Métodos Numéricos para la Resolución de Ecuaciones Diferenciales
Curso 2004

Obligatorio 1 – Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Problema 1

Sea el sistema de masa-resortes que se presenta en la Figura 1, cuyo movimiento está regido por las ecuaciones de movimiento presentadas en la Figura 2.

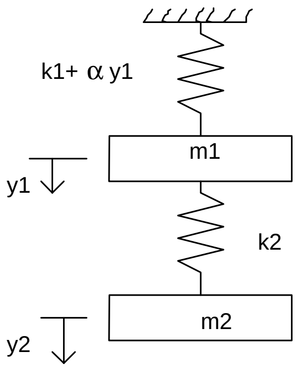

Figura 1: Sistema de masas y resortes.

$$m_1 y_1'' = -(k_1 + a y_1) y_1 - k_2 (y_1 - y_2)$$
$$m_2 y_2'' = k_2 (y_1 - y_2)$$

Siendo

$$m_1 = 1; m_2 = 2; k_1 = 3 \; y \; k_2 = 4$$

y las condiciones iniciales

$$y_1(0) = 1, \; y_1'(0) = 0,$$
$$y_2(0) = 1, \; y_2'(0) = 0.$$

Figura 2: Ecuaciones de movimiento.

El primer resorte tiene un comportamiento no lineal con el desplazamiento, que se simula introduciendo el parámetro a . Las coordenadas de las masas (y_1 e y_2) se miden a partir de las posiciones de reposo. Las otras constantes valen, respectivamente

$$m_1 = 1; m_2 = 2; k_1 = 3 \; y \; k_2 = 4,$$

a) Transforme las ecuaciones de movimiento a una EDO de primer orden.

b) Halle la solución que se obtiene con las rutinas de Matlab *ode45* y *ode32*, para el caso a =1.8, desplegando valores en el intervalo $t \in [0,8]$, y para $y_1 \in [-20,2]$.

c) Tomando como base el código de las funciones *ode23* y *ode45*, implemente el método de Euler hacia adelante con paso adaptativo, estimando el error local en cada paso mediante una extrapolación de Richardson usando pasos *h* y *h*/2. Al igual que las funciones *ode*, se usará un h_{MAX}, pero además controlará que *h* no sea menor que 10^{-6}, ni que el incremento de *h* entre iteración e iteración esté fuera del rango (0.1,2). El programa será evaluado resolviendo los problemas $y' = 1$, $y(0) = 0$ e $y' = x$, $y(0) = 0$, que deberán ser resueltos por el programa en forma "exacta" (ya que el método de Euler es de orden 1) y en forma "aproximada", respectivamente.

d) Muestre que el algoritmo implementado no obtiene soluciones satisfactorias a partir de un determinado valor de *t*. Compruebe que el ajuste adaptativo del paso *h* funciona correctamente, desplegando en función de *t*, el máximo valor de $|1 + h\,l_i|$ y la parte real de $q.h$, siendo l_i los valores propios del jacobiano del problema, calculados analíticamente. Justifique el comportamiento en términos de la estabilidad numérica.

e) Modifique el programa diseñado para que implemente el método de Euler hacia atrás, con un único paso predictor-corrector. Justifique el comportamiento del nuevo algoritmo, en base a los resultados que se obtienen al resolver el problema.

Métodos Numéricos para la Resolución de Ecuaciones Diferenciales

Curso 2004

Obligatorio 1 – Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Problema 2

El *método de Numerov* es utilizado para resolver problemas EDO de condición inicial derivados de la resolución de problemas EDO de condición de borde.

Muchos problemas de condición de borde corresponden a la expresión general presentada en la Figura 3.

$$y'' = -g(x).y + s(x) \qquad (1)$$

con condiciones de borde $y(x_1)$ e $y(x_2)$.

Figura 3: Expresión general para EDO con condiciones de borde.

Como ejemplo puede mencionarse la ecuación de Poisson unidimensional, $y'' = -r(x)$, donde la función *y* se conoce en los puntos x_1 y x_2, que corresponde a un caso simplificado de la expresión general presentada, donde $g(x) = 0$ y $s(x) = -r(x)$.

En ocasiones el problema con condiciones de borde puede resolverse como problema de condición inicial, porque se dispone de los valores de la derivada en x_1, o es posible estimarla de acuerdo a información de contexto del problema. Entonces, asumiendo que en lugar de $y(x_1)$ e $y(x_2)$ se conocen los valores iniciales $y(x_1)$ e $y'(x_1)$, es posible derivar una expresión aproximada de orden alto para la resolución del problema.

a) Derive una ecuación en diferencias para resolver una EDO del tipo (1) cuyo error sea de $O(h^6)$ a partir de los desarrollos de Taylor para $y(x+h)$ e $y(x-h)$, utilizando una aproximación de segundo orden en diferencias centradas para $y^{(4)}$. Esta expresión corresponde al *método de Numerov*.
b) Argumente cómo implementaría un mecanismo eficiente para comenzar la ejecución de la iteración planteada en el método de Numerov.
c) Halle la región de estabilidad del método de Numerov.
d) Aplique el método deducido a la resolución del problema de Sturm–Liouville $y'' + l y = 0$, con condiciones iniciales $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Grafique la solución obtenida para una familia de ecuaciones especificadas por diferentes valores del parámetro λ del problema.
e) Calcule los errores cometidos al resolver dos instancias del problema de Sturm–Liouville, utilizando diferentes valores para el paso *h*. Grafique los errores obtenidos y justifique el comportamiento del método utilizado.