Dinámicas expansivas.

Joaquín Brum

24 de noviembre de 2008

1. Introducción

En esta monografía se tratará la dinámica de los homeomorfismos expansivos en variedades. Como ejemplos paradigmáticos tenemos los difeomorfismos de Anosov, y los difeomorfismos de pseudo-Anosov en superficies de genero mayor o igual a 2, los cuales pueden verse como Anosov's lineales en superfices planas con finitos puntos de singularización.

La clasificación de Thurston [Th] de las clases de isotopía de difeomorfismoss en superficies, dice que un difeomorfismo que no preserve una clase no trivial de isotopía libre de curvas, es isotópico a un expansivo. En el caso de ser isotópico a un difeomorfismo expansivo, el expansivo es único módulo conjugaciones y cualquier difeomorfismo en la clase es semiconjugado a éste. Lo anterior hace de un expansivo en una superficie un representante canónico de su clase de isotopía.

Comenzaremos exponiendo la clasificación de homeomorfismos expansivos en superficies, siguiendo el trabajo de Lewowicz [Lew2] (está clasificación fue realizada independientemente por [H]). En este trabajo se prueba la existencia de estructura de producto local en entornos reducidos de cualquier punto. Esto se logra gracias a la existencia de conexos estables de tamaño uniforme en todos los puntos de la variedad. Las propiedades de los conjuntos estables e inestables locales de semicontinuidad, intersección trivial local, de tener interior vacío, y que estabes e inestables formen "ángulos grandes"implican que la única forma de coexistir en la variedad es con la mayor regularidad posible (estuctura de producto local). Si la variedad es una superficie alcanza con saber que tengo un conexo, (basicamente porque desconecta localmente) para lograr la estructura, pero en dimensiones mayores no es suficiente con la existencia del mismo. De hecho hay ejemplos en dimensión tres, donde no hay estructura de producto local en toda la variedad [FrRo], siendo la dimensión de los conjuntos estables e inestables uno, en un abierto denso (el conjunto errante).

Siguiendo con esta eurística, Vieitez en [Vie1], y [Vie2], asume la existencia de un conjunto denso de puntos periódicos topológicamente hiperbólicos para un expansivo en una variedad de dimensión tres. Ahora, la existencia de un conjunto denso de puntos con variedades estables e inestables de tamaño uniforme y dimensión complementaria, implica la existencia de un abierto denso con estructura de producto local, probando finalmente que dicho abierto es toda la variedad, que ésta es un toro, y que el expansivo es conjugado a un Anosov lineal. Luego en [Vie4] Vieitez, asumiendo diferenciabilidad ($f \in C^{1+\varepsilon}$) y utlilizando técnicas de teoría ergódica diferenciables obtiene el mismo resultado, si el conjunto errante es vacío.

Luego, expondremos una generalización de los trabajos de Vieitez (realizada conjuntamente con Alfonso Artigue y Rafael Potrie [ABP]), sin restricciones en la dimensión de la variedad. En esta, asumiendo la existencia de un conjunto denso de puntos periódicos topológicamente hiperbólicos, obtenemos un abierto denso con estructura de producto local. Si además hay un punto periódico cuyo conjunto estable (o inestable) tenga codimensión uno, probaremos que la variedad tiene estructura de producto local uniforme, esta es un toro ($\mathbb{T}^n$), y el expansivo es conjugado a un Anosov lineal.

La eurística es la misma, pero debimos sustituir argumentos de conexión, por argumentos homológicos para probar que los conjuntos estables e inestables de puntos periódicos cercanos a uno dado se cortan. Una vez obtenida esta intersección se obtine la estructura de producto local utilizando el teorema de la invariancia del dominio. La forma de descartar las singularidades en el caso de que haya un periódico de codimensión uno, es probando que el conjunto de singularidades es estable, lo que implica que consiste de una cantidad finita de puntos, hecho que descartamos posteriormente. Finalmente la estructura de producto local obtenida nos da una foliación de codimensión uno, por hojas homeomorfas a $\mathbb{R}^{n-1}$ lo que implica que la variedad es un toro, y en este caso con la ayuda de un teorema de Hiraide tenemos que el expansivo es homeomorfo a un Anosov lineal.

Si observamos el producto de dos pseudo-Anosov, vemos que un abierto denso con estructura de producto local es un resultado óptimo sin la hipótesis de un periódico de codimensión uno (cabe recalcar que los difeomorfismos pseudo-Anosov, tienen un conjunto denso de puntos periódicos topologicamente hiperbólicos, y por tanto también lo tienen productos de ellos).

1.1. Definiciones y esquema de la monografía

En esta sección definiremos los conceptos que se usarán en la monografía y enunciaremos los resultados principales.

Definición 1.1. *Decimos que un homeomorfismo* $f \colon M \to M$ *es* expansivo *si existe* $\alpha > 0$ *tal que para todo* $x, y \in M$ *existe* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que* $dist(f^n(x), f^n(y)) > \alpha$.

Definición 1.2. *Decimos que* $p \in M$ *tiene estructura de producto local si existe un mapa* $h \colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to M$ *homeomorfismo sobre su imágen (*$p \in Im(h)$*) y* $\varepsilon > 0$ *tales que para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ *se cumple que* $h(\{x\} \times \mathbb{R}^{n-k}) = W^s_\varepsilon(h(x, y)) \cap Im(h)$ *y* $h(\mathbb{R}^k \times \{y\}) = W^u_\varepsilon(h(x, y)) \cap Im(h)$. *Diremos que la estructura de producto local es uniforme si existe* $r > 0$ *de forma tal que para todo* $x \in M$ *se cumple que los puntos de* $B_r(x)$ *admiten estructura de producto local.*

En la sección 3 se expondrá la clasificación de homeomorfismos expansivos en superfices basandonos en [Lew2], y [Lew3]. Un paso fundamental es encontrar que la expansividad implica la existencia de producto local en toda la variedad salvo finitos puntos.

La existencia de estas foliaciones ya alcanza como una obstrucción topológica para la existencia de homeomorfismos en la esfera S^2. En los casos de las superficies de género mayor o igual a uno, se utiliza la clasificación de las clases de isotopia de difeomorfismos para completar la clasificación.

Definición 1.3. *Decimos que un punto $p \in M$ de período l es* topológicamente hiperbólico *($p \in Per_H$) si f^l es localmente conjugado al mapa lineal $L\colon \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ dado por $L(x, y) = (x/2, 2y)$. En este caso decimos que $p \in Per_H^r \subset Per_H$ (también diremos que p es un p.t.h. de índice r).*

Observación 1.1. *Si $f : M \to M$ es un homeomorfismo expansivo y $z \in M$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma tal que si $S_z = cc_z(W^s(z) \cap B_\delta(z))$ entonces $S_z \subset W_\varepsilon^s(z)$. Para esto ver [Lew2].*

Siguiendo con esta eurística asumimos de las sección 5 en adelante la existencia de un conjunto denso de puntos periódicos topológicamente hiperbólicos, lo que junto con la observación previa nos da conjuntos estables e inestables de tamaño uniforme y dimensión complementaria en un conjunto denso de puntos. Por el Teorema 3.1 tenemos que $Per_H^0 = Per_H^n = \emptyset$ ya que no puede haber puntos estables.

Como es usual definimos los conjuntos estables e inestables de un punto $x \in M$ como $W^s(x) = \{y \in M : \operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) \to 0, n \to +\infty\}$ y $W^u(x) = \{y \in M : \operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) \to 0, n \to -\infty\}$. Los conjuntos estables e inestables locales (ε-local) se defininen como $W_\varepsilon^s(x) = \{y \in M : \operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\}$ y $W_\varepsilon^u(x) = \{y \in M : \operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \leq 0\}$. Denotaremos como $cc_p(X)$ a la componente conexa de $X \subset M$ que contiene a p.

Probamos una propiedad de separación homológica que verifican el conjunto estable y el inestable local de un punto $p \in Per_H^r$. La demostración de esta proposición sigue las ideas de [Vie1], [Vie2] cambiando la conexión (H^0) por módulos de homología de órdenes superiores, y se desarrolla en la sección 4. La propiedad es la siguiente.

Proposición 1.1. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo expansivo. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in M$, $p \in Per_H^k \cap B_\varepsilon(x)$ y $V \subset B_\varepsilon(x)$ homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ que contiene a p se cumple que $H_{n-k-1}(V \setminus S_p) \cong \mathbb{R}$ siendo $S_p = cc_p(V \cap W^s(p))$.*

Consideraremos el resultado análogo para la variedad inestable con identica demostración.

Observar que el conjunto de puntos con estructura de producto local es abierto. Llamaremos singulares a los puntos sin estructura de producto local.

Teorema 1.1. *Sea $f\colon M \to M$ un homeomorfismo expansivo tal que $\overline{Per_H} = M$. Entonces todo punto de Per_H tiene estructura de producto local. En particular, hay un abierto denso de puntos con estructura de producto local.*

Una vez conseguido esto, en [Vie2] se estudian las singularidades, descartando su existencia. Como fue comentado, en el producto de pseudo-anosov coexisten puntos periódicos topológicamente hiperbólicos densos y singularidades. En la sección 6.3, se verá que si $Per_H^{n-1} = Per_H$, puede descartarse le existencia de singularidades.

Vale la pena observar que un abierto denso con estructura de producto local, no implica a priori, que el índice de los puntos periódicos topológicamente hiperbólicos sea constante (aunque tenemos la fuerte convicción de que así es). En 6.2 probaremos que si $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$ o $Per_H^1 \neq \emptyset$ el índice es constante.

Teorema 1.2. *Sea $f : M \to M$ homeomorfismo expansivo que verifica que $\overline{Per_H} = M$. Entonces $Per_H^{n-1} = Per_H$ o $Per_H^{n-1} = \emptyset$. Análogamente para Per_H^1.*

Corolario 1.1. *Sea $f : M \to M$ homeomorfismo expansivo de una variedad conexa de dimensión 3 o 4 con $\overline{Per_H(f)} = M$. Entonces, todos los puntos periódicos topológicamente hiperbólicos tienen el mismo índice.*

Demostración. En dimensión 3 se cumple que $Per_H = Per_H^1 \cup Per_H^2$ (ver [Lew1] donde se prueba que no hay puntos estables) el teorema 1.2 concluye la prueba. En dimensión 4, se tiene $Per_H = Per_H^1 \cup Per_H^2 \cup Per_H^3$ y dado que si $Per_H^1 \cup Per_H^3 \neq \emptyset$ el índice es constante, (nuevamente por el teorema 1.2), tenemos lo que queríamos.

□

En la sección 6.3 estudiamos las singularidades en el caso de codimensión uno, descartando su existencia y concluyendo la existencia de una estructura de producto local uniforme en toda la variedad.

Definición 1.4. *Sea $f : M \to M$ homeomorfismo, decimos que verifica la propiedad de sombreado si es cierto que para todo $\alpha > 0$ existe $K > 0$ de forma tal que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ cumple que $dist(x_n, f(x_{n-1})) < \alpha$ entonces existe $x \in M$ de forma tal que $dist(f^n(x), x_n) < K$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Teorema 1.3. *Sea $f : M \to M$ homeomorfismo expansivo, que verifica que $\overline{Per_H} = M$ y que $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$ o que $Per_H^1 \neq \emptyset$. Entonces, hay estructura de producto local uniforme en toda la variedad, en particular se cumple la propiedad del sombreado.*

En el caso anterior, se sabe del trabajo de Franks, que si la foliación es diferenciable, la variedad es homeomorfa a $\mathbb{T}^n$. Este también es el caso sin la hipótesis de diferenciablidad, para probarlo se requiere adaptar los argumentos que aparecen en [Fr] y [Vie3], donde se prueba en dimensión 3 sin la hipótesis de diferenciabilidad.$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Corolario 1.2. *Sea $f : M^n \to M^n$ homeomorfismo expansivo, que verifica que $\overline{Per_H} = M^n$. Supongamos que $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$ o que $Per_H^1 \neq \emptyset$. Entonces $M = \mathbb{T}^n$, y f es conjugado a un difeomorfismo de Anosov Lineal.*

Demostración. Esto es consecuencia del teorema 1.3 junto con el resultado de [H] que asegura que un homeomorfismo expansivo de $\mathbb{T}^n$ con la propiedad del sombreado es conjugado a un Anosov Lineal.

$\square$

2. Preliminares

2.1. Topología de puntos

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico metrizable y separable. Diremos que $\emptyset$ tiene dimensión -1. Decimos que X, tiene dimensión $\leq n$ en un punto x, si éste tiene una base de entornos abiertos, cuyos bordes tienen dimensión $\leq n-1$. Decimos que X tiene dimensión n en p, si tiene dimensión $\leq n$ y es falso que tiene dimensión $\leq n-1$. Si X tiene dimensión n en todos sus puntos, decimos que tiene dimensión n.*

La dimensión topológica es claramente un invariante topológico. Esta dimensión coincide con los conceptos de dimensión para variedades.

Teorema 2.1. *Un espacio que es unión numerable de cerrados de dimensión $\leq n$, tiene dimensión $\leq n$.*

Para la prueba de esto ver [HW] pg. 30.

Teorema 2.2. *Una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto de una variedad de dimensión n, tenga dimensión n, es que contenga un abierto de la misma*

Teorema 2.3. *Una variedad de dimensión n no se puede desconectar quitando un subconjunto de dimensión topológica de dimensión $\leq n-2$.*

Las pruebas de estos resultados se pueden encontrar también en [HW] pg. 44,48 respectivamente.

Un teorema fundamental para encontrar estructura de producto local es el siguiente, el que llamaremos Teorema de la invariancia del dominio:

Teorema 2.4. *Si $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es contínua e inyectiva, entonces es abierta*

Para una prueba de esto ver [Sp].

Finalmente, para clasificar los homeos de superficies, utilizaremos el siguiente teorema de topología del plano.

Teorema 2.5. *Si A y B son subconjuntos compactos conexos del plano. Entonces $A \cup B$ separa el plano si y solo si $A \cap B$ es disconexo.*

La prueba de este teorema se puede encontrar en [K] pg, 506.

2.2. Preliminares de topología algebraica

Sea $\mathbb{R}^\infty$ el conjunto de las sucesiónes de reales con sporte compacto, y $E_i \in \mathbb{R}^\infty$ tal que $E_i(i) = 1$, $E_i(n) = 0$ si $n \neq i$. Sea Δ_n la envolvente convexa de $\{E_0, ...E_n\}$, el símplice n-dimensional. Dados $p_1, ..., p_n$, puntos de $\mathbb{R}^\infty$ notamos $(p_0, ..., p_n)$ al único mapa lineal afín que lleva E_i en p_i.

Dado un espacio topológico X. Notamos por $S_q(X)$ al $\mathbb{R}$-módulo libre, generado por los mapas $\sigma\colon \Delta_n \to X$. Definimos ahora los mapas borde $\partial_q\colon S_q(X) \to S_{q-1}(X)$, definiendolo sobre los símplices como $\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^{i=n}(-1)^i \sigma \circ (E_0, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n)$. Definimos $\partial_0 = 0$

Se cumple que $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$. Entonces podemos definir el q-ésimo módulo de homología de X, $H_q(X)$ como $ker\partial_q/Im\partial_{q+1}$. Si cambiamos ∂_0 por un mapa $\varepsilon\colon S_0(X) \to \mathbb{R}$ que a $\sum_x \nu_x \sigma_x$ lo manda a $\sum_x \nu_x$ tenemos lo que llamaremos homología reducida. A los elementos de $ker\partial_q$ los llamaremos q-ciclos y a los de $Im\partial_{q+1}$ q-bordes.

Definición 2.2. *Un complejo de cadenas es una sucesión de módulos C_q, y una sucesión de homomorfismos $\partial_q\colon C_q \to C_{q-1}$, que cumplen $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$*

Dada una cadena C, se pueden definir los q-ésimos módulos de homología como $H_q(C) = ker\partial_q/Im\partial_{q+1}$.

Definición 2.3. *Dados (C_q, ∂_q), (C'_q, ∂'_q) dos complejos de cadenas. Decimos que una sucesión de homomorfismos $f_q\colon C_q \to C'_q$ es un mapa de cadenas si se cumple que $\partial'_q \circ f_q = \partial_q \circ f_{q-1}$.*

Es claro de la definición de mapa de cadenas, que estos llevan ciclos en ciclos y bordes en bordes, por lo que cada mapa de cadenas, define homomorfismos a nivel de los módulos de homología. Observar que si tenemos $f\colon X \to Y$, esto define un homomorfismo $S_q(f)\colon S_q(X) \to S_q(y)$ como $S_q(f)(\sigma) = f \circ \sigma$. Es facil ver que la sucesión de homomorfismos $S_q(f)$ es un mapa de cadenas entra las cadenas $S_q(X)$ y $S_q(Y)$.

Dado $A \subset X$, consideremos $S_q(A) \subset S_q(X)$ las q-cadenas que se mapean sobre A. Podemos considerar el módulo cociente $S_q(X)/S_q(A)$ y los mapas $\overline{\partial_q}\colon S_q(X)/S_q(A) \to S_{q-1}(X)/S_{q-1}(A)$ que cumplen $\overline{\partial_q}([c]) = [\partial c]$. Claramente $\overline{\partial_{q-1}} \circ \overline{\partial_q} = 0$ lo que permite definir la homología para el complejo de cadenas de los módulos cocientes, y los homomorfismos $\overline{\partial_q}$.

Notamos $H_q(X, A) = ker\overline{\partial_q}/Im\overline{\partial_{q+1}}$ al q-ésimo módulo de homología de X módulo A. Es fácil ver que las proyecciónes canónicas $\pi_q\colon S_q(X) \to S_q(X)/S_q(A)$ son un mapa de cadenas, entre las cadenas en consideración.

Podemos definir un mapa $\overline{\partial}\colon H_q(X, A) \to H_{q-1}(A)$ como $\overline{\partial}([c]) = [\partial c]$. Es una buena definición ya que no depende del representante.

Definición 2.4. *Sea X un espacio topológico. El módulo de cocadenas singulares en X es $Hom_R(S_q(X), R)$. Lo notaremos $S^q(X)$*

Definición 2.5. *Definimos los mapas de coborde* $\delta^q \colon S^q(X) \to S^{q+1}(X)$ *como* $\delta^q(c) = c \circ \partial_{q+1}$.

Y ahora definamos el q-ésimo módulo de cohomología de X, que notaremos $H^q(X)$ como $\mathrm{ker}\delta^q/\mathrm{Im}\delta^{q-1}$ (cociclos/cobordes).

Si $f \colon X \to Y$, entonces podemos definir $S^q(f) \colon S^q(Y) \to S^q(X)$ como $S^q(f)(c) = c \circ S_q(f)$. Claramente $\delta^q \circ S^q(f) = S^{q+1}(f) \circ \delta^{q+1}$ por lo que f define homomorfismos a nivel de cohomología $H^q(f) \colon H^q(Y) \to H^q(X)$.

Supongamos ahora $A \subset X$, definimos $S^q(X,A) = Hom_R(S_q(X)/S_q(A), R)$. Definamos ahora un nuevo coborde $\overline{\delta_q} \colon S^q(X,A) \to S^{q+1}(X,A)$ como $\overline{\delta_q}(c) = c \circ \overline{\partial_{q+1}}$ donde $\overline{\partial_{q+1}} \colon S_{q+1}(X)/S_{q+1}(A) \to S_q(X)/S_q(A)$ es el borde definido durante la definición de homología relativa. Nuevamente, se verifica $\overline{\delta_{q+1}} \circ \overline{\delta_q} = 0$ por lo que podemos definir $H^q(X,A) = ker\overline{\delta_q}/Im\overline{\delta_{q-1}}$.

Un conjunto dirigido, es un un conjunto I junto con una relación de orden parcial $i \leq j$, de forma de que dados $i, j \in I$, $\exists k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.

Definición 2.6. *Supongamos* $(M_i)_{i \in I}$ *una familia de* R*-módulos indexada en* I *un conjunto dirigido, y que para* $i \leq j$ *tenemos homomorfismo* $\Phi_{j,i} \colon M_i \to M_j$ *que verifica* $\Phi_{k,j} \circ \Phi_{j,i} = \Phi_{k,i}$ *para* $i \leq j \leq k$, *y* $\Phi_{i,i} = Id$. *Llamamos a esto un sistema dirigido de módulos.*

Definición 2.7. *Un límite directo para un sistema dirigido de módulos* $(M_i)_{i \in I}$, *es un módulo* M *junto con una familia de homomorfismos* $\Phi_i \colon M_i \to M$ *indexada en* I, *que cumple la propiedad* $\Phi_j \circ \Phi_{j,i} = \Phi_i$. *Y que además verifica la siguiente siguiente propiedad universal. Para cualquier* R*-módulo* N, *y familia* Ψ_i *de homomorfismos* $\Psi_i \colon M_i \to N$ *que cumpla* $\Psi_j \circ \Phi_{j,i} = \Psi_i$ *si* $i \leq j$. *Existe un único homomorfismo* $\psi \colon M \to N$ *que cumple* $\Psi_i = \Psi \circ \Phi_i$ *para todo* i.

Se prueba que dado cualquier sistema dirigido de módulos $(M_i)_{i \in I}$, existe un límite directo, y de la propiedad universal se deduce facilmente que el límite es único, por lo que podemos hablar de el límite directo de un sistema dirigido de módulos. Lo notaremos $lim_{\rightarrow} M_i$. Un ejemplo de esto es el conjunto de todos los submódulos ordenados por la inclusión, donde los morfismos sean las inclusiones, en este caso el límite directo es el módulo original.

Definición 2.8. *La cohomología singular de soporte compacto sobre* X, $H^q_c(X)$, *la definimos como* $H^q_c(X) = lim_{\rightarrow} H^q(X, X - K)$ *donde el conjunto dirigido es el conjunto de subconjuntos compactos* K *con la inclusión, y los morfismos son los inducidos por la inclusión.*

Claramente si X es compacto, las definiciones coinciden.

A continuación enunciamos una aplicación del teorema de dualidad de Alexander que se puede encontrar en [D]pg.301.

Teorema 2.6. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad cerrada de dimensión k, entonces $H_{n-k-1}(\mathbb{R}^n/A)$ es isomorfo a $H^k_C(A)$*

Finalmente enunciamos el siguiente teorema que puede encontrarse en [Ht] pg.245, teorema 3.35.

Teorema 2.7. *Si M es orientable, entonces $H^k_c(M) \cong H_{n-k}(M)$*

3. Clasificación de Homeomorfismos expansivos en superficies

En toda esta sección M es una superfice cerrada orientable sin borde, y $f\colon M \to M$ un homeomorfismo expansivo con constante de expansividad α. Este esquema del trabajo de Lewowicz está basado en [Lew2], y [Lew3].

Definición 3.1. *$x \in M$ se dice estable para f, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ $\forall n \geq 0$*

Observación 3.1. *si x es estable para f, entonces es asintóticamente estable, sino existirían $\nu > 0$, $y_k \in B_\delta(x)$ y $n_k \to \infty$ tales que $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y_k) > \nu$, y tomando puntos límites de estas sucesiones encontramos puntos que permanecen cerca hacia el futuro y hacia el pasado, violando la expansividad.*

Teorema 3.1. *f no tiene puntos estables.*

Demostración. Sea $x \in M$ un punto estable, $\varepsilon < \alpha$ y δ el valor asociado a ε por la estabilidad. Para probar este teorema se hace uso del siguiente lema técnico.

Lema 3.1. *Sea $x \in M$ un punto estable, $\exists \sigma > 0$ y $N > 0$ tales que $\forall n \geq N$, $f^\nu(B_\sigma(f^{-n}(x))) \subset B_\delta(f^{-\nu+n}(x))$ con $\nu \in [0, n]$.*

Demostración. Si no fuese así, existirían $n_k \to \infty$ y $\sigma_{n_k} \to 0$ tales que $f^{\nu_k}(B_{\sigma_{n_k}}(f^{-n_k}(x))) \nsubseteq B_\delta(f^{-n_k+\nu_k}(x))$ para algún $\nu_k \in [0, n_k]$. Es decir, para algún punto en $B_{\sigma_{n_k}}(f^{-n_k}(x))$, su imágen según f^{ν_k} dista de $f^{-n_k+\nu_k}(x)$ más que δ. Uniendo este punto con $f^{-n_k}(x)$ por un arco contenido en $B_{\sigma_{n_k}}$. Es posible encontrar un punto y_{n_k}, y algún ν'_k de forma que $d(f^{-n_k+\nu'_k}(x), f^{-n_k+\nu'_k}(y_{n_k}) = \delta$ y $d(f^{-n_k+\nu}(x), f^{-n_k+\nu}(y_{n_k}) \leq \delta$, para $\nu \in [0, n_k]$. Por la estabilidad del punto x, $f^{\nu'_k}(y_{n_k})$ y $f^{-n_k+\nu'_k}(x)$ están a menos de ε para el futuro, y como σ_{n_k} tiende a cero, $\nu'_k \to \infty$. Por lo tanto tomando subsucesiones de $f^{\nu'_k}(y_{n_k})$ y $f^{-n_k+\nu'_k}(x)$ encontramos puntos que estan a menos de la constante de expansividad para el futuro y el pasado.

□

Observemos que esto nos da estabilidad en el $\alpha(x)$, y con δ uniforme. Para finalizar veremos que en este caso $\omega(x)$ debe ser abierto y estable, lo cual junto con la observación anterior nos da que M debe consistir de un cantidad finita de puntos.

Para ver que $\omega(x)$ es estable, alcanza con ver que $\omega(x) \subset \alpha(x)$, y para esto alcanza con que $x \in \omega(z)$ para algún $z \in \alpha(x)$. Sea entonces $z \in \alpha(x)$, y V entorno de z con estabilidad asintótica. Entonces dado $\varepsilon > 0$, sabemos que $\exists n > 0$ de forma que diam$(f^k(V))< \varepsilon$ para todo $k > n$. Sea ahora $m > n$ de forma que $f^{-m}(x) \in V$, claramente $d(f^m(z), x) < \varepsilon$. Como podemos hacer esto para cualquier ε, tenemos $x \in \omega(z)$ como queríamos.

Veamos ahora que $\omega(x)$ es abierto, para esto veamos primero que un punto estable es recurrente. Para esto, gracias a la estabilidad asintótica de x, alcanza con que $x \in \omega(z)$ para cualquier $z \in M$, como ya sabemos que ocurre. Sea W entorno de $y \in \omega(x)$ con estabilidad asintótica, y $w \in W$. Como w es estable, $\exists n_k \to \infty$ tal que $f^{n_k}(w) \to w$, por otro lado $d(f^n(w), f^n(y)) \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto $f^{n_k}(y) \to w$ y $w \in \omega(y) \subset \omega(x)$.

□

La no existencia de puntos estables está fuértemente basada en la arcoconexión local del espacio, hay ejemplos de expansivos con puntos estables. Un ejemplo de esto es la restricción del shift en $2^{\mathbb{Z}}$ al conjunto $C = \{\{a_n\} \colon a_j = a_{j-1} = 0, \implies a_i = 0 \forall i < j\}$

En esta sección notaremos $C_\varepsilon(x)$ $(D_\varepsilon(x))$ a $cc_x(W^s_\varepsilon(x))$ $(cc_x(W^u_\varepsilon(x)))$.

Teorema 3.2. *Para cada $\varepsilon > 0$, diam($C_\varepsilon(x)$) y diam($D_\varepsilon(x)$) está acotado por encima de 0.*

Demostración. Sabemos que para todo x existe $n_k \to \infty$, $\sigma_k \to 0$, $\nu'_k \in [0, n_k]$ de forma tal que $f^{\nu'_k}(B_{\sigma_k}(f^{-n_k}(x))) \nsubseteq B_\varepsilon(f^{-n_k+\nu'_k}(x))$, sino, tendríamos que un punto en el $\alpha(x)$ sería estable, hecho ya descartado. Utilizando la construcción y la notación del lema anterior, vemos que $n_k - \nu'_k$ está uniformemente acotada, ya que sino tomando límites de $f^{-n_k+\nu'_k}(x)$ y $f^{\nu'_k}(y_{n_k})$ obtendríamos puntos que se mantienen a menos de ε tanto para el futuro como para el pasado.

El arco del lema anterior que une $f^{n_k}(y_{n_k})$ con x, tiene diametro acotado por encima de 0 por ser imágen de un arco de diametro $\geq \varepsilon$ por uno de finitos iterados de f, los cuales son uniformemente contínuos. Llamemos d_k a dicho arco, consideremos ahora el conjunto $\bigcap_N \overline{\bigcup_{k=N}^\infty d_k}$ que es un compacto conexo de diámetro acotado por encima de cero, contenido en $D_\varepsilon(x)$. La uniformidad del diametro del conexo construido se debe a que $n_k - \nu'_k$ está uniformemente acotado en k y también en x.

□

Nuevamente, la existencia de conexos estables está basado en la arcoconexión local del espacio, el conjunto no errante de un difeomorfismo de Denjoy es expansivo y si ε es suficientemente pequeño, se cumple que $W^s_\varepsilon(x) = \{x\}$.

Se utilizarán tres lemas que pasaremos a enunciar, pero que no llevarán demostración ya que, en el futuro aparecerán versiones muy similares de éstos, que si llevaran demostración.

Lema 3.2. *Dados $\varepsilon > 0$ y $\rho > 0$, $\exists \mu > 0$ tal que si $y \in C_\varepsilon(x)$, $z \in D_\varepsilon(x)$ y $d(x, y) \geq \rho$, $d(x, z) \geq \rho$, enonces $d(y, z) \geq \mu$.*

Lema 3.3. *La función que manda $x \to C_\varepsilon$ es superiormente semicontínua (Lo mismo ocurre con $D_\varepsilon(x)$).*

Lema 3.4. *. Dados $\varepsilon > 0$ y $\rho > 0$, $\exists \mu > 0$ y $\sigma > 0$ de forma que si $d(x, x') < \sigma$, $y \in C_\varepsilon(x)$, $z \in D_\varepsilon(x')$, $d(x, y) \geq \rho$, $d(x', z) \geq \rho$ entonces $d(y, z) \geq \mu$.*

Un teorema clásico de topología general dice que un compacto conexo, localmente conexo es arcoconexo. Sabemos que tanto C_ε como D_ε son compactos y conexos, el próximo teorema es justamente lo que falta para probar la arcoconexión de estos conjuntos. A partir de ahora se expondrán los resultados de manera más informal, intentando mostrar las principales ideas.

Teorema 3.3. *$C_\varepsilon(x)$ es localmente conexo.*

Demostración. Asumamos que existe $\sigma_0 > 0$ suficientemente pequeño de forma que, si $0 < \sigma < \sigma_0$ tenemos:

Para $y \in B_\sigma(x)$ existe un conjunto conexo uniendo y con $\partial B_\sigma(x)$, contenido en $\overline{B_\sigma(x)} \cap W^s_{\delta/2}(y)$.

Si $y \in W^s_\delta(x) \cap B_\sigma(x)$ entonces $y \in W^s_{\delta/2}(x)$.

Llamemos D_x a la componente conexa que contiene a x de $\overline{B_\sigma(x)} \cap C_\delta(x)$, y si $y \in C_\delta(x) \cap B_\sigma(x)$, llamemos D_y a la componente conexa que contiene a y de $C_\delta(x) \cap B_\sigma(x)$. En virtud del σ escogido tenemos que tanto D_x como D_y llegan a $\partial B_\sigma(x)$. Si la tesis no fuera cierto, existirían y's arbitrariamente cerca de x de forma que $D_x \cap D_y = \emptyset$.

Unimos x con y por un segmento de recta γ_1 y D_x con D_y por un arco de circunferencia γ_2 contenido en el borde de $B_\sigma(x)$. Pero lo hacemos con el cuidado de que tanto γ_1, como γ_2 tengan solo un punto en común con D_x y D_y (eventualmente γ_1 corta a los conexos en puntos distintos de x e y). Ni D_x, ni D_y separan el plano porque sino habría puntos estables.

Usando el teorema 2.5 vemos que $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cap D_x \cap D_y$ separa el plano en exactamente dos componentes, una de ellas acotada. Tomemos ahora un segmento γ_3, incluído en la clausura de la componente acotada, con un extremo en D_x, otro en D_y y que solo corte a los conjuntos estables en los extremos. Además pidamos que si $y \in \gamma_3$ $D_\varepsilon(y)$ no pueda cortar γ_2 ni γ_3 en virtud del lema 3.4 ver[Lew2]. Entonces las $D_\varepsilon(y)$ sobre puntos de γ_3 deben cortar el borde de la componente acotada pero en $C_\varepsilon(x)$ o $C_\varepsilon(z)$.

Ahora, los puntos que cortan D_x son un cerrado de γ_3, y los que cortan D_y también, por lo que para algún y, $D_\varepsilon(y)$ debe cortar a ambos. Observar que lo anterior resulta una contradicción, ya que ambos conjuntos están incluídos en $W^s_\delta(x)$. Sea $y \in C_\varepsilon(x)$, veamos que $C_\varepsilon(x)$ en conexa en y. $C_\varepsilon(y) \subset C_{2\varepsilon}(x)$. Sea $z \in C_\varepsilon(x)$ cerca de y. Por la conexión local de $C_{2\varepsilon}(y)$ en y, hay un conexo C contenido en $B_\sigma(y) \cap C_{2\varepsilon}(y)$. Entonces $C \cap C_\varepsilon(x)$ es conexo, y contiene a x y a z, lo que prueba la arcoconexión en y (si no fuese conexo, su unión separaría y habría puntos estables).

□

Asunmiremos que $C_\varepsilon(x)$ consiste de una cantidad finita de arcos que salen de x, y que si les quitamos x, son disjuntos dos a dos.

Lema 3.5. *Sean a y b arcos consecutivos en $C_\varepsilon(x)$ que unen x con $\partial B_\sigma(x)$. Entonces existe un arco $d \subset D_\varepsilon(x)$, en la componente conexa de $B_\sigma(x) \setminus \{a \cup b\}$ definda entre los arcos consecutivos.*

Demostración. Consideremos un arco γ que una a y b en una de las componentes conexas de $B_\sigma(x) \setminus \{a \cup b\}$. Sabido es que para cualquier $y \in \gamma$, $D_\varepsilon(y)$ corta al borde de la componente conexa en cuestión. Supongamos que ningún $D_\varepsilon(y)$ con $y \in \gamma$ corta a $\partial B_\sigma(x)$ entre a y b. Debido a la semicontinuidad de los conjuntos estables, $y \in \gamma$ tales que $D_\varepsilon(y)$ no corta a son un abierto de γ, al igual que los que no cortan b. Esto constituye un absurdo, ya que los abiertos deben cubrir γ y ser disjuntos por la expansividad. Ahora considerando $\gamma_n \to x$, $y_n \in \gamma_n$ de forma que $D_\varepsilon(y_n)$ corta al borde de la bola y tomando límite de estos, obtenemos un arco inestable que sale de x y llega hasta el borde.

□

El hecho de que hay finitos arcos estables (inestables), que salen de un x dado, se debe al lema3.4.

Asumamos también que de cada x salen al menos dos arcos estables(e inestables) distintos.

Los argumentos de el siguiente teorema, apareceran con mayor detalle en el futuro.

Teorema 3.4. *Cada $x \in M$ tiene un entorno reducido tal que todos sus puntos poseen estructura de producto local*

Demostración. Consideremos un sector delimitado por dos arcos estables γ_1 y γ_2 consecutivos. Sea γ_3 el arco inestable que sale de x, contenido en ese sector. Sea $h \colon U \times V \to M$ como $h(x, y) = D_\varepsilon(x) \cap C_\varepsilon(y)$, donde U es un entorno de x en $\gamma_1 \cup \gamma_2$, y V un entorno de x en γ_3. Si U y V son suficientemente pequeños, el mapa está bién definido gracias a la semicontinuidad de los cojuntos estables (e inestables) y a la expansividad. La continuidad y la inyectividad también se deben a la semicontinuidad y la expansividad. Utilizando el teorema de invariancia del dominio(teorema2.4) vemos que este mapa cubre un entorno de x en el sector. Repitiendo esto con todos los sector, obtenemos lo que buscabamos.

□

A los puntos sin estructura de producto local los llamamos singularidades, gracias al teorema anterior y a la compacidad de M, tenemos que el conjunto de singuaridades es finito, y consiste de órbitas periódicas. En los difeomorfismos de pseudo-Anosov aparecen estas singularidades.

La estructura de producto local obtenida, permite escribir a la variedad como una unión finita de rectángulos con estructura de producto local trivial, que se intersectan solo en los bordes. Imitando las técnicas de la teoría de Poincaré-Bendixon, y utilizando la estructura mencionada, se prueba que en S^2 debe existir una hoja estable cerrada, lo que implica la existencia de puntos estables, siendo esto una contradicción. Por lo que:

Teorema 3.5. *S^2 no admite homeomorfismos expansivos.*

Además podemos escribimos a la variedad con rectángulos de diámetro menor que $\alpha/2$, y de forma que un arco inestable γ que una dos lados estables de un rectangulo cumpla $\gamma \subset W^s_\varepsilon(x)$ con $2\varepsilon < \alpha$ para algún x. En estas condiciones $\exists N > 0$ tal que cualquier arco γ como el que se mencionó cumple que $f^{-N}(\gamma)$ atraviesa al menos dos rectángulos. Supongamos ahora $g\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ expansivo, y G su levantamiento a $\mathbb{R}^2$. Los conjuntos estables de g en $\mathbb{T}^2$ se levantan a conjuntos estables de G en $\mathbb{R}^2$.

Levantemos ahora los descomposición en rectángulos de $\mathbb{T}^2$ al plano. Ningún conjunto inestable puede volver a cortar el mismo rectángulo, porque en ese caso, de nuevo utilizando argumentos tipo Poincaré-Bendixon encontramos una hoja estable cerrada. Ahora, sean γ y N como antes, entonces $f^{-kN}(\gamma)$ corta al menos 2^K rectángulos, pero la cantidad de rectángulos en $B_r(x)$ es polinomial en r por lo que $\operatorname{diam}(f^{-n}(\gamma))$ crece exponencialmente.

Asumamos que cualquier homeomorfismo de $\mathbb{T}^2$ es homotópico a algún difeomorfismo lineal (cosa que es cierta), y que si dicho difeomorfismo lineal no es hiperbólico, entonces el diámetro de cualquier conjunto en el cubrimiento universal, crece polinomialmente. Por lo dicho anteriormente tenemos que g debe ser homotópico a un difeomorfismo lineal hiperbólico, es decir a un difeomorfismo de Anosov.

Supongamos entonces $g\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ expansivo, y por ende homotópico a un difeomorfismo lineal de Anosov f. El trabajo de Franks en [Fr], dice que en este caso $\exists h\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ semiconjugación, de forma que $h \circ g = f \circ h$, y que además esta semiconjugación es isotópica a la identidad.

Sean ahora G, F y H levantamientos al cubrimiento universal $\mathbb{R}^2$ de g, f y h respectivamente. Estos cumplen $H \circ G = F \circ H$, y por ser h isotópica a la identidad, se cumple que $\exists K > 0$ de forma que $d(x, H(x)) < K$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Como H manda órbitas en órbitas y está C^0-cerca de la identidad, tendríamos que si G fuese infinitamente expansivo en $\mathbb{R}^2$, entonces H sería localmente inyectiva. Además por ser H un levantamiento, tendríamos que es un cubrimiento, y por ser $\mathbb{R}^2$ simplemente conexo un homeomorfismo. Concluyendo que h es una conjugación. Probemos entonces:

Teorema 3.6. *Si $g\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es expansivo, homotópico a una Anosov lineal f y G su levantamiento a $\mathbb{R}^2$, entonces G es infinitamente expansivo.*

Demostración. Para ver esto, alcanza con probar que puntos en una misma inestable, se separan en el futuro. Tomemos $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ un arco inestable para G, uniendo dos puntos x e y. Sabemos que $\operatorname{diam}(f^{-N}(\gamma)) \to \infty$ cuando $N \to \infty$. Supongamos que existe una subsucesión n_k de forma que $d(G^{-n_k}(x), G^{-n_k}(y))$ permanece acotada. Llamemos x_k a $G^{-n_k}(x)$, y_k a $G^{-n_k}(y)$ y γ_k a $G^{-n_k}(\gamma)$. Aplicando transformaciones de cubrimiento, supongamos que x_k está siempre en un mismo dominio fundamental. Tomemos z_k en γ_k de forma que $d(z_k, x_k)$ y $d(z_k, y_k)$ tienda a infinito. Unamos x_k e y_k por un segmento s_k, entonces s_k y γ_k forman una curva de Jordan. La inestable por z_k debe salir del disco que encierran, pero no lo puede hacer por γ_k (si una estable y una inestable se cortacen dos veces encerrando un disco, habría una estable cerrada en su interior).

Llamemos w_k al punto sobre s_k por donde sale el conjunto inestable por z_k. w_k y x_k permanecen acotadas, pero sus conjuntos estables e inestables respectivamente se cortan en puntos cada vez más lejanos. Sea F el levantamiento de f, y H el levantamiento de la semiconjugación h dada por el trabajo de Franks. Como F es un mapa lineal hiperbólico, sabemos que dada D, existe C de forma que si dos puntos están a menos de D, sus estables e inestables respectivas se cortan a menos de C de estos. Ahora, H lleva conjuntos estables en conjuntos estables, e inestables en inestables, pero como H está cercana a la identidad y $\mathrm{d}(x_k, w_k)$ está acotada pero $\mathrm{d}(x_k, z_k)$ no, entonces tenemos una contradicción.

□

En definitiva provamos:

Teorema 3.7. *Si $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ expansivo, entonces es conjugado a un Anosov lineal.*

El caso de superficies de genero mayor o igual a 2 S_g, es similar al caso del toro $\mathbb{T}^2$, primero se prueba que si $g\colon S_g \to S_g$ es expansivo, entonces es homotópico a un difeomorfismo de tipo pseudo-Anosov. Aquí es necesario utilizar la clasificación de Thurston de clases de isotopía para difeos de superficies (ver [Th]), donde se prueba que si ningún iterado del difeomorfismo preserva una clase de homotopía no trivial, entonces el difeomorfismo es homotópico a uno de tipo pseudo-Anosov.

Justamente eso es lo que prueba Lewowicz, es decir que ningún homeo expansivo preserva un clase de homotopía libre (por tanto tampoco un interado de él). Una vez que se tiene que el expansivo es homotópico a un pseudo-Anosov f, levantando ambos al disco hiperbólico, se encuentra que $\exists K > 0$ de forma que cualquier órbita de g es $K-$ *sombreada* por una órbita de f tanto para el pasado como para el futuro, dicha órbita es única por la expansividad de f, esta semiconjugación baja a la superficie. Para probar que la semiconjugación es de hecho una conjugación se procede igual que en el caso del toro. En definitiva

Teorema 3.8. *Si $f\colon S_g \to S_g$ es un homeomorfismo expansivo, entonces es conjugado a un difeo de tipo pseudo-Anosov.*

4. Propiedades de separación

En esta sección seguiremos ideas de [Vie1] que nos permitirán probar la proposición 1.1.

El siguiente lema es una propiedad homológica general de los espacios euclideos.

Lema 4.1. *Sean B homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y $F \subset B$ cerrado conexo homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^k$. Entonces $H_{n-k-1}(B \setminus F) \cong R$*

Demostración. Por2.6 tenemos que $H_{n-k-1}(B \setminus F)$ es isomorfo a $H_c^k(F)$, y por 2.7 $H_c^k(F) \cong H_0(F) \cong R$.

□

Un ejemplo concreto, donde convencerse del resultado anterior puede ser $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^k$, que al retraerse sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se tiene que $H_m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^k) = \mathbb{R}$ si $m = n-1$ o $m = 0$, y 0 sino.

Lema 4.2. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo expansivo. Existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $p \in Per_H^r$ existe $\phi : \overline{D^r} \to W^s(p)$ un homeomorfismo sobre su imagen de forma tal que: $\phi(0) = p$ y para todo $y : [0,1] \to \overline{D^r}$ continua tal que $y(0) = 0$ e $y(1) \in \partial D^r$ existe $s \in (0,1]$ tal que $\phi \circ y(s) \notin B_\varepsilon(p)$.*

Demostración. La expansividad asegura que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo conexo C de diámetro menor que ε se cumple que si el diámetro de $f^n(C)$ es mayor que la constante de expansividad α, para algún n negativo, entonces el diámetro de $f^m(C)$ es mayor que ε para todo $m < n$.

Si no fuese así, existirían conexos C_n de diámetro menor que $1/n$ de forma tal que el diámetro de $f^{-k_n}(C_n)$ es mayor que α y el de $f^{-l_n}(C_n)$ es menor que $1/n$ con $l_n > k_n > 0$. Por la continuidad uniforme de f se ha de cumplir que $k_n \to +\infty$ y que $l_n - k_n \to +\infty$. La conexión de C_n y sus iterados permite entonces encontrar puntos x_n e y_n en $f^{-m_n}(C_n)$ (con $0 \leq m_n \leq l_n$ y se va a cumplir por el mismo argumento ya usado que $l_n - m_n \to \infty$) de forma tal que $\alpha/2 \leq d(x_n, y_n) < \alpha$ y que $d(f^i(x_n), f^i(y_n)) < \alpha$ para todo $-l_n + m \leq i \leq m$. Tomando puntos límite de x_n e y_n se llega a un absurdo con la expansividad de f.

Sin perder generalidad supongamos que p es un punto fijo y consideremos la conjugación $h : \overline{D^r} \to W^s(p)$ entre f y el mapa hiperbólico. Además existe $N < 0$ tal que para todo $x \in h(\partial D^r) \subset W^s(p)$ existe $n \in [N, 0]$ tal que $f^n(x) \notin B(p, \alpha)$ (si no, hay puntos en $h(\partial D^r)$ que se mantienen en $B(p, \alpha)$ por una cantidad arbitrariamente grande de iterados, tomando puntos límite de esas sucesiones se viola la expansividad). Definimos entonces $\phi : \overline{D^r} \to W^s(p)$ por $\phi(x) = f^N \circ h(x)$. Luego, para toda curva y que conecte p con $\phi(\partial D^r)$ se cumple que $y([0,1])$ es un conexo de diámetro mayor que ε. Para este ε se cumple la tesis.

□

Demostración de la Proposición 1.1. Por lo ya probado, basta probar que si se tiene un homeomorfismo sobre su imágen $\phi : \overline{D^k} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(0) = 0$ y de forma que que para toda curva continua $y : [0,1] \to \overline{D^k}$ tal que $y(0) = 0$ e $y(1) \in \partial D^k$ se verifica que $\phi \circ y([0,1])$ no está contenido en $B_\varepsilon(0)$, entonces considerando X como la componente conexa de 0 en $\phi^{-1}(B_\varepsilon(0))$ entonces $H_{n-k-1}(B_\varepsilon(0) \setminus \phi(X)) = \mathbb{R}$.

Para eso, sean $F = \phi(X)$ y $B = B_\varepsilon(0)$. Como B es abierto tenemos que $\phi^{-1}(B)$ es abierto de $\overline{D^k}$. Como $\overline{D^k}$ es localmente arcoconexo, entonces X también lo es (por ser componente conexa de un abierto) además de ser abierto en $\overline{D^k}$. Eso implica que es arcoconexo.

Por hipótesis tenemos que $X \cap \partial D^k = \emptyset$ pues si no existiría una curva que une al 0 con ∂D^k cuya imagen por ϕ está incluida en B. Entonces F es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^k$. Como X es componente conexa, X es cerrado en $\phi^{-1}(B)$ por lo cual F es un cerrado de B. El lema 4.1 implica la tesis.

□

5. Estructura de producto local

La construcción de la estructura de producto local se basa fuertemente en conseguir que los conjuntos estables e inestables de los puntos periódicos se intersecten. Eso permite definir un mapa de $W^s_\varepsilon(p) \times W^u_\varepsilon(p)$ en un entorno de p que será un homeomorfismo con las propiedades deseadas por el teorema de la Invariancia del Dominio. En esta sección probaremos entonces que dicha interesección se da para puntos periódicos cercanos a uno dado.

Sea $\Delta^m = \{(x_1, \dots x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \ : \ x_i \geq 0 \ x_1 + \dots x_{m+1} = 1\}$ el símplice canónico de dimensión m. Notaremos $\gamma = \sum_i a_i \sigma_i$ denota una $m-$cadena, donde $\sigma_i \colon \Delta^m \to V$ ($a_i \in \mathbb{R}$). A lo largo de esta sección, γ hara mención tanto a la cadena propiamente dicha como a la unión de las imagenes de los σ_i.

Lema 5.1. *Para todo $x \in M$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $V \subset B_\varepsilon(x)$ homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y $p \in V \cap Per^l_H$ existe un ciclo $\gamma \subset U_p$ no trivial en la homología de $V \setminus S_p$ de dimensión $n-l-1$ (siendo $S_p = cc_p(V \cap W^s(p))$ y $U_p = cc_p(V \cap W^u(p))$). Además, dado K compacto en V podemos suponer que $\gamma \subset V \setminus K$.*

Demostración. Por la proposición 1.1 sabemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $H_{n-l-1}(V \setminus S_p) \neq 0$. Sea γ un ciclo tal que su clase en homología $[\gamma]$ es no trivial. Como $H_{n-l-1}(V) = 0$ podemos suponer que $\gamma = \partial \eta$ siendo η una cadena de dimensión $n-l$ en V.

Digamos que $\eta = \sum_{i=1}^{i=j} a_i \sigma_i$ con $\sigma_i \colon \Delta^{n-l} \to V$ ($a_i \in \mathbb{R}$).

Podemos suponer que cada σ_i y $\partial\sigma_i$ es topológicamente transversal a S_p de forma tal que la cantidad de cortes entre cada σ_i con S_p sea finita y $\partial\sigma_i \cap S_p = \emptyset$. Dado $\varepsilon_1 > 0$, mediante la subdivisión baricéntrica (ver [Sp]), podemos suponer también que $\mathrm{diam}(\sigma_i) < \varepsilon_1$. Observemos que si $\sigma_i \cap S_p = \emptyset$ entonces $\partial\sigma_i$ es trivial en $H(V \setminus S_p)$. Por lo tanto,tomando ε_1 suficientemente pequeño, podemos suponer que cada σ_i corta a S_q en y_i únicamente con $i = 1, ..., j$. Sea $h \colon U \subset \mathbb{R}^n \to M$ la conjugación local con el mapa hiperbólico en un entorno de p. Intersectando con V podemos suponer que $h(U) \subset V$ e iterando f, podemos suponer que $S_p \subset h(U)$. Podemos entonces pensar $U \subset V \subset \mathbb{R}^n$ (utilizando la identificación dada por h), $S_p \subset \mathbb{R}^l \times \{p_2\}$ y $U_p \subset \{p_1\} \times \mathbb{R}^{n-l}$ donde $p = (p_1, p_2)$. Podemos elegir ε_1 más chico, de forma que $B_{\varepsilon_1}(y_i) \subset U$. Como $y_i \in \sigma_i$ y $\mathrm{diam}(\sigma_i) < \varepsilon_1$ entonces $\sigma_i \subset B_{\varepsilon_1}(y_i)$. Sea $h^i_t \colon \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l} \to \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l}$ continua dado por $h^i_t(a + y^1_i, b) = (ta + y^1_i, b)$ con $t \in [0,1]$ donde $y_i = (y^1_i, y^2_i)$.

Luego para todo $t \in [0,1]$, $h_t^i \circ \partial\sigma_i$ no corta a S_p, y está contenida en V. Además $h_1^i \circ \partial\sigma_i = \partial\sigma_i$ y $h_0^i \circ \sigma_i \subset \{y_i^1\} \times \mathbb{R}^{n-l}$. Como $h_0 \circ \partial\sigma_i$ es homotópico a $\partial\sigma_i$ tenemos que ambas son homólogas en $V \setminus S_p$.

Para cada $i = 1, ..., j$ sea $\beta_i \colon [0,1] \to S_p$ una curva continua tal que $\beta(0) = y_i$ y $\beta(1) = p$. Achicamos nuevamente ε_1 de forma tal que $B_{\varepsilon_1}(\beta_i) \subset U$ para todo $i = 1, ..., j$.

Consideramos ahora $g_t^i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, otra homotopía, dada por $g_t^i(z) = z + \beta_i(t) - y_i$. Esta verifica que $g_t^i(h_0 \circ \partial\sigma_i)$ no corta a S_p para todo $t \in [0,1]$, $g_0^i = id_{\mathbb{R}^n}$ y $g_1^i(y_i) = p$ por lo cual $\sum_{i=1}^j a_i g_1^i \circ h_0^i \circ \partial\sigma_i \subset U_p$, y como g_t^i es una homotopía, es homóloga a $\gamma = \sum_{i=1}^j a_i \partial\sigma_i$ que es no trivial en la homología de $V \setminus S_p$. Llamémosle γ a $\sum_{i=1}^j a_i g_1^i \circ h_0^i \circ \partial\sigma_i$.

Para ver que hay un representante homólogo a γ fuera de cualquier compacto en V, utilizaremos el mapa de la demostración del lema 4.2 $\phi \colon \overline{D^{n-l}} \subset \mathbb{R}^{n-l} \to M$ que verifica que $U_p = \phi(X)$ donde $X = cc_0(\phi^{-1}(V))$. Consideremos una subdivisión de $\mathbb{R}^{n-l}$ en símplices de dimensión $n-l$ de diámetro menor que ρ. Digamos que $\mathbb{R}^{n-l} = \cup_{i=1}^\infty \theta_i$ y que $0 \in \mathbb{R}^{n-l}$ es interior a θ_0. Si consideramos un entorno $B \subset V$ de p con estructura lineal como antes, sabemos que $H_{n-l-1}(B \setminus S_p) \cong \mathbb{R}$. Entonces, tenemos que existe un $a \in \mathbb{R}$ no nulo, tal que $\gamma = a\partial(\phi \circ \theta_0)$ en $H_{n-l-1}(B \setminus S_p)$ y en particular también en $H_{n-l-1}(V \setminus S_p)$. Sea $\eta_1 = \theta_0 - \sum_{\theta_i \subset X} \theta_i$. Observamos que $\partial(\phi \circ \eta_1)$ es un ciclo trivial en $V \setminus S_p$. Entonces $a^{-1}\gamma$ es homólogo a $\gamma' = \partial\phi \circ (\sum_{\theta_i \subset X} \theta_i) = \sum_{\theta_i \subset X} \phi \circ \partial\theta_i$. Observar que podemos suponer $\sum_{\theta_i \subset X} \partial\theta_i \subset B_{2\rho}(\partial X)$ (Ver figura). Siendo que podemos tomar ρ arbitrariamente pequeño y que ϕ es uniformemente contínua, tenemos lo deseado.

$\square$

Corolario 5.1. *En las hipótesis del lema anterior, si $p \in Per_H^{n-1}$ entonces S_p separa a V en dos componentes conexas V_1 y V_2. Además p separa a U_p en dos componentes conexas U_1 y U_2 de forma tal que $U_1 \subset V_1$ y $U_2 \subset V_2$.*

Demostración. Como estamos trabajando con la homología reducida tenemos, por el lema anterior, que $V \setminus S_p$ tiene dos componentes conexas. Además U_p es homeomorfo a $\mathbb{R}$, luego $U_p \setminus \{p\}$ tiene dos componentes conexas. Supongamos por absurdo que $U_1, U_2 \subset V_1$. Como V_1 es conexo tendríamos que cualquier $\gamma \subset U_1 \cup U_2$ sería trivial en la homología de $V \setminus S_p$, contradiciendo el lema anterior.

$\square$

Utilizaremos reiteradas veces el siguiente resultado acerca de la variación semicontinua de los conjuntos estables e inestables locales (ver [Lew2]).

Lema 5.2. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ y $x \in M$, existe $\delta > 0$ de forma tal que si dist$(x,y) < \delta$ entonces, $W_\varepsilon^s(y) \in B_\varepsilon(W_\varepsilon^s(x))$.*

Demostración. Si no fuese así, existiría $\varepsilon > 0$ y $x_n \to x$ de forma tal que hayan puntos $y_n \in W_\varepsilon^s(x_n) \cap B_\varepsilon(W_\varepsilon^s(x))^c$. Tomando z punto límite de y_n llegamos a un absurdo dado que $\operatorname{dist}(f^k(z), f^k(x)) = \lim_{n \to +\infty} \operatorname{dist}(f^k(y_n), f^k(x_n)) \leq \varepsilon$.

$\square$

Otro resultado que utilizaremos reiteradas veces hace referencia a las distancias entre las variedades estables e inestables locales de los puntos (ver también [Vie1]).

Lema 5.3. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo expansivo de una variedad compacta. Dados $V \subset U$ entornos de x y ρ suficientemente pequeños, existe $W \subset V$ entorno de forma tal que si $y, z \in W$ se cumple que $dist(S_y \cap (U \setminus V), U_z \cap (U \setminus V)) > \rho$ (donde $S_y = cc_y(W^s(y) \cap U)$ y $U_z = cc_z(W^u(z) \cap U)$).*

Demostración. Para comenzar consideremos el δ dado por la obsevación 1.1. Sea hora $U \subset B_\delta(x)$, y $V \subset U$ entorno de x. Supongamos que no existiera dicho W, entonces existiria $y_n, z_n \to x$ tal que $d(S_{y_n} \cap (U \setminus V), U_{z_n} \cap (U \setminus V)) < 1/n$. Considerando $a_n \in S_{y_n} \cap (U \setminus V)$ de forma tal que $d(a_n, U_{z_n} \cap (U \setminus V)) < 1/n$ y tomando un punto límite $\overline{x}$, (observar que $\overline{x} \neq x$) vemos que $d(f^k(x), f^k(\overline{x})) < \varepsilon < \alpha$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, violando la expansividad.

$\square$

En la siguiente proposición probaremos que el índice de los puntos periódicos topológicamente hiperbólicos es localmente constante y que si dos de ellos se encuentran cerca entonces sus estables e inestables se cortan. Como fue mencionado este es el paso clave para construir la estructura de producto local.

Proposición 5.1. *Sea $f\colon M \to M$ un homeomofismo expansivo. Entonces*

1. *para todo $k = 1, ..., n-1$, Per_H^k es abierto en Per_H y*

2. *para todo $p \in Per_H$ existen dos entornos de p abiertos V_1 y V_2 tales que para todo $q \in Per_H \cap V_1$ se cumple que $S_q \cap U_p \neq \emptyset$ y $U_q \cap S_p \neq \emptyset$, siendo $S_x = cc_x(W^s(x) \cap V_2)$, $U_x = cc_x(W^u(x) \cap V_2)$.*

Demostración. Sean $p \in Per_H^k$, $\varepsilon > 0$ del lema 5.1 aplicado a p y $h\colon B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n \to h(B_\rho(0)) \subset B_\varepsilon(p)$ la conjugación local, $h(0) = p$, entre f y $L\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ dada por $L(x, y) = (x/2, 2y)$. En $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ consideramos la métrica $d((x, y), (u, v)) = \max\{\|x - u\|, \|y - v\|\}$. Fijemos $\rho_1 \in (0, \rho)$ y sea $V_2 = h(B_{\rho_1}(0))$. Para $q \in h(B_{\rho_1}(0))$ denotaremos $S'_q = h^{-1}(S_q)$ y $U_q = h^{-1}(U_q)$.

Sean ρ_2 y ρ_3 dados por los lemas 5.3 y 5.2 tales que si $\mathrm{dist}(h^{-1}q, 0) < \rho_3$ entonces $U'_q \cap B_{\rho_2}(\overline{S'_p} \cap \partial B_{\rho_1}(0)) = \emptyset$ y $S'_q \subset B_{\rho_2}(S'_p)$. Sea $V_1 = h(B_{\rho_3}(0))$.

Aplicando el lema 5.1 tenemos que si $q \in V_1 \cap Per_H^m$ entonces existe $h \circ \gamma \subset S_q$ un ciclo no trivial en la $(m-1)$ homología de $V_2 \setminus U_q$ de dimensión $m-1$. Podemos suponer también por el lema 5.1 que $\gamma \subset B_{\rho_2}(\overline{S'_p} \cap \partial B_{\rho_1}(0))$

Sea $\pi_t\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ dada por $\pi_t(x, y) = (x, ty)$ para $t \in [0, 1]$. Es claro que $\pi_t(B_{\rho_2}(\overline{S'_p} \cap \partial B_{\rho_1}(0))) \subset B_{\rho_2}(\overline{S'_p} \cap \partial B_{\rho_1}(0))$ para todo $t \in [0, 1]$. Luego $\pi_t \circ \gamma$ es una homotopía entre γ y $\pi_0 \circ \gamma \subset S'_p$ contenida en $B_{\rho_1}(0) \setminus U'_q$ y por lo tanto son homólogas en $B_{\rho_1}(0) \setminus U'_q$. Para concluir resta lo siguiente:

1. Si Per_H^k no es abierto en Per_H podemos suponer que existe $h(q) \in V_1 \cap Per_H^m$ con $m < k$. Luego γ es de dimensión $m-1 < k-1$ pero la homología de dimensión $m-1$ de $S'_p \setminus U'_q$ es trivial (dado que S'_p es un disco) lo cual es absurdo.

2. Si $m = k$ entonces existe un ciclo $\eta \subset S'_p$ tal que $\partial\eta = \gamma$. Como $h \circ \gamma$ es no trivial en $V_2 \setminus U_q$ concluimos que $S_p \cap U_q \neq \emptyset$.

□

Demostración del Teorema. 1.1 Vamos a construir estructura de producto local en un entorno de cada $p \in Per_H$. Consideremos la notación del enunciado de la proposición 5.1. Sea $\pi_s\colon \overline{V_1} \to S_p$ definida en los puntos $q \in Per_H$ como $\pi_s(q) = U_q \cap S_p$. Esta función está definida en un conjunto denso de V_1 por la proposición anterior. Sea $x \in \overline{V_1}$ y $q_n \to x$, $q_n \in Per_H$ con $\pi(q_n) \to y$. Observar que $y \in W_\varepsilon^u(x) \cap S_p$ y que por la expansividad este punto de intersección es único. Esto nos permite extender π_s a $\overline{V_1}$. Esta extensión es contínua por la misma razón. Ademas se cumple que $\pi_s(x) \in U_x \cap S_p$ y por la expansividad $\pi_s(x) = U_x \cap S_p$ para todo $x \in V_1$. La expansividad también implica que $\pi_s|S_x$ es inyectiva.

Si $q \in Per_H$ entonces el teorema de Invariancia del Dominio (ver [Sp]) nos dice que $\pi_s|S_q$ es abierta y un homeomorfismo sobre su imagen. Observar que si $\pi_s(r) \in \pi_s(S_q)$ con $r, q \in Per_H$ entonces $U_r \cap S_q \neq \emptyset$. Sea $W \subset S_p$, $p \in W$, W homeomorfo a el disco $\overline{D}^k$ y W entorno relativo de p en S_p. Afirmamos que existe V_3 entorno de p tal que para todo $q \in V_3 \cap Per_H$, $W \subset \pi_s(S_q)$. Si no existe $q_n \to p$, $q_n \in Per_H$ y $W \not\subseteq \pi_s(S_{q_n})$. Entonces como W es conexo y $\pi_s|S_{q_n}$ es abierta debe existir un $y_n \in \partial\pi_s(S_{q_n}) \cap W$ (tomando la frontera relativa a S_p). Por lo tanto existe $x_n \in \partial V_1 \cap S_{q_n}$ tal que $\pi_s(x_n) = y_n$. Podemos suponer que $x_n \to x$ y $y_n \to y$ a puntos de $S_{q_n} \cap \partial V_1$ y W respectivamente, lo primero debido a la semicontinuidad de los conjuntos estables locales. Debido a la construcción de la π, x e y estan sobre el mismo conjunto estable e inestable local contradiciendo la expansividad (observar que dist(W,$S_p \cap \partial V_1 > 0$) por lo cual $x \neq y$).
Sea $V_4 = \pi_s^{-1}(W) \cap V_3$, tenemos que para todo $q, r \in Per_H \cap V_4$ se cumple que $S_q \cap U_r \neq \emptyset$ y $S_r \cap U_q \neq \emptyset$ por construcción. Sean $A_s \subset S_p \cap V_4$ entornos relativos de p y $B_u \subset U_p \cap V_4$, homeomorfos a discos. Sean ahora $x \in A_s$ y $y \in B_u$, entonces tomando límite de los cortes de puntos periódicos que se acercan a x y a y respectivamente, por la semicontinudad de los conjuntos estables e inestables(lema 5.2) y la expansividad, es fácil ver que $U_x \cap S_y$ es un único punto. Sea $h\colon A_s \times B_u \to V_1$ dada por $h(x, y) = U_x \cap S_y$. Es continua, inyectiva y por lo tanto, utilizando nuevamente el teorema de Invariancia del Dominio abierta. Esto completa la prueba de la existencia de estructura de producto local.

□

Observación 5.1. *Si bien el splitting de los periódicos topológicamente hiperbólicos no tiene en principio porqué ser el mismo, esto resulta inmediato a partir de los resultados obtenidos si se agrega la hipótesis de que f sea transitivo. Probaremos en la sección 6.2 que cuando $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$ o $Per_H^1 \neq \emptyset$ el splitting es siempre el mismo.*

6. El caso de codimensión uno

6.1. Ordenación de puntos periódicos y sus propiedades

Dada una singularidad $x \in M$ estudiaremos la estructura de Per_H^{n-1} en un entorno de x definiendo un orden parcial local en Per_H^{n-1}. Consideremos $B_\nu(x)$ de forma que valga la proposición 1.1. Sean

$$S_p = cc_p(W^s(p) \cap B_\nu(x)),$$
$$U_p = cc_p(W^u(p) \cap B_\nu(x)).$$

Supondremos además por la observación 1.1 que $S_p \subset W^s_\varepsilon(p)$ y $U_p \subset W^u_\varepsilon(p)$ para algún $\varepsilon > 0$. Para todo $p \in Per_H^{n-1} \cap B_\nu(x)$ definimos $\hat{p} = B_\nu \setminus cc_x(B_\nu(x) \setminus S_p)$

Dado $\delta > 0$ definiremos la siguiente relación. Si $p, q \in X_\delta = Per_H^{n-1} \cap B_\delta(x)$ decimos que $p \leq q$ si $\hat{p} \subset \hat{q}$. Es claro que esto es un orden parcial y el mismo depende de la singularidad $x \in M$, $\nu > 0$ de la proposición 1.1 y $\delta \in (0, \nu)$. Llamaremos cadena a todo subconjunto de X_δ que sea totalmente ordenado.

Observación 6.1. *Dado que conjuntos estables de puntos periódicos distintos no se intersectan, tenemos que si $\hat{p} \cap \hat{q} \neq \emptyset$ entonces los puntos p y q deben estar relacionados. Por lo tanto si $p \leq q$ y $p \leq r$ entonces $\hat{p} \subset \hat{q} \cap \hat{r}$ y por ende q y r estan relacionados. Esto implica que si $p \leq q$ y C es una cadena maximal conteniendo a p, entonces $q \in C$.*

Un buen lugar para visualizar el órden propuesto es alrededor de una singularidad de un pseudo-Anosov, donde hay más de dos cadenas maximales.

Lema 6.1. *Dado $x \in M$ y $\nu > 0$ existe $\delta > 0$ de forma tal que en $B_\delta(x)$ hay finitas cadenas maximales, estas son disjuntas dos a dos y todas acumulan en x.*

Demostración. Supongamos que hubiese infinitas cadenas maximales distintas. Probaremos que hay conjuntos arbitrariamente grandes de puntos no relacionados dos a dos. Probaremos esto por inducción. Sean $p_1, ..., p_l$ no realcionados dos a dos. Sea C_i una cadena maximal tal que $p_i \in C_i$ y tomemos $C \neq C_i$ para to i, otra cadena maximal. Dado que dos puntos en una misma cadena maximal están relacionados, a lo suma un p_i está en C. Si $p_i \notin C$ para todo $i = 1, ..., l$ entonces podemos elegir $p_{l+1} \in C \setminus (\bigcap_i C_i)$, quien no estara relacionado con ninguno de los p_i's por la Observación 6.1. Si $p_i \in C$ para algún $1 \leq i \leq l$ entonces podemos tomar $p_i' \in C_i \setminus C$ y $p_{l+1} \in C \setminus C_i$ no relacionados. Entonces, los puntos $\{p_1, ..., p_i', ..., p_l, p_{l+1}$ serán dos a dos no relacionados, nuevamente por Observación 6.1. Esto nos lleva a una contradicción, dado que el Lema 5.3 implica la existencia de $\delta > 0$ y $\nu' \in (0, \nu)$ tal que si $p \in X_\delta$ entonces

$$\text{dist}(S_p \cap \partial B_{\nu'}(x), U_p \cap \partial B_{\nu'}(x)) > \rho$$

Dado $p_i \in X_\delta$ se cumple por el lema 5.1 que existe $q_i \in \hat{p} \cap \partial B_{\nu'}(x) \cap U_{p_i}$ de forma tal que $\text{dist}(q_i, q_j) > \rho$ si $i \neq j$. Y luego la cantidad de puntos no relacionados dos a dos es acotada ya que $\partial B_{\nu'}(x)$ es compacto.

Siendo finitas cadenas maximales, las que no acumulan en x se encuentran todas fuera de un entorno de x. Por lo tanto achicando δ obtenemos que todas las cadenas maximales en $B_\delta(x)$ acumulan en x.

Sean C y C' dos cadenas maximales y $q \in C \cap C'$. Si achicamos δ de forma tal que $\hat{q}$ sea disjunto con $B_\delta(x)$ conseguimos reducir la cantidad de cadenas maximales. Luego podemos suponer que las cadenas maximales son disjuntas dos a dos.

$\square$

Llamaremos $[p]$ a la cadena maximal de p en X_δ dada por el lema anterior. Vamos a definir ahora el conjunto

$$S_{[p]} = \overline{\bigcup_{q \in [p]} \hat{q}} \subset \overline{B_\nu(x)}$$

donde $p \in X_\delta$. Observar que se puede elegir ν de forma tal que para todo $p \in Per_H \cap B_\nu(x)$ se tenga $S_p \in W^s_\varepsilon(x)$ donde $0 < 2\varepsilon < \alpha$ siendo α la constante de expansividad

Lema 6.2. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda cadena maximal $[p]$ se cumple que $\partial S_{[p]} \subset W^s_\varepsilon(x)$.*

Demostración. Por el lema 6.1 sabemos que $[p]$ acumula en x. Sea $q_n \in [p]$ tal que $q_n \to x$. Tomemos un punto $y \in \partial S_{[p]}$. Luego existe una sucesión $z_n \in \hat{q}_n$ tal que $z_n \to y$. Sin perder generalidad podemos suponer que $z_n \in S_{q_n}$.

Como la observación 1.1 nos asegura que existe $\varepsilon > 0$ tal que $S_{q_n} \subset W^s_\varepsilon(z'_n)$, tenemos que para todo $m \geq 0$, $\mathrm{dist}(f^m(y), f^m(x)) = \lim_n d(f^m(z'_n), f^m(q_n)) \leq \varepsilon$ y por lo tanto $y \in W^s_\varepsilon(x)$. Luego $\partial S_{[p]} \subset W^s_\varepsilon(x)$.

$\square$

Lema 6.3. *Supongamos $\overline{Per_H} = M$ y $x \in M$ una singularidad. Entonces, para todo $p \in B_\delta \cap Per^{n-1}_H$, existe un entorno V de S_p tal que $Per_H \cap V \cap B_\delta(x) \subset [p]$.*

Demostración. Por absurdo, supongamos que existe $y \in S_p \cap B_\delta(x)$ y $q_n \to y$ con $q_n \in [q] \neq [p]$ (recordar que por el teorema 1.1, cerca de S_p hay estructura de producto local, entonces cerca de y todo periódico tiene el mísmo índice que p). Entonces $y \in \partial S_{[q]}$ (porque pertenece al mismo tiempo a $\mathrm{int}(S_{[p]})$ y a $S_{[q]}$, y los interiores de $S_{[p]}$ y $S_{[q]}$ tienen intersección vacía). Entonces, por el Lema 6.2, $y \in W^s_\varepsilon(x)$. Por lo tanto $x \in W^s(p)$ ya que $y \in S_p \subset W^s_\varepsilon(p)$. Pero, como $p \in Per_H$ es contradictorio con el hecho de que x es una singularidad, dado que el Teorema 1.1 nos da estructura de producto local en x, iterando por f^{-1} la estructura de producto local en p.

$\square$

Lema 6.4. *Si $\overline{Per_H} = M$ y $x \in M$ una singularidad. Entonces $int(S_{[p]}) \cap B_\delta(x) = \bigcup_{q \in [p]} \hat{q} \cap B_\delta(x)$.*

Demostración. La inclusión $\bigcup_{q \in [p]} \hat{q} \cap B_\delta(x) \subset \mathrm{int} S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ es inmediata porque si $q \geq r$ entonces $\hat{r} \subset \mathrm{int}\hat{q}$. Para obtener la otra inclusión razonaremos por absurdo suponiendo que existe $y \in B_\delta(x)$ en el interior de $S_{[p]}$ y que $y \notin \hat{q}$ para todo $q \in [p]$. Entonces existe $y_n \in S_{q_n}$ que cumple que $y_n \to y$ (esto en particular implica que $y \in W^s_\varepsilon(x)$ por el lema 6.2) y $q_n \to x$. Usando el lema 6.3 y el hecho de que $\overline{Per_H} = M$ sabemos que existe $r_n \in [p]$ arbitrariamente cerca de y_n. Podemos suponer entonces $r_n \to y$ y que esta sucesión no está acotada para el órden de $[p]$. Por otro lado, consideremos $U_{r_n} = cc_{r_n}(B_\nu(x) \cap W^u(r_n)) \subset W^u_\varepsilon(r_n)$(ver Observación 1.1) quien está separado por S_{r_n} en dos componentes conexas distintas (ver Corolario 5.1). Sea $\gamma > 0$ y $z_n \in \partial B_\gamma(y) \cap U_{r_n}$ de forma que $z_n \notin \hat{r}_n$. Podemos suponer que $z_n \to z \in \partial B_{nu}(y)$ y usando la variación semicontínua de los conjuntos estable e inestables (Lema 5.2) obtenemos que $z \in W^u_\varepsilon(y)$. Si probamos que $z \notin S_{[p]}$, como γ es arbitrario, tendremos que $y \in \partial S[p]$ lo que contradice el hecho de que $y \in \operatorname{int}(S_{[p]})$. Sabemos que $z \notin \hat{q}$ para todo $q \in [p]$, entonces si $z \in S_{[p]}$ será acumulado por puntos en S_{q_n} y por lo tanto verificara $z \in W^s_\varepsilon(x)$. Entonces, $z \neq y$, $z \in W^u_\varepsilon(y)$ e $y, z \in W^s_\varepsilon(x)$ lo que contradice la expansividad (recordar que tomamos ε de forma tal que $2\varepsilon < \alpha$).

□

Observación 6.2. *Como $S_{[p]}$ es un cerrado con interior no vacío y $x \in \partial S_{[p]}$, tenemos que su complemento en $B_\nu(x)$ que es abierto, también es no vacío. Esto implica que $\partial S_{[p]}$ separa $B_\nu(x)$.*

El siguiente lema muestra que los conjuntos estables de puntos periódicos convergen uniformemente al $\partial S_{[p]}$.

Lema 6.5. *Supongamos $\overline{Per_H} = M$ y sean $z \in \partial S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ y $\rho > 0$. Entonces, existe V entorno de z de forma tal que si $q \in [p] \cap V$ entonces $S_{[p]} \cap \overline{B_\delta(x)} \subset \hat{q} \cup B_\rho(\partial S_{[p]})$.*

Demostración. Dado $\rho > 0$ se cumple que $K = \left(S_{[p]} \setminus B_\rho(\partial S_{[p]})\right) \cap \overline{B_\delta(x)}$ es un compacto contenido en $\operatorname{int}(S_{[p]} \cap B_\delta(x))$, entonces usando el lema 6.4, $\{\operatorname{int}(\hat{q})\}_{q\in[p]}$ es un cubrimiento por abiertos de K, por lo que existe $r \in [p]$ de forma tal que $K \subset \hat{r}$. Sea V un entorno de z disjunto de $\hat{r}$. Entonces, para todo $q \in [p] \cap V$ tenemos que $q \geq r$. Entonces, $K = (S_{[p]} \setminus B_\rho(\partial S_{[p]})) \cap \overline{B_\delta(x)} \subset \hat{q}$ y por lo tanto $S_{[p]} \cap \overline{B_\delta(x)} \subset \hat{q} \cup B_\rho(\partial S_{[p]})$.

□

Lema 6.6. *Para todo $z \in \partial S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe V entorno de z de forma tal que si $q, r \in V \cap [p]$ entonces U_q corta a S_r y a $\partial S_{[p]}$ en $B_\varepsilon(z)$.*

Demostración. Ses V un entorno de z tal que $z \in V \subset B_\delta(x)$. Por el corolario 5.1 le asociaremos a cada $q \in [p] \cap V$ dos puntos $y^q_1, y^q_2 \in U_q \cap B_\delta(x)$ tales que $y^q_1 \in \hat{q}$ e $y^q_2 \notin \hat{q}$. Por el Lema 5.3 existe $\rho > 0$ (quizás achicando V) tal que para $i = 1, 2$ y $q \in [p] \cap V$

$$\operatorname{dist}(y^q_i, \partial S_{[p]}) > \rho \tag{1}$$

Al mismo tiempo, por el lema 6.5 podemos suponer que para todo $q \in [p] \cap V$,

$$S_{[p]} \cap B_\delta(x) \subset \hat{q} \cup B_{\rho/2}(\partial S_{[p]}) \tag{2}$$

Luego, como $y_2^q \notin \hat{q}$ e $y_2^q \notin B_\rho(\partial S_{[p]})$, tenemos que $y_2^q \notin S_{[p]}$. Por el lema 6.2 y como U_q es conexo tenemos que U_q corta a $\partial S_{[p]}$.

Tomemos $r \in V \cap [p]$ tal que $q \leq r$, es decir $\hat{q} \subset \hat{r}$. Consideramos y_1^r e y_2^r asociados a r de forma idéntica a lo hecho para q. Luego $y_1^q \in \hat{q} \subset \hat{r}$. Por otro lado $y_1^r \in S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ y por (2) $y_1^r \in \hat{q} \cup B_{\rho/2}(\partial S_{[p]})$. Por (1) tenemos que $y_1^r \notin B_{\rho/2}(\partial S_{[p]})$ por lo tanto $y_1^r \in \hat{q}$. Entonces $y_1^r, y_1^q \in \hat{q} \subset \hat{r}$.

Por otro lado como $y_2^r \notin \hat{r}$ y $\hat{q} \subset \hat{r}$ tenemos que $y_2^r \notin \hat{q}$. Anteriormente dijimos que $y_2^q \notin S_{[p]}$. Aplicando la ecuación (2) (para r en lugar de q) tenemos que $y_2^q \notin \hat{r}$. Por lo tanto $y_2^q, y_2^r \notin \hat{r} \supset \hat{q}$.

Luego como $U_q \supset \{y_1^q, y_2^q\}$ y $U_r \supset \{y_1^r, y_2^r\}$ son conexos y S_q y S_r separan la bola $B_\nu(x)$ tenemos que $S_q \cap U_r$ y $U_q \cap S_r$ son no vacíos.

Dado $\varepsilon > 0$, la expansividad y la variación semicontinua de los conjuntos estables e inestables locales, permiten probar que podemos achicar V de forma que los cortes se den en $B_\varepsilon(z)$.

□

Los conjuntos $S_{[p]}$ resultarán ser semi-espacios con estructura de producto local, la siguiente proposición va en dirección a dotar a $S_{[p]}$ con la mencionada estructura.

Proposición 6.1. *Si $\overline{Per_H} = M$ entonces $\partial S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ es una variedad topológica de dimensión $n-1$.*

Demostración. Sea $z \in \partial S_{[p]} \cap B_\delta(x)$. Elegimos $\varepsilon > 0$ de forma tal que $B_\varepsilon(z) \subset B_\delta(x)$ y sea V entorno de z de forma tal que $q, r \in V \cap [p]$ entonces $U_q \cap S_r \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset$. Además para todo $q \in V \cap [p]$ se cumple que $U_q \cap \partial S_{[p]} \cap B_\varepsilon(z) \neq \emptyset$. Esto es por el lema 6.6.

Fijamos $q \in V \cap [p]$ y definimos $h_q \colon S_q \cap \overline{V} \to \partial S_{[p]} \cap \overline{B_\varepsilon(z)}$ dada por

$$h_q(y) = \lim_{q_n \to y} U_{q_n} \cap \partial S_{[p]}$$

que existe y es único por la expansividad y la variación semicontinua de los conjuntos inestables locales (junto con que $\partial S_{[p]} \subset W^s_\varepsilon(z)$ por el lema 6.5). El hecho de que existe $q_n \in [p] \to y$ es una consecuencia del Lema 6.3 y del hecho de que $\overline{Per_H} = M$. El mismo argumento implica que h_q es contínua e inyectiva. Además, dado que el dominio es compacto, h_q es un homeomorfismo sobre su imagen. Nuevamente, por el Lema 6.6, podemos tomar V' y $\varepsilon' > 0$ de tal forma que $\overline{B_{\varepsilon'}(z)} \subset V$ y tal que si $q, r \in \overline{[p] \cap V'}$, $U_q \cap S_r \cap B_{\varepsilon'}(z) \neq \emptyset$. Analogamente, tenemos que para todo $q \in V' \cap [p]$, $U_q \cap \partial S_{[p]} \cap \overline{B_{\varepsilon'}(x)} \neq \emptyset$. Si además $q \in V' \cap [p]$, todo $w \in \partial S_{[p]} \cap V'$ tiene preimágen en $S_q \cap V$ por h_q. Esto es cierto porque para todo $w \in \partial S_{[p]} \cap V'$ podemos encontrar $q_n \to w$, con $q_n \subset [p] \cap V'$ y de tal forma que $\emptyset \neq U_{q_n} \cap S_q \cap B_{\varepsilon'}(z) \subset V \cap S_q$. En particular, todo punto en $\partial S_{[p]} \cap V'$ tiene una preimágen por h_q en $S_q \cap \overline{B_{\varepsilon'}(z)} \subset S_q \cap V$. Como h_q es un homemorfismo sobre su imágen, $\partial S_{[p]} \cap V'$ es homeomorfo a su preimágen, que es un abierto de $S_q \cap V$ lo que prueba la proposición (recordar que $S_q \cap V$ es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$).

□

6.2. Descomposición constante

Demostración del Teorema 1.2. Supongamos por absurdo que $\emptyset \neq \overline{Per_H^{n-1}} \neq M$ y tomemos una singularidad $x \in \partial\overline{Per_H^{n-1}}$. Consideremos ν y δ como en el lema 6.1, para el cual se tiene que hay finitas cadenas maximales asociadas a x. Sea $[p]$ una cadena maximal que acumula en x.

Lema 6.7. *Existe $\delta > 0$ de forma tal que $Per_H \cap S_{[p]} \cap B_\delta(x) \subset Per_H^{n-1}$.*

Demostración. Por absurdo supongamos que existen $p_n, q_n \to x$ con $p_n \in S_{[p]} \cap Per_H \setminus Per_H^{n-1}$ y $q_n \in [p]$. Por el teorema 1.1 podemos suponer que $p_n, q_n \notin \partial S_{[p]}$. Luego U_{p_n} es una variedad topológica conexa (y por lo tanto arcoconexa) de dimensión por lo menos dos. Consecuentemente si le quitamos un punto a U_q continua siendo arcoconexa. Es claro que para todo q_n existe $p_m \notin \hat{q}_n$. Recordemos que $\partial S_{[p]}$ y S_{q_n} separan la bola $B_\nu(x)$.

Probaremos que $U_{p_m} \subset S_{[p]} \setminus \hat{q}_n$. Si no, supongamos que existe $y \in U_{p_m} \setminus S_{[p]}$. Como $\partial S_{[p]}$ separa la bola $B_\nu(x)$ tenemos que toda curva contenida en U_{p_m} que conecte a p_m con y debe cortar a $\partial S_{[p]}$. Por la expansividad U_{p_m} corta a $\partial S_{[p]}$ en un solo punto. Luego existen dos curvas contenidas en U_{p_m} que conectan a p_m con y y coinciden solo en los extremos. Luego existen dos puntos de corte distintos entre U_{p_m} y $\partial S_{[p]}$ contradiciendo la expansividad. Análogamente se razona si consideramos $y \in \hat{q}_n$.

Finalmente el hecho de que para todo n_0 existan $m, n \geq n_0$ tales que $U_{p_m} \subset S_{[p]} \setminus \hat{q}_n$ contradice el lema 5.3.

□

Sea C el conjunto finito de las cadenas maximales en $B_\delta(x)$ y definimos

$$S = \bigcup_{[p]\in C} S_{[p]}$$

Como cada $S_{[p]}$ es cerrado en $B_\nu(x)$ tenemos que S es cerrado. Se cumple entonces que

$$B_\delta(x) \cap S = B_\delta(x) \cap \overline{Per_H^{n-1}} \tag{3}$$

Como $x \in \partial\overline{Per_H^{n-1}}$ resulta que S no puede ser un entorno de x. Veamos como eso conduce a un absurdo.

Para eso, utilizaremos la proposición 6.1 y el siguiente lema.

Lema 6.8. *Para todo $p \in Per_H^{n-1} \cap B_\delta(x)$ existe $A_{[p]} \subset \partial S_{[p]}$ tal que $A_{[p]}$ es abierto y denso relativo de $\partial S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ y $A_{[p]}$ que se encuentra en el interior de S.*

La proposición 6.1 asegura que $\partial S_{[p]}$ es una variedad topológica de dimensión $n-1$. Luego, por el lema 6.8 y el teorema2.2, tenemos que para toda $[p]$, $\text{dimtop}(\partial S_{[p]} \setminus A_{[p]}) \leq n-2$. Además, como $\partial S \subset \bigcup \partial S_{[p]}$

$$\partial S \subset \bigcup_{[p]\in C} \partial S_{[p]} \setminus A_{[p]}$$

Por el teorema2.1 tenemos que dimtop(∂S) $\leq n-2$. Entonces ∂S no puede separar $B_\delta(x)$, ya para esto debe tener dimensión topológica al menos $n-1$ (ver 2.3). Esto constituye una contradicción.

Demostración del Lema 6.8.

Sea $\varepsilon > 0$ y $z \in \partial S_{[p]}$. Por el Lema 6.6 , existe $q \in [p]$ de forma tal que $\{a\} = U_q \cap \partial S_{[p]}$ está en $B_\varepsilon(z)$. El teorema 1.1 implica que q tiene un entorno con estructura de producto local, interando este entorno para el pasado, obtenemos estructura de producto local en un entorno de a, entonces $a \in \text{int}(S) = \text{int}(\overline{Per_H^{n-1}}) \cap B_\delta(x)$.

□

6.3. Estructura de producto local uniforme

En esta sección probaremos el Teorema 1.3. Por el Teorema 1.1, sabemos que hay un abierto denso de puntos con estructura de producto local. Y por el Teorema 1.2 concluimos que, como $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$, $Per_H = Per_H^{n-1}$. Notemos S al conjunto de singularidades de f, es decir al conjunto de puntos que no admiten estructura de producto local. Probar el Teorema 1.3, es probar que $S = \emptyset$. La próxima proposición nos da una especie de estructura de producto local en $S_{[p]}$.

Proposición 6.2. *Sea $x \in S$. Entonces, para todo $z \in \partial S_{[p]} \cap B_\delta(x)$ existe $h : I \times I^{n-1} \to S_{[p]}$ $(I = [0,1])$ un homeomorfismo sobre su imágen donde $h(\{a\} \times I^n)$ está contenido en un conjunto estable local, $h(I \times \{b\})$ está contenido en un conjunto inestable local y la imagen es un entorno de z relativo a $S_{[p]}$.*

Demostración. Por el lema 6.6 existe $V \subset B_\delta(x)$ entorno de z en M tal que si $q, r \in [p] \cap V$ entonces $S_q \cap U_r \neq \emptyset$ y $U_q \cap \partial S_{[p]} \neq \emptyset$. Sea $D_z \subset \partial S_{[p]} \cap V$ homeomorfo a I^{n-1} (ver proposición 6.1) de forma tal que z esté en el interior de D_z relativo a $\partial S_{[p]}$. Sea $V' \subset V$ entorno de z tal que $q \in [p] \cap V'$, $S_q \cap U_r \cap V \neq \emptyset$ y $U_q \cap D_z \neq \emptyset$. Sea $q \in V' \cap [p]$, definimos $h\colon U_q \cap \overline{V} \cap S_{[p]} \times D_z \to S_{[p]}$ como $h(y, w) = W^s_\varepsilon(y) \cap W^u_\varepsilon(w)$. Debido a la definición de V, y con argumentos ya esobazodos anteriormente, vemos que h es un homeomorfismo sobre su imágen. Veamos ahora que la imágen de h contiene a $V' \cap S_{[p]}$, para esto es suficiente observar que debido a la definición de V', $[p] \cap V' \subset Im(h)$ (recordar que Per_H^{n-1} es denso en V'). Sea $U = h^{-1}(V' \cap S_{[p]})$ que es abierto porque h es un homeomorfismo sobre su imágen. Como $z \in V' \cap S_{[p]}$ un abierto relativo de la imágen de h y de $S_{[p]}$, $h^{-1}(z)$ está en el interior de U. Dado que $U_q \cap \overline{V} \cap S_{[p]} \times D_z$ es localmente conexo en $h^{-1}(z)$, podemos encontrar U homeomorfo a $I \times I^{n-1}$ entorno de $h^{-1}(z)$ cuya imágen va a ser un entorno relativo de z en $S_{[p]}$. El resto de las propiedades de h enunciadas en la proposición son inmediatas de la definición de h.

□

Lema 6.9. *Si $\overline{Per_H^{n-1}} = M$ entonces S (el conjunto de singularidades)es finito.*

Demostración. Como los puntos con estructura de producto local son un abierto invariante, el conjunto de singularidades es un compacto invariante. Entonces $f\colon S \to S$ es un homeomorfismo expansivo. Sea $z \in S$. Probaremos que existe un entorno de z de forma tal que toda singularidad en ese entorno pertenece al conjunto estable local de z. Eso se debe a que existe δ suficientemente pequeño (dado por el lema 6.1) de forma tal que (por el hecho de que Per_H^{n-1} es denso) $B_\delta(z) \subset \bigcup_{i=1}^k S_{[p_i]}$. Por la proposición 6.2 se cumple que en el interior de $S_{[p_i]}$ hay estructura de producto local (quizas achicando δ) entonces se ha de cumplir que las singularidades deben estar en $\bigcup_{i=1}^k \partial S_{[p_i]}$. Luego por el lema 6.2 las singularidades de $B_\delta(z)$ están en el conjunto estable de z.

La expansividad implica que los puntos estables Lyapunov sean asintóticamente estables dado que en caso contrario, existirían puntos x e y cumpliendo que $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon < \alpha$ (α constante de expansividad) y de forma que exista una subsucesión $n_j \to +\infty$ de forma tal que $d(f^{n_j}(x), f^{n_j}(y)) \geq \gamma > 0$. Tomando puntos límite de $f^{n_j}(x)$ y $f^{n_j}(y)$ se viola la expansividad.

Luego el conjunto de singularidades debe ser finito.

$\square$

En el siguiente lema, provamos que si $dim(M) \geq 3$ no hay singularidades aisladas. Cabe recalcar que los homeomorfismos de tipo pseudo-Anosov en superficies cumplen que $\overline{Per_H} = M$ siendo estos de codimension uno, pero sin embargo existen singularidades aisladas.

Lema 6.10. *Si $dim(M) \geq 3$ y $\overline{Per_H^{n-1}} = M$ no hay singularidades aisladas*

Demostración. Supongamos por absurdo que $x \in M$ es una singularidad aislada. Sean $\nu, \delta > 0$ como en la proposición 6.1 y de forma tal que $B_\nu(x) \cap S = \{x\}$. Fijemos $[p]$ una cadena maximal acumulando en x, y sea $T = cc_x(\partial S_{[p]} \cap B_\delta(x))$. Sabemos por la proposición 6.1 que T es una variedad topológica cerrada en $B_\delta(x)$. Sea $z \in T \setminus \{x\}$ y $[q] \neq [p]$ tal que $z \in \partial S_{[q]}$. Definamos $T' = cc_z(\partial S_{[q]} \cap B_\delta(x))$. Sea $F = T' \setminus \{x\} \cap T \setminus \{x\}$, que es un cerrado no vacío de $T \setminus \{x\}$ y de $T' \setminus \{x\}$. Como todo $w \in F$ tiene estructura de producto local, F es abierto en $T \setminus \{x\}$ y en $T' \setminus \{x\}$. Por lo tanto $F = T \setminus \{x\} = T' \setminus \{x\}$ porque $T \setminus \{x\}$ y $T' \setminus \{x\}$ son conexos ($dim(m) \geq 3$). Luego, como T' es cerrado, $x \in T'$, lo que implica que $T' = cc_x(\partial S_{[q]} \cap B_\delta(x))$. Como Per_H^{n-1} es denso en $S_{[p]}$ podemos aplicar la proposición 6.2 a x. Sea $h_p\colon [0,1) \times (-1,1)^{n-1} \to R_p \subset B_\delta(x)$ tal homeomorfismo, y de forma que R_p sea un entorno de x relativo a $S_{[p]}$ y $h_p(0) = x$. Sea $F_p = T \cap R_p = h_p(\{0\} \times (-1,1)^{n-1})$. También por la proposición 6.2 podemos considerar $h_q\colon (-1,0] \times (-1,1)^{n-1} \to R_q \subset B_\delta(x)$ un homeomorfismo satisfaciendo que R_q es un entorno de z relativo a $S_{[q]}$ y $h_q(0) = \{x\}$. Analogamente definimos $F_q = \partial S_{[q]} \cap R_q = h_q(\{0\} \times (-1,1)^{n-1}) \subset F$. Podemos considerar $F_q \subset F_p$. Sea $\pi_2\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ la proyección canónica sobre la segunda coordenada. Mas aún, si restringimos h_p al conjunto $[0,1) \times \pi_2(h_q^{-1}(F_q))$ podemos suponer $F_p = F_q$. Sea $h\colon (-1,1) \times F_p \to B_\delta(x)$ dada por $h(t,y) = h_p(t, \pi_2(h_p^{-1}(y)))$ si $t \geq 0$, y $h_q(t, \pi_2(h_q^{-1}(y)))$ si $t \leq 0$. Claramente $h(0,y) = y$ por lo que h es contínua. Nuevamente usando el Teorema de la invariancia del dominio, tenemos que x tiene estructura de producto local, lo que constituye una contradicción.

$\square$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.3.

Una vez descartadas las singularidades es muy sencillo probar que hay una estructura de producto local uniforme dado que si no la hubiese, existirían puntos x_n que no admitan estructuras de producto local en las bolas de radio mayor que $1/n$. Tomando un punto límite, encontraríamos un punto que no podría admitir estructura de producto local, es decir, una singularidad.

La estructura de producto local uniforme implica inmediatamente la propiedad de sombreado a partir de los resultados de [Red] que aseguran que existe una métrica hiperbólica en las coordenadas de la estructura de producto local (ver [Vie2]) .

$\square$

7. Apéndice

Lema 7.1. *Sea M una variedad de dimensión $n \geq 3$ y $f\colon M \to M$ un homeomorfismo que cumple $\overline{Per_H} = M$ y que $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$ o $Per_H^1 \neq \emptyset$. Entonces M admite una foliación de codimensión uno con hojas homeomorfas a $\mathbb{R}^n$.*

DEMOSTRACIÓN. La estructra de producto local uniforme obtenida en el Teorema 1.3 muestra la existencia de la foliación. Supongamos que $Per_H^{n-1} \neq \emptyset$, entonces las hojas de la foliación son los conjuntos estables de los puntos. Sea $x \in M$, probaremos que $W^s(x)$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^{n-1}$. Para ver esto es suficiente observar que $W^s(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(S_\varepsilon(f^n(x)))$. Donde $S_\varepsilon(z)$ es un disco de tamaño uniforme en $W_\varepsilon^s(z)$ (que existe por la estructura de producto local uniforme). Luego, $W^s(x)$ puede ser escrita (quizás tomando una subsucesión $n_j \to \infty$ de forma que $f^{-n_j}(S_\varepsilon(f^{n_j}(x))) \subset f^{-n_{j+1}}(S_\varepsilon(f^{n_{j+1}}(x))))$ como una unión creciente de discos de dimensión $n-1$, lo que implica la tesis.

$\square$

Una ves que sabemos que las hojas son homeomorfas a $\mathbb{R}^{n-1}$, argumentos clásicos permiten probar que M es homeomorfa a $\mathbb{T}^n$. Vamos a hacer un esquema de algunos pasos de la prueba por razónes de autocontenido. Las ideas están basadas en [Fr] y [Vie3]. El primer paso es probar que el cubrimiento universal de $M(\overline{M})$ es $\mathbb{R}^n$. Para probar que $\overline{M} = \mathbb{R}^n$ alcanza con probar que dados $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{M}$, sus conjuntos estables e inestables respectivos se intersectan en un único punto. Para ver que la intersección tiene a lo sumo un punto, podemos ver que si las foliaciones se intersectan en más de un punto, entonces podemos obtener una curva cerrada transversal a la foliación de codimensión uno, que por ende es borde de un disco de dimensión dos. Utilizando los métodos de Solodov ([Sv]lema 5), vemos que el disco puede ser elegido para estar en posición general, de forma de que obtenemos una foliación en el disco, transversal a la frontera, con singularidades no degeneradas, y sin conexiones de silla(este es el único paso donde se usa la diferenciabilidad en [Fr]). Ahora, utilizando argumentos de Haefliger ([Vie3] lema 2.11, o [Fr] lema 5.1) concluimos que hay una hoja de la foliación de codimensión uno con holonomía no trivial, en contradicción con el hecho de que las hojas son simplemente conexas.

Finalmente, probar que las hojas se intersectan es una adaptación de los argumentos de [Fr], lema 5.2, después de saber que las hojas de codimensión uno son densas en M (hecho que es cierto por la densidad de los periódicos topológicamente hiperbólicos). Una vez que tenemos lo anterior, no es difícil probar que $\Pi_1(M)$ es abeliano libre, estudiando la acción de $\pi_1(M)$ sobre $\mathbb{R}$ que permuta sin puntos fijos las hojas de la foliación de codimensión uno([HH], capítulo VIII, sección 3). Ahora podemos seguir la prueba en [Fr], leyendo las pruebas de la Proposición(6.2), Teorema (4.2) y Teorema (3.6)(Recordar que homeomorfismos expansivos con estructura de producto local tienen coordenadas canónicas hiperbólicas [Red]). Esto prueba que $M = \mathbb{T}^n$

Referencias

[ABP] A. Artigue, J. Brum y R. Potrie, Local product structure for expansive homeomorphisms *Arxiv2008*, aceptado en Topology and its applications.

[D] A.Dold, *Lectures on Algebraic Topology* Springer Verlag, New York 1980

[FrRo] J. Franks y C. Robinson, A Quasi-Anosov Diffeomorphism that is not Anosov. *Trans. Am. Math. Soc.* **233** p.267-278. (1976).

[Fr] J. Franks, Anosov diffeomorphisms *Proc. Sympos. Pure Math, vol 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI*, (1970) p 61 - 93.

[H] K. Hiraide. Expansive homeomorphisms with the pseudo-orbit tracing property of n-tori. *J. Math.Soc. Japan* **41** (3) (1989), 357-389.

[Ht] A. Hatcher, Algebraic Topology

[HW] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension Theory (Princeton Math. Series 4)* Princeton University Press, 1948.

[HH] G.Hector, U. Hirsch, Introduction to the Geometry of Foliations, Part B, Aspects Math., Vieweg, 1983

[Lew1] J. Lewowicz, Persistence in expansive systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **3** (1983), 567-578.

[Lew2] J. Lewowicz, Expansive Homemorphisms of Surfaces, *Bol. Soc. Bras. de Mat.* **20** (1989), 113-133.

[Lew3] J. Lewowicz, *Dinámica de los homeomorfismos expansivos.* Monografias del IMCA (2003)

[Red] W. Reddy, Expansive canonical coordinates are hyperbolic, *Topology and its Appl.* **13** (1982), 327-334.

[Sv] V.V.Solodov, Components of topological foliations, Math. USSR Sb.47 (1984) 329-343

[Sp] Spanier E.H. *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.

[Th] Thurston, W., On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, Preprint

[K] Kuratowski, Topology. Academic Press, (1966)

[Vie1] J.L. Vieitez, Three dimensional expansive homeomorphisms. *Pitman Research Notes in Math.* **285** p. 299-323 (1993).

[Vie2] J.L. Vieitez, Expansive homeomorphisms and hyperbolic diffeomorphisms on three manifolds. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **16** p 591- 622 (1996).

[Vie3] J.L. Vieitez, A 3D-manifold with a uniform local product structure is $\mathbb{T}^3$. *Publ. Mat. Urug.* **8** p 47 - 62 (2000).

[Vie4] J.L. Vieitez, Lyapunov functions and expansive diffeomorphisms on 3D manifolds. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **22** p 601- 632 (2002).