Teoría de Lenguajes
Soluciones

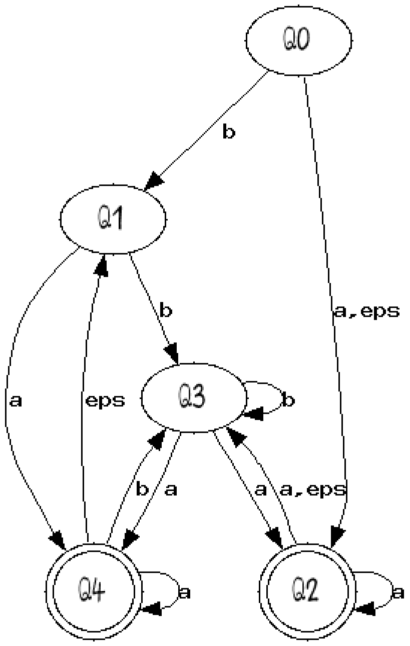
Ejercicio 1

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

a) Si L_a es Libre de Contexto pero no Regular, entonces $L_{10}=\{u \,/\, uw \in L_a \,;\, |u|=10\}$ es Libre de Contexto
Verdadero.
L_{10} es un lenguaje finito, ya que contiene tiras de largo fijo (10) y el alfabeto es finito; con lo cual la cantidad de tiras es una cantidad finita.
Por ser finito es Regular y por Jerarquía de Chomsky, el Libre de Contexto.

b) Si L_b es Libre de Contexto y L_c es finito, entonces $L_b.L_c$ es Libre de Contexto.
Verdadero.
Si Lc es finito
=> Lc es regular
=> Lc es LC
=> Lb.Lc es LC (cerradura de . en LLC)

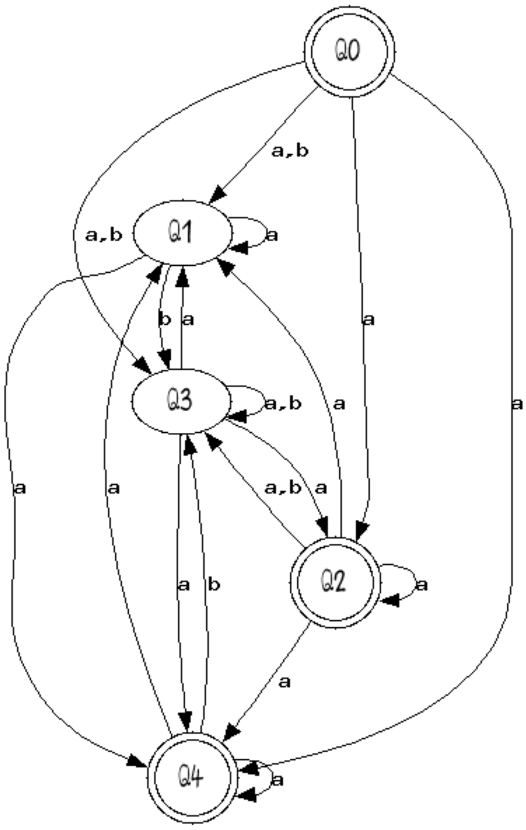
c) **Verdadero**.
El dibujo del AFND con transiciones epsilon M_d es:



Epsilon-clausura(q0) = { q0, q2, q3 }
Epsilon-clausura(q1) = { q1 }
Epsilon-clausura(q2) = { q2, q3 }
Epsilon-clausura(q3) = { q3 }
Epsilon-clausura(q4) = { q1, q4 }

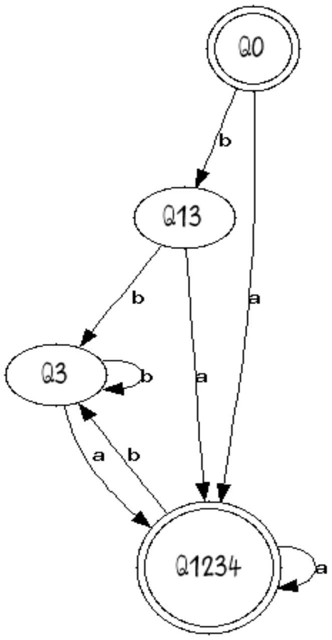
δ’	a	b
q0	{ q1, q2 q3, q4 }	{ q1 , q3 }
q1	{ q1, q4 }	{ q3 }
q2	{ q1, q2, q3, q4}	{ q3 }
q3	{ q1, q2, q3, q4}	{ q3 }
q4	{q1, q4}	{ q3 }

Eliminando las transiciones epsilon queda el siguiente AFND M_c’:

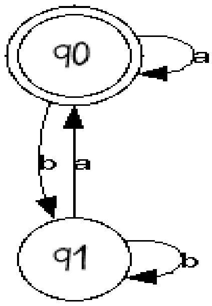


δ’’	a	b
[q0]	[q1,q2,q3,q4]	[q1,q3]
[q1,q3]	[q1,q2,q3,q4]	[q3]
[q3]	[q1,q2,q3,q4]	[q3]
[q1,q2,q3,q4]	[q1,q2,q3,q4]	[q3]

Sacando el no determinismo queda el siguiente AFD M_d'':



Y luego de minimizar queda el siguiente AFD mínimo M_d''':



Calculamos las clases de R_M para M_d''' y de ahí vamos a obtener la asociada al los estados finales (en este caso, la asociada a q_0)

X_0 = eps | X_0 a | X_1 a
X_1 = X_0 b | X_1 b

por el lema de Arden: X_1 = X_0 b b*
entonces X_0 = eps | X_0 a | X_0 b b* a = eps | X_0 (a | b b* a)
y por el lema de Aden: **X_0 = (a | b b* a) ***
y por lo tanto **X_1 = (a | b b* a) * b b***

Como la ER dada justamente es **(a | b b* a) *** la afirmación es **Verdadera**.

Ejercicio 2

Sea

$L_2 = \{\ x\#x_P\#x_I\ \ /\ \ x= a_1a_2a_3...a_{2n-1}a_{2n}\ \ ;\ x_P = a_2a_4....a_{2n}\ ;$
$x_I = a_1a_3....a_{2n-1}\quad a_i \in \{a,b\}\ \}$

a) L_2 es un lenguje Recursivamente Enumrable, (lo cual se demuestra con la G.I. de la parte b), y **no** es un lenguaje libre de contexto, lo cual se demuestra aplicando el contra-recíproco del Pumping Lema para lenguajes libres de contexto.

Dado N constante del PL, elegimos $z = a^{2N}\#a^N\#a^N$, $z \in L_2$, $|z| = 4N+2 \geq N$
Estudio todas las descomposiciones de z=uvwxy que cumplen $|vx|>0$ y $|vwx| \leq N$

Familias	a^{2N}	**#**	a^N	**#**	a^N
1	v x				
2			v x		
3					v x
4	v		x		
5			v		x
6	v x	x	x		
7	v	v	v x		
8			v x	x	x
9			v	v	v x

Familia 1

La descomposición de esta familia sería:

$u=a^p$
$v=a^q$ $\quad |vx| = q+s \geq 1$
$w=a^r$ $\quad |vwq| = q+r+s \leq N$
$x=a^s$
$y=a^{2N-p-q-r-s}\#a^N\#a^N$

$z_i = a^p\,(a^q)^i\,a^r\,(a^s)^i\,a^{2N-p-q-r-s}\#a^N\#a^N = a^{p+qi+r+si+2N-p-q-r-s}\#a^N\#a^N = a^{2N+(q+s)(i-1)}\#a^N\#a^N$

Tomando i=2 $\quad z_2 = a^{2N+(q+s)}\#a^N\#a^N$

Entonces tenemos que z_2 no queda de la forma de las tiras del lenguaje, pues como son solamente símbolos **a**'s (además del #), $|x_I| + |x_P| < |x|$ (el largo de la primera secuencia de a's es estrictamente mayor que la suma de los largos de la segunda y tercera tiras de a's) pues $q+s \geq 1$

Observar que para todas las tiras de L_2 se cumple siempre que $|x_I| + |x_P| = |x|$, por eso basta romper esa propiedad para probar que z_i no pertenece a L_2.

Familias 2 y 3

Son análogas a la Familia 1, pero cambia la cantidad de **a**'s entre los #s (Familia 2) y después del segundo # (Familia 3).

Familia 4

La descomposición de esta familia sería:

$u=a^{2N-p-q}$
$v=a^p$ $\quad |vx| = p+s \geq 1$
$w=a^q\#a^r$ $\quad |vwq| = p+q+1+r+s \leq N$
$x=a^s$
$y=a^{N-r-s}\#a^N$

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

$z_i = a^{2N-p-q} (a^p)^i a^q \# a^r (a^s)^i a^{Nr-s} \# a^N$
Si $p \neq 0$, eligiendo i=2, cambia la cantidad de símbolos; $|x_I| + |x_P| < |x|$
Si p=0 entonces $s \neq 0$, eligiendo i=2, y la cantidad de a's de x_I es < a la cantidad de a's de x_P

Familia 5

Es análoga a la Familia 4, pero cambia la cantidad de **a**'s entre los #s y después del segundo #. En este caso (como p y s no pueden ser ambos 0), alguna de las condiciones de los largos se rompe.

Familia 6

La descomposición de esta familia sería:
$u=a^{2N-p-q-r}$
$v=a^p$ $|vx| = p+r+1+s \geq 1$
$w=a^q$ $|vwq| = p+q+r+1+s \leq N$
$x=a^r\#a^s$
$y=a^{N-s}\#a^N$

Tomando i=0, z_0 queda con un solo # y por lo tanto z_0 no pertenece a L_2

Familias 7, 8 y 9

Son análogas a la Familia 6, eligiendo i=0 la tira z_0 no pertenece a L_2

Como hemos estudiado todas las descomposiciones, concluimos que L_2 **no** es un lenguaje libre de contexto. En la parte b) se construirá una GI y con eso quedará demostrado que L_2 es recursivamente enumerable.

b) Se construye una gramática irrestricta G_2 / $L_2 = L(G_2)$

S → T##
-- genero impares o no genero nada --

T → UaC|UbD|eps

-- genero pares --
U → TaA||TbB
Aa → aA
Ba → aB
Ca → aC
Da → aD
Ab → bA
Bb → bB
Cb → bC
Db → bD
A# → #a
B# → #b
C# → #E
D# → #F
Ea → aE
Fa → aF
Eb → bE
Fb → bF
E# → #a
F# → #b

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 3
Sea

$L_3 = \{ a^p b^m c^n \ / \ p > n - m \ ; \ n>m>0 \ ; \ p>0 \}$

a) Clasifique L_3 según la Jerarquía de Chomsky.

L_3 es Libre de Contexto, lo cual se demuestra con la construcción de la GLC de la parte b) y/o el APD de la parte c).
Para demostrar que no es Regular, utilizaremos el contra reciproco del PL para Lenguajes Regulares
Dado N, elegimos $z = a^{N+1}b^N c^{2N}$ perteneciente a L_3, tal que $|z| = 4N +1 >= N$
Estudiamos todas las descomposiciones de z = uvw / uv <=N y v>0
La única familia estudiar es:

$u = a^p$
$v = a^q$ con q>0
$w = a^{N+1-p-q}b^N c^{2N}$
donde $z_i = a^{N+1+q(i-1)}b^N c^{2N}$

eligiendo i=0, $z_0 = a^{N+1-q}b^N c^{2N}$ no pertenece a L_3, dado que la cantidad de a's = (N+1-q) no es mayor que la cantidad de c's = (2N) menos la cantidad de d's = (N), dado que N+1-q no es mayor que N, cuando q>0.

Como estas son todas la descomposiciones posibles que cumplen / uv <=N y v>0 se concluye que L_3 no es un Lenguaje Regular.

b) Se construye una GLC G_3 / $L_3 = L(G_3)$ simplificada

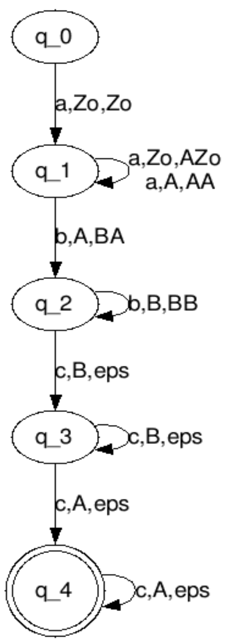
$S \rightarrow$ aS | aaR
$R \rightarrow$ aRc | bZc
$Z \rightarrow$ bZc | c

G_3 está simplificada porque:
- no tiene producciones epsilon
- no tiene producciones unitarias
- todos sus símbolos son útiles

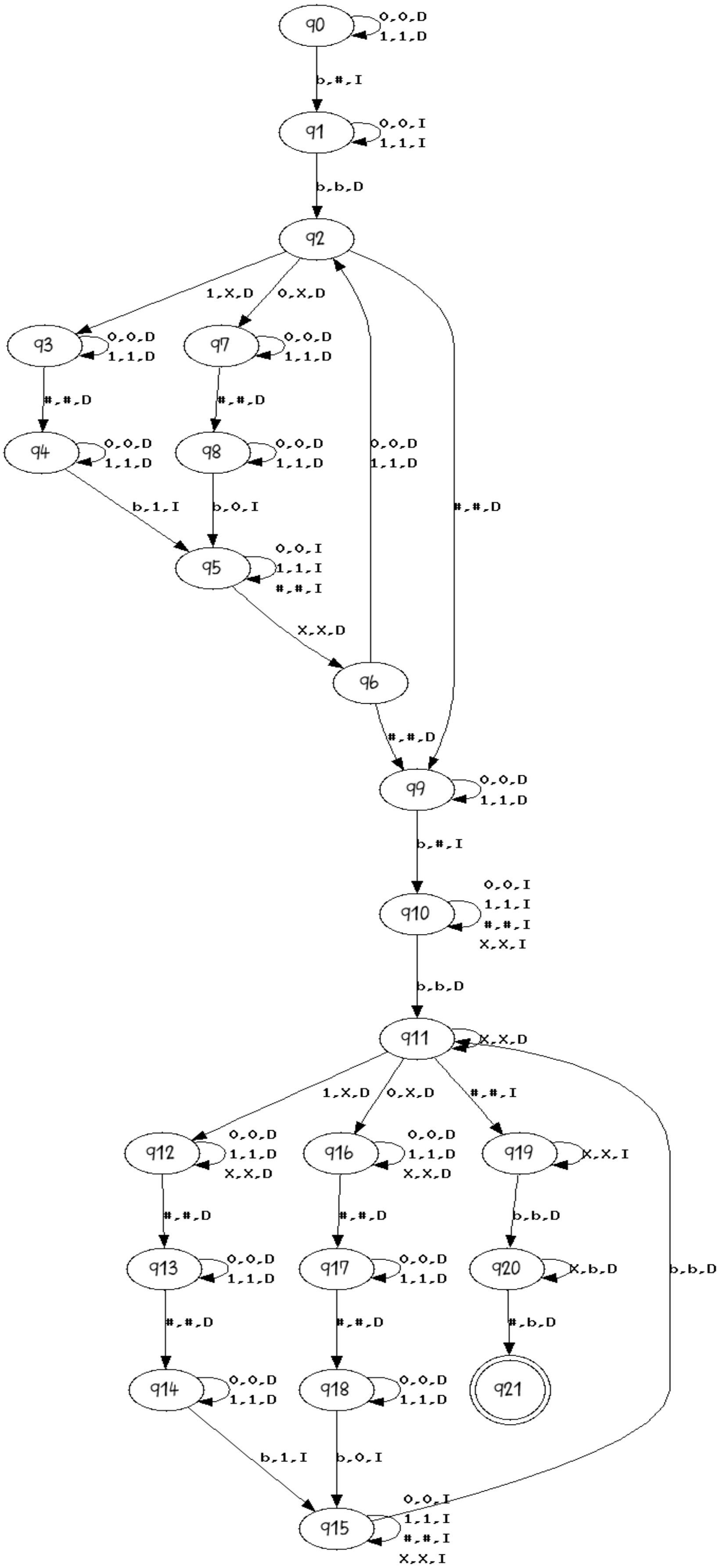
c) A continuación se construye un APD M_3 / $L_3 = L(M_3)$

Es un APD Determinista ya que cumple:

Para cualquier δ(q,aX), si existe la transición al menos tiene una sola opción. Inclusive cuando a=epsilon



Ejercicio 4



Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.