

1.3. Otros métodos

1.3.1. Método del trapecio

El método del trapecio se basa en la integración la ecuación diferencial, $y' = f(x, y)$, $x \in [x_n, x_{n+1}]$

Integrando, se obtiene
$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Si se aproxima el valor de la segunda la integral por el área del rectángulo con altura el valor de f en (x_n, y_n) , se obtiene $y_{n+1} - y_n = hf(x_n, y_n)$, que corresponde a la fórmula del método de Euler.

Aproximando la integral por el área del trapecio, $y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$, es posible obtener una mejor estimación, que corresponde a la fórmula del método del trapecio:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})) \quad (1)$$

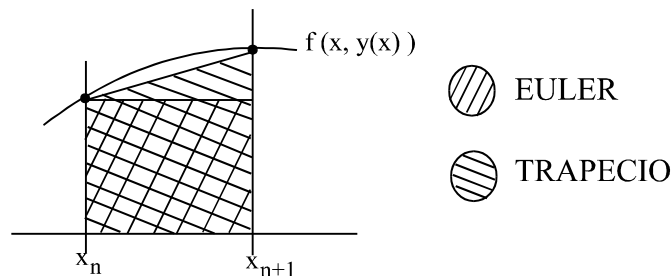


Figura 7 - Interpretación de la aproximación realizada con los métodos de Euler y del Trapecio.

El método del trapecio es un **método implícito**. En cada paso se debe calcular y_{n+1} pero este valor está definido implícitamente (en función de si mismo) por la ecuación (1). Si f es una función no lineal, se debe resolver una ecuación (o un sistema) no lineal en cada paso. La resolución implicará entonces el uso de un método iterativo (MIG).

Una posible iteración de punto fijo para determinar y_{n+1} es,

$$y_{n+1}^{(k+1)} = \frac{1}{2}hf(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) + u_n, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

donde $u_n = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)$ se conoce del paso anterior.

Un criterio suficiente de convergencia para la iteración anterior es $\frac{1}{2}h \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) \right\| < 1$

(este valor determinará la velocidad de convergencia del método iterativo, cuánto menor sea

$\frac{1}{2}h \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) \right\|$, más rápida será la convergencia).

Para comenzar la iteración (2) se necesita un valor inicial, que se puede obtener de los datos conocidos por ejemplo calculando un paso de un método explícito. Puede utilizarse el valor de un paso del método de Euler como valor inicial,

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

La fórmula que se utiliza para determinar el valor inicial para la iteración se denomina **predictor** y la fórmula de iteración, **corrector**. El procedimiento general se llama método **predictor - corrector**.

El criterio de parada de la iteración puede involucrar el control de la diferencia $y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}^{(k)}$ respecto de una tolerancia establecida, o fijando el número de iteraciones. La última idea es la más común para los métodos más usuales.

Es deseable utilizar un predictor apropiado de forma que baste con una sola iteración (del corrector) para lograr la precisión deseada.

Son muy usadas las fórmulas de **Adams - Bashforth** como predictor, y la fórmula de **Adams - Moulton** como corrector,

Estudio de la consistencia del método del trapecio:

Puede demostrarse (realizando el estudio de consistencia de modo similar al realizado para el método de Euler) que el método del trapecio es consistente con orden $p=2$.

Estudio de la región de estabilidad:

De acuerdo a la fórmula del método, $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}q(y_n + y_{n+1})$, propagando hacia atrás se tiene que

$$y_{n+1} = \left(\frac{1 + \frac{hq}{2}}{1 - \frac{hq}{2}} \right) y_n \Rightarrow y_n = \left(\frac{1 + \frac{hq}{2}}{1 - \frac{hq}{2}} \right)^n y_0$$

Por lo cual la solución está acotada si

$$\left| \frac{1 + \frac{hq}{2}}{1 - \frac{hq}{2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \left| 1 + \frac{hq}{2} \right| \leq \left| 1 - \frac{hq}{2} \right| \Leftrightarrow \text{dist}\left(\frac{hq}{2}, -1\right) \leq \text{dist}\left(\frac{hq}{2}, 1\right)$$

siendo $\text{dist}(P, Q)$ la distancia desde el punto P al punto Q .

La solución corresponde al semiplano $\text{Re}\left(\frac{hq}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \text{Re}(hq) \leq 0$, o sea que la región de estabilidad es el semiplano:

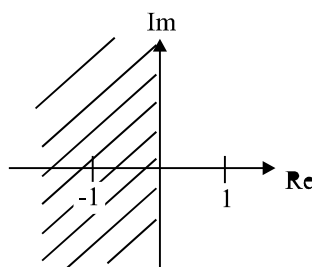


Figura 8 - Región de estabilidad del método del Trapecio

Observaciones:

- 1) La región de estabilidad de este método coincide con la de estabilidad de la ecuación diferencial.
- 2) Si se aplica el método del trapecio a un sistema de 2 ecuaciones donde los valores propios tienen parte real negativa pero algunos tienen módulo grande, aparecen oscilaciones decrecientes pues

$$\frac{1 + \frac{qh}{2}}{1 - \frac{qh}{2}} \rightarrow -1 \text{ cuando } |qh| \rightarrow \infty$$

Este fenómeno también ocurre para otros métodos, para ciertos valores de hq .

1.3.2. Método de Euler hacia atrás ("Backward Euler")

Conceptualmente es similar al de Euler, pero tomando como aproximación de la derivada la tangente en el punto de llegada,

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$$

Al igual que el método del trapecio, es un método implícito. En general hay que resolver un sistema no lineal en cada paso.

Una iteración de punto fijo para hallar \mathbf{y}_n , puede partir del valor dado por el método de Euler:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{n+1}^{(k+1)} &= \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^{(k)}) \\ \mathbf{y}_{n+1}^{(o)} &= \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)\end{aligned}$$

Estudio de la región de estabilidad

Considerando la fórmula del método, y propagando hacia atrás, se obtiene

$$y_{n+1} = y_n + qhy_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{1-hq} y_n \Rightarrow y_n = \frac{1}{(1-hq)^n} y_0$$

La condición para que la solución esté acotada es: $\frac{1}{|1-hq|} \leq 1 \Rightarrow |1-hq| \geq 1$

Lo cual corresponde a la región exterior al círculo unitario centrado en 1.

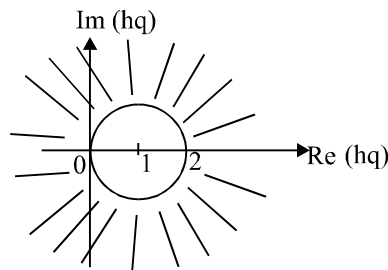


Figura 9 - Región de estabilidad del método de Euler hacia atrás.

Nótese que si bien la región de estabilidad incluye $\text{Re}(hq) > 0$ ello no implica que el método sea aplicable en ese caso. La noción de estabilidad asegura que la solución numérica está acotada, aún para n grande. Sin embargo, dado que la solución exacta no lo está (para x grande) el método será perfectamente inútil (para $n \rightarrow \infty$).

Para h suficientemente pequeño, el método se torna "inestable" (esto es, de solución no acotada), pero puede dar eventualmente una solución correcta si la solución también lo es.

Como ejemplo citaremos el problema

$$\begin{aligned}y' &= y \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

Se sugiere utilizar $h=1.5, 1, 0.5, 0.01$ para calcular el valor $y(15)$.

1.3.3. Problemas rígidos ("Stiff problems")

Los problemas rígidos aparecen frecuentemente en los campos de la teoría de control, ingeniería química, mecánica de los fluidos, cinética química.

Se introducirán mediante el estudio de los siguientes ejemplos:

Ejemplo A

Considérese el sistema de EDO,

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1001 & 999 \\ 999 & -1001 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que $\left(\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \right) \right) = \mathbf{A}$, es la matriz jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -1001y_1 + 999y_2 + 2 \\ 999y_1 - 1001y_2 + 2 \end{pmatrix}$

Los valores propios de A son $(-1001 - \lambda)^2 - 999^2 = 0 \rightarrow \lambda = -2000$
 $\downarrow \lambda = -2$

La solución exacta del sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{-2000x} + e^{-2x} + 1 \\ y_2(x) = -e^{-2000x} + e^{-2x} + 1 \end{cases}$$

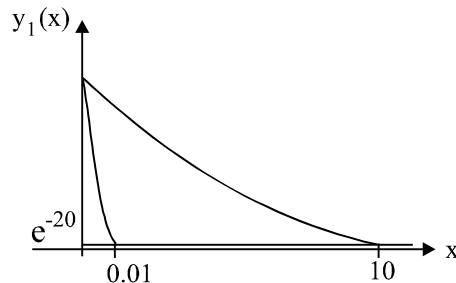


Figura 10 –Transitorios rápido y lento de un problema rígido

Los términos e^{-2000x} y e^{-2x} se pueden clasificar como el transitorio "rápido" y "lento" de la solución. El transitorio "rápido" en $x = 0,01$ vale $e^{-20} \approx 0$ y el transitorio "lento" alcanza ese mismo valor en $x = 10$ dando la solución estacionaria $y_1(x) = 1, y_2(x) = 1$.

Si para la resolución numérica del sistema se utiliza el método de Euler, es de esperar que sea necesario utilizar un paso chico para $0 \leq x \leq 0,01$ de modo que el transitorio rápido esté representado con precisión.

De hecho se necesita que $\lambda h \in (-2, 0)$ para garantizar la estabilidad absoluta, y como $\lambda_{\min} = -2000$, esto implica la restricción $h < 0,001$.

Después de alcanzar el valor $x=0,01$, y el transitorio rápido “desaparezca”, se podría esperar que fuera posible tomar un paso h mayor. Pero este no es el caso porque el requerimiento de estabilidad debe seguir siendo satisfecho.

Luego, la restricción $h < 0,001$ debe valer para todo x . Para “alcanzar” al estado estacionario en $x=10$ deberán calcularse por lo menos 10.000 pasos.

Si fuese posible cambiar el sistema de ecuaciones diferenciales para $x > 0,01$ de manera que la solución no contenga al transitorio rápido, un paso $h < 1,00$ podría ser usado sin violar el requerimiento de estabilidad. Ello no se intenta en la práctica, pues implicaría bajar el orden de la ecuación diferencial, al eliminarle uno de los valores propios.

Ejemplo B

Sea el problema $y' = \lambda(y - F(x)) + F'(x)$

Donde $\lambda \ll 0$ y $F(x)$ varía poco. La solución exacta es $y(x) = ae^{\lambda x} + F(x)$, entonces las curvas solución para distintas condiciones iniciales rápidamente se unen en torno a $F(x)$.

Este comportamiento es típico de los problemas rígidos, y es llamado usualmente superestabilidad.

Si se usa para la resolución numérica el método de Euler, ocurre que

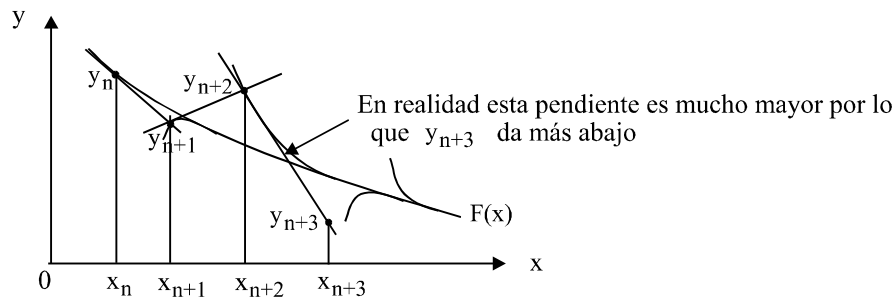


Figura 11 - Método de Euler aplicado a un problema rígido

Si $|1 + \lambda h| > 1$ el error se amplifica en cada paso aún cuando el transitorio haya muerto completamente.

Si se usa para la resolución numérica Euler hacia atrás,

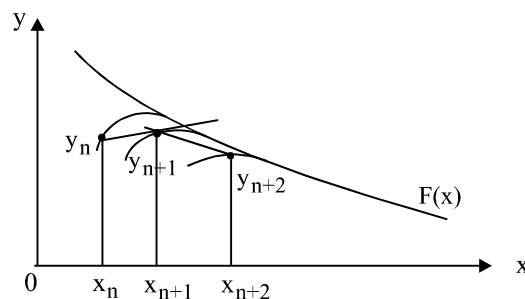


Figura 12 - Método de Euler hacia atrás aplicado un problema rígido

La solución numérica converge a $y(x_n) = F(x_n)$ aún cuando se use un paso grande.

El error se multiplica por $(1 - \lambda h)^{-1}$ en cada paso pero como $\lambda < 0$ este factor es menor que 1.

Para representar el transitorio $Ae^{\lambda x}$ con precisión se necesita un paso menor, pero luego que desaparezca se puede usar un paso más grande.

Para resolver problemas rígidos se necesitan métodos especiales, implícitos todos ellos. Se busca que la región de estabilidad de dichos métodos contenga al eje real negativo, para que el hecho de tener valores propios con parte real negativa "grande", no introduzca limitantes ineficientes en los valores de h a utilizarse.

Observaciones

- Los métodos implícitos usados en un esquema predictor-corrector iterativo requieren que $\|hJ\| < 1$ (o similar) para asegurar convergencia (y ello no depende de $y^{(0)}$!!). Este hecho obliga a que el valor de h sea pequeño. Para evitar esa restricción se puede usar una iteración de Newton en lugar del M.I.G., pero esto requiere a su vez programar las derivadas.
- El mayor o menor orden es significativo para optar entre dos métodos si h es pequeño. Cuando ese no es el caso, importa más el factor de amortiguación del error.
- En problemas rígidos $\frac{1}{1 - qh}$ puede ser mucho menor que $\frac{1 + \frac{1}{2}hq}{1 - \frac{1}{2}hq}$, favoreciendo la elección del método de Euler hacia atrás a pesar de su menor orden.

1.3.3 - Método del punto medio

En el método de Euler se aproxima la derivada de la función utilizando una diferencia hacia adelante, $y'(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} + O(h)$, mientras que en el método del punto medio se la aproxima mediante la diferencia centrada

$$y'(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n-1}))}{2h} + O(h^2),$$

con lo cual la ecuación en diferencias del metodo resulta

$$\underline{y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)}$$

Observaciones:

- 1) Es un método de 2 pasos, por lo que se necesita calcular y_1 mediante un método de un paso (por ej. Euler) a partir de $y_0 = c$ para comenzar la iteración.
- 2) El error de truncamiento de la fórmula es $O(h^3)$ por lo que el error global es $O(h^2)$.

Estudio de la estabilidad del método del punto medio

A partir de la ecuación del método $y_{n+1} = y_{n-1} + 2hqy_n$, propagando hacia atrás, se tiene que

$$\Rightarrow y_{n+1} - y_{n-1} - 2hqy_n = 0 \rightarrow u^2 - 2hqu - 1 = 0 \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$$

Si $u_1 \neq u_2$, la solución general es $y_n = c_1 u_1^n + c_2 u_2^n$.

Dado que $u_1 u_2 = -1 \Rightarrow |u_1| |u_2| = 1$, pero la estabilidad requiere que $|u_1| = |u_2| \leq 1$, las raíces son de la forma

$$u = e^{i\varphi} \Rightarrow e^{2i\varphi} - 2hqe^{i\varphi} - 1 = 0 \Rightarrow hq = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = i \sin \varphi, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Si $hq \pm i \therefore u^2 \mp 2iu - 1 = (u \pm i)^2 \Rightarrow u = \mp i$ doble $\Rightarrow y_n = (A + Bn)(\pm i)^n$ no es acotada $n \rightarrow \infty$.
Luego la región de estabilidad es el intervalo abierto de $-i$ a i .

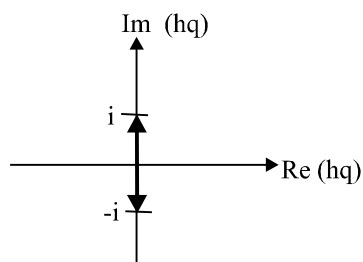


Figura 13 - Región de estabilidad del método del punto medio

1.3.4. - Métodos multipaso

Considerando la ecuación diferencial autónoma: $y' = f(y)$, $y(a) = c$, un método multipaso para la resolución de la EDO anterior será de la forma

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i y_{n-i} - h\beta_i f(y_{n-i})) = 0 \quad (3)$$

Observaciones:

- 1) Esta formulación incluye los métodos estudiados.
- 2) Para calcular y_n se necesita además del valor inicial $y_0 = c$, $k-1$ valores y_1, y_2, \dots, y_{k-1} . Los mismos se pueden estimar de diferentes maneras, por ejemplo con un método de un paso.
- 3) Si $\beta_0 \neq 0$ el método es implícito.

Estudio de la consistencia

Ya se ha expresado que la propiedad de consistencia es inherente al método. También se ha visto que si el método es de orden p , el error global es proporcional a $y^{(p)}(\xi)h^p$. Ello habilita a verificar simplemente que el método resuelve exactamente una EDO cuya solución analítica es un polinomio de grado p (lo que asegura $y^{(k)} \equiv 0$ $k \geq p$).

Teorema

Definiendo los polinomios auxiliares $\rho(\xi) = \sum_{i=0}^k \alpha_i \xi^{k-i}$, $\sigma(\xi) = \sum_{i=0}^k \beta_i \xi^{k-i}$, la consistencia es

$$\text{equivalente a } \begin{cases} \rho(1) = 0 \\ \rho'(1) = \sigma(1) \end{cases}$$

Estudio de la estabilidad

La ecuación en diferencias correspondiente al problema test (PT) es: $\sum_{i=0}^k (\alpha_i y_{n-i} - h\beta_i q y_{n-i}) = 0$

La estabilidad equivale a que las soluciones de la ecuación anterior sean acotadas.

Teorema

Es condición necesaria y suficiente de estabilidad de un método multipaso que las raíces (reales y complejas) del polinomio característico de la ecuación en diferencias estén en el círculo unidad, y que las raíces de módulo 1 sean simples.

Observaciones

1) Un resultado general de acotación del error global para los métodos multipasos se puede encontrar en el DBA, pág. 377

2) Un resultado que relaciona las nociones de estabilidad, consistencia y convergencia es el Teorema de Lax (Consistencia y estabilidad \Leftrightarrow convergencia). Referencia : DBA pág. 377

3) Si se usa un método de un paso para resolver $y' = qy$ se obtiene, $y_{n+1} = r_1(qh)y_n$, donde $r_1(qh)$ depende del método en particular. Como la solución de $y' = qy$ que pasa por y_n es $\tilde{y}(x) = y_n e^{q(x-x_n)}$, un método de orden p (con error local de truncamiento $p+1$) dará como resultado: $y_{n+1} = y_n e^{qh} + O(h^{p+1})$, y entonces $r_1(qh) = e^{qh} + O(h^{p+1})$

Si se introduce un error ε en y_n resulta en un error $r_1(qh)\varepsilon$ en y_{n+1} , y en todo paso siguiente el error se vuelve a multiplicar por $r_1(qh)$. Luego el error se mantiene acotado si $|r_1(qh)| \leq 1$.

1.3.5. Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta constituyen una familia de métodos multipaso de orden alto. La mayor parte de los paquetes numéricos de software los incluyen como opción por defecto, lo que los hace extremadamente populares.

Los métodos de Runge-Kutta pueden ser explícitos, semi-implícitos o implícitos.

Introducción

Sea la ecuación diferencial: $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0, x \in [x_0, b]$

Por el teorema de valor medio cualquier solución de la EDO anterior satisface,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h y'(\xi_n) = y(x_n) + h f(\xi_n, y(\xi_n)) \quad \text{donde } \xi_n = x_n + \theta_n h, \quad 0 < \theta_n < 1$$

Si se aproxima $\theta_n = \frac{1}{2}$ y se aplica el método de Euler con paso $\frac{h}{2}$ para la estimación de $y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$, se tiene que $y\left(x_n + \frac{h}{2}\right) \cong y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$

Lo anterior sugiere para y_{n+1} el siguiente método:

$$y_{n+1} = y_n + h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right) \quad (4)$$

Alternativamente, usando la idea de evaluar la derivada en puntos intermedios (pero ahora promediando la derivada) se puede proceder como sigue,

$$y\left(x_n + \frac{h}{2}\right) \cong \frac{1}{2} (y'(x_n) + y'(x_{n+1})) \cong \frac{1}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + h f(x_n, y_n)))$$

y entonces se tiene el método explícito,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + h f(x_n, y_n))) \quad (5)$$

Obsérvese que tanto el método (4) como el (5) se pueden expresar como,

$$y_{n+1} = y_n + h \quad (\text{promedio en derivadas en puntos intermedios}) \quad (6)$$

Esta es la idea básica detrás de los métodos RK; se halla la pendiente en x_n y se la estima en otros puntos intermedios, se combinan linealmente ("promedian") estas pendientes, se multiplica dicho valor por h y se lo suma a y_n .

Entonces un método explícito de R-K con v pendientes se puede escribir como,

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^v w_i k_i$$

$$\text{donde } k_i = hf\left(x_n + c_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right), i = 1, 2, \dots, v, c_1 = 0 \quad (7)$$

o sea

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + c_3 h, y_n + a_{31} k_1 + a_{32} k_2)$$

Donde $c_2, c_3, \dots, c_v, a_{21}, \dots, a_{v(v-1)}$ y w_i son en principio, arbitrarios.

El incremento es una combinación lineal de la derivada en x_n y una serie de puntos entre x_n y x_{n+1} .

Los parámetros del método se calculan imponiendo que el error de truncamiento sea del orden más alto posible.

Método explícito de segundo orden

Aquí el método tiene la forma:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} k_1) \quad (8)$$

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2$$

Con el fin de obtener el orden más alto de truncamiento, deben cumplirse las siguientes ecuaciones:

$$w_1 + w_2 = 1; c_2 w_2 = \frac{1}{2}; a_{21} w_2 = \frac{1}{2}$$

En este caso, el error local de truncamiento que se obtiene es

$$e_n(h) = \frac{h^3}{12} [(2 - 3c_2) y_n'''(x_n) + 3c_2 f_y y_n''(x_n)] + \dots$$

Observaciones:

- 1) No hay elección posible de c_2 que permita anular la parte principal de $e_n(h)$ para toda $f(x, y)$.
- 2) El error local de truncamiento depende no solo de las derivadas de la solución $y(x)$ pero también de la función f . Esto es típico en los métodos R-K.
- 3) Casos particulares: Generalmente c_2 se elige entre 0 y 1.

Si $c_2 = \frac{1}{2}$ o $c_2 = 1$ para el caso de $f(x, y)$ independiente de y (un problema de integración), se obtienen la regla del punto medio y la del trapecio respectivamente que se encuentran en el capítulo correspondiente.

$$y' = f(x) \Rightarrow y(x) = \int_a^b f(x) dx$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_{21} = \frac{1}{2} \\ w_2 = 1 \\ w_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}\right) \quad \text{Punto medio.}$$

$$c_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_{21} = 1 \\ w_2 = \frac{1}{2} \\ w_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n) + f(x_n + h)) \quad \text{Trapezio.}$$

Otro criterio es elegir c_2 para eliminar algún w_i ; por ejemplo $c_2 = \frac{1}{2}$ hace $w_1 = 0$.

Método explícito de cuarto orden

El más popular de los métodos explícitos de RK es el de 4º orden, del cual hay dos posibles fórmulas Utilizando la notación anterior

c_2	a_{21}			
c_3	a_{31}	a_{32}		
c_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	
	w_1	w_2	w_3	w_4

Tabla 1- Esquema de los pesos en los métodos de Runge-Kutta

se tiene el método clásico (basado en una integración de simpson con regla 1/3) y otro basado en la regla 3/8

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
1	0	0	1
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
1	1	-1	1
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Tabla 2 - Pesos de los métodos de R-K de cuarto orden, basados en la regla de Simpson de 1/3 y 3/8 respectivamente.

Para $v = 2, 3$ y 4 se obtienen métodos de orden 2, 3 y 4 respectivamente.

Sorprendentemente, $v = 5$ da una fórmula de orden 4. Para obtener orden 5 se necesita $v = 6$. Análogamente $v = 7$ o 8 dan fórmulas de orden 6 y $v = k$ para dar métodos de orden $k - 2$, $k \geq 9$.

1.3.6.3 Regiones de estabilidad de los metodos de Runge-kutta

Para los métodos **explícitos** de Runge Kutta, valen las siguientes regiones

Regiones de estabilidad de los métodos de Runge Kutta

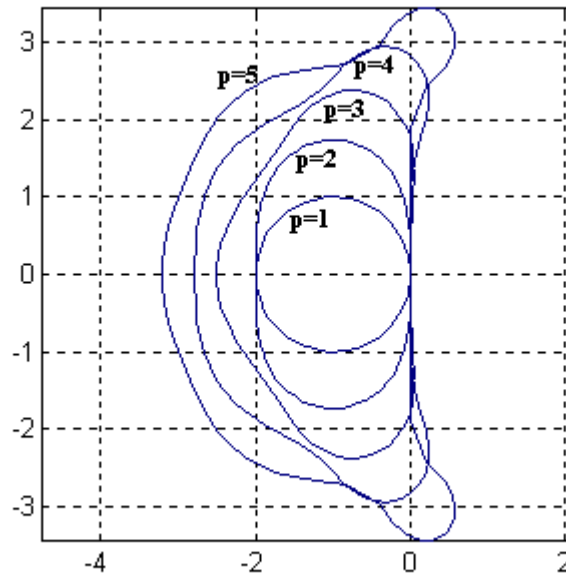


Figura 17 Región de estabilidad para métodos R-K explícitos

En la figura 18 se pueden observar las diferentes regiones de estabilidad de los métodos RK implícitos. Esto muestra por qué los mismos se usan en la resolución de problemas rígidos.

Observación: Todas las regiones de estabilidad que se muestran a continuación, son simétricas respecto del eje Real. La zona rayada indica el interior de la región de estabilidad.

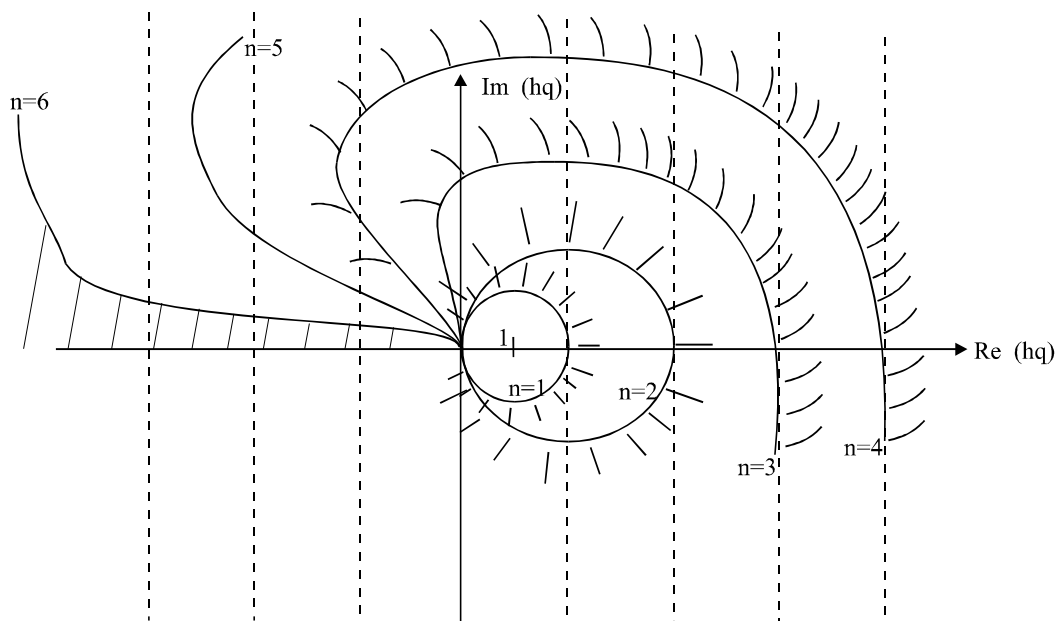


Figura 18 Región de estabilidad para métodos R-K implícitos