

Teoría de Lenguajes

Teoría de la Programación I

Soluciones

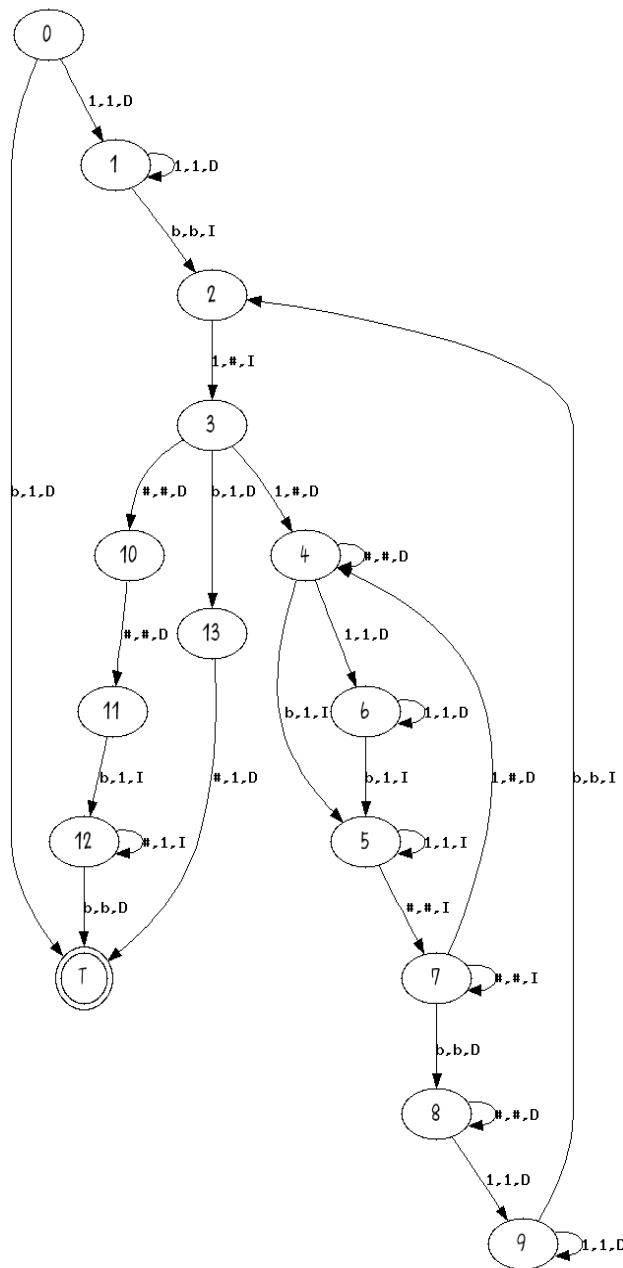
Ejercicio 1

Escribir una Máquina de Turing que compute una función f , tal que:

$$f(0) = 1$$

$$f(n) = f(n-1) + n$$

La entrada es una secuencia de k 1's, y la salida debería ser $f(k)$ 1's.



Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 2

Sea $L_2 = \{ ww^r p \mid w \in \{0,1\}^*, p \in \{0,1\}, |w| > 0, p \text{ es el XOR de los bits de } w \}$

- Clasifique a L_2 según la Jerarquía de Chomsky.
- Construya una gramática simplificada $G_2 / L_2 = L(G_2)$.
- Construya un autómata $M_2 / L_2 = L(M_2)$. ¿Es determinista? Justifique.

a) Clasifique a L_2 según la Jerarquía de Chomsky.

El lenguaje L_2 es libre de contexto, no regular.

Que es LC se demuestra con la construcción de la GLC de la parte b) o con la construcción del APD del parte c)

Que no es Regular se demuestra usando el contra-recíproco del P.L. para Lenguajes Regulares
Sea $n \in \mathbb{N}$

Elegimos $z = 0^n 110^n 1 \in L$ y $|z| = 2n+3 \geq n$

Estudiamos todas las descomposiciones de $z = uvw$ talque $|uv| \leq n$ y $|v| \geq 1$ y trataremos de encontrar un $i \geq 0$ para cada descomposición tal que $uv^i w \notin L$

Familias	0^n	$110^n 1$
1	v	

Familia 1

$$u = 0^p$$

$$v = 0^q \quad \text{con } 1 \leq q \leq n \text{ y } p \geq 0$$

$$w = 0^{n-p-q} 110^n 1$$

$$z_i = uv^i w = 0^p (0^q)^i 0^{n-p-q} 110^n 1 = 0^{n-q} 110^n 1$$

Eligiendo $i=0$ se ve que $uv^0 w \notin L_2$, con los siguientes casos a discutir:

- q impar:** la cantidad de símbolos antes del último 1 (bit de paridad) es impar, con lo cual esa parte de la tira z_0 no puede ser de la forma ww^r (que es necesariamente de largo par)
- q par:** como $q \geq 1$, provoca que los dos 1's del medio de la tira "pertenezcan" a la sub tira w , con lo cual, al hacer el XOR, la operación daría 0 y como el bit de paridad se mantiene en 1 $z_0 \notin L_2$.

De hecho, este último argumento sirve par ambos casos, sea **q** par o impar.

Como estas son todas las descomposiciones posibles de z en uvw que cumplen $|v| > 0$ y $|uv| \leq n$, por el CR del PL el lenguaje **no** es regular.

b) Construya una gramática simplificada $G_2 / L_2 = L(G_2)$.

$$S \rightarrow P0 \mid T1$$

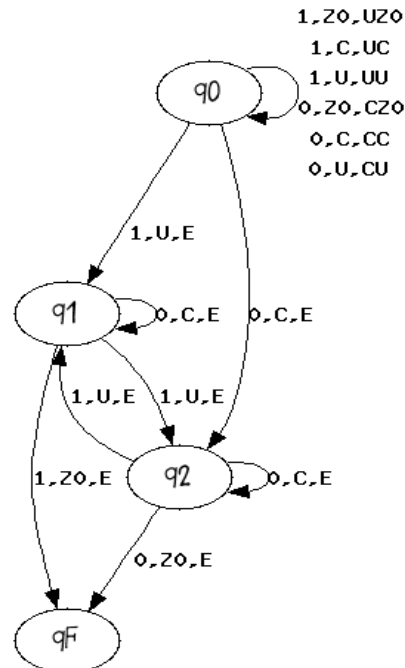
$$P \rightarrow 0P0 \mid 1T1 \mid 00$$

$$T \rightarrow 1P1 \mid 0T0 \mid 11$$

Se puede observar que está simplificada, puesto que las variables son útiles, no hay producciones épsilon ni unitarias

c) Construya un autómata $M_2 / L_2 = L(M_2)$. ¿Es determinista? Justifique.

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.



Es NO determinista, dado por las transiciones por ejemplo $\delta(q_0, 1, U) = \{(q_0, UU), (q_1, \epsilon)\}$

Ejercicio 3

a) Defina R_L para un L cualquiera.

b) Considere el lenguaje $L_3 = \{a^n b^n, n > 0\}$, e indique si las afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

i) $aaabbb R_{L_3} aab$

ii) Si $x \notin L_3 \wedge y \notin L_3 \Rightarrow x R_{L_3} y$

iii) Si $x R_{L_3} y \Rightarrow x \notin L_3 \wedge y \notin L_3$

iv) No existe un lenguaje L' , tal que $L_3.L'$ es regular

c) ¿Cuántas clases de equivalencia define la relación R_{L_3} ? Justifique.

a) Defina R_L para un L cualquiera.

$x R_L y$ si $\forall z \in \Sigma^*, xz \in L \Leftrightarrow yz \in L \wedge xz \notin L \Leftrightarrow yz \notin L$

b) Considerando el lenguaje $L_3 = \{a^n b^n, n > 0\}$, e indique si las afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

i) $aaabbb R_{L_3} aab$

Verdadero. Sea $z = b$, $aaabbb.b \in L \wedge aab.b \in L$. Sea $z \neq b$, $aaabbb.z \notin L \wedge aab.z \notin L$.

ii) Si $x \notin L_3 \wedge y \notin L_3 \Rightarrow x R_{L_3} y$

Falso. Sea $x = aab$, $y = aa$, $z = b$. $xz \in L \wedge yz \notin L$. Por lo tanto, se contradice la definición de R_L , entonces x e y no están relacionados por R_L .

iii) Si $x R_{L_3} y \Rightarrow x \notin L_3 \wedge y \notin L_3$

Falso. Sea $x = ab$, $y = aabb$, tal que $x R_{L_3} y \wedge x \in L, y \in L$.

iv) No existe un lenguaje L' , tal que $L_3.L'$ es regular

Falso. Sea $L' = \emptyset$, L' regular por definición. $L_3.L' = \emptyset$, porque todo lenguaje concatenado con el lenguaje vacío da como resultado el lenguaje vacío. Por lo tanto, encontramos un lenguaje que concatenándolo con L_3 da como resultado un lenguaje regular.

c) ¿Cuántas clases de equivalencia define la relación R_{L_3} ? Justifique.

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Dado que el lenguaje L_3 es libre de contexto no regular, R_{L_3} define infinitas clases de equivalencia. Si fuera un número finito de clases, por el teorema de Myhill-Nerode, L_3 sería regular, lo cual contradice el enunciado.

Ejercicio 4

Sea L_4 el lenguaje reconocido por el siguiente autómata finito $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ donde:

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$ $\Sigma = \{a, b\}$ $F = \{q_2, q_4\}$ y δ dada por:

	a	b	ϵ
q_0	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_5, q_6\}$
q_1	$\{\}$	$\{q_2\}$	$\{q_6\}$
q_2	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\{\}$	$\{q_5\}$
q_4	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
q_5	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{\}$
q_6	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{\}$

- Defina la relación R_M dado un AFD M cualquiera.
- Construya el autómata mínimo $M' / L_4 = L(M')$
- Expresé las clases de equivalencia definidas por la relación R_M mediante expresiones regulares. Justifique su razonamiento.
- Dé una expresión regular que denote al lenguaje L_4 . Justifique.

- Defina la relación R_M para cualquier lenguaje L reconocido por un AFD M

Sea un AFD $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ y dos tiras $x, y \in \Sigma^*$ entonces $x R_M y \Leftrightarrow \delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y)$

- Construya el autómata mínimo $M' / L_2 = L(M')$

Elimino transiciones épsilon:

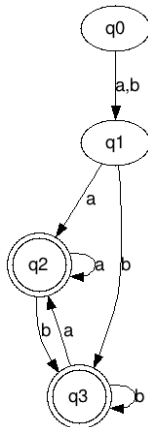
	a	b
q_0	$\{q_1q_3q_5q_6\}$	$\{q_1q_3q_5q_6\}$
q_1	$\{q_1q_6\}$	$\{q_1q_2q_6\}$
$q_2 (F)$	$\{\}$	$\{\}$
q_3	$\{q_3q_4q_5\}$	$\{q_3q_5\}$
$q_4 (F)$	$\{\}$	$\{\}$
q_5	$\{q_3q_5\}$	$\{q_3q_5\}$
q_6	$\{q_1q_6\}$	$\{q_1q_6\}$

Obtengo el AFD

	a	b
q_0	$q_1q_3q_5q_6 \rightarrow q_1$	$q_1q_3q_5q_6 \rightarrow q_1$
$q_1q_3q_5q_6 \rightarrow q_1$	$q_1q_3q_4q_5q_6 \rightarrow q_2$	$q_1q_2q_3q_5q_6 \rightarrow q_3$
$q_1q_3q_4q_5q_6 \rightarrow q_2[F]$	$q_1q_3q_4q_5q_6 \rightarrow q_2$	$q_1q_2q_3q_5q_6 \rightarrow q_3$
$q_1q_2q_3q_5q_6 \rightarrow q_3 [F]$	$q_1q_3q_4q_5q_6 \rightarrow q_2$	$q_1q_2q_3q_5q_6 \rightarrow q_3$

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

El autómata queda de la siguiente forma:

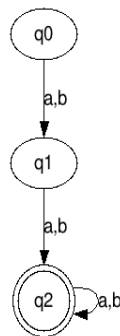


Minimizamos:

[q0q1] [q2q3]
[q0] [q1] [q2q3]

Las clases no pueden separarse más, por lo que el autómata mínimo queda:

- e) Exprese las clases de equivalencia definidas por la relación $R_{M'}$ mediante expresiones regulares. Justifique su razonamiento.



Calculamos las clases de cada estado, cada ecuación resuelve la expresión regular para las tiras que llegan a cada estado desde el estado inicial.

$$Y_0 = \varepsilon$$

$$Y_1 = Y_0(a|b)$$

$$Y_2 = Y_1(a|b) \mid Y_2(a|b)$$

$$Y_1 = (a|b)$$

$$Y_2 = (a|b)(a|b) \mid Y_2(a|b) = (a|b)(a|b)(a|b)^*$$

- f) Dé una expresión regular para el lenguaje $L_2 = L(M')$. Justifique.

La expresión regular para el lenguaje es Y_2 , ya que es el pipe de las expresiones regulares (en este caso solamente una) asociadas a los estados finales.

Ejercicio 5

Construir un Autómata con Salida M: $(Q, \Sigma, \Lambda, \delta, \lambda, q_0)$ tal que dada como entrada una secuencia de símbolos a, b y c de largo mayor que cero, produzca como salida también secuencias de símbolos a, b y c con las siguientes características:

- Por cada par de símbolos **a** consecutivos, coloca una **b** en el medio de las **a**
- Elimina los símbolos **b** de la entrada
- Duplica los símbolos **c**

Considere: $\Lambda = \{a, b, c\}$; $\Sigma = \{a, b, c\}$; $\lambda : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow (\Lambda \cup \{\epsilon\})$

Ejemplos:

Entrada	Salida
aaabbca	ababacca
cbbaba	ccaa
bbbbbbbbbb	
bbbccbb	cccc

