico (por ejemplo un sistema que deje fijo un único conjunto de la forma  $\{x\} \times S^1$ ), y por lo tanto sigue siendo necesaria una generalización del número de rotación para sistemas en  $\mathbb{T}^2$ .

Veamos a continuación dicha generalización.

## 1.2. Conjunto de rotación para $f \in Hom_*(\mathbb{T}^2)$ .

Sea  $f \in Hom_*(\mathbb{T}^2)$ , consideramos  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  levantamiento de  $f$ . A partir de dicho levantamiento daremos distintas definiciones de conjuntos en el plano,  $\rho_{puntual}(f)$ ,  $\rho_{med}(f)$ ,  $\rho_{erg}(f)$  y  $\rho(f)$ , que estarán relacionados entre si, y contendrán cierta información dinámica y ergódica.

Estableceremos el conjunto  $\rho(f)$  como el invariante dinámico que generaliza el número de rotación de sistemas en  $Hom_+(S^1)$ .

$\rho_{puntual}(F)$ : dado  $x \in \mathbb{R}^2$ , consideramos la sucesión cuyo término enésimo esta dado por  $\rho(F, x)_n = \frac{F^n(x) - x}{n}$ . Al conjunto de puntos de adherencia de esta sucesión (que es siempre no vacío, ya que  $\|F\| < K$ ) le llamamos  $\rho(F, x)$ , luego definimos:

$$\rho_{puntual}(F) = \bigcup_{x \in [0,1]^2} \rho(F, x) \quad (1.2)$$

Para los sistemas cuasiperiódicos se tiene  $\rho_{puntual}(F) = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ . Lo cual no es algo general, basta considerar  $f \in Hom_*(\mathbb{T}^2)$  con dos círculos  $\{x_1\} \times S^1$  y  $\{x_2\} \times S^1$  que rotan con distintos ángulos y se tendrá dos puntos del eje  $Oy$  en  $\rho_{puntual}(f)$ .

$\rho_{med}(F)$ : Consideramos  $\mathcal{M}(f)$  conjunto de medidas de probabilidad  $f$ -invariantes. Recordamos que tal conjunto es convexo y compacto respecto a la topología débil.

Siendo  $F$  levantado de  $f$  podemos definir para  $x \in \mathbb{T}^2$   $\varphi(x) = F(\bar{x}) - \bar{x}$ , con  $\bar{x}$  algún levantado de  $x$ . Obtenemos así  $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  función continua.

Para  $\mu \in \mathcal{M}(f)$  definimos  $\rho(F, \mu) = \int_{\mathbb{T}^2} \varphi d\mu$ . Luego definimos

$$\rho_{med}(F) = \{\rho(F, \mu) : \mu \in \mathcal{M}(f)\} \quad (1.3)$$

Tal conjunto se puede pensar como la imagen por una función continua (respecto de la topología débil) de un compacto convexo, que además preserva las combinaciones convexas. Por lo tanto se tiene la siguiente propiedad:  $\rho_{med}(F)$  es un compacto, convexo de  $\mathbb{R}^2$ .

Por otra parte, promediando medidas  $\delta$ -dirac sobre subsucesiones de órbitas, se tiene a través de la compacidad de  $\mathcal{M}(f)$ :

$$\rho_{puntual}(F) \subset \rho_{med}(F)$$

$\rho_{erg}(F)$ : Es el subconjunto en  $\rho_{med}(F)$  que surge de considerar solamente las medidas ergódicas.

Además en virtud del teorema de descomposición ergódica de medidas invariantes (ver [M]), se tiene que  $ext(\rho_{med}(F)) \subset \rho_{erg}(F)$  (donde en general  $ext(A)$  indica el conjunto de puntos extremales de  $A$ ). Por otra parte en virtud del teorema de Birkoff se tiene que  $\rho_{erg}(F) \subset \rho_{puntual}(F)$ .

$\rho(F)$ : En [M-Z,1], M. Misiurewicz y K. Ziemian establecen la definición de *conjunto de rotación de  $f$* .

Sea  $F$  un levantado de  $f \in Hom_*(\mathbb{T}^2)$ . Dada una sucesión de puntos  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $[0, 1]^2$  definimos  $\rho(F, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}})$  como el conjunto de puntos de adherencia de la sucesión dada por el término enésimo  $\frac{F^n(x_n) - x_n}{n}$  (que nos vacío ya que la norma del levantado es acotada). Luego, definimos

$$\rho(F) = \bigcup_{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]^2} \rho(F, \{x_n\}) \quad (1.4)$$

Considerando sucesiones de medidas adecuadas en  $\mathcal{M}(f)$  se puede probar que  $\rho(F) \subset \rho_{med}(F)$ , por otra parte  $ext(\rho_{med}(F)) \subset \rho_{puntual}(F) \subset \rho(F)$ . Tenemos entonces:

$$\rho_{med}(F) = \rho(F)$$

Las siguientes propiedades muestran el carácter dinámico de dicho conjunto.

*Observación 1.2.1.*

$$\rho(F^n) = n\rho(F).$$

$$\rho(F^{-1}) = -\rho(F).$$

Siendo  $f, g \in Hom_*(\mathbb{T}^2)$  donde  $f$  es semiconjugado a  $g$  por  $h$  función homotópica a la identidad, tenemos que  $\rho(F) = \rho(G)$  para  $F$  y  $G$  ciertos levantados de  $f, g$ .

Para  $T_u : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  traslación de vector  $u$  se tiene  $\rho(T_u) = u$ .



A partir de la definición de conjunto de rotación, se comenzó a obtener resultados dinámicos (que describiremos mas adelante). Se obtuvieron resultados en los cuales es importante la geometría del convexo y compacto  $\rho(f)$ . Esto hizo que la pregunta *qué tipo de convexos pueden ser conjuntos de rotación?* se hiciera relevante.

Sobre tal pregunta, se obtuvieron ejemplos cuyos conjuntos de rotación son (ver [Be]):

- 1 Puntos: cualquiera de  $\mathbb{R}^2$ .
- 2 Segmentos de dos tipos: primero, los segmentos de pendiente racional que contienen algún elemento racional; y segundo, los segmentos de pendiente irracional que tienen algún extremo racional.
- 3 Polígonos: todo polígono cuyos vértices (finitos o infinitos) tienen coordenadas racionales.

Misiurewicz y Franks conjeturan además que no hay mas casos sin puntos interiores que los 1 y 2. Además dan una prueba de dicha conjetura para homeomorfismos que son tiempo uno de un flujo.

Para el caso de conjuntos con puntos interiores, no se sabe si otros tipos de polígonos o inclusive discos pueden ser realizados.

A continuación describimos resultados que dan información dinámica a partir del conjunto de rotación. Sin este tipo de resultados, no sería satisfactoria la definición de  $\rho(f)$  en vista del teorema 1.1.2.

### $\rho(f)$ con puntos interiores.

J. Franks en [Fr] muestra que si un vector de coordenadas racionales  $(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}) \in \rho_{erg}(F) \subset \rho(F)$  entonces existe  $x$  para el cual  $F^q(x) = x + m$ , con  $m \in \mathbb{Z}^2$ .

Esto último da la existencia de un punto periódico  $\pi(x)$  de  $f$ , donde  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  es la proyección canónica. Además los racionales  $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}$  dan información de la periodicidad de las coordenadas de  $\pi(x)$  en  $S^1 \times S^1$ , como se vio en el teorema 1.1.2.

Por su parte M. Misiurewicz y K. Ziemian en [M-Z,2] muestran que si  $v \in \text{int}(\rho(F))$  entonces existe un compacto  $C_v$  en  $[0, 1]^2$  tal que  $\rho(F, x) = v$  para todo  $x \in C_v$ . Y por lo tanto  $v \in \rho_{mes}$ .

Juntando tales resultados se obtiene que todo vector de coordenadas racionales  $(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}) \in \text{int}(\rho(F)) \cup \text{ext}(\rho(F))$  tiene al menos un punto periódico de  $f$  asociado, donde  $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}$  dan información sobre el período de las coordenadas del mismo, según se vio en 1.1.2. Este resultado es también demostrado de forma directa por J. Franks en [Fr,2].

J. Llibre y R.S. Mackay prueban en [L-M], que si  $\text{int}(\rho(F)) \neq \emptyset$  entonces la entropía topológica de  $f$  es positiva. Propiedad que es natural a la vista de los resultados anteriores.

Prueban además, que dado  $C \subset \rho(F)$  compacto y conexo existe  $x$  tal que  $\rho(F, x) = C$ .

### $\rho(f)$ sin puntos interiores.

Consideramos primero el caso en que  $\rho(f) = I$  segmento no trivial contenido en  $\mathbb{R}^2$ .

Para este caso como vimos, se conjetura que  $I$  tiene ciertas restricciones.

El resultado sobre la dinámica conocido para este tipo de homeomorfismos, asegura que si el segmento tiene pendiente irracional y contiene un vector racional  $(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2})$ , entonces  $f$  tiene al menos un punto periódico asociado al mismo, (de la misma forma que en el caso de dimensión 2) ([Be]).

En el caso que  $\rho(F) = \{v\}$ , tenemos naturalmente  $\rho(F) = \rho_{erg}(F) = \{v\}$ .

Según el enfoque que hemos tomado, este caso es interesante ya que es fácil establecer enunciados análogos al del teorema 1.1.2. De aquí en mas, nos centraremos en este tipo de sistemas.

Como vimos, si  $v$  tiene coordenadas racionales tendremos puntos periódicos para  $f$  según se estableció anteriormente, lo cual da un fiel reflejo del teorema de Poincaré.

Entonces, para tener en este caso un reflejo del teorema 1.1.2, uno desearía que en el caso  $\rho(F) = \{v\}, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$  se llegara a una semiconjugación entre  $f$  y la traslación  $T_v$ . Esto último no es cierto en general, ni siquiera en el caso cuasiperiódico; de echo

el conocido ejemplo de Fustenberg de un sistema minimal no únicamente ergódico, es cuasiperiódico pero no semiconjugado a la traslación (ver [J-S]).

De cualquier forma, para los sistemas quasi-periódicos T. Jäger y J. Stark muestran que si se verifica una propiedad extra (que llaman  $\rho$ -bounded) entonces sí existirá tal semiconjugación. Además, dicha propiedad se cumple necesariamente cuando un sistema es semiconjugado a la traslación.

El mismo tipo de resultados obtiene T. Jäger en [J] para sistemas conservativos, que verifican cierta propiedad la cual generaliza la anterior (bounded mean-motion).

Luego de comentar el caso en que  $\rho(f)$  es un segmento, volveremos sobre la situación  $\rho(F) = \{v\}, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ .

De aquí en mas centraremos esta introducción, en la descripción del caso  $\rho(F) = \{v\}, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ . Además consideraremos el caso en que las coordenadas de  $v$  son racionalmente independientes.

Es claro que para este tipo de sistemas no pueden existir órbitas periódicas. Por lo tanto, al igual que en el círculo, surge la pregunta de si son estos sistemas siempre minimales.

La respuesta, como en el círculo, es negativa. Contraejemplos en este sentido se pueden hacer considerando productos de homomorfismos en el círculo con intervalos errantes, los cuales presentaran abiertos errantes.

Otra pregunta que surge a la luz de nuestro enfoque, es si los sistemas minimales con vector de rotación  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$  serán conjugados, o por lo menos semiconjugados, a la traslación  $T_v$ . (Recordamos que en  $S^1$  son siempre conjugados a alguna rotación).

En este sentido se conocen respuestas negativas. Ya vimos que el ejemplo de Fustenberg no es ni siquiera semiconjugado a alguna traslación, en [R] Mary Rees construye un sistema minimal, point-distal non-distal (ver capítulo 3) y por lo tanto no conjugado a la traslación. En [R,2] la misma autora construye un sistema minimal con entropía positiva y por lo tanto no conjugable a la traslación.

De cualquier forma un hecho relevante para lo que se construirá en esta tesis, es que tales ejemplos son de clase  $C^0$ , y no se conoce nada en este sentido con mayor regularidad.

### 1.3. Regularidad y dinámica en $\mathbb{T}^2$ .

Para aquellos sistemas tales que  $\rho(F) = \{v\}, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$  con coordenadas racionalmente independientes, siguiendo el tipo de resultado logrado en 1.1.3, se formula la siguiente pregunta:

*Existe  $r_T > 0$  tal que si  $f$  de clase  $C^r$  con  $r > r_T$ , se tiene  $f$  conjugado a la traslación irracional  $T_v$ ?*

Esta pregunta general, encuentra respuestas parciales en resultados que dan condiciones suficientes para que un homeomorfismo sea conjugado a alguna traslación minimal.

Con hipótesis adicionales del tipo proximidad  $C^0$  a la traslación y condiciones diofantinas sobre el vector de rotación se obtiene que regularidad  $C^r$  con  $r \geq 3$  del sistema implicaría conjugación con la traslación. Este resultado se le acredita a Michael Herman y no tiene una referencia específica, pero es anunciado en varios lugares. (Ver [Mc]).

Otras referencias sobre este tipo de teoremas se pueden encontrar en [Mc], donde McSweggen conjetura que  $r_T = 3$ .

En dicho artículo McSweggen muestra que dado  $r \in (0, 3)$  existe  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  de clase  $C^r$  presentando discos errantes, que es además semiconjugado a una traslación minimal.

Con todas estas evidencias, es razonable suponer que  $r_T = 3$ .

## 1.4. Teorema.

Estableceremos a continuación el enunciado principal de esta tesis, para ello daremos antes la siguiente definición:

**Definición 1.4.1.** Sea  $\mathcal{X}$  un espacio métrico compacto  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  un homeomorfismo.

Decimos que  $f$  es distal si para todo par de puntos  $x, y \in \mathcal{X}$  existe  $r > 0$  tal que se tiene  $d(f^n(x), f^n(y)) > r$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . De lo contrario diremos que  $f$  es non-distal.

Decimos que  $f$  es point-distal si existe  $x \in \mathcal{X}$  tal que para todo  $y \in \mathcal{X}$  existe  $r > 0$  que verifica  $d(f^n(y), f^n(x)) > r$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , y además el conjunto  $O(f, x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es denso en  $\mathcal{X}$ .

**Teorema 1.4.1. Teorema principal.**

*Dado  $r \in (0, 3)$  existe  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  homeomorfismo homotópico a la identidad de clase  $C^r$  tal que:*

- 1  *$f$  es minimal en  $\mathbb{T}^2$*
- 2  *$f$  es semiconjugado a una traslación  $T$  minimal, a través de  $h$  función homotópica a la identidad.*
- 3  *$h$  no es inyectiva;  $h^{-1}(y)$  es o bien un punto, o bien un segmento.*
- 4  *$f$  es del tipo point-distal, non-distal.*
- 5  *$f$  es únicamente ergódico.*

Con lo cual, si formuláramos nuevamente la pregunta sobre la regularidad necesaria para obtener un sistema conjugado a la traslación, y además consideráramos solo sistemas minimales (si se quiere condiciones extras, como se enuncia), necesariamente de existir tal  $r_T$  debería ser  $r_T \geq 3$ . Como vimos, en el círculo se tiene que un homeomorfismo minimal es automáticamente conjugado a la correspondiente rotación.

En tal sentido este teorema, es un resultado nuevo en la teoría que se estructura en dirección de la pregunta planteada.

Como ejemplo minimal del punto de vista simplemente dinámico, creemos que este resultado pueda estar relacionado con la construcción de Mery Rees en [R], que S. Crovisier generaliza en [B-C-L] a partir del método que llama *Denjoy-Rees*. Es importante el hecho de que este método no permite asegurar mayor regularidad que  $C^0$ .

### Construcción.

La construcción de los homeomorfismos del teorema está inspirada en la construcción hecha por *McSweggen* en [Mc]. Como se dijo, en este artículo construye una familia infinita de difeomorfismos que alcanzan regularidad  $C^r$  con  $r \in (0, 3)$  y presentan un disco topológico errante  $D$ , cuya órbita es densa ( $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(D)$  es denso en  $\mathbb{T}^2$ ). Además dichos difeomorfismos son semiconjugados a una traslación minimal.

Para dicha construcción utiliza la foliación inestable de un sistema  $g$  en  $\mathbb{T}^3 = \frac{\mathbb{R}^3}{\mathbb{Z}^3}$ , que construye a partir de la bifurcación de Hopf sobre un sistema Anosov. Esto es, a un sistema Anosov asociado a una matriz en  $Sl(3, \mathbb{Z})$  con valores propios  $\lambda_s \in \mathbb{C}$  y  $\lambda_u \in \mathbb{R}$ , hacer una modificación en torno al origen, de forma que  $\pi(0)$  sea ahora una fuente ( $\pi$  es la proyección canónica de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{T}^3$ ).

Al hacer esto cuidando ciertas propiedades de la modificación se construye, a través del *teorema de la sección  $C^r$*  (ver [H-P-S]), foliaciones inestables para  $g$  con diferenciabilidad  $C^r$  para  $r \in (0, 3)$ , donde la proximidad de  $r$  a 3 depende solo de cierta constante asociada a la modificación del Anosov y utiliza fuertemente el único valor complejo contractivo.

Siendo  $\mathbb{T}^2 = \pi(X \circ Y)$  ( $X \circ Y$  plano dado por los ejes coordenados  $x$  e  $y$ ) toro bidimensional en  $\mathbb{T}^3$ , se toma la holonomía de dicha foliación sobre  $\mathbb{T}^2$  y se obtiene un homeomorfismo  $f$  con la misma regularidad que la foliación.

Los ejemplos que nosotros construimos siguen la construcción hecha por McSweggen, pero surge de considerar sistemas de Anosov lineales asociados a matrices cuyos valores propios cumplen  $0 < \lambda_s < \lambda_c < 1 < \lambda_u$ . Y a estos sistemas hacerles una modificación introducida por R. Mañé en [M,2] donde  $\pi(0)$  pasa a tener dimensión inestable 2.

Nuevamente si se tiene cuidado, se obtendrá una foliación inestable a partir de cuya holonomía se pueden definir homeomorfismos  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ .

La minimalidad de esta foliación, no es algo que surge del trabajo de Mañé y nosotros utilizamos técnicas de E.Pujals y M. Sambarino presentadas en [P-S], para probar esa

propiedad en ciertos casos.

Para la diferenciabilidad tenemos una complicación extra, y es que tenemos dos valores propios contractivos distintos  $\lambda_s, \lambda_c$ . Para superar esta dificultad, se tuvo una idea natural que fue construir una familia de matrices  $\mathcal{I} = \{B_a : a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, B_a \in Sl(3, \mathbb{Z})\}$  tal que las raíces contractivas  $\lambda_s, \lambda_c$  tiendan a cero cuando  $a$  tiende a infinito, y la diferencia  $\lambda_c - \lambda_s$  tienda a cero con orden de infinitésimo mayor o igual al de  $\lambda_s$ . Esto último surge de analizar las desigualdades requeridas por el teorema de la sección  $C^r$ .

Tanto para la construcción de estos ejemplos como para la demostración de cada propiedad, se utiliza globalmente una idea que es inversa de otra, la cual aportó relevancia al estudio de los sistemas dinámicos discretos:

Estudiando las propiedades del sistema en  $\mathbb{T}^3$ , de su foliación inestable en particular, obtenemos las propiedades del mapa de retorno el cual es nuestro objeto de estudio.

Tales foliaciones fueron estudiadas bajo el enfoque de la teoría de sistemas dinámicos diferenciables (donde importa la topología  $C^1$  en el espacio de difeomorfismos) como se puede apreciar en [P-S], [PR], [B-D-V] entre otros trabajos.

Esto deja abierto un ida y vuelta entre la teoría de la dinámica diferenciable y la teoría de sistemas dinámicos homotópicos a la identidad en  $\mathbb{T}^2$ , del cual en este caso nos beneficiamos con una dirección del mismo.

# Capítulo 2

## El ejemplo de Mañé.

### 2.1. Ejemplo.

En este capítulo expondremos la construcción de difeomorfismos en  $\mathbb{T}^3$  conocidos como *derivados de Anosov de Mañé*. Historicamente esta construcción aparece en un trabajo debido a R. Mañé ([M,2]), al estudiar difeomorfismos robustamente transitivos (difeomorfismos contenidos en un  $C^1$ -entorno de difeomorfismos transitivos, ver [PR]).

En dicho trabajo R. Mañé presenta un ejemplo que es un difeomorfismo en  $\mathbb{T}^3$ , robustamente transitivo pero no Anosov. La construcción del mismo surge de modificar localmente un sistema Anosov, dado por la matriz  $B \in SI(3, \mathbb{Z})$  con valores propios  $0 < \lambda_s < \lambda_c < 1 < \lambda_u$ .

Dicha modificación tiene como objeto crear un punto fijo hiperbólico con dimensión inestable 2, que convive con puntos de dimensión inestable 1 (ver figura 2.1). La coexistencia de órbitas hiperbólicas con diferente índice impide que este nuevo sistema sea del tipo Anosov. Luego, en este artículo, Mañé prueba que el sistema construido es robustamente transitivo.

Más tarde E. Pujals y M. Sambarino abstraen una propiedad que presenta este ejemplo y que en general implica la transitividad robusta (ver [P-S]), la cual se basa en la existencia de cierta foliación inestable minimal para el sistema.

Para la construcción de los homeomorfismos en  $\mathbb{T}^2$  anunciados en el teorema principal de esta tesis, 1.4.1, la clave es la existencia de dicha foliación.

Además para los *derivados de Anosov de Mañé* se tendrá especial cuidado en la modificación del sistema Anosov, ya que se busca obtener la mayor diferenciabilidad posible en la foliación inestable, lo cual implicará mayor diferenciabilidad en los homeomorfismos



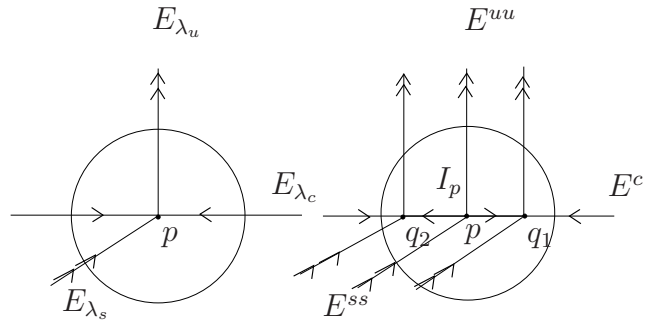


Figura 2.1: Modificación.

de  $\mathbb{T}^2$  que construiremos.

## 2.2. Familia $\mathcal{M}$ de difeomorfismos en $\mathbb{T}^3$ .

En esta sección haremos una construcción general de difeomorfismos con las propiedades del ejemplo de Mañé.

La propiedad *robustamente transitivo*, se verá indirectamente mostrando que la foliación inestable (aquella que integra el fibrado  $E^{uu}$ ) de los difeomorfismos construidos es minimal. Esto prueba según se puede ver en [P-S], que el sistema es robustamente transitivo.

### 2.2.1. Construcción de difeomorfismos en $\mathbb{T}^3$

Consideramos  $B \in Sl(3, \mathbb{Z})$  con valores propios  $0 < \lambda_s < \lambda_c < 1 < \lambda_u$ , espacios propios  $E_{\lambda_s}, E_{\lambda_c}$  y  $E_{\lambda_u}$  y  $\{e_{\lambda_s}, e_{\lambda_c}, e_{\lambda_u}\}$  base de vectores propios con norma 1.

De aquí en mas siempre que se considere una matriz llamada por  $B$ , se tendrán dichas propiedades.

Sea  $\tilde{B}$  el sistema Anosov en  $\mathbb{T}^3$  asociado a  $B$ .

Siendo  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3 = \frac{\mathbb{R}^3}{\mathbb{Z}^3}$  la proyección canónica, notamos por  $p = \pi(0)$ .

Para cada  $k$ ,  $0 < k < \lambda_s$ , construimos  $g : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  haciendo a  $\tilde{B}$  una modificación local en  $B(p, \frac{1}{2})$ , tal que siendo  $(x, y, z)$  las coordenadas de  $\xi \in B(p, \frac{1}{2})$  en la base  $\{e_{\lambda_s}, e_{\lambda_c}, e_{\lambda_u}\}$  se tiene:

$$g(\xi) = (\lambda_s x, \lambda_c y, \lambda_u z) + Z(z) \beta_k(r)(x, y, 0)$$

Donde tenemos:

$r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $r(x) = \| P_{E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c}}(x) \|$  ( $P_{E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c}}$  es la proyección ortogonal sobre  $E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c}$ ).

$Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función chichón de clase  $C^\infty$  con soporte en  $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$  y  $Z(0) = 1$ . Tendremos en general  $|Z'(z)| < C$ .

$\beta_k : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  es alguna de las funciones que surge del siguiente lema:

**Lema 2.2.1.** *Para todo  $k > 0$  existe una función  $\beta_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:*

$$1) \beta_k \text{ es } C^\infty, \text{ decreciente y además } -k \leq \beta'(r)r \leq 0.$$

2 El soporte de  $\beta_k$  esta dado por  $[-R_k, R_k]$  con  $R_k$  siempre menor que  $k$ , y que se puede considerar arbitrariamente chico independientemente de  $k$ . Además  $R_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow 0$ .

3  $\lambda_s + \beta_k(0) < 1 < \lambda_c + \beta_k(0) < 1 + k$ .

4  $\beta_k \circ r$  es  $C^\infty$ .

*Demostración.* Consideramos la ecuación diferencial dada por  $\tilde{\beta}'(r)r = -k$ , de ahí surgen las soluciones  $\tilde{\beta}(r) = -k(Lg(r) + b)$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ .

Para tal solución  $\tilde{\beta}(\varepsilon) = -k(lg(\varepsilon) + b)$ , por su parte la raíz de  $\tilde{\beta}$  se da en  $r_0 = e^{-b}$ .

Sea  $\beta_k$  como en la figura 2.2,  $\beta_k(r) = \tilde{\beta}(r)$  para  $r \in [\varepsilon_1, r_0 - \varepsilon_2]$ .

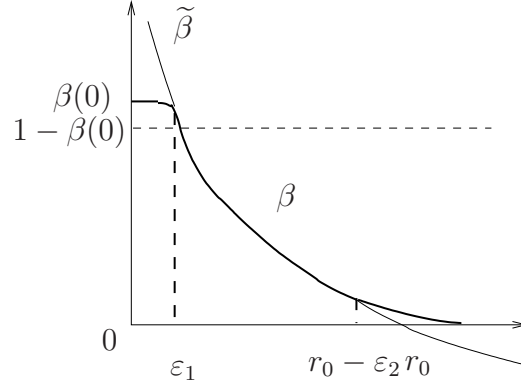


Figura 2.2: Modificación.

Se puede ver que para conseguir soporte chico, tenemos que considerar  $r_0$  arbitrariamente chico lo cual se puede hacer independientemente de  $k$ , tomando  $b$  grande. Por su parte podemos considerar  $\varepsilon_1$  de forma que  $\tilde{\beta}(\varepsilon_1)$  valga arbitrariamente cerca de  $1 - \lambda_c$ , y a su vez sea mayor que este valor.

□

Pediremos en general que  $Z(z) \cdot \beta_k(r)$  se anule fuera del conjunto  $B(p, \frac{1}{6})$ .

Vemos ahora que dada la matriz  $B$ , si consideramos la constante  $k$  de 2.2.1 suficientemente chica, entonces obtenemos que  $g$  es un difeomorfismo.

Para esto basta calcular  $dg_\xi$  y ver que para  $k$  suficientemente chico es una biyección independientemente de  $\xi \in \mathbb{T}^3$ , la inyectividad y sobreyectividad de la función  $g$  surge de la definición.

Si  $\xi \in \mathbb{T}^3 \setminus B(\pi(0), \frac{1}{2})$ , entonces  $dg_\xi$  esta dado en la base  $\{e_{\lambda_s}, e_{\lambda_c}, e_{\lambda_u}\}$  por la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_s & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_u \end{pmatrix}$$

donde  $(x, y, z)$  son las coordenadas de  $\xi$  en  $\{e_{\lambda_s}, e_{\lambda_c}, e_{\lambda_u}\}$ .

Si  $\xi \in B(\pi(0), \frac{1}{2})$ , tenemos que  $dg_\xi$  esta dado en la base  $\{e_{\lambda_s}, e_{\lambda_c}, e_{\lambda_u}\}$  por la matriz.

$$\begin{pmatrix} \lambda_s + Z(z)(\beta(r) + \beta'(r)\frac{x^2}{r}) & Z(z)\beta'(r)\frac{xy}{r} & Z'(z)\beta(r)x \\ Z(z)\beta'(r)\frac{xy}{r} & \lambda_c + Z(z)(\beta(r) + \beta'(r)\frac{y^2}{r}) & Z'(z)\beta(r)y \\ 0 & 0 & \lambda_u \end{pmatrix}$$

donde nuevamente  $(x, y, z)$  son las coordenadas de  $\xi$  en  $\{e_{\lambda_s}, e_{\lambda_c}, e_{\lambda_u}\}$ .

Hacemos a continuación una observación, que será clave para determinar que  $g$  sea un difeomorfismo y para las construcciones de los fibrados invariantes de  $g$ :

*Observación 2.2.1.* Fijada la matriz  $B$  se tiene se tiene para todo  $k$  positivo, que

$\max_{i,j \in \{1,2,3\}} \{| [dg_\xi - A_k(\xi)]_{(ij)} | \} < k$ , donde  $A_k(\xi)$  esta dada en la base  $\{e_{\lambda_s}, e_{\lambda_c}, e_{\lambda_u}\}$  por:

$$\begin{pmatrix} \lambda_s & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_u \end{pmatrix}$$

si  $\xi \in B(\pi(0), \frac{1}{2})^c$

$$\begin{pmatrix} \lambda_s + Z(z)\beta_k(r) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_c + Z(z)\beta_k(r) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_u \end{pmatrix}$$

si  $\xi \in B(\pi(0), \frac{1}{2})$

Donde  $(x, y, z)$  son las coordenadas de  $\xi$  en  $\{e_{\lambda_s}, e_{\lambda_c}, e_{\lambda_u}\}$ .

*Demostración.* Para demostrar la observación basta considerar las siguientes estimaciones (que se pueden ver haciendo un cambio a coordenadas polares):

$$|\beta'_k(r)\frac{x^2}{r}| < k$$

$$|\beta'_k(r)\frac{y^2}{r}| < k$$

$$|\beta'_k(r)\frac{xy}{r}| < Ck$$

$$|Z'(z)\beta_k(r)x| < Ck$$

$$|Z'(z)\beta_k(r)y| < Ck$$

□

A partir de esta observación se tiene que  $|\det(dg_\xi) - \det(A_k(\xi))| < \tilde{C}.k$  donde  $C > 0$  es una constante, que no depende de  $k$ . Luego siendo que  $\det(A_k(\xi)) > \lambda_s\lambda_c\lambda_u$  independientemente de  $k$  y  $\xi$ , tenemos que todo  $k$  suficientemente chico  $\det(dg_\xi) > 0$  y por lo tanto  $g$  es un difeomorfismo.

### 2.2.2. Descomposición Dominada.

Veamos en primera instancia que fijada la matriz  $B$  si la constante  $k$  (que define la modificación  $g$  del sistema Anosov) es suficientemente chica, entonces se tiene una descomposición invariante para  $dg$  dada por  $T\mathbb{T}^3 = E^{ss} \oplus E^c \oplus E^{uu}$  con las siguientes propiedades:

cuando  $k$  tiende a cero, cada uno de dichos fibrados tienden uniformemente a los canónicos para  $\tilde{B}$ , es decir a  $E_{\lambda_s}$ ,  $E_{\lambda_c}$  y  $E_{\lambda_u}$ .

$$E^{ss} \oplus E^c = E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c}.$$

**Teorema 2.2.2.** *Dada la matriz  $B$ , existe  $b_1 > 0$  tal que para todo  $k < b_1$  se tiene para  $g$   $T\mathbb{T}^3 = E^{ss} \oplus E^c \oplus E^{uu}$ , descomposición en fibrados unidimensionales invariantes para  $dg$ .*

*Además dichos fibrados convergen uniformemente a  $E_{\lambda_s}$ ,  $E_{\lambda_c}$  y  $E_{\lambda_u}$  cuando  $k$  tiende a cero, y se cumple  $E^{ss} \oplus E^c = E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c}$ .*

*Demostración.* Para probar este resultado, consideramos  $C_s(\varepsilon) \subset E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c}$ ,  $C_c(\varepsilon) \subset E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c}$  y  $C_u(\varepsilon)$  conos de dimensión uno, próximos a  $E_{\lambda_s}$ ,  $E_{\lambda_c}$  y  $E_{\lambda_u}$  respectivamente. Hay que probar que para  $k$  suficientemente chico cada uno de ellos es o bien  $dg$ -invariante, o bien  $(dg)^{-1}$ -invariante.

Tal afirmación surge de la observación 3.4, ya que podemos considerar  $\delta > 0$  con  $0 < \delta < \varepsilon$  tal que  $A_k(\xi)(C^u(\varepsilon)) \subset \text{int}(C^u(\delta))$ ,  $A_k(\xi)(C^c(\varepsilon)) \subset \text{int}(C^c(\delta))$  para todo  $k$ . Por su parte  $A_k(\xi)^{-1}(C^s(\varepsilon)) \subset \text{int}(C^s(\delta))$ , cuando  $k$  es suficientemente chico podemos.

Luego se tiene la misma propiedad de invariancia para aquellos sistemas  $g$  que surgen de modificaciones indexadas en  $k$ , con  $k$  suficientemente chico.

□

Supondremos de aquí en mas que para  $k < b_1$  los fibrados invariantes para  $dg$  están en conos tales que solo contienen una de las direcciones  $E_{\lambda_s}$ ,  $E_{\lambda_c}$  y  $E_{\lambda_u}$ , y además estos conos tendrán una apertura menor a 45 grados.

Ver figura 2.3.

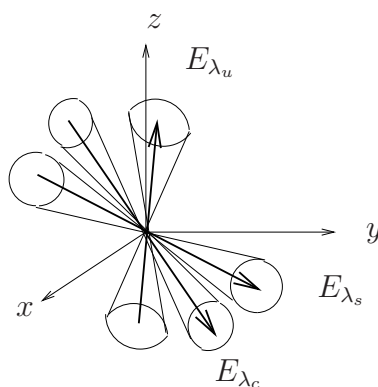


Figura 2.3: Conos.

Para aquellos difeomorfismos de  $\mathbb{T}^3$  construidos a partir de una matriz  $B$  cuya modificación esté dada por  $k < b_1$  (ver el teorema anterior), definimos para  $\xi \in \mathbb{T}^3$ :

$$\lambda_{ss}(g)(\xi) = \| dg_\xi |_{E^{ss}} \|, \lambda_{ss}(g) = \max_{\xi \in \mathbb{T}^3} \{ \lambda_{ss}(g)(\xi) \}.$$

$$\lambda_c(g)(\xi) = \| dg_\xi |_{E^c} \|, \lambda_c(g) = \max_{\xi \in \mathbb{T}^3} \{ \lambda_c(g)(\xi) \}.$$

$$\lambda_{uu}(g)(\xi) = \| dg_\xi |_{E^{uu}} \|, \lambda_{uu}(g) = \min_{\xi \in \mathbb{T}^3} \{ \lambda_{uu}(g)(\xi) \}.$$

**Teorema 2.2.3.** *Fijada la matriz  $B$  existe  $b_2 < b_1$  tal que para todo  $k < b_2$  se tiene:*

$$1 \quad 0 < \lambda_{ss}(g)(\xi) < \lambda_c(g)(\xi) < \lambda_{uu}(g)(\xi) \text{ para todo } \xi \in \mathbb{T}^3.$$

$$2 \quad \lambda_{ss}(g) < \lambda_s + \beta(0) + \varepsilon_s(k) < 1, \text{ donde } \lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_s(k) = 0.$$

$$3 \quad \lambda_c(g) < \lambda_c + \beta(0) + \varepsilon_c(k), \text{ donde } \lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_c(k) = 0$$

4  $\lambda_{uu}(g) > 1$  y  $\lambda_{uu}(g)$  tiende a  $\lambda_u$  cuando  $k \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Nuevamente este resultado surge de la observación 3.4, teniendo en cuenta lo echo en el teorema 2.2.2. □

Por lo tanto al considerar un ejemplo  $g : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  construido a partir de la matriz  $B$  y el parámetro  $k < b_2$  (ver 2.2.3), estamos en condiciones de afirmar que existe una descomposición  $T\mathbb{T}^3 = E^{ss} \oplus E^c \oplus E^{uu}$  del tipo parcialmente hiperbólica para  $g$  (Ver [H-P-S]). En particular se tiene, que dichos fibrados son por lo menos  $C^0$ .

Además aplicando los resultados clásicos de Hirsch, Pugh y Shub ([H-P-S]), tenemos foliaciones  $g$ -invariantes de dimensión uno y clase  $C^1$ ,  $\mathcal{F}^{ss}(g)$  foliación estable, y  $\mathcal{F}^{uu}(g)$  foliación inestable, que integran los fibrados  $E^{ss}$  y  $E^{uu}$  respectivamente.

Para el fibrado  $E^c$  se tienen las respectivas curvas integrables, pero a priori no tendríamos una foliación ya que no se puede asegurar la integrabilidad única del fibrado. De cualquier forma, apoyándose en la existencia de las otras dos foliaciones y de la proximidad de  $E^c$  a  $E_{\lambda_c}$ , se puede argumentar la integrabilidad única de  $E^c$  (ver [Br]). Tenemos entonces la foliación central  $\mathcal{F}^c(g)$  que integra  $E^c$ .

También consideramos  $\mathcal{F}^{cs}(g)$  foliación de dimensión 2,  $g$ -invariante, cuyas hojas están dadas por los conjuntos  $\pi(x + E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c})$  con  $x \in \mathbb{R}^3$ . Las hojas de dicha foliación, contienen en cada punto las hojas de  $\mathcal{F}^{ss}(g)$  y  $\mathcal{F}^c(g)$ .

Por último los resultados en [H-P-S] nos dan la existencia de la foliación  $\mathcal{F}^{cu}(g)$  cuyas hojas integran el fibrado  $E^c \oplus E^{uu}$ .

Notaremos por  $\mathcal{F}^{ss}(B)$ ,  $\mathcal{F}^c(B)$  y  $\mathcal{F}^{uu}(B)$  a las foliaciones dadas por  $E_{\lambda_s}$ ,  $E_{\lambda_c}$  y  $E_{\lambda_u}$ ; y por  $\mathcal{F}^{ss}(G)$ ,  $\mathcal{F}^c(G)$  y  $\mathcal{F}^{uu}(G)$  los levantamientos de las foliaciones  $\mathcal{F}^{ss}(g)$ ,  $\mathcal{F}^c(g)$  y  $\mathcal{F}^{uu}(g)$ .

Tendremos también  $\mathcal{F}^{cs}(B)$ ,  $\mathcal{F}^{cu}(B)$  que serán las foliaciones dadas por  $E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c}$  y  $E_{\lambda_c} \oplus E_{\lambda_u}$  y  $\mathcal{F}^{cs}(G)$ ,  $\mathcal{F}^{cu}(G)$  levantamientos de las foliaciones  $\mathcal{F}^{cs}(g)$ ,  $\mathcal{F}^{cu}(g)$ .

Veamos para intereses posteriores, la siguiente observación:

*Observación 2.2.2.*

$$\mathcal{F}^{cs}(x, G) \cap \mathcal{F}^{cu}(x, G) = \mathcal{F}^c(x, G) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3.$$

$\mathcal{F}^s(x, G) \cap \mathcal{F}^c(x, G) = \{x\}$ ,  $\mathcal{F}^c(x, G) \cap \mathcal{F}^u(x, G) = \{x\}$  y  $\mathcal{F}^u(x, G) \cap \mathcal{F}^s(x, G) = \{x\}$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ .

Dado  $x, y \in \mathbb{R}^3$   $\mathcal{F}^u(x, G) \cap \mathcal{F}^{cs}(y, G) = \{z_x\}$  y  $\mathcal{F}^s(x, G) \cap \mathcal{F}^{cu}(y, G) = \{z_x\}$ .

*Demostración.* La demostración surge naturalmente de la suficiente proximidad de los fibrados  $E^{ss}$ ,  $E^c$  y  $E^{uu}$  a  $E_{\lambda_s}$ ,  $E_{\lambda_c}$  y  $E_{\lambda_u}$  respectivamente. Ver figura 2.3.

□

### 2.2.3. Minimalidad de la foliación inestable.

Veremos a continuación condiciones suficientes para que un difeomorfismo  $g : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  construido a partir de  $B$ , cuya modificación esta dada por  $k < b_2$  (ver teorema 2.2.3), verifique que su foliación inestable es minimal.

Recordamos que una foliación es minimal si cada una de sus hojas es densa en la variedad.

Dado  $x \in \mathcal{F}^{cs}(\xi, g)$ , definimos  $D(x, r)$  como la proyección por  $\pi$  del disco  $(\bar{x} + E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c}) \cap B(\bar{x}, r)$ , siendo  $\bar{x}$  algún levantado de  $x$ .

**Teorema 2.2.4.** *Sea  $B \in Sl(3, \mathbb{Z})$  con valores propios  $0 < \lambda_s < \lambda_c < 1 < \lambda_u$ . Entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que si  $g$  construido a partir de  $B$  verifica:*

- 1  $\mathcal{F}^{uu}(\xi) \cap D(x, \varepsilon) \neq \emptyset$  para todo  $\xi, x \in \mathbb{T}^3$ .

- 2  $\lambda_{ss}(g) < 1 - (\lambda_c - \lambda_s) + \varepsilon$

- 3  $\lambda_c(g) < 1 + \varepsilon$

- 4  $\text{sop}(Z(z) \cdot \beta(r)) \subset B(\pi(0), R) \quad R + \varepsilon < \frac{1}{6}$

Entonces  $\mathcal{F}^{uu}(g)$  es minimal.

*Demostración.* Consideramos  $l_0$  menor longitud del conjunto de intervalos estables (contenidos en la variedad estable) cuyos levantado tiene extremos  $A$  y  $B$  de forma que las coordenada  $z$  de los mismos distan uno.

Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{3}(1 - (\lambda_c - \lambda_s) + \varepsilon_0)^{-n_0} > l_0$ , con  $\varepsilon_0$  tal que  $1 - (\lambda_c - \lambda_s) + \varepsilon_0 < 1$ .

Sea  $\varepsilon_1$  tal que  $\lambda_c(1 + \varepsilon_1)^{n_0} < \lambda < 1$ .



Consideramos  $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$ .

Dado  $x \in \mathbb{T}^3$  sea  $I_x$  intervalo estable que contiene a  $x$  de longitud  $\frac{1}{3}$ . Luego  $g^{-n_0}(I_x)$  contiene un intervalo  $I_1$  de longitud  $\frac{1}{3}$  que no interseca a  $B(p, r)$ , luego por recurrencia podemos definir  $I_k$  en  $g^{-kn_0}(I_x)$  intervalo de longitud  $\frac{1}{3}$  que no interseca  $B(p, \frac{1}{6})$ .

Siendo  $z_x = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} g^{kn_0}(I_k)$  tenemos que para todo entero  $k \geq 1$   $g^{-kn_0}(z_x)$  no pertenece a  $B(p, \frac{1}{6})$ . Luego para todo  $k \geq 1$   $D(g^{-kn_0}(z_x), \varepsilon) \cap B(p, r) = \emptyset$ .

Tenemos entonces para todo entero  $k \geq 1$   $g^{n_0}(D(g^{-kn_0}(z_x), \varepsilon)) \subset D(g^{-(k-1)n_0}(z_x), \lambda\varepsilon)$  pues la expansión sobre el conjunto esta acotada superiormente por  $\lambda_c(1 + \varepsilon_1)^{n_0} < \lambda < 1$ .

El mismo argumento utilizado inductivamente asegura que dado un entero  $k \geq 1$  se tiene que  $g^{kn_0}(D(g^{-kn_0}(z_x), \varepsilon)) \subset D(z_x, \lambda^k \varepsilon)$ .

Sea  $\xi \in \mathbb{T}^3$  y  $U$  abierto de  $\mathbb{T}^3$ . Sea  $y \in U$ ,  $I_y$  intervalo estable por  $y$  contenido en  $U$ . Consideramos  $n$  tal que  $g^{-n}(I_y) = I_x$  donde  $I_x$  tiene longitud mayor a  $\frac{1}{3}$ . Sea entonces  $z_x \in I_x$  punto construido anteriormente,  $V$  entorno de  $z_x$  en  $\mathcal{F}^{cs}(z_x)$  tal que  $g^n(V) \subset U$ , por lo visto anteriormente existe  $k \geq 1$  tal que  $g^{kn_0}(D(g^{-kn_0}(z_x), \varepsilon)) \subset V$  y por lo tanto  $g^{kn_0+n}(D(g^{-kn_0}(z_x), \varepsilon)) \subset U$ .

Luego por hipótesis  $\mathcal{F}^{uu}(g)(g^{-(kn_0+n)}(\xi)) \cap D(g^{-kn_0}(z_x), \varepsilon) \neq \emptyset$ , por lo tanto  $\mathcal{F}^{uu}(g)(\xi) \cap U \neq \emptyset$ .

Tenemos entonces que  $\mathcal{F}^{uu}(g)(\xi)$  es una hoja densa y como  $\xi$  es arbitrario  $\mathcal{F}^{uu}(g)$  es una foliacion minimal.

□

A las condiciones 1,2,3,4 del teorema 2.2.4 las llamamos *condiciones de minimalidad*.

Es claro que dada cualquier matriz  $B$  a partir de la cual construimos los ejemplos, existe  $m_B$  tal que para todo  $k < m_B$  se tiene que los ejemplos asociados a dichos índices están en las condiciones de minimalidad.

## 2.2.4. Semiconjugación de los difeomorfismos contruidos con el sistema de Anosov modificado.

A continuación construiremos una semiconjugación entre el difeomorfismo  $g$  construido a partir de  $B$  y algún parámetro  $k < b_2$  (ver el teorema 2.2.3), y  $\tilde{B}$  sistema de

Anosov inducido por  $B$ .

Para esto se utilizará el método de sobre sombreado para pseudo órbitas de matrices hiperbólicas.

A lo largo de la construcción consideraremos  $B \in Sl(3, \mathbb{Z})$  con tres valores propios  $0 < \lambda_s < \lambda_c < 1 < \lambda_u$ ,  $\tilde{B}$  sistema de Anosov asociado a  $B$ ,  $g$  difeomorfismo de  $\mathbb{T}^3$  asociado a  $B$ .

**Definición 2.2.1.** Pseudo órbitas.

Sea  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un homeomorfismo,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z} \circ \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^3$  es una  $K$ -pseudo órbita si  $d(B(x_n), x_{n+1}) < K$ .

Decimos que una  $K$ -pseudo órbita  $\{x_n\}$  es  $\alpha$ -sombreada, si existe un elemento  $y \in \mathbb{R}^3$  tal que  $d(B^n(y), x_n) < \alpha$ . En tal caso decimos que la pseudo órbita es sombreada por la órbita  $O(y, B)$ .

**Lema 2.2.5.** *Lema de sombreado.*

Dada  $B \in Sl(3, \mathbb{Z})$ , sea  $\lambda = \max\{\lambda_s, \lambda_u^{-1}\}$ . Para todo  $K > 0$  existe  $\alpha(K) > 0$  tal que toda  $K$ -pseudo órbita es  $\alpha(K)$  sombreada por una única órbita de  $B$ .

Además  $\alpha(K) = \frac{K}{1-\lambda}$  que tiende a cero cuando  $K \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Consideramos  $\mathbb{R}^3 = E^u \oplus E^s$ , y la norma del máximo respecto la descomposición en estos dos subespacios.

Estudiaremos distintos casos, de los cuales surgirá la demostración.

o  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E^u$ . Consideramos  $y_0 = x_0, \dots, y_n = B^{-n}(x_n)$ . Tenemos entonces para todo  $n$  que  $d(x_i, B^i(y_n)) < K(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i) = \frac{K}{1-\lambda} = \alpha(K)$  para todo  $i = 0 \dots n$ .

Sea  $y$  punto de acumulación de  $y_n$ , es claro que  $d(x_n, B^n(y)) < \alpha(K)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

o  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset E^u$ . Del caso anterior tenemos para cada  $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$   $y_k$  tal que  $d(B^n(y_k), x_{k+n}) < \alpha(K)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , luego sea  $y$  punto de acumulación de  $\{B^k(y_k)\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}}$ , se tiene entonces para todo  $n \in \mathbb{Z}$   $d(f^n(y), x_n) < \alpha(K)$ . Además  $y$  es único ya que la constante de expansividad de  $B$  es  $+\infty$ .

o  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset E^s$ . Trabajamos con la inversa de  $B$ , y tenemos según lo anterior un único  $y \in \mathbb{R}^3$  tal que para todo  $n \in \mathbb{Z}$   $d(f^n(y), x_n) < \alpha(K)$ .

o  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^3$ . Escribimos  $x_n = x_n^s + x_n^u$ , luego  $\{x_n^s\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una  $K$ -pseudo órbita en  $E^s$  y  $\{x_n^u\}_{n \in \mathbb{Z}}$  una  $K$ -pseudo órbita en  $E^u$ . Por lo tanto tenemos  $y^s, y^u$  puntos cuyas órbitas por  $B$   $\alpha(K)$  sombrea a  $\{x_n^s\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{x_n^u\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Tenemos entonces que la órbita de  $y = y^s + y^u$   $\alpha(K)$  sombrea a  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

□

**Teorema 2.2.6.** *Estabilidad de las matrices hiperbólicas.*

Sea  $B \in Sl(3, \mathbb{Z})$ ,  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  homeomorfismo tal que  $\|B - G\|_\infty < K$ , entonces existe  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua y sobreyectiva tal que  $H \circ G = B \circ H$ , con  $\|H - Id\|_\infty < \alpha(K)$ .

*Demostración.* Dado que  $\|B - G\|_\infty < K$  se tiene que toda sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $x_n = G^n(x)$  es una  $K$ -pseudo órbita de  $B$ . Por lo tanto en virtud del lema de sombreado tenemos que dado  $x \in \mathbb{R}^3$  existe un único  $y \in \mathbb{R}^3$  tal que  $O(y, B)$   $\alpha(K)$  sombrea a  $\{G^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Definimos entonces  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que a cada  $x$  asocia el punto  $y$ .

Continuidad:

Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión en  $\mathbb{R}^3$  convergente a  $x$ , supongamos que  $H(x_n)$  acumula en  $y_0 \neq y = H(x)$ . Entonces para todo  $n \in \mathbb{Z}$   $d(B^n(y_0), G^n(x)) < K_1$ , mientras que  $d(B^n(y), G^n(x)) < \alpha(K)$ . Por lo que  $d(B^n(y), B^n(y_0)) < K_1 + K_2$ , negando la expansividad infinita de  $B$ .

Sobreyectividad:

Si  $y \in Im(H)^c$ , como  $\|H\|_\infty < K$  existe  $R > 0$  tal que  $H(B(y, R))$  contiene a  $y$  en su interior, luego  $H(B(y, R))$  debe contener a  $y$ .

La última afirmación del teorema resulta natural a partir de la definición de  $H$ .

□

Dado el difeomorfismo  $g$  construido a partir de  $B$ , tenemos que su levantado  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $G(0) = 0$  es tal que  $\|B - G\|_\infty < \alpha(K) < 1$  (ver construcción de  $g$ ). Entonces según lo visto en el teorema 2.2.6 existe  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua y sobreyectiva tal que  $H \circ G = B \circ H$ , donde además se tiene  $\|H\|_\infty < \alpha(K) < 1$ .

Es claro además que  $G$  presenta un punto fijo hiperbólico en 0 de índice inestable 2 según se puede ver en la figura 2.1 (donde  $p$  es dicho punto).

Veremos a continuación como actúa la función  $H$  sobre las foliaciones dinámicas de  $G$ , respecto a las foliaciones dinámicas de  $B$ . Para esto es importante considerar la construcción de  $H$ .

**Lema 2.2.7.**

- 1  $H(\mathcal{F}^{uu}(x, G)) = \mathcal{F}^{uu}(H(x), B)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- 2  $H|_{\mathcal{F}^{uu}(x, G)}$  es un homeomorfismo sobre  $\mathcal{F}^{uu}(H(x), B)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- 3  $H(\mathcal{F}^{cu}(x, G)) = \mathcal{F}^{cu}(H(x), B)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- 4  $H(\mathcal{F}^{cs}(x, G)) = \mathcal{F}^{cs}(H(x), B) = \mathcal{F}^{cs}(x, B)$ . para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- 5  $H(\mathcal{F}^c(x, G)) = \mathcal{F}^c(H(x), B)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- 6 Si  $x, y \in H^{-1}(w)$  entonces  $y \in \mathcal{F}^c(x, G)$ , además para todo  $z \in \mathcal{F}^c(x, G)$  con  $x < z < y$  (respecto de algún orden en  $\mathcal{F}^c(x, G)$ ) se tiene  $z \in H^{-1}(w)$ .

Luego o bien  $H^{-1}(w)$  es un punto, o bien es un segmento contenido en alguna hoja de  $\mathcal{F}^c(g)$ . En particular  $H^{-1}(0) = I_p$  (Ver figura 2.1).

*Demostración.* Para las demostraciones de los distintos puntos utilizaremos fuertemente la observación 2.2.2.

- 1 Supongamos  $y \in \mathcal{F}^{uu}(x, G)$  tal que  $H(y)$  no pertenece a  $\mathcal{F}^{uu}(H(x), B)$ . Luego existe  $z \neq H(y)$  tal que  $\{z\} = \mathcal{F}^{uu}(H(x), B) \cap \mathcal{F}^{cs}(H(y), B)$ . Y por lo tanto tenemos un segmento  $I$  en  $\mathcal{F}^{cs}(H(y), B)$  cuyos extremos son  $H(y)$  y  $z$  tal que  $d(B^{-n}(ext(I)), G^{-n}(\mathcal{F}^{uu}(x, G))) < K$  para todo  $n > 0$  ( $K$  alguna constante positiva). Esto último es absurdo ya que  $B^{-n}(I)$  es un intervalo en  $E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c} + z$  cuyo tamaño tiende a infinito, y  $G^{-n}(\mathcal{F}^{uu}(x, G))$  son curvas cuyos vectores tangentes están en un cono proximo a la dirección de  $E_{\lambda_u}$  que no contiene elementos de  $E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c}$ .

Por lo tanto tenemos probado que  $H(\mathcal{F}^{uu}(x, G)) \subset \mathcal{F}^{uu}(H(x), B)$ . La igualdad surge de que  $H$  tiene norma acotada, y de la proximidad del fibrado inestable  $E^u$  a  $E_{\lambda_u}$ . Esta proximidad implica que para todo  $y \in \mathcal{F}^{uu}(H(x), B)$ , se tiene  $\mathcal{F}^{uu}(x, G) \cap B(y, k) \neq \emptyset$  donde  $k = \|H\|$ , lo cual teniendo en cuenta que  $\mathcal{F}^{uu}(H(x), B)$  es una recta.

- 2 Basta probar que  $H|_{\mathcal{F}^{uu}(x,G)}$  es inyectiva. Lo cual surge naturalmente de la construcción de  $H$  ya que dados  $x_1, x_2 \in \mathcal{F}^{uu}(x, G)$ , se tiene que  $d(G^n(x_1), G^n(x_2))$  tiende a infinito cuando  $n$  lo hace.
- 3 Supongamos  $y \in \mathcal{F}^{cu}(x, G)$  tal que  $H(y)$  no pertenece a  $\mathcal{F}^{cu}(H(x), B)$ . Consideramos  $z \neq H(y)$  tal que  $\{z\} = \mathcal{F}^{cs}(H(y), B) \cap \mathcal{F}^{uu}(H(x), B)$ . Sea  $I$  intervalo en  $\mathcal{F}^{ss}(H(y), B)$  con extremos  $H(y)$  y  $z$ . Entonces  $d(B^{-n}(ext(I)), G^{-n}(\mathcal{F}^{cu}(x, G))) < K$  (cierta constante positiva) para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Esto es absurdo ya que la longitud de los intervalos  $B^{-n}(I)$  tiende a infinito, y los espacios tangentes a  $G^n(\mathcal{F}^{cu}(x, G))$  están contenidos en el complemento de un cono de la dirección  $E_{\lambda_s}$ .
- Hemos probado entonces que  $H(\mathcal{F}^{cu}(x, G)) \subset \mathcal{F}^{cu}(H(x), B)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ . La igualdad surge generalizando la idea del punto uno, para superficies.
- 4 Para la primer igualdad se tiene una demostración que surge de modificar apenas lo hecho en el punto 3. Para las segundas dos igualdades, basta observar que  $H(x) \in E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c} + x$ . Esto último es cierto ya que  $G(E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c} + x) = E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c} + B(x)$ , y por lo tanto para que una órbita  $\{B^n(y)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  sombree la órbita  $\{G^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es necesario que  $y$  este contenido en  $E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c} + x$ .
- 5 Siendo que para todo  $x$  se tiene  $H(\mathcal{F}^{cu}(x, G)) = \mathcal{F}^{cu}(H(x), B)$  y  $H(\mathcal{F}^{cs}(x, G)) = \mathcal{F}^{cs}(H(x), B)$ , tenemos entonces  $H(\mathcal{F}^c(x, G)) = H(\mathcal{F}^c(H(x), B))$ .
- 6 Sea  $x, y \in H^{-1}(w)$ . Se tiene por el punto 4 que necesariamente  $y \in \mathcal{F}^{cs}(x, G)$ . Supongamos que  $y$  no está en  $\mathcal{F}^c(x, G)$ , sea  $z \in \mathcal{F}^{cs}(x, G)$  tal que  $\{z\} = \mathcal{F}^c(y, G) \cap \mathcal{F}^{ss}(x, G)$ . Consideramos  $I$  intervalo contenido en  $\mathcal{F}^{ss}(x, G)$  de extremos  $x$  y  $z$ , luego  $G^{-n}(I)$  son intervalos, con longitudes que tienden a infinito y vectores tangentes en un cono  $C$  próximo a  $E_{\lambda_s}$ .

Por otra parte, si  $J$  es el intervalo contenido en  $\mathcal{F}^c(y)$  con extremos  $y, z$ , se tiene que  $G^{-n}(J)$  será un intervalo en  $\mathcal{F}^c(G^{-n}(y))$  cuyos vectores tangentes están en el complemento del cono  $C$ .

Tenemos por lo tanto, que  $d(G^{-n}(x), G^{-n}(y))$  tiende a infinito cuando  $n$  lo hace. Est último es absurdo ya que no podrá la órbita  $\{B^n(w)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  sombrear a  $\{G^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  y a  $\{G^n(y)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Sea  $z \in \mathcal{F}^c(x)$  con  $x < z < y$  (según algún orden en  $\mathcal{F}^c(x)$ ), siendo que  $H(x) = H(y) = w$ .

Supongamos que  $H(z) \neq w$ , entonces por la expansividad infinita de  $B$  se tiene que:

$$d(G^n(x), G^n(y)) < K \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(G^n(x), G^n(z)) = +\infty \text{ o } \lim_{n \rightarrow +\infty} d(G^n(x), G^n(z)) = +\infty.$$

Luego se contradice que el fibrado  $E^c$  este contenido en un cono próximo a  $E_{\lambda_c}$ .

□

La siguiente observación será utilizada para la construcción de la semiconjugación  $h$  entre  $g$  y  $\tilde{B}$ .

*Observación 2.2.3.* Sea  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $G(0) = 0$  levantamiento de  $g \in \mathcal{M}$  y  $H$  función construida en el teorema 2.2.6. Entonces  $H(x+q) = H(x) + q$  para todo  $x \in \mathbb{T}^3$  y  $q \in \mathbb{Z}^3$ .

*Demostración.* Es claro por construcción de  $H$  que  $H(0) = 0$ .

Basta probar entonces que  $H(q) = q$  para todo  $q \in \mathbb{Z}^3$ . Consideramos el elemento  $x + q \in \mathbb{R}^3$ , y su órbita por  $G$   $\{G^n(q)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Tenemos por construcción de  $H$  que  $H(q)$  es el único elemento  $y$  de  $\mathbb{R}^3$  cuya órbita por  $B$   $\alpha(K)$ -sombrea la órbita  $\{G^n(q)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Se tiene que  $B(q)$  y  $G(q)$  están en  $\mathbb{Z}^3$ , y distan menos que uno, por lo tanto  $B(q) = G(q)$ . De ahí inductivamente se tiene que  $B^n(q) = G^n(q)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  y por lo tanto  $y = q$ .

□

**Teorema 2.2.8.** *Para todo homeomorfismo  $g$  definido a partir de la matriz  $B$ , existe  $h : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  continua y sobreyectiva, tal que  $h \circ g = B \circ h$ . Además  $d_\infty(h, id) < 1$ , y  $d_\infty(h, id) \rightarrow 0$  cuando  $diam(Sop(Z(z)\beta(r))) \rightarrow 0$ .*

*Demostración.* Consideramos  $G$  levantado de  $g$ , tenemos entonces que  $\|B - G\|_\infty < K < 1$ . Luego en virtud del teorema 2.2.6 sabemos que existe  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua y sobreyectiva tal que  $H \circ G = B \circ H$ , donde además  $\|H - Id\|_\infty < \alpha(K)$  con  $\alpha(K) < 1$ .

Por lo visto en la última observación,  $H$  preserva el conjunto  $\mathbb{Z}^3$  y por lo tanto define una función  $h : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  continua y sobreyectiva tal que  $h \circ g = B \circ h$ .

Tenemos además  $d_\infty(h, id) < 1$ , y por lo tanto  $h$  es homotópica a la identidad. También se verifica que  $d_\infty(h, id) \rightarrow 0$  cuando  $diam(Sop(Z(z)\beta(r))) \rightarrow 0$ .

□

En la siguiente observación es consecuencia directa del lema 2.2.7.

*Observación 2.2.4.* Sea  $h$  la semiconjugación construida entre  $g$  y  $\tilde{B}$ , entonces  $h$  verifica las siguientes propiedades:

- 1 Siendo  $\mathcal{F}^{uu}(g)$  la foliación inestable  $h(\mathcal{F}^{uu}(x, g)) = \mathcal{F}^{uu}(h(x), \tilde{B})$ .
- 2  $h_{\mathcal{F}^{uu}(x, g)}$  es un homeomorfismo sobre  $\mathcal{F}^{uu}(h(x), \tilde{B})$  para todo  $x \in \mathbb{T}^3$ .
- 3 Siendo  $p = \pi(0)$  punto fijo hiperbólico de  $g$  (ver figura 2.1),  $h(W^u(g, p)) = \mathcal{F}^{uu}(p, \tilde{B})$ .
- 4  $h$  no es inyectiva, en general la preimagen de un punto por  $h$  es o bien trivial (un punto), o bien un segmento contenido en alguna hoja de  $\mathcal{F}^c(g)$ .

### 2.2.5. La familia $\mathcal{M}$ .

Definimos  $\mathcal{M}$  como la familia de difeomorfismos  $g$  de  $\mathbb{T}^3$  construidos a partir de una matriz  $B$  y todos los índices  $k < b$ , de forma que se tienen las siguientes propiedades:

- 1  $b < m_b$  (y por lo tanto menor que  $b_1$  y  $b_2$ ). Esto último implica la existencia  $\mathcal{F}^{uu}(g)$  foliación inestable minimal para  $g$ .
- 2 Pedimos además que  $E^{uu}(\xi) \notin \langle \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} \rangle$  para todo  $\xi \in \mathbb{T}^3$ . Esto se cumple para  $b$  suficientemente chico, ver el teorema 2.2.2.
- 3 Por último pedimos que  $d(h, id) < \frac{1}{4}$ . Esto implica naturalmente, que  $h$  es homotópica a la identidad.

Dado cualquier elemento de  $\mathcal{M}$  la segunda propiedad nos permitirá definir homeomorfismos en  $\mathbb{T}^2$  como la holonomía de la foliación inestable, luego la primer propiedad nos dará automáticamente la minimalidad de dicho sistema.

En el siguiente capítulo introduciremos estos sistemas minimales en  $\mathbb{T}^2$  y estableceremos la relación dinámica que presentan con las traslaciones minimales.

Además estudiaremos propiedades dinámicas y ergódicas de dichos sistemas.

# Capítulo 3

## Dinámicas minimales en $\mathbb{T}^2$ a partir de elementos de $\mathcal{M}$ .

En este capítulo establecemos la construcción de homeomorfismos minimales del toro  $\mathbb{T}^2$  a partir de los elementos de  $\mathcal{M}$  (ver capítulo 2).

Demostraremos que dichos sistemas serán siempre semiconjugados a una traslación minimal.

Luego veremos que dinamicamente los sistemas en  $\mathbb{T}^2$  construidos a partir de  $g \in \mathcal{M}$ , tales que  $\lambda_{uu}(g) > 2\sqrt{2}$ , verifican las propiedades Point-distal, Non-distal. Esto nos da cierta afinidad con un ejemplo presentado por Mary Rees en [R], que discutiremos.

Se probará la ergodicidad única de aquellos sistemas en  $\mathbb{T}^2$ , asociados a elementos  $g \in \mathcal{M}$  que verifiquen  $\alpha(K) < \frac{1}{4}$  (ver capítulo 2).

Por último estableceremos que la entropía topológica de algunos sistemas inducidos por elementos en  $\mathcal{M}$ , es nula. Esto se hará a través de un clásico resultado de Katok, ver [K].

Dado  $g \in \mathcal{M}$  nos referiremos a los sistemas construidos en  $\mathbb{T}^2$  como *sistema inducido por  $g$* .

En el siguiente capítulo haremos la construcción explícita de una subfamilia  $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ , cuyos elementos inducen los sistemas anunciados en el teorema central en esta tesis, 1.4.1.



Los elementos de dicha familia verificarán que  $\lambda_{uu}(g) > 2\sqrt{2}$  y  $\alpha(K) < \frac{1}{4}$ , y por lo tanto siempre se tendrá que los sistemas inducidos en  $\mathbb{T}^2$  cumplirán las propiedades point-distal, non-distal y serán únicamente ergódicos.

### 3.1. Construcción y minimalidad.

Siendo  $\mathcal{M}$  la familia de difeomorfismos en  $\mathbb{T}^3$ , construida en el capítulo 2, consideramos  $g \in \mathcal{M}$ .

El difeomorfismo  $g$  está construido a partir de la matriz  $B$ , y según se pide en la definición de la familia,  $g$  admite un fibrado invariante para  $dg$ ,  $E^{uu}$ , que no contiene elementos en el subespacio dado por los vectores  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ .

Además este fibrado es integrado por  $\mathcal{F}^{uu}(g)$  cuyas hojas son minimales.

Dado  $g \in \mathcal{M}$  estamos en condiciones de definir un homeomorfismo minimal en  $\mathbb{T}^2$ ,  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ .

Identificamos  $\mathbb{T}^2$  con  $\pi(XoY)$  siendo  $\pi$  la proyección canónica de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{T}^3$ ,  $XoY = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ .

Dado  $\xi \in \mathbb{T}^2$  sea  $\mathcal{F}^{uu}(\xi, g)_+$  hoja inestable por  $\xi$  orientada positivamente (se puede hacer fijando un signo para el producto interno de los vectores tangentes a la hoja con  $e_{\lambda_u}$ , vector unitario en  $E_{\lambda_u}$ ). Entonces existe una parametrización positiva de  $\mathcal{F}^{uu}(\xi, g)_+$ ,  $\delta_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}^{uu}(\xi, g)$ , tal que existe  $t_0$  para el cual se verifica  $\delta((0, t_0)) \cap \pi(XoY) = \phi$  y  $\delta(t_0) \in \pi(XoY)$ .

Definimos entonces  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  homeomorfismo tal que  $f(\xi) = \delta_\xi(t_0)$ . Lo cual por las propiedades de continuidad de la foliación inestable es efectivamente un homeomorfismo.

Tenemos además que dichos homeomorfismos son minimales en  $\mathbb{T}^2$ .

Dado  $g \in \mathcal{M}$  a dicho homeomorfismo lo llamaremos *homeomorfismo inducido por  $g$* .

Notamos además, que si  $E^{uu}$  es un fibrado vectorial de clase  $C^r$  entonces el homeomorfismo  $f$  tendrá clase de diferenciabilidad  $C^r$ . A partir de esto, en el capítulo 4 buscaremos mediante el teorema de la *sección  $C^r$*  construir elementos en  $\mathcal{M}$  cuyo fibrado inestable tenga la mayor diferenciabilidad posible.

## 3.2. Semiconjugación con la traslación.

En esta sección  $g$  representa un elemento de  $\mathcal{M}$ , construido a partir de la matriz  $B$ ,  $\tilde{B}$  es el sistema de Anosov inducido por  $B$ , y  $h$  es la semiconjugación entre  $g$  y  $\tilde{B}$  construida en el capítulo 2.

Dada  $B \in Sl(3, \mathbb{Z})$  asociada a  $g \in \mathcal{M}$ , consideramos la foliación de  $\mathbb{T}^3$   $\mathcal{F}^{uu}(\tilde{B})$ , definimos  $T_B : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  la traslación minimal dada por la holonomía de  $\mathcal{F}^{uu}(\tilde{B})$  sobre  $\pi(XoY)$ .

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  ejemplo construido a partir de  $g \in \mathcal{M}$ . Sea  $B$  matriz en  $Sl(3, \mathbb{Z})$  asociada a  $g$ . Entonces tenemos que existe  $\tilde{h} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  continua, sobreyectiva y homotópica a la identidad tal que:*

$$\tilde{h} \circ f = T_B \circ \tilde{h}.$$

*Para todo  $w \in \mathbb{T}^2$  se tiene  $\tilde{h}^{-1}(w)$  es o bien un punto, o bien un segmento.*

$$d_\infty(\tilde{h}, id) < 1 \text{ y tiende a cero cuando } \text{diam}(\text{Sop}(\beta(r))) \rightarrow 0.$$

*Demostración.* Sea  $h : \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3$  la semiconjugación construida en el teorema 2.2.8.

Sea  $\mathbb{T}^2 = \pi(XoY)$ , dado  $x \in \mathbb{T}^2$  se tiene  $h(x) \in B(\mathbb{T}^2, \frac{1}{2})$  (ver definición de  $\mathcal{M}$ ). Luego definimos  $\tilde{h}(x)$  como la proyección de  $h(x)$  a  $\mathbb{T}^2$  a través del segmento de hoja inestable  $\mathcal{F}^{uu}(h(x), \tilde{B})$  contenido en  $B(\mathbb{T}^2, \frac{1}{2})$ .

Es claro que  $\tilde{h}$  es continua, la sobreyectividad esta dada por las propiedades de  $h$  (ver observación 2.2.4).

Además se tiene que  $\tilde{h}$  es homotópica a la identidad ya que se puede componer toda la homotopía entre  $h$  y  $id$  (ver 2) con la proyección a partir de la cual se definió  $\tilde{h}$ .

Veamos que dado  $w \in \mathbb{T}^2$   $\tilde{h}^{-1}(w)$  es o bien un punto o bien un segmento.

Es clave para esto recordar que  $h^{-1}(w)$  es o bien un punto o bien un segmento. En cualquiera de los dos casos siendo  $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}^{uu}(w, \tilde{B})$  segmento inestable para el Anosov cuyos bordes distan  $\frac{1}{2}$  de  $w$ , se tiene que si  $x \in h^{-1}(w)$  entonces el conjunto  $l_x$ , hoja inestable por  $x$  según  $g$  tal que  $h(l_x) = \mathcal{F}_{\frac{1}{2}}^{uu}(w, \tilde{B})$ , está en un entorno de radio  $\frac{1}{2}$  del conjunto  $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}^{uu}(w, \tilde{B})$ .

Luego por cada  $x \in h^{-1}(w)$ , existe un único punto  $y$  en  $l_x$  tal que  $\tilde{h}(y) = w$ .

Si  $h^{-1}(w)$  es un único punto, existe un único punto  $y \in \mathbb{T}^2$  tal que  $h(y) \in \mathcal{F}_{\frac{1}{2}}^{uu}(w, \tilde{B})$  y por lo tanto  $\tilde{h}^{-1}(w) = \{y\}$ .

Si  $h^{-1}(w)$  tiene mas de un punto, entonces según lo visto en el capítulo 2 es un segmento  $J$  contenido en  $\mathcal{F}^c(g)$ . Luego proyectando dicho segmento sobre  $\mathbb{T}^2$  por las hojas de la foliación inestable de  $g$ , contenidas en  $B(\mathbb{T}^2_{\frac{1}{2}})$ , se tiene un segmento  $I$  en  $\mathbb{T}^2$  tal que  $\tilde{h}^{-1}(w) = I$ .

Queremos por último que  $\tilde{h} \circ f = T_B \circ \tilde{h}$ . Lo cual se observa claramente en el dibujo a continuación 3.1.

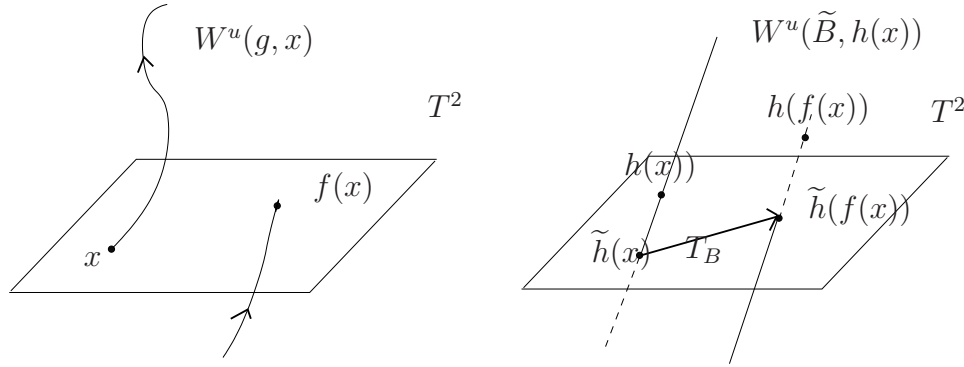


Figura 3.1: Semiconjugación.

□

A continuación damos una observación que nos garantiza que ningún homeomorfismo que hemos construidos en  $\mathbb{T}^2$  a partir de elementos de  $\mathcal{M}$ , pueden ser conjugados a la traslación.

*Observación 3.2.1.* Sea  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  difeomorfismo semiconjugado por  $h$  una traslación  $T$ . Si existe un homeomorfismo  $H$  que conjugue  $f$  y  $T$ , entonces necesariamente  $h$  es un homeomorfismo.

### 3.3. Propiedad Point-distal, non-distal. Un ejemplo de Mary Rees.

Veremos aquí que los ejemplos minimales de  $\mathbb{T}^2$  que se construyen a partir de elementos en  $\mathcal{M}$  que verifican  $\lambda_{uu}(g) > \frac{2}{\sqrt{2}}$ , tienen intervalos semiestables (intervalos  $I \subset \mathbb{T}^2$

tal que  $\liminf_n l(f^n(I)) = 0$ .

Luego estableceremos que tales sistemas presentan las propiedades point-distal, non-distal.

A partir de esto estableceremos afinidades y diferencias de los ejemplos construidos con un ejemplo dado por Mary Rees en [R]. Este último es el ejemplo minimal que hemos encontrado mas parecido *dinamicamente*, a los ejemplos aquí presentados.

### 3.3.1. Intervalos semiestables.

Consideramos  $f$  ejemplo minimal construido a partir de  $g \in \mathcal{M}$ , tal que  $\lambda_{uu}(g) > 2\sqrt{2}$ .

Recordamos que todos los elementos de  $\mathcal{M}$  verifican que el fibrado inestable está contenido en un cono de 45 grados, respecto a la dirección  $E_{\lambda_u}$ .

Sean  $B \in Sl(3, \mathbb{Z})$  matriz asociada a  $g$ ,  $G$  levantamiento de  $g$  y  $\mathcal{F}^{uu}(G)$  levantamiento de la foliación  $\mathcal{F}_g^u$ .

Siendo 0 punto fijo hiperbólico de  $G$ , sea  $I_0$  intervalo abierto en  $E_{\lambda_c}$  cuyos extremos son puntos fijos y contiene a 0 en su interior (ver capítulo 2). Recordemos que para los ejemplos elementos de  $\mathcal{M}$ , se tiene  $I_0 \subset B(0, \frac{1}{6})$ .

Siendo  $\frac{2}{3} = l_0$  definimos el conjunto  $W = \bigcup_{x \in I_0} \mathcal{F}_{l_0}^{uu}(x, G)$ , con  $\mathcal{F}_{l_0}^{uu}(x, G)$  intervalo inestable cuyos extremos distan  $l_0$ , que tiene a  $x$  en un extremo y esta orientado positivamente.

*Observación 3.3.1.*

- 1  $W \subset W^u(0)$  (variedad inestable del punto 0),  $W_{l_0^+}^u(0) \subset W$  (componente conexa por 0 del conjunto dado por la variedad inestable de tamaño  $l_0$  intersección  $\pi(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < |z| < \frac{2}{3}\})$ ). Además  $W \subset E_{\lambda_c} \oplus E_{\lambda_u}$ .
- 2 Siendo el intervalo  $J_0 = \mathcal{F}_{l_0}^{uu}(0, G)$ , se tiene  $J_0 \subset E_{\lambda_u}$ . Además  $W = \bigcup_{z \in J_0} I_z$  donde  $I_z = W^u(0) \cap E_{\lambda_c} + z$ .
- 3 Para cada  $z \in J_0$  la distancia de  $z$  a los extremos de  $I_z$  es menor o igual que  $\frac{1}{6}$ .

*Demostración.*

- 1 Para observar esto basta estudiar el comportamiento local del levantado  $G$  entorno a 0, que esta definido en el capítulo 2.
- 2 Aquí también, es simplemente observar la definición de  $g$  hecha en el capítulo 2.

3 Dado  $z$  en  $J_0$  consideramos  $n$  tal que  $f^{-n}(I_z) = J_z$  esta en  $B(0, \delta)$ . se tiene que todos los iterados están contenidos en  $W$  y son paralelos a  $E_{\lambda_c}$ . Luego sea  $PJ_z$  la proyección del intervalo  $J_z$  sobre  $E_{\lambda_c}$  según la dirección  $E_{\lambda_u}$  (suponemos  $\delta$  suficientemente chico, de modo que  $PJ_z$  está contenido en  $I_0$ ). Luego al considerar  $I_z = f^n(J_z)$ , se tiene que la distancia desde  $z$  a los extremos es a lo sumo igual a la distancia de 0 a los extremos de  $I_0$ .

□

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $g \in \mathcal{M}$  tal que  $\lambda_{uu}(g) > \frac{2}{\sqrt{2}}$ . Luego existe  $I_z$ , como se definió en la observación anterior tal que  $G^n(I_z) = B^n(I_z)$  para todo  $n \geq 0$ .*

*Demostración.* Sea  $C = \bigcup_{u \in \mathbb{Z}^3} B(0, \frac{1}{3}) + u$ , sabemos que en  $C^c$  se tiene  $G = B$ . Recordamos que el soporte de la perturbación esta contenido en  $B(\pi(0), r)$  con  $r < \frac{1}{6}$ .

Sea  $L_0 = J_0 \setminus C$ ,  $L_0$  es un intervalo contenido en la hoja por cero de la foliación construida y cuya proyección sobre  $E_\gamma$  tiene longitud  $l(L_0) \geq \frac{1}{3}$ .

Consideramos  $G(L_0)$  y se tendrá por las propiedades de la foliación inestable, que su proyección sobre  $E_{\lambda_u}$  tiene longitud mayor a 2. Luego existe  $L_1$  segmento contenido en  $G(L_0) \setminus C$  de longitud mayor o igual a  $\frac{1}{3}$ .

De esta forma podemos considerar una sucesión de segmentos  $L_n \subset G^n(L_0) \setminus C$ . Considerando entonces  $\{z\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G^{-n}(L_n)$  tenemos para  $I_z$  que  $G^n(I_z) = B^n(I_z)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pues  $l(G^n(I_z)) < \frac{1}{6}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

□

Para el intervalo  $I_z$  construido en el teorema anterior se tiene  $\lim_n G^n(I_z) = \lim_n B^n(I_z) = 0$ , ya que  $I_z \subset E_{\lambda_c} + z$ .

Luego tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.3.2.** *Sea  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  sistema construido a partir de  $g \in \mathcal{M}$  tal que se verifica  $\lambda_{uu}(g) > \frac{2}{\sqrt{2}}$ . Entonces existe  $I \subset \mathbb{T}^2$  tal que  $\liminf_n l(f^n(I)) = 0$ .*

**Definición 3.3.1.** Sea  $\mathcal{X}$  un espacio métrico compacto  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  un homeomorfismo.

Decimos que  $f$  es distal si para todo par de puntos  $x, y \in \mathcal{X}$  existe  $r > 0$  tal que se tiene  $d(f^n(x), f^n(y)) > r$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . De lo contrario diremos que  $f$  es non-distal.

Decimos que  $f$  es point-distal si existe  $x \in \mathcal{X}$  tal que para todo  $y \in \mathcal{X}$  existe  $r > 0$  que verifica  $d(f^n(y), f^n(x)) > r$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , y además el conjunto  $O(f, x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es denso en  $\mathcal{X}$ .

Es claro que los ejemplos minimales construidos a partir de  $g \in \mathcal{M}$  con  $\lambda_{uu}(g) > 2\sqrt{2}$  son point-distal non-distal.

Estudiaremos ahora la afinidad de dichos ejemplos con uno de los ejemplos minimales conocidos no conjugables a traslaciones.

El ejemplo que hemos encontrado mas cercano a los presentados, fue dado originalmente por Mary Rees en [R], donde demuestra el siguiente teorema:

**Teorema 3.3.3.** *Existe  $S : \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{T}^2$  homeomorfismo minimal point-distal, non-distal que es semiconjugado a la traslación  $T$  por la función continua  $\Phi$ ,  $\Phi \circ S = T \circ \Phi$ . Además  $\Phi(x, y) = (x, \varphi(y))$  y  $\Phi^{-1}(x, y)$  es trivial salvo para  $(x, y) \in \{T^n(x_0, y_0)\}_n$  en cuyo caso  $\Phi^{-1}(x, y)$  es un intervalo contenido en un conjunto de la forma  $\{x\} \times S^1$ .*

La autora aclara en este artículo, que este es el primer ejemplo que se conoce de un homeomorfismo en variedades que es point-distal, non-distal. Los ejemplos anteriores eran para espacios de dimensión cero.

Esto último da un cierto indicio de que seguramente no sea fácil encontrar difeomorfismos con alta regularidad que verifique esta propiedad. De echo la construcción que Mary Rees hace en el artículo es puramente topológica, y el resultado que obtiene es de regularidad  $C^0$ .

Como vimos, nuestro ejemplo tiene afinidad con el de Mary Rees, es un ejemplo point-distal non-distal, semiconjugado a la traslación irracional, y las fibras de la semi-conjugación son o bien puntos o bien segmentos.

Una primer diferencia sería, aunque no se probó, que nuestro ejemplo tiene mas de una órbita de la traslación cuya preimagen por la semiconjugación da una órbita de intervalos (posiblemente hasta no numerables órbitas). En el ejemplo de Mary Rees tenemos una sola órbita de la traslación de este tipo, de cualquier forma es posible que sus técnicas permitan generar mas órbitas con esta propiedad.

Además en este ejemplo los intervalos están contenidos en círculos de la forma  $\{x\} \times S^1$ , lo cual no sucede en nuestro ejemplo. Sí creemos que se puede conjugarlos con sistemas donde los intervalos queden contenidos en este tipo de conjuntos.

Por último, el punto mas importante, lo que se buscamos principalmente en la construcción de los ejemplos aquí presentados es la alta regularidad de los mismos. Veremos que este tipo de ejemplos se pueden construir con regularidad de clase  $C^r$  para todo  $r \in (0, 3)$ .

De cualquier manera, aunque no esta dicho explícitamente, en el trabajo de McSweggen ([Mc]) los difeomorfismos que construye son point-distal non-distal, pero no mi-

nimales.

En un trabajo posterior Mary Rees construye un ejemplo  $C^0$  minimal en el toro  $\mathbb{T}^2$  que tiene entropía topológica positiva (ver [R,2]). Este ejemplo es el primero con esta característica que se conoce en variedades de dimensión menor que cuatro. El ejemplo anterior era en dimensión cuatro, debido a M. Herman.

Por lo visto en el capítulo 3 sabemos que esta construcción de Mary Rees no puede ser conjugable con nuestros ejemplos que presenten diferenciabilidad de clase  $C^{1+\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ .

Todas estas construcciones son realizables, como ya se advirtió, por el método de construcción Denjoy-Rees según se puede ver en [B-C-L].

### 3.4. Ergodicidad única.

Aunque puede parecer que todo sistema minimal en variedades es únicamente ergódico (esto es, posee una única medida de probabilidad invariante), existen ejemplos que niegan tal afirmación (ver ejemplo de Fustenberg [F]).

Veremos en esta sección que para los ejemplos de  $\mathbb{T}^2$  inducidos por elementos de  $\mathcal{M}$ , si  $\alpha(K)$  es menor que  $\frac{1}{4}$  los sistemas inducidos son únicamente ergódicos (ver el lema 2.2.5).

Recordamos que  $\alpha(K) = \frac{K}{1-\lambda_c}$  siendo  $K = \|B - G\|_\infty$ , y que para los elementos en  $\mathcal{M}$  se tiene  $K < \frac{2}{6}\lambda_c$ .

Para ver esto basta recordar que el soporte de la modificación hecha al sistema Anosov,  $\text{sup}(\beta(r)Z(z))$ , está contenido en  $B(0, \frac{1}{6})$ . En dicho entorno se tiene que  $G(B(0, \frac{1}{6}) \cap z + E_{\lambda_c} \oplus E_{\lambda_s}) = B(B(0, \frac{1}{6}) \cap z + E_{\lambda_c} \oplus E_{\lambda_s})$  para todo  $z$  en  $E_{\lambda_u}$  con norma menor que  $\frac{1}{6}$ .

Por su parte  $B(B(0, \frac{1}{6}) \cap z + E_{\lambda_c} \oplus E_{\lambda_s}) \subset B(B(z), \frac{1}{6}\lambda_c)$ . Luego se tiene que  $\|B - G\|_\infty < \frac{2}{6}\lambda_c$ .

Cuando en el siguiente capítulo se construya explícitamente elementos en  $\mathcal{M}$ , que nos den los homeomorfismos enunciados en el teorema central de la tesis 1.4.1, tendremos efectivamente  $\alpha(K) < \frac{1}{4}$  a partir de que  $\lambda_c$  será menor que  $\frac{1}{4}$  en todos los casos.

Durante toda la sección consideraremos  $f$  un ejemplo minimal inducido por  $g \in \mathcal{F}$ ,  $\tilde{h}$  la semiconjugación construida en el capítulo anterior entre  $f$  y la traslación irracional

$T$ ,  $h$  la semiconjugación entre  $g$  y  $\tilde{B}$  (ver capítulo 3).

**Teorema 3.4.1.** *Sea  $D = \{x \in \mathbb{T}^2 : \tilde{h}^{-1}(\tilde{h}(x)) = \{x\}\}$ . Si  $m(\tilde{h}(D)) = 1$  entonces  $f$  es una aplicación únicamente ergódica.*

*Demostración.* Dada una medida  $\mu \in \mathcal{M}_f$  obtenemos una medida  $\nu \in \mathcal{M}_T$  donde  $\nu(A) = \mu(\tilde{h}^{-1}(A))$ , por lo tanto para todo  $A$  boreliano y  $\mu \in \mathcal{M}_f$  se tiene  $\mu(\tilde{h}^{-1}(A)) = m(A)$ .

Tenemos entonces para toda medida  $\mu \in \mathcal{M}_f$   $\mu(D) = \mu(\tilde{h}^{-1}(\tilde{h}(D))) = m(\tilde{h}(D)) = 1$  por hipótesis.

Tenemos entonces para cualquier boreliano  $A$  y cualquier medida  $\mu \in \mathcal{M}_f$   $\mu(A) = \mu(A \cap D)$ .

Dados  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_f$  y  $A$  un boreliano tenemos que  $\mu_1(A) = \mu_1(A \cap D) = \mu_1(\tilde{h}^{-1}(\tilde{h}(A \cap D))) = m(\tilde{h}(A \cap D)) = \mu_2(\tilde{h}^{-1}(\tilde{h}(A \cap D))) = \mu_2(A \cap D) = \mu_2(A)$ , y por lo tanto  $f$  es únicamente ergódica. □

Sea  $y \in \mathbb{T}^2$  tal que  $\tilde{h}^{-1}(y)$  contiene mas de un elemento. Luego existen  $x_0, x_1 \in \mathbb{T}^2$  tales que  $h(x_0), h(x_1) \in \mathcal{F}^u(\tilde{B})(y)$ . Además según las propiedades de  $h$  vistas en la observación 2.2.4 se tiene que  $\mathcal{F}^{uu}(x_0, g) \cap \mathcal{F}^{uu}(x_1, g) = \phi$ .

Llamemos ahora, haciendo abuso de notación,  $y, x_0, x'_1$  levantados de  $y, x_0, x_1$  en  $[0, 1]^3$ . Tenemos entonces:

$\mathcal{F}^{uu}(x_0, G) \cap \mathcal{F}^{uu}(x'_1, G) = \phi$ , y por las propiedades de los fibrados vistas en el capítulo 2, podemos definir  $\{x_1\} = \mathcal{F}^{cs}(x_0, G) \cap \mathcal{F}^{uu}(x'_1, G)$ .

$d(B^{-n}(y), G^n(x_i)) < \alpha(K) + \varepsilon$  con  $i \in \{0, 1\}$  y  $\varepsilon$  arbitrariamente chico,  $n > n_\varepsilon$ .

**De aquí en mas supondremos que  $\alpha(K)$  es menor que  $\frac{1}{4}$ .**

Sea  $A = \{y \in [0, 1]^3 / \exists x_0, x_1 \in [0, 1]^3, \text{ con } x_1 \in \mathcal{F}^{cs}(x_0, G) \setminus \{x_0\}; n_y \in \mathbb{N} : d(B^{-n}(y), G^{-n}(x_i)) < \frac{1}{4} \text{ para todo } n > n_y, i \in \{0, 1\}\}$ .

*Observación 3.4.1.* Siendo  $m$  la medida de Lebesgue en  $[0, 1]^3$  si  $m(A) = 0$  entonces  $f$  es únicamente ergódica.

*Demostración.* Dado  $y \in \tilde{h}(D)^c$ , consideramos  $l_y$  longitud del menor intervalo no trivial contenido en  $\mathcal{F}^{uu}(y, \tilde{B})$  con extremos en  $\pi(X \circ Y)$ . Es claro que 1 es cota inferior del conjunto  $\{l_y\}_{y \in \tilde{h}(D)^c}$ .



Como la aplicación  $y \mapsto l_y$  es continua, tenemos  $m_{\mathbb{T}^2}(\tilde{h}(D)) = 1 - m_{\mathbb{T}^2}(\tilde{h}(D)^c) > 1 - \int_{y \in \tilde{h}(D)^c} l_y dm_{\mathbb{T}^2} > 1 - m(A) = 1$ . Luego según 3.4.1 se tiene el resultado.  $\square$

**Lema 3.4.2.** *Sea el conjunto*

$$T = \{y \in [0, 1]^3 : \lim_n \frac{\#\{0 \leq j \leq n : B^{-j}(y) \in (\bigcup_{u \in \mathbb{Z}^3} B(0, \frac{5}{12}) + u)^c\}}{n} = 1 - m(B(\frac{5}{12}))\}$$

entonces  $A \cap T = \phi$ .

*Demostración.* Supongamos  $y \in A \cap T$ .

Sean  $x_0, x_1 \in [0, 1]^3$  ( $x_1 \in \mathcal{F}^{cs}(x_0, G)$ ) elementos asociados a  $y$  a través de la definición de  $A$ , y  $d_n = d(G^{-n}(x_0), G^{-n}(x_1))$  para  $n > n_y$ .

Si  $B^{-j}(y) \in (\bigcup_{u \in \mathbb{Z}^3} B(0, \frac{5}{12}) + u)^c$  entonces  $d_{j+1} \geq \lambda_c^{-1} d_j$ , pues  $G^{-j}(x_i)$  están en el complemento del soporte de la modificación.

Si  $B^{-j}(y) \in (\bigcup_{u \in \mathbb{Z}^3} B(0, \frac{5}{12}) + u)$  entonces  $d_{j+1} \geq \lambda_c(g)^{-1} d_j$ .

Tenemos para los elementos de  $\mathcal{M}$ , a través de las condiciones del teorema 2.2.4  $\lambda_c^{-1} \lambda_c(g)^{-1} > 1$ .

Como  $y \in T$ , siendo  $a_n = \#\{0 \leq j \leq n : B^{-j}(y) \in (\bigcup_{u \in \mathbb{Z}^3} B(0, \frac{5}{12}) + u)^c\}$  se tiene que existe  $n_0$  tal que para todo  $n > n_0$   $a_n > \frac{n}{2}$ .

Entonces para todo  $n > n_0$

$$\begin{aligned} d_n &> (\lambda_c^{-1})^{a_n} (\lambda_c(g)^{-1})^{n-a_n} d_0 \\ d_n &> (\lambda_c^{-1})^{\frac{n}{2}+b_n} (\lambda_c(g)^{-1})^{\frac{n}{2}} d_0; b_n > 0 \\ d_n &> (\lambda_c^{-1} \lambda_c(g)^{-1})^{\frac{n}{2}} d_0 \end{aligned}$$

lo cual implica que  $d_n \rightarrow +\infty$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Esto último contradice que  $y$  pertenezca a  $A$ .  $\square$

**Teorema 3.4.3.** *Dado  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  ejemplo minimal construido a partir de  $g \in \mathcal{M}$  con  $\alpha(K) < \frac{1}{4}$ , entonces  $f$  es únicamente ergódico.*

*Demostración.* Del lema anterior sabemos que  $A \cap T = \phi$ , por otra parte de la ergodicidad de la medida de Lebesgue para el sistema Anosov  $\tilde{B}$ , tenemos en virtud del teorema de Birkoff que  $m(T) = 1$  (ver [M]). Luego  $m(A) = 0$ , de donde en virtud de lo visto en la observación 3.4 se tiene que  $f$  es un sistema únicamente ergódico.  $\square$

### 3.5. Sobre la entropía topológica.

En esta sección establecemos, a través del clásico resultado de Katok (ver [K]), que la entropía topológica de los sistemas minimales construidos cuya clase de diferenciabilidad es de orden mayor que uno, es nula.

A continuación recordamos la definición de entropía topológica.

**Definición 3.5.1.** Sea  $\mathcal{X}$  espacio métrico compacto,  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  función continua.

Dado  $\varepsilon > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ , decimos que  $A_{\varepsilon,n} \subset \mathcal{X}$  es un  $(\varepsilon, n)$ -generador si para todo  $x \in \mathcal{X}$  existe  $a_x \in A_{\varepsilon,n}$  tal que  $\max\{d(f^j(x), f^j(a_x)) : j = 0 \dots n\} < \varepsilon$ .

Definimos  $r(\varepsilon, n)$  como el menor cardinal de los  $(\varepsilon, n)$ -generadores.

La compacidad de  $\mathcal{X}$  asegura que para todo par  $(\varepsilon, n)$   $r(\varepsilon, n)$  es un número finito.

Se define entonces la entropía topológica de  $f$ , como

$$h_{top}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(r(\varepsilon, n)))$$

Un clásico resultado de Katok asegura que para todo  $\alpha > 0$ , un difeomorfismo en superficies compactas de clase  $C^{1+\alpha}$  y con entropía topológica positiva, contienen infinitas órbitas periódicas. (El resultado es mas general, ver [K]).

Esto último es una obstrucción para la minimalidad de  $f$ .

Existen un ejemplo dado por Mary Rees, en [R,2], de homeomorfismos  $C^0$  minimales en  $T^2$ , con  $h_{top}$  positiva (también se puede ver en [B-C-L]).

Este ejemplo no es únicamente ergódico, recientemente con métodos que surgen de las ideas usadas por Rees en el artículo [R,2] (que a su vez se relacionan con las técnicas de Denjoy de explotar órbitas) S. Crovisier construye el primer ejemplo conocido en superficies que es minimal, únicamente ergódico (estrictamente ergódico) y además tiene entropía topológica positiva (ver [B-C-L]).

Tenemos entonces para los ejemplos minimales construidos de clase  $C^r$  con  $r > 1$ ,  $h_{top}(f) = 0$ .

# Capítulo 4

## Diferenciabilidad.

En este capítulo construiremos una familia de homeomorfismos minimales del toro bidimensional,  $\mathbb{T}^2$ , con elementos de diferenciabilidad  $C^r$  para todo  $r \in (0, 3)$ . Esta familia contendrá los difeomorfismos anunciados en el teorema central de esta tesis 1.4.1.

Nos referiremos por “ejemplos” a los elementos de dicha familia.

La construcción de estos ejemplos surge de construir una subfamilia  $\mathcal{F}$  de la familia  $\mathcal{M}$  definida en el capítulo 2, en donde hay elementos cuyo fibrado inestable alcanza diferenciabilidad  $C^r$  para todo  $r \in (0, 3)$ .

Esto permite construir homeomorfismos de clase  $C^r$ , minimales y semiconjugados a la traslación para todo  $r \in (0, 3)$ , según se vio en el capítulo 3.

Además, todos los elementos de la familia  $\mathcal{F}$  verificarán las condiciones dadas en el capítulo 3 que aseguran la existencia de intervalos estables y la ergodicidad única, para los sistemas inducidos.

Se considerará una familia de matrices  $\mathcal{I} = \{B_a\}_{a \in \mathbb{N}_{a > a_0}} \subset Sl(3, \mathbb{Z})$  y a partir de ellas se construirán los sistemas de  $\mathcal{M}$  según se vio en el capítulo 2. Para los sistemas que surjan, se construirá la foliación inestable a partir del resultado conocido como *teorema de la sección  $C^r$*  (ver [H-P-S]). Esto nos permitirá encontrar foliaciones inestables de clase  $C^r$  para todo  $r \in (0, 3)$ .

Una propiedad de  $\mathcal{I}$  que será fundamental, es que los valores  $\lambda_s$  y  $\lambda_c$  tiendan a cero, conforme  $a$  tienda a infinito, y además su diferencia lo haga con orden de infinitésimo mayor o igual al de cada valor por separado.

## 4.1. Familia de Matrices hiperbólicas en $SL(3, \mathbb{Z})$ .

Construimos aquí  $\mathcal{I}$  familia de matrices hiperbólicas con determinante uno, de las cuales surgen los sistemas de Anosov que modificaremos según lo visto en el capítulo 2. De esta forma obtendremos la familia  $\mathcal{F}$ .

Buscamos como se vio, que tengan tres valores propios reales positivos, dos contractivos. Además queremos que estos últimos se puedan considerar arbitrariamente cercanos, lo cual será fuertemente utilizado para lograr mayor diferenciabilidad de la foliación inestable de las modificaciones.

Consideramos la familia de matrices  $\mathcal{J} = \{M_a\}_{a \in \mathbb{N}}$ , donde

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & a^2 - 1 & a \\ 0 & a^3 - a & 1 \end{pmatrix}$$

Es claro que  $\det(M_a) = 1$  independientemente de  $a$ .

El polinomio característico de  $M_a$  esta dado por  $P_a(\lambda) = -\lambda^3 + a^2\lambda^2 + a^4\lambda + 1$ . Queremos estudiar las raíces de los polinomios de la familia y estudiar el comportamiento asintótico en  $a$ .

$P'_a(\lambda) = -3\lambda^2 + 2a^2\lambda + a^4$ , este polinomio se anula en las raíces:  $\lambda = \frac{-a^2}{3}, a^2$ . Tenemos entonces independientemente de  $a$  una raíz de  $P'_a$  negativa donde hay un mínimo relativo de  $P_a$  y otra raíz positiva donde hay un máximo relativo. Además  $P_a(a^2) = a^6 + 1 > 0$  para todo  $a$ ,  $P_a(\frac{-a^2}{3}) = \frac{-5a^6}{27} + 1 < 0$  para todo  $a \neq 0, 1$ . De Aquí en mas  $\mathcal{M} = \{M_a\}_{a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}}$ , para toda matriz en esta familia tenemos tres valores propio reales:

$$\alpha_a < \frac{-a^2}{3} < \beta_a < 0 < a^2 < \gamma_a.$$

que verifican además  $\alpha_a \beta_a \gamma_a = 1$ .

A continuación queremos demostrar el siguiente teorema, clave para la construcción de la familia  $\mathcal{F}$ .

**Lema 4.1.1.** *Existe  $K > 0$  tal que para todo  $a$ ,  $\alpha_a = K_a \frac{-a^2}{3}$ ,  $\gamma_a = K'_a a^2$  donde  $1 < K_a, K'_a < K$ .*

*Demostración.* Consideramos primero la raíz  $\alpha_a$ . Tenemos del teorema fundamental del cálculo

$$\int_{\alpha_a}^{\frac{-a^2}{3}} P'(\lambda) d\lambda > - \int_{\frac{-a^2}{3}}^0 P'(\lambda) d\lambda$$

Supongamos que  $\alpha_a < \frac{-2a^2}{3}$ , tenemos entonces  $-\int_{\frac{-a^2}{3}}^0 P'(\lambda)d\lambda = -\int_{\frac{-2a^2}{3}}^{\frac{-a^2}{3}} P'(\lambda + \frac{a^2}{3})d\lambda$

de ahí que  $\int_{\alpha_a}^{\frac{-a^2}{3}} P'(\lambda)d\lambda > -\int_{\frac{-2a^2}{3}}^{\frac{-a^2}{3}} P'(\lambda + \frac{a^2}{3})d\lambda$ , y por lo tanto  $\int_{\frac{-2a^2}{3}}^{\frac{-a^2}{3}} P'(\lambda) + P'(\lambda + \frac{a^2}{3})d\lambda > 0$ .

Por su parte  $P'(\lambda) + P'(\lambda + \frac{a^2}{3}) \leq 0$  para todo  $\lambda \in [\frac{-2a^2}{3}, \frac{-a^2}{3}]$ . Esto se puede ver considerando la derivada segunda  $P''(\lambda) + P''(\lambda + \frac{a^2}{3}) = -6\lambda^2 + 2a^2 + -6(\lambda + \frac{a^2}{3})^2 + 2a^2$  lo cual considerado con  $\lambda \in [\frac{-2a^2}{3}, \frac{-a^2}{3}]$  es menor o igual a  $-6\frac{a^4}{9} + 4a^2 \leq 0$ . Por su parte  $P'(\lambda) + P'(\lambda + \frac{a^2}{3})$  en  $\lambda = \frac{-2a^2}{3}$  es igual a  $P'(\frac{-2a^2}{3}) + P'(\frac{-a^2}{3}) = P'(\frac{-2a^2}{3}) < 0$ , concluyendo lo antes dicho, demostrando así el absurdo de suponer  $\alpha_a < \frac{-2a^2}{3}$ .

Para  $\gamma_a$  tenemos

$$\int_{\frac{-a^2}{3}}^{a^2} P'(\lambda)d\lambda > -\int_{a^2}^{\gamma_a} P'(\lambda)d\lambda$$

Supongamos  $\gamma_a > \frac{7a^2}{3}$ , entonces  $-\int_{a^2}^{\gamma_a} P'(\lambda)d\lambda > -\int_{a^2}^{\frac{7a^2}{3}} P'(\lambda)d\lambda$ . Por su parte  $\int_{\frac{7a^2}{3}}^{a^2} P'(\lambda)d\lambda = \int_{\frac{4a^2}{3}}^{a^2} P'(\lambda + \frac{4a^2}{3})d\lambda$ . Tenemos entonces:  $\int_{\frac{-a^2}{3}}^{a^2} P'(\lambda) + P'(\lambda + \frac{4a^2}{3})d\lambda > 0$ .

Por otro lado observa que  $P'(\lambda) + P'(\lambda + \frac{4a^2}{3}) \leq 0$ . Para ver esto consideramos nuevamente  $P''(\lambda) + P''(\lambda + \frac{4a^2}{3}) = -6\lambda^2 + 2a^2 - 6(\lambda + \frac{4a^2}{3})^2 + 2a^2$ , donde si  $\lambda \in [-\frac{a^2}{3}, a^2]$  esta acotado superiormente por  $-6(\frac{a^4}{9} + a^4) + 4a^2$  que es menor que cero. Por otro lado  $P'(\lambda) + P'(\lambda + \frac{4a^2}{3}) \leq 0$  en  $\lambda = \frac{-a^2}{3}$  vale 0. Por lo tanto es absurdo suponer  $\gamma_a > \frac{7a^2}{3}$ .

Entonces basta considerar  $K = 10$ , y tenemos el teorema. □

**Corolario 4.1.2.** *Existe una familia de matrices  $\mathcal{I} = \{B_a\}_{a \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}} \subset SL(3, \mathbb{Z})$  que verifica:*

*$B_a$  es una matriz hiperbólica de determinante uno con valores propios  $0 < \lambda_{s_a} < \lambda_{c_a} < 1 < \lambda_{u_a}$ .*

*Existen  $K_1, K_2 > 0$  tales que para todo  $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$   $\lambda_{s_a} = K_a \frac{1}{a^4}$ ,  $\lambda_{c_a} = K'_a \frac{1}{a^4}$  y  $\lambda_{u_a} = \frac{a^8}{K_a K'_a}$  donde  $K_1 < K < K' < K_2 \leq 1$ .*

*$E_a^s = E_{\lambda_{s_a}} \oplus E_{\lambda_{c_a}}$ ,  $E_a^u = E_{\lambda_{u_a}}$  se proyectan densamente en  $\mathbb{T}^3$ .*

## 4.2. Construcción de la familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ .

Definimos  $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$  como el conjunto de elementos construidos a partir de las matrices en  $\mathcal{I}$ .

Veremos a continuación que dado  $r \in (0, 3)$  existe  $a_r \in \mathbb{N}$ , tal que para todo  $a > a_r$  se tiene para los elementos de  $\mathcal{F}$  asociados a  $I_a$ , la foliación inestable con regularidad por lo menos  $C^r$ .

Además como se advirtió en el capítulo 3, se tiene para  $g \in \mathcal{F}$  asociado a  $B \in \mathcal{I}$ :

$\lambda_{uu}(g) > 2\sqrt{2}$ : el el capítulo 2 se consideró siempre que los conos de 45 grados respecto a la dirección  $E_{\lambda_u}$  sean  $dg$  invariantes. De esta forma el fibrado inestable esta siempre contenido en este cono.

Por lo visto en ese mismo capítulo siendo  $v$  un elemento de dicho cono:

$\| dg_\xi(v) \| > \| A_k(\xi)(v) \| - k(1 + \frac{2}{\sqrt{2}}) \| v \| > [\lambda_u - \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_s + \beta(0) + \lambda_c + \beta(0)) - k\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}] \| v \|$  lo cual siendo que  $k < \frac{1}{4}$  es mayor a  $[\lambda_u - 2(1 + \lambda_c - \lambda_s) - 2] \| v \|$ .

Luego  $\| dg_\xi |_{E^c(\xi)} \| > \lambda_u - 6$ , ya que  $\lambda_s < \lambda_c < \frac{1}{4}$  para todos los elementos en  $\mathcal{I}$ . Por su parte se tiene  $\lambda_u > 16$ , luego  $\| dg_\xi \| > 10 > 2\sqrt{2}$ .

$\alpha(K) < \frac{1}{4}$ : como se vio en el capítulo 3 basta que  $\lambda_c < \frac{1}{4}$ , lo cual es cierto para todos los elementos en  $\mathcal{I}$ .

Por lo tanto, todo difeomorfismos  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  inducido a partir de un elemento de  $\mathcal{F}$  verifica:

$f$  es minimal.

$f$  es semiconjugado a alguna traslación (estas dos propiedades se dan para todo elemento en  $\mathcal{M}$ ).

$f$  tiene segmentos estables y verifica las propiedades Point-distal, Non-distal.

$f$  es únicamente ergódico.

### 4.3. Diferenciabilidad de $E^{uu}$ a través del teorema de la sección $C^r$ .

En esta sección construimos la foliación inestable para los elementos de la familia  $\mathcal{F}$ , utilizando el siguiente teorema que nos permitirá encontrar alto grado de diferenciabilidad para las mismas.

### 4.3.1. Teorema de la sección $C^r$ .

A continuación definiremos los objetos necesarios para enunciar el teorema de la sección  $C^r$ , que es un teorema muy utilizado en sistemas dinámicos para la construcción de foliaciones invariantes. En particular este teorema permite encontrar alta diferenciabilidad para dichas foliaciones, lo cual con técnicas convencionales siempre es un problema difícil.

Dicho teorema surge del Análisis en espacios de dimensión infinita, y tiene una referencia clásica en [H-P-S].

#### Definición 4.3.1.

Un fibrado vectorial de dimensión  $n$  es una mapa continuo  $\pi : L \rightarrow M$  tal que:

- o  $\pi^{-1}(\xi) = L_\xi$  es un espacio vectorial para todo  $\xi \in M$ .
- o existe  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  cubrimiento por abiertos de  $M$  y  $h_\alpha^{-1} : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  homeomorfismo, tal que se verifica  $h_\alpha(\xi, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow L_\xi$  es un isomorfismo lineal.

Si la topología relativa en  $L_\xi$  esta dada por una norma para todo  $\xi \in M$ , decimos que es un fibrado vectorial *Finsler*.

Si la familia  $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  es una estructura diferenciable  $C^r$  para  $L$ , decimos que  $L$  es un fibrado vectorial  $C^r$ .

Dado  $r \in \{0\} \cup \mathbb{R}^+$  y  $L$  fibrado vectorial  $C^r$  llamamos sección  $C^r$  a cualquier función  $\sigma : M \rightarrow L$  de clase  $C^r$  tal que  $\sigma(\xi) \in L_\xi$  para todo  $\xi \in M$ .

#### Teorema 4.3.1. Teorema de la sección $C^r$ .

Sea  $g : M \rightarrow M$  difeomorfismo,  $\pi : L \rightarrow M$  fibrado vectorial finito dimensional del tipo *Finsler*.

Sea  $F : L \rightarrow L$  continua tal que  $F(L_\xi) = L_{g(\xi)}$ , llamamos  $l_\xi$  a la constante de Lipchitz de  $F_\xi = F|_{L_\xi}$ .

Entonces si  $l_\xi < 1$  para todo  $\xi \in M$ , existe una única sección  $\sigma$  tal que  $F(\sigma(\xi)) = \sigma(g(\xi))$  para todo  $\xi \in M$ .

Además si se tiene  $M$  variedad  $C^r$ ,  $L$  fibrado vectorial  $C^r$  de  $M$ ,  $g$  y  $F$  de clase  $C^r$ , y siendo  $\tau_\xi = \|(dg_\xi)^{-1}\|$  se cumple  $l_\xi \tau_\xi^r < 1$ , entonces  $\sigma$  es de clase  $C^r$ .

Teniendo en cuenta que queremos utilizar el teorema anterior para determinar  $E^{uu}$  y su grado de diferenciabilidad, estableceremos a continuación el fibrado vectorial Finsler  $L$  que será utilizado.

Para un elemento  $g \in \mathcal{F}$  definimos:

Definimos  $L = \{(\xi, t) : \xi \in \mathbb{T}^3, t \in L(E_{\lambda_u}, E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c})\}$  donde  $L(E_{\lambda_u}, E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c})$  son las transformaciones lineales de  $E_{\lambda_u}$  en  $E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c}$ . A este espacio lo dotamos de una topología dada por  $d((\xi_1, t_1), (\xi_2, t_2)) = \max\{d_{\mathbb{T}^3}(\xi_1, \xi_2), \|t_1 - t_2\|_\infty\}$ .

Definimos  $\pi : L \rightarrow \mathbb{T}^3$  como  $\pi(\xi, t) = \xi$  y obtenemos un fibrado vectorial del tipo Finslered, donde la norma en cada fibra es  $\|\cdot\|_\infty$ .

Por su parte es fácil ver que existe una estructura diferenciable para  $L$  compatible con la topología antes definida, de manera que se tiene un difeomorfismo  $C^\infty i : L \rightarrow \{(\xi, v) : v \in T_\xi \mathbb{T}^3, v = ae_{\lambda_s} + be_{\lambda_c} + e_{\lambda_u}\} = C$ , donde  $C$  es una variedad  $C^\infty$  encajada en  $T\mathbb{T}^3$ .

Para esto último, hay que definir  $i(\xi, t)$  como el vector dado por  $gr(t) \cap \{xe_{\lambda_s} + ye_{\lambda_c} + e_{\lambda_u} : x, y \in \mathbb{R}\}$  donde  $gr(t)$  es el subespacio en  $T_\xi \mathbb{T}^3$  dado por  $e_{\lambda_u} + t(e_{\lambda_s})$ .

Claramente su inversa surge de considerar cualquier elemento  $(\xi, v)$  de  $C$  y asociarle  $(\xi, t)$  donde  $t$  es la única transformación tal que  $v = t(e_{\lambda_s}) + e_{\lambda_u}$ .

### 4.3.2. Transformada del gráfico.

Fijamos  $g \in \mathcal{F}$ ,  $\pi : L \rightarrow \mathbb{T}^3$  el fibrado que hemos definido. Consideramos  $i : L \rightarrow C$  el difeomorfismo que hemos definido anteriormente, y definimos  $F : L \rightarrow L$  como sigue:

$$F(\xi, t) = i^{-1}dg(i(\xi, t))$$

que es un difeomorfismo  $C^\infty$ .

Llamamos a  $F$  transformada del gráfico y tenemos la siguiente observación:

*Observación 4.3.1.* Consideramos  $g \in \mathcal{F}$ ,  $F$  la transformada del gráfico asociada,  $\sigma$  sección  $C^r$  dada por el teorema 4.3.1.

Entonces existe un único campo  $X = i(\sigma)$  en  $C \subset T\mathbb{T}^3$ , de clase  $C^r$ , tal que es el único campo en  $C$  que verifica  $dg_\xi(X(\xi)) \in \langle X(g(\xi)) \rangle$  para todo  $\xi \in \mathbb{T}^3$ .

Además se tiene  $E_\xi^{uu} = \langle X(\xi) \rangle$  para todo  $\xi \in \mathbb{T}^3$  y por lo tanto  $E^{uu}$  es un fibrado  $C^r$ .



Por lo tanto para cumplir nuestro objetivo, en virtud del teorema de la sección  $C^r$ , basta calcular la constante de Lipchitz  $l_\xi$ ,  $\tau_\xi$ , y luego fijado  $r \in (0, 3)$  probar que algún elemento  $g \in \mathcal{F}$  cumple:

$$l_\xi \tau_\xi^r < 1$$

para todo  $\xi \in \mathbb{T}^3$ .

### 4.3.3. Cálculo de la constante de Lipchitz, $l_\xi$ .

A continuación queremos estimar  $l_\xi$  para la transformada del gráfico. Consideramos  $t_1, t_2 \in L_\xi$  elementos distintos, tenemos que estimar  $\frac{\|F_\xi(t_1) - F_\xi(t_2)\|}{\|t_1 - t_2\|}$ .

Hacemos para facilitar los cálculos la siguiente definición.

Definimos  $T_\xi$  como la transformación lineal que en la base  $\{e_s, e_c, e_u\}$  esta dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_s + Z(z)(\beta(r) + \beta'(r)\frac{xy}{r}) & Z(z)\beta'(r)\frac{xy}{r} \\ Z(z)\beta'(r)\frac{xy}{r} & \lambda_c + Z(z)(\beta(r) + \beta'(r)\frac{y^2}{r}) \end{pmatrix}$$

*Observación 4.3.2.* Sean  $t_1, t_2 \in L_\xi$ ,  $i(\xi, t_i) = (\xi, a_i e_s + b_i e_c + e_u)$ . Tenemos entonces:

- 1  $\|t_1 - t_2\|_\infty = \|(a_1 - a_2)e_s + (b_1 - b_2)e_c\|$ .
- 2  $i(F_\xi(t_i)) = (g(\xi), A_i e_s + B_i e_c + e_u)$  donde  $A_i = \frac{1}{\lambda_u}([T_\xi(a_i e_s + b_i e_c)]_s + Z'(z)\beta(r)x)$   
y  $B_i = \frac{1}{\lambda_u}([T_\xi(a_i e_s + b_i e_c)]_c + Z'(z)\beta(r)y)$ .

*Demostración.* Ambas propiedades surgen de cálculos directos. □

Si  $\xi \in \mathbb{T}^3 \setminus B(\pi(0), \frac{1}{2})$  entonces

$$\frac{\|F_\xi(t_1) - F_\xi(t_2)\|_\infty}{\|t_1 - t_2\|_\infty} \leq \frac{\left\| \left( \frac{\lambda_s}{\lambda_u}(a_1 - a_2), \frac{\lambda_c}{\lambda_u}(b_1 - b_2) \right) \right\|}{\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}} \leq \frac{\lambda_c}{\lambda_u}$$

Si  $\xi \in B(\pi(0), \frac{1}{2})$  entonces

$$\frac{\|F_\xi(t_1) - F_\xi(t_2)\|_\infty}{\|t_1 - t_2\|_\infty} =$$

$$\frac{1}{\lambda_u} \frac{\| (A_1 - A_2)e_s + (B_1 - B_2)e_c \|}{\| (a_1 - a_2)e_s + (b_1 - b_2)e_c \|} =$$

$$\frac{\| T_\xi \|_\infty}{\lambda_u}$$

Queremos estimar entonces  $\| T_\xi \|_\infty$ .

Tenemos que  $T_\xi = D + S_\xi$  donde

$$D \text{ tiene matriz asociada } \begin{pmatrix} \lambda_s & 0 \\ 0 & \lambda_c \end{pmatrix}$$

$S_\xi$  tiene asociada la matriz

$$\begin{pmatrix} Z(z)(\beta(r) + \beta'(r)\frac{x^2}{r}) & Z(z)\beta'(r)\frac{xy}{r} \\ Z(z)\beta'(r)\frac{xy}{r} & Z(z)(\beta(r) + \beta'(r)\frac{y^2}{r}) \end{pmatrix}$$

que es una matriz simétrica que tiene como vectores propios a  $(x, y)$ ,  $(-y, x)$  asociado a los valores propios  $\lambda_1 = Z(z)(\beta(r) + \beta'(r)r)$  y  $\lambda_2 = Z(z)\beta(r)$ . Tenemos entonces

$$-k < \lambda_1 < \lambda_2 < \beta(0), \lambda_2 > 0, \lambda_2 - \lambda_1 < k \quad (4.1)$$

Luego tenemos  $\| T_\xi \|_\infty \leq \lambda_c + \lambda_2 + k$ , de donde podemos concluir que  $l_\xi \leq \frac{\lambda_c + \lambda_2 + k}{\lambda_u}$ .

Por lo tanto podemos concluir que para todo  $\xi \in \mathbb{T}^3$   $l_\xi \leq \frac{\lambda_c + \lambda_2 + k}{\lambda_u}$ , luego si consideramos  $a$  suficientemente grande, podemos asegurar para los difeomorfismos de  $\mathcal{F}$  asociados a dichos índices  $l_\xi < 1$ .

Entonces para estos elementos de la familia existe un campo  $X$  según se anuncia en la observación 4.3.1, que nos da el fibrado inestable  $E^{uu}$ .

#### 4.3.4. Cálculo de $\tau_\xi$ .

Nos centraremos ahora en estimar  $\tau_\xi = \| (dg_\xi)^{-1} \|$ .

Si  $\xi \in \mathbb{T}^3 \setminus B(\pi(0), \frac{1}{2})$  entonces

$$\tau_\xi \leq \frac{1}{\lambda_s}$$

Si  $\xi \in B(\pi(0), \frac{1}{2})$  entonces  $\tau_\xi \leq \| (T_\xi)^{-1} \|_\infty + \frac{1}{\lambda_u}$ .

Esto último se puede ver como sigue:

Sea  $v \in E_{\lambda_u}$  tal que  $dg_\xi(v) = w$  con  $\| w \| = 1$ , luego para cualquier vector  $u \in \mathbb{R}^3$  de norma uno se tiene:

$$\| (dg_\xi)^{-1}(u) \| = \| (dg_\xi)^{-1}(Aw + w_{c,s}) \|$$

donde  $A < 1$  y  $w_{c,s}$  es un vector en  $E_{\lambda_s} \oplus E_{\lambda_c}$  de norma menor que uno. Entonces se tiene:

$$\| (dg_\xi)^{-1} \|_\infty \leq \| v \| + \| (T_\xi)^{-1} \|_\infty$$

Por su parte podemos considerar el vector  $v = \frac{1}{\sqrt{\lambda_u^2 + (Z'(z)\beta(r))^2(x^2+y^2)}} e_{\lambda_u}$ , cuya norma es  $\| v \| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_u^2 + (Z'(z)\beta(r))^2(x^2+y^2)}} \leq \frac{1}{\lambda_u}$ .

Queremos estimar entonces  $\| (T_\xi)^{-1} \|$ .

$T_\xi = D + S_\xi$  como se describió en la sección anterior. Luego podemos escribir  $T_\xi = A + \tilde{S}_\xi$  Donde

$$A \text{ tiene matriz asociada } \begin{pmatrix} \lambda_s - \lambda_c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{S}_\xi$  tiene matriz asociada

$$\begin{pmatrix} Z(z)(\beta(r) + \beta'(r)\frac{x^2}{r}) + \lambda_c & Z(z)\beta'(r)\frac{xy}{r} \\ Z(z)\beta'(r)\frac{xy}{r} & Z(z)(\beta(r) + \beta'(r)\frac{y^2}{r}) + \lambda_c \end{pmatrix}$$

que es una matriz simétrica con vectores propios  $(x, y)$ ,  $(-y, x)$  asociado a los valores propios  $\lambda_1 + \lambda_c$  y  $\lambda_2 + \lambda_c$  (ver sección anterior).

Sea  $\mathcal{E}$  la elipse centrada en el origen con eje mayor en  $v_1 = (x, y)$  y eje menor  $v_2 = (-y, x)$  y vértices dados por  $\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_c}$  y  $\frac{1}{\lambda_2 + \lambda_c}$ .

Tenemos entonces:  $\tilde{S}_\xi(\mathcal{E}) = S^1$ ,  $T_\xi(\mathcal{E}) \subset B(S^1, \frac{\lambda_c - \lambda_s}{\lambda_1 + \lambda_c})$ .

Por su parte  $\frac{\lambda_c - \lambda_s}{\lambda_1 + \lambda_c} < \frac{\lambda_c - \lambda_s}{\lambda_c - k} = R < 1$ .

Siendo  $C_{0,1-R}$  la circunferencia de centro 0 y radio  $1-R$ , tenemos  $(T_\xi)^{-1}(C_{0,1-R}) \subset cc(\mathcal{E})$  (envolvente convexa de  $\mathcal{E}$ ).

Luego  $(T_\xi)^{-1}(S^1) \subset \frac{1}{1-R}cc(\mathcal{E})$ , de donde

$$\| (T_\xi)^{-1} \| \leq \frac{\lambda_c - k}{\lambda_s - k} \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_c}$$

Tenemos entonces para  $\xi \in \pi(S)$

$$\tau_\xi \leq \frac{\lambda_c - k}{\lambda_s - k} \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_c} + \frac{1}{\lambda_u}.$$

### 4.3.5. Diferenciabilidad $C^r$ con $r \in (0, 3)$ para $E^{uu}$ .

En esta sección mostraremos que dado  $r \in (0, 3)$  existen difeomorfismos de  $\mathcal{F}$  tales que  $X^u$  es  $C^r$ .

Para esto dado  $g \in \mathcal{F}$  definimos para  $\xi \in \mathbb{T}^3$   $d_\xi(r) = l_\xi \cdot \tau_\xi^r$ . Mostraremos que para  $r < 3$  existe  $g \in \mathcal{F}$  para el cual  $d_\xi(r) < 1$  para todo  $\xi \in \mathbb{T}^3$ .

Tenemos las siguientes estimaciones:

$$\text{Fijado } f \in \mathcal{F}, l_\xi \leq \frac{\lambda_c + \lambda_2 + k}{\lambda_u} \text{ y } \tau_\xi \leq \frac{\lambda_c - k}{\lambda_s - k} \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_c} + \frac{1}{\lambda_u}$$

Tenemos según la sección 4.1, para  $g \in \mathcal{M}$  una matriz  $B \in Sl(3, \mathbb{Z})$  con raíces:

$\lambda_s = \frac{K_a}{a^4}$ ,  $\lambda_c = \frac{K'_a}{a^4}$  y  $\lambda_u = \frac{a^8}{K_a \cdot K'_a}$  con  $0 < K_1 < K_a < K'_a < K_2 \leq 1$  siendo  $K_1, K_2$  constantes positivas independientes de  $a$ .

Lo que se hará, es tomar el límite  $\lim_a d_\xi(r)$  para  $r$  fijo en  $(0, 3)$  suponiendo que  $k = k(a)$ . Daremos en cada  $a$  una cota superior para  $k(a)$  de forma que dicho límite sea nulo, y además converja uniformemente en  $\xi$ .

Luego, podremos asegurar que fijado  $r \in (0, 3)$  existe un elemento de  $\mathcal{F}$  tal que para dicho elemento  $d_\xi(r) < 1$ , para todo  $\xi \in \mathbb{T}^3$ . Lo cual como se dijo, garantiza fibrado inestable de clase  $C^r$ .

Si  $\xi \in B(\pi(0), \frac{1}{2})^c$

$d_\xi(r) = \frac{\lambda_c}{\lambda_u} \left(\frac{1}{\lambda_s}\right)^r \leq C \frac{1}{a^{12}} a^{4r}$  donde  $C$  es una constante positiva independiente de  $a$ , luego  $\lim_a d_\xi(r) = 0$  sin importar la constante  $k$  que se elija en cada caso. Es bueno aclarar aquí que con  $r = 3$  ya no podemos decir lo mismo, esto es justamente el límite de nuestra construcción para conseguir mayor diferenciabilidad aún.

Si  $\xi \in B(\pi(0), \frac{1}{2})$ :

Si observamos el término  $\tau_\xi$  tenemos dos sumandos, donde el único de ellos que no tiende a cero con  $a$  es  $\frac{\lambda_c - k}{\lambda_s - k} \frac{1}{\lambda_c + \lambda_1}$  ya que  $\frac{\lambda_c - k}{\lambda_s - k} > 1$ .

Por lo tanto, una condición suficiente para que  $\lim_a d_\xi(r) = 0$  en los distintos casos, es que

$$\lim_a \frac{\lambda_c + \lambda_2 + k}{\lambda_u} \left[ \frac{\lambda_c - k}{\lambda_s - k} \frac{1}{\lambda_c + \lambda_1} \right]^r = 0$$

Calculemos entonces este último límite:

sumando y restando  $\lambda_1$  en el denominador del primer facto tenemos:

$$\lim_a \frac{1}{\lambda_u} \left[ \frac{1}{(\lambda_c + \lambda_1)^{r-1}} + \frac{2k}{(\lambda_c + \lambda_1)^r} \right] \frac{(\lambda_c - k)^r}{(\lambda_s - k)^r}$$

Siendo que  $\lambda_c + \lambda_1 > \lambda_c - k$  se tiene que dicho límite es menor a:

$$\lim_a \frac{1}{\lambda_u} [\lambda_c - k + 2k] \frac{1}{(\lambda_s - k)^r}$$

Suponemos ahora que para la matriz  $I_a$  tenemos el elemento  $g \in \mathcal{F}$  definido a partir de  $k(a) < \frac{\lambda_s}{2}$ . Luego el último límite es menor o igual a:

$$8 \lim_a \frac{\lambda_c}{\lambda_u} \frac{1}{(\lambda_s)^r}$$

Lo cual visto las propiedades de la familia de matrices  $\mathcal{I}$  es menor o igual, para  $K$  cierta constante fija, a:

$$8K \lim_a \frac{a^{4r}}{a^{12}} = 0$$

ya que  $r < 3$ .

## 4.4. Fin de la demostración del teorema 1.4.1.

Concluimos entonces que cuando dado  $r \in (0, 3)$  existen difeomorfismos  $g \in \mathcal{F}$  tal que su campo  $X^u$  de clase  $C^r$ , y por lo tanto su fibrado inestable  $E^{uu}$  lo es.

Obtenemos así que dado  $r \in (0, 3)$  podemos considerar  $g \in \mathcal{F}$  que induce un ejemplo  $f$  de clase  $C^r$ , que es minimal y semiconjugado en  $\mathbb{T}^2$ . Además como se vio al principio de este capítulo  $f$  tiene las propiedades Point-distal, Non-distal y es únicamente ergódico.

# Capítulo 5

## Preguntas.

A continuación dejaremos asentadas preguntas que surgen entorno a lo construido en la tesis.

Estas preguntas surgen de dos tipos de enfoques:

El primero es desde el punto de vista de la *teoría de dinámica en el toro*  $\mathbb{T}^2$ .

El segundo es desde el punto de vista de los ejemplos en  $\mathbb{T}^3$  parcialmente hiperbólicos.

### **Primer enfoque.**

Nos preguntamos si será posible a través de este método, construir ejemplos minimales no únicamente ergódicos. Para esto suponemos que se debería hacer las modificación de los Anosov, intentando generar conjuntos hiperbólicos de medida positiva con índice inestable 2. De forma que el conjunto de puntos de  $\mathbb{T}^3$  cuya preimagen por la semiconjugación  $h$  es un solo punto, no tenga medida total.

Otra pregunta es si podemos construir *muchos* intervalos en  $\mathbb{T}^2$  que sean fibras de la semiconjugación  $\tilde{h}$ .

La idea es que si existiera un conjunto hiperbólico tipo herradura de índice inestable 2 para los sistemas  $g$ , luego necesariamente aparecería una cantidad no numerable de dichos intervalos.

Para que tal conjunto hiperbólico apareciera, bastaría con que la foliación estable fuerte de  $g$  sea minimal, lo cual creemos que es cierto o en todo caso se puede construir el sistema para que así sea.

Si consideramos la foliación centro estable, y la centro inestable de los sistemas modificados de Anosov, estas foliaciones generan foliaciones en  $\mathbb{T}^2$  que son invariantes para los sistemas construidos. Además sabemos que la foliación generada por la centro inestable será minimal en  $\mathbb{T}^2$ .

La pregunta que nos hacemos es que tanta diferenciabilidad se podrá conseguir para dichas foliaciones.

Otra pregunta que nos surgió es la siguiente: serán estos sistemas conjugados a un sistema del tipo cuasi-periódico (ver introducción).

Si consideramos la foliación por círculos verticales (conjuntos de la forma  $\{x\} \times S^1$ ) para  $\mathbb{T}^2$  y llevamos para atrás por  $h$  cada una de las hojas, obtenemos por cada hoja un conjunto formado por puntos y segmentos. Si esto diera un círculo es de pensar que nuestro sistema sería conjugado a uno cuasiperiódico.

### **Segundo enfoque.**

Desde el punto de vista de los sistemas parcialmente hiperbólicos, podemos hacer la siguiente pregunta general: serán siempre minimales las foliaciones inestable y estable?.

Por lo menos podríamos hacer tal pregunta sobre los sistemas que inducen homeomorfismos en  $\mathbb{T}^2$  como se hizo en esta tesis.

Este es un caso en que el *ida y vuelta* del que hablamos en la introducción, funcionaría en dirección contraria a como fue usado en la tesis.

# Bibliografía

- [B] P. Bohl. Über die hinsichtlich der unabhängigen und abhängigen variablen periodische differentialgleichung erster ordnung. *Acta Math.* 40 (1916), 321-336.
- [Be] F. Béguin. Ensembles de rotations des homéomorphismes du tore  $\mathbb{T}^2$ . *Notas*.
- [Bo] P. Boyland. New dynamical invariants on hyperbolic manifolds. *Israel Journal of Mathematics.* 119, 253-289 (2000).
- [Br] Michael Brin. On dynamical coherence. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 23 (2003), no. 2, 395–401.
- [B-D-V] C. Bonatti, L. Diaz and M. Viana. Beyond Uniform Hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences . Mathematical Physics III.* Springer-Verlag (2005).
- [B-C-L] François Béguin, Sylvain Crovisier and Frédéric Le Roux. Construction of courbes minimal uniquely ergodic homeomorphisms on manifolds: The Denjoy–Rees Technique. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 40, 2007, p. 251 à 308.
- [C,2] S. Crovisier. Perturbation de la dynamique de difféomorphismes en topologie  $C^1$ . Preprint, arXiv:0912.2896 (2009).
- [D] A. Denjoy. Sur les dérivées par les équations différentielles à la surface du tore. *J. de Math Pures Appl.* IX. Ser. 11 (1932), 333-375.
- [F] H. Furstenberg. Strict ergodicity and transformation of the torus. *American Journal of Mathematics*, 83, (1961) 573-601.
- [Fr] J. Franks. Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms. *Erg. Th. and Dynam. Sys.* (1988), 8, 99-107.



- [Fr,2] J. Franks. Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.* 311 (1989), no. 1, 107–115.
- [H] M. Herman. Une méthode pour minorer les exposants de Lyapunov et quelques exemples montrant le caractère local d’un théorème d’Arnold et de Moser sur le tore de dimension 2. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 58,453-502, 1983.
- [H-P-S] M. Hirsch, C. Pugh and M. Shub, *Invariant Manifolds*. Springer Lecture Notes in Math. (1977).
- [J] T. Jäger. Linearisation of conservative toral homeomorphisms. *Invent. Math.* 176(3):601-616 (2009).
- [J-S] T. Jäger y J. Stark Towards a classification for quasi-periodically Forced Circle Homeomorphisms. *J. Lond. Math. Soc.* 73(3), 727-744 (2006).
- [K] A. Katok. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Publ. Math. IHES* 51 (1980) 137–173.
- [L] P. Lessa. Rotation Vectors for Homeomorphisms of Non-Positively Curved Manifolds. [arXiv:1001.0053](https://arxiv.org/abs/1001.0053).
- [L-M] J. Llibre y R. MacKay. Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus isotopic to the identity. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 11 (1991), no. 1, 115–128.
- [M] R. Mañé. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer-Verlag.
- [M,2] R. Mañé. Contributions to the stability conjecture. *Topology* 17 (1978), 383–396.
- [Mc] P. McSweggen. Diffeomorphisms of the torus whit Wandering Domains. *Proceedings of the American Mathematical Society*. Vol. 117, No. 4 (1993) 1175-1186.
- [M-Z,1] Michal Misiurewicz y Krystyna Ziemian. Rotation sets for maps of tori. *J. London. Math Soc.* (2) 40 (1989), no.3, 490–506.
- [M-Z,2] Michal Misiurewicz y Krystyna Ziemian. Rotation sets and ergodic measure for torus homeomorphisms. *Fundam. Math.* 137 (1991), 45-52.
- [P] H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par équation différentielle. *J. de Math Pures Appl. Série III*, 7 (1881), 375-422, 8 (1882), 251-296.

- [PR] Rafael Potrie. Trabajo monográfico.
- [P-S] E. Pujals y M.Sambarino. A sufficient condition for robustly minimal foliations. *Er. Th. and Dynamical Systems*. 26, (2006), 281-289.
- [R] M. Rees. A point distal transformation of the torus, *Israel J. Math.*, 32 (1979) 201-208.
- [R,2] M. Rees. A minimal positive entropy homeomorphism of the torus, *Journal L.M.S.* 23 (1981) 537-550.