

Teoría de Lenguajes Soluciones

Ejercicio 1

$L_1 = \{x\#y \mid x, y \in L(1(0|1)^*)\}$, representan números en binario, con $|x| = |y|$, $x < y$ }

a) Clasifique a L_1 según la Jerarquía de Chomsky.

Solución

L_1 es R.E. no L.C.

Demostraremos que es R.E. por la G.I. de la parte b), y que no es L.C. por el contra-recíproco del P.L. 2 que desarrollaremos a continuación.

Sea N la cte. del PL, elijo $z = 1^N 00^N \# 1^N 10^N = 1^N 0^{N+1} \# 1^{N+1} 0^N$

Analizamos las descomposiciones de $z = uvwxy$ y tomamos aquellas familias que cumplen las condiciones $|vx| > 0$ y $|vwx| \leq N$

Familias	1^N	0^{N+1}	#	1^{N+1}	0^N
1	v x				
2	v x x				
3	v	x			
4	v v x				
5		v x			
6		v x x x			
7		v		x	
8		v v v x			
9				v x	
10				v x x	
11				v	x
12				v v x	
13					v x

Familia 1:

$$u = 1^p$$

$$v = 1^q \quad q + s \geq 1$$

$$w = 1^r \quad q + r + s \leq N$$

$$x = 1^s$$

$$y = 1^{N-p-q-r-s} 0^{N+1} \# 1^{N+1} 0^N$$

$$z_i = 1^p (1^q)^i 1^r (1^s)^i 1^{N-p-q-r-s} 0^{N+1} \# 1^{N+1} 0^N$$

$$z_i = 1^{N+(q+s)(i-1)+p} 0^{N+1} \# 1^{N+1} 0^N$$

Eligiendo $i=2$, $z_2 \in L_1$, porque $|x| \neq |y|$.

En forma análoga se demuestran los casos: 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12 y 13.

Eligiendo $i=2$, $z_2 \in L_1$, porque $|x| \neq |y|$.

Familia 6:

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

$$\begin{aligned}
 u &= 1^N 0^{N+1-q-r-s} \\
 v &= 0^q \\
 w &= 0^r \quad q+r+s+1+t \leq N \\
 x &= 0^s \# 1^t \\
 y &= 1^{N+1-t} 0^N
 \end{aligned}$$

$$z_i = 1^N 0^{N+1-q-r-s} (0^q)^i 0^r (0^s \# 1^t)^i 1^{N+1-t} 0^N$$

Eligiendo $i=0$, $z_2 \in L_1$, porque la tira no tiene el #.

En forma análoga se demuestra el caso: 8. Eligiendo $i=0$, $z_2 \in L_1$, porque la tira no tiene el #.

Familia 7:

$$\begin{aligned}
 u &= 1^N 0^{N+1-q-r} \\
 v &= 0^q \quad q+t \geq 1 \\
 w &= 0^r \# 1^s \quad q+r+s+1+t \leq N \\
 x &= 1^t \\
 y &= 1^{N+1-s-t} 0^N
 \end{aligned}$$

$$z_i = 1^N 0^{N+1-q-r} (0^q)^i 0^r \# 1^s (1^t)^i 1^{N+1-s-t} 0^N$$

Si $(q < t)$ o $(q > t)$, eligiendo $i=2$, $z_2 \in L_1$, porque $|x| \neq |y|$.

Si $q = t$, eligiendo $i=0$, $z_2 \notin L_1$, porque $x = 1^N 0^{N+1-q}$, $y = 1^{N+1-t} 0^N$, como $q + t \geq 1$, entonces $q = t \geq 1$ por lo tanto $x \geq y$ dado que $(|x| = |y|)$, x tiene la misma o mas cantidad de 1 al inicio que y .

Estas son todas las descomposiciones que cumplen las condiciones $|vx| \geq 1$ y $|vwx| \leq N$, y para cada una encontramos un i tal que $z_i \notin L_1$ entonces **podemos afirmar que L_1 no es libre de contexto.**

b) Construya una gramática $G_1 / L_1 = L(G_1)$.

Solución

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow 1US'\# && // \text{Garantizamos que empiecen con } 1 \underline{x} \text{ y } \underline{y} \\
 S' &\rightarrow 1US' \mid 0CS' \mid 0UT && // \text{De la izquierda a la derecha son iguales hasta que } \underline{x} \text{ tiene un } 0, \text{ y } \underline{y} \text{ un } 1 \text{ (representado por la } U) \\
 T &\rightarrow 1UT \mid 1CT \mid 0UT \mid 0CT \mid \varepsilon && // \text{Generamos el mismo largo para } \underline{x} \text{ y } \underline{y} \\
 U1 &\rightarrow 1U && // \text{Movemos las } U\text{s y } C\text{s a la derecha} \\
 U0 &\rightarrow 0U \\
 C1 &\rightarrow 1C \\
 C0 &\rightarrow 0C \\
 U\# &\rightarrow \#1 && // \text{Transformamos las } U\text{s en } 1\text{s y las } C\text{s en } 0\text{s} \\
 C\# &\rightarrow \#0
 \end{aligned}$$

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Ejercicio 2

$L_2 = \{w = x\#x^r \mid x \in L((0|1)^*), |w|_0 \text{ múltiplo de } 3 \text{ y } |w|_1 \text{ múltiplo de } 2\}$

a) Clasifique a L_2 según la Jerarquía de Chomsky.

Solución

El lenguaje no es regular. Para demostrarlo, utilizamos el contrarrecíproco del Pumping Lemma.

Sea N la constante del PL, y sea $z = 1^N \# 1^N$; notar que cumple $|z| \geq N$
Consideramos todas las descomposiciones posibles para $z = uvw$ que cumplan:
 $|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & u = 1^j \\ & j+p \leq N \\ & v = 1^p \\ & p \geq 1 \\ & w = 1^{N-j-p} \# 1^N \end{aligned}$$

$$z_i = 1^j 1^{ip} 1^{N-j-p} \# 1^N = 1^{N+(i-1)p} \# 1^N$$

Tomando $i=2$, $z_2 = 1^{N+p} \# 1^N$, y se cumple que $N+p \geq N+1$ (porque $p \geq 1$), con lo cual no se cumple que la tira que esta luego del $\#$ sea el reverso de lo que está antes. Por lo tanto z_2 no pertenece al lenguaje L_2 .

Esta es la única familia a analizar bajo los supuestos $|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$
Cualquier otra descomposición falla justamente en alguna de esas condiciones, con lo cual, por el CR del PL L_2 no es un lenguaje regular.

El lenguaje es LLC no regular dado que ya probé que no es regular y existe una gramática (parte 2b) y autómata APD (parte 2c) que lo reconocen.

b) Construya una gramática $G_2 / L_2 = L(G_2)$.

Solución

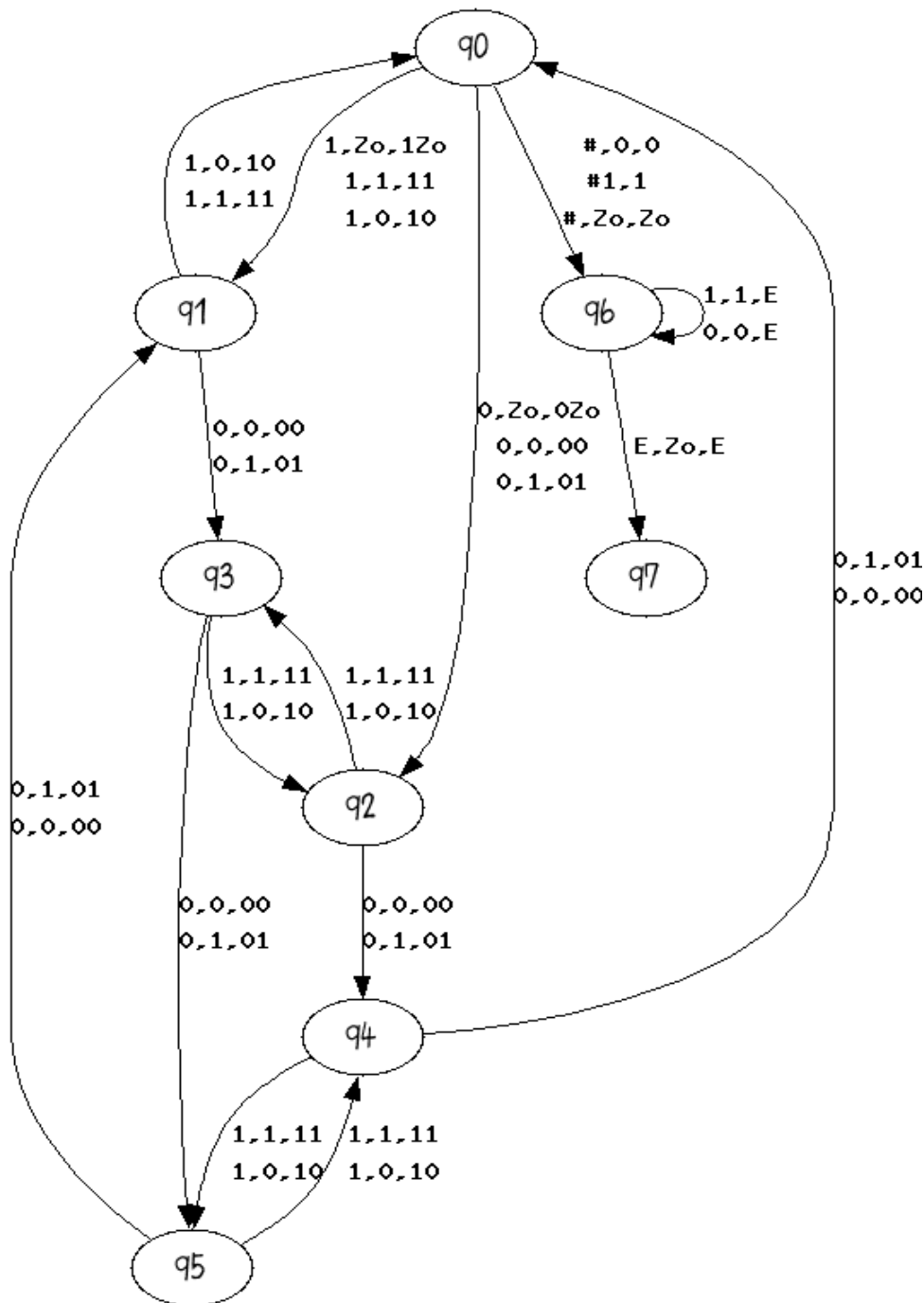
$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow 0 S_2 0 \mid 1 S_1 1 \mid \# \\ S_1 &\rightarrow 0 S_3 0 \mid 1 S_0 1 \\ S_2 &\rightarrow 0 S_4 0 \mid 1 S_3 1 \\ S_3 &\rightarrow 0 S_5 0 \mid 1 S_2 1 \\ S_4 &\rightarrow 0 S_0 0 \mid 1 S_5 1 \\ S_5 &\rightarrow 0 S_1 0 \mid 1 S_4 1 \end{aligned}$$

Las tiras generadas a partir de S_0 cumplen $|w|_0 = 3K$ y $|w|_1$ par.
Las tiras generadas a partir de S_1 cumplen $|w|_0 = 3K$ y $|w|_1$ impar.
Las tiras generadas a partir de S_2 cumplen $|w|_0 = 3K+2$ y $|w|_1$ par.
Las tiras generadas a partir de S_3 cumplen $|w|_0 = 3K+2$ y $|w|_1$ impar.
Las tiras generadas a partir de S_4 cumplen $|w|_0 = 3K+1$ y $|w|_1$ impar.
Las tiras generadas a partir de S_5 cumplen $|w|_0 = 3K+1$ y $|w|_1$ par.

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

c) Construya un autómata M_2 / $L_2 = L(M_2)$. ¿Es determinista? Justifique.

Solución



Sea la M_2 donde cada estado significa lo siguiente:

q_0 : $|w|$ 1 es múltiplo de 2 y $|w|$ 0 es múltiplo de 3.

q_1 : $|w|$ 1 no es múltiplo de 2 y $|w|$ 0 es múltiplo de 3 ($|w|$ 0 = $3K + 1$).

q_2 : $|w|$ 1 es múltiplo de 2 y $|w|$ 0 no es múltiplo de 3 ($|w|$ 0 = $3K + 1$).

q_3 : $|w|$ 1 no es múltiplo de 2 y $|w|$ 0 no es múltiplo de 3 ($|w|$ 0 = $3K + 2$).

q_4 : $|w|$ 1 es múltiplo de 2 y $|w|$ 0 no es múltiplo de 3 ($|w|$ 0 = $3K + 2$).

q_5 : $|w|$ 1 no es múltiplo de 2 y $|w|$ 0 no es múltiplo de 3 ($|w|$ 0 = $3K + 2$).

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

q6: $|w|$ 1 es múltiplo de 2 y $|w|$ 0 es múltiplo de 3, se leyó un numeral.
 q7: $|w|$ 1 es múltiplo de 2 y $|w|$ 0 es múltiplo de 3, consumo todo el stack.
 q8: $|w|$ 1 es múltiplo de 2 y $|w|$ 0 es múltiplo de 3, reconozco por stack vacío.

El autómata es determinista dado que para todo estado se cumple que existe como máximo una transición a otro estado (tomando en cuenta el símbolo leído y el tope del stack) y considerando la única transición con épsilon del autómata, $g(q_6, \epsilon, Z_0)$, no existe otra transición partiendo desde ese mismo estado con igual tope.

Ejercicio 3

Decir si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Justifique adecuadamente cada respuesta. Sea Σ un alfabeto y $L_a, L_b, L_c \subseteq \Sigma^*$

a) Si $(L_a \cap L_b)^c = \neg$, entonces L_a es Libre de Contexto

Verdadero: Si el complemento de un lenguaje es $\neg$ (lenguaje vacío) significa que el lenguaje es Σ^* . Con lo cual es Regular y por Jerarquía de Chomsky es Libre de Contexto.

b) Si L_a, L_c y $L_a \cdot L_b \cdot L_c$ son Regulares. Entonces L_b es Regular

Falso: Sea por ejemplo $L_a = 0^*$ $L_c = 1^*$ y $L_b = 0^k 1^k$ (que es Libre de Contexto NO Regular). Se observa que si concatenamos los 3 lenguajes el resultado es $0^* 1^*$ que es Regular.

c) Si L_a y L_b son RE Entonces $L_a \cdot L_b$ puede ser Libre de Contexto no Regular

Verdadero: Como dice "puede ser" alcanza con encontrar un ejemplo.

Sean $L_a = 0^k 1^k$ y $L_b = 0^j 1^j$ Ambos son Libre de Contexto, no Regulares. Por ser Libre de Contexto son RE (por Jerarquía de Chomsky)

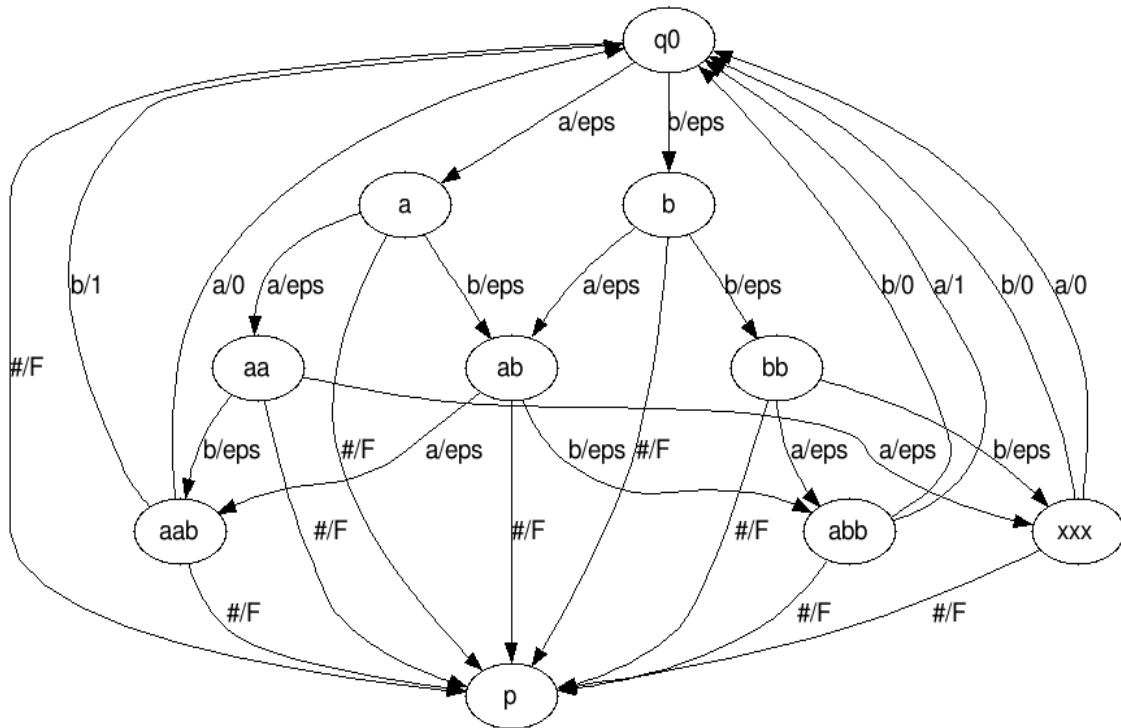
Entonces $L_a \cdot L_b = 0^k 1^k \cdot 0^j 1^j$ que es Libre de Contexto NO Regular

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Ejercicio 4

a) Construya un Autómata con Salida $M: (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$ tal que cada 4 símbolos leídos imprime 1 si la cantidad de a's igual a la cantidad de b's o 0 en caso contrario.

Toda entrada es una secuencia de a's y b's que termina con el símbolo "#". Al llegar el # se imprimirá una F.

Solución

b) Sea L_4 el lenguaje reconocido por el siguiente autómata finito $M = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ donde: $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_3\}$ y δ dada por:

	0	1	ϵ
q_0	$\{q_3, q_4\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_4\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$	$\{\}$
q_3	$\{\}$	$\{q_0\}$	$\{\}$
q_4	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$	$\{\}$

i. Construya el autómata finito mínimo $M' / L_4 = L(M')$

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Solución**Pasaje AFND-esp → AFND**

$M' = \{Q, \Sigma, \delta', q_0, F\}$ donde: $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_3\}$ y δ' dada por:

Calculo la eps-clausura para cada estado:

Estado	esp-clausura
q0	{q0, q1, q4}
q1	{q1, q4}
q2	{q2}
q3	{q3}
q4	{q4}

Aplicando la fórmula para δ' :

$\delta'(q_i, a) = \text{eps-clausura}(\delta^{\sim}(\text{eps-clausura}(q_i), a))$

δ'	0	1
q0	{q0, q1, q3, q4}	{q2, q4}
q1	{q0, q1, q3, q4}	{q2, q4}
q2	{q3}	{q4}
q3	{}	{q0, q1, q4}
q4	{q3}	{q4}

Pasaje AFND → AFD

$M'' = \{Q, \Sigma, \delta'', q_0, F\}$ donde: $Q = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{p_1, p_4\}$ y δ'' dada por:

δ''	0	1
$p_0 = [q_0]$	$p_1 = [q_0, q_1, q_3, q_4]$	$p_2 = [q_2, q_4]$
$p_1 = [q_0, q_1, q_3, q_4]$	$p_1 = [q_0, q_1, q_3, q_4]$	$p_3 = [q_0, q_1, q_2, q_4]$
$p_2 = [q_2, q_4]$	$p_4 = [q_3]$	$p_5 = [q_4]$
$p_3 = [q_0, q_1, q_2, q_4]$	$p_1 = [q_0, q_1, q_3, q_4]$	$p_2 = [q_2, q_4]$
$p_4 = [q_3]$	$p_7 = []$	$p_6 = [q_0, q_1, q_4]$
$p_5 = [q_4]$	$p_4 = [q_3]$	$p_5 = [q_4]$
$p_6 = [q_0, q_1, q_4]$	$p_1 = [q_0, q_1, q_3, q_4]$	$p_2 = [q_2, q_4]$
$p_7 = []$	$p_7 = []$	$p_7 = []$

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Pasaje AFD → AFD-Min

$M''' = \{Q, \Sigma, \delta''', q_0, F\}$ donde: $Q = \{r_0, r_1, r_2, r_3, r_4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{r_3, r_4\}$ y δ''' dada por:

Aplico el algoritmo visto en el curso

$\Pi_0 : \{Q - F\} \{F\}$

$\Pi_0 : \{p_0, p_2, p_3, p_5, p_6, p_7\} \{p_1, p_4\}$

Nota: En la solución se omite la comparación de transiciones entre los pares de estado para determinar si son o no distinguibles, pero hacerlo forma parte de la justificación necesaria para la resolución del ejercicio.

$\Pi_1 : \{p_0, p_2, p_3, p_5, p_6, p_7\} \{p_1\} \{p_4\}$

$\Pi_2 : \{p_0, p_3, p_6\} \{p_2, p_5, p_7\} \{p_1\} \{p_4\}$

$\Pi_3 : \{p_0, p_3, p_6\} \{p_2, p_5\} \{p_7\} \{p_1\} \{p_4\}$

$\Pi_4 : \{p_0, p_3, p_6\} \{p_2, p_5\} \{p_7\} \{p_1\} \{p_4\}$

Condición de parada: $\Pi_3 = \Pi_4$

Renombro los estados:

$r_0 = \{p_0, p_3, p_6\}$

$r_1 = \{p_2, p_5\}$

$r_2 = \{p_7\}$

$r_3 = \{p_1\}$

$r_4 = \{p_4\}$

δ'''	0	1
r0	r3	r1
r1	r4	r1
r2	r2	r2
r3	r3	r0
r4	r2	r0

ii. Dé una expresión regular que denote al lenguaje L_4 . Justifique.

Solución

Planteamos el sistema de ecuaciones correspondiente:

$$X_0 = X_3.1 \mid X_4.1$$

$$X_1 = X_0.1 \mid X_1.1$$

$$X_2 = X_2.(0 \mid 1) \mid X_4.0$$

$$X_3 = X_0.0 \mid X_3.0$$

$$X_4 = X_1.0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones aplicando la siguiente fórmula vista en teórico:

$$X = Xr \mid s, \text{ eps no pertenece a } r \rightarrow X = sr^*$$

$$X_1 = X_0.1.1^*$$

$$X_4 = X_0.1.1^*.0$$

$$X_3 = X_0.0.0^*$$

$$X_2 = X_4.0.(0 \mid 1)^* = X_0.1.1^*.0.0.(0 \mid 1)^*$$

$$X_0 = X_0.0.0^*.1 \mid X_0.1.1^*.0.1 = X_0.(0.0^*.1 \mid 1.1^*.0.1) \mid \text{eps} = (0.0^*.1 \mid 1.1^*.0.1)^*$$

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

$$X0 = (0.0^*.1 \mid 1.1^*.0.1)^*$$

$$X1 = (0.0^*.1 \mid 1.1^*.0.1)^*.1.1^*$$

$$X4 = (0.0^*.1 \mid 1.1^*.0.1)^*.1.1^*.0$$

$$X3 = (0.0^*.1 \mid 1.1^*.0.1)^*.0.0^*$$

$$X2 = (0.0^*.1 \mid 1.1^*.0.1)^*.1.1^*.0.0.(0|1)^*$$

Entonces, la expresión regular del lenguaje está dada por: $X3 \mid X4$

$$ER = (0.0^*.1 \mid 1.1^*.0.1)^*.1.1^*.0.(0|1)^*$$