Teoría de Lenguajes
Soluciones

Ejercicio 1
Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

a) Sean L_a y L_b lenguajes definidos sobre un mismo alfabeto $\Sigma=\{a,b\}$ tales que $L_a \cap L_b$ finito y L_b Libre de Contexto no Regular. Entonces L_a es Regular.

Falso. Consideramos como contraejemplo $L_a = L_b^C$. Se cumple que $L_a \cap L_b = \emptyset$ y por lo tanto $L_a \cap L_b$ es finito. L_a no es Regular pues si lo fuera, como los lenguajes regulares son cerrados respecto al complemento, $L_a^C=L_b$ debería ser Regular y por hipótesis L_b es Libre de Contexto no Regular .

b) Sea h un homomorfismo y L_c un lenguaje. Si $h(L_c)$ es Regular entonces L_c es Regular.

Falso. Consideramos como contraejemplo el lenguaje $L_c = \{0^n1^n \mid n >0\}$ y el homomorfismo h: $h(0)=0$, $h(1) = 0$. Tenemos que $h(L_c)= \{0^{2n} \mid n >0\}$ es Regular, ya que es el conjunto de tiras de ceros de largo par mayor que cero, denotadas por la expresión regular $(00)(00)^*$. Pero sabemos que el lenguaje L_c es Libre de Contexto no Regular.

c) Para todo L_d lenguaje Libre de Contexto no Regular, el lenguaje $\{\mathbf{a}\}.L_d$, siendo **a** un símbolo, sigue siendo Libre de Contexto no Regular.

Verdadero. Sea $L_a =\{\mathbf{a}\}$. Se verifica que L_a es Regular, denotado por la expresión regular **a**. Por la Jerarquía de Chomsky, L_a es Libre de Contexto. Sea $L = \{\mathbf{a}\}.L_d = L_a.L_d$. Como los Lenguajes Libres de Contexto son cerrados respecto a la concatenación, resulta que L es Libre de Contexto.
Supongamos por absurdo que L es Regular. Se cumple entonces que existe un AFD $M=\{Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ que reconoce al lenguaje L. Consideramos otro AFD $M'=\{Q',\Sigma',\delta',q_0',F'\}$ definido a partir de M de modo que:

- $Q'=Q$
- $\Sigma'= \Sigma$ si el simbolo **a** pertenece al alfabeto de L_d y $\Sigma'= \Sigma - \{\mathbf{a}\}$ si no pertenece.
- $\delta'= \delta$ si el simbolo **a** pertenece al alfabeto de L_d y δ' es la restricción de δ a los símbolos del alfabeto de L_d si no pertenece.
- $q_0' = \delta(q_0, \mathbf{a})$
- $F' = F$

Por construcción el AFD M' reconoce a L_d, ya que a partir de q_0' el AFD M acepta solo las tiras de L_d ➔ llegamos al absurdo de que L_d es Regular.
➔ L es Libre de Contexto no Regular

Otra forma de mostrar que L no es regular:
Supongamos por absurdo que L es Regular. Necesariamente existe entonces un gramática lineal derecha $G = \{V,T,P,S)$ que genera a L, $L = L(G)$. Por la forma de L, se puede encontrar G de modo que la única producción de P en la que aparezca la variable S sea P_a: $S \rightarrow aS'$.
Consideramos ahora la gramática $G' = \{V-\{S\},T,P- P_a, S')$. Se verifica que G' es una gramática lineal derecha que genera a L_d ($L_d = L_d(G')$ ➔ llegamos al absurdo de que L_d es Regular.

Esta demostración de todas formas asume que siempre podemos escribir una gramática con una regla del tipo S→aS' lo cual si bien es intuitivo, no esté demostrado.

Ejercicio 2

Sea

$L_2 = \{ x \text{ , } x \in \Sigma^* \text{ siendo } \Sigma = \{0,1,a,b\} \ / \ |x|_0 = |x|_a \text{ ; } |x|_b < |x|_1 \}$

a) Clasifique L_2 según la Jerarquía de Chomsky.

El lenguaje es recursivamente enumerable, porque en la parte b) se construye una gramática G_2 que es Irrestricta y $L_2 = L(G_2)$.

Utilizando el contrarrecíproco del Pumping Lemma, demostraremos que L_2 no es libre de contexto.

Sea N la constante del PL, consideramos la tira $z = 0^N b^N a^N 1^{N+1}$ que pertenece a L_2
Consideramos todas las descomposiciones z=uvwxy que cumplen $|vx|>0$, $|vwx|\leq N$, y mostramos que en todas ellas existe algún i, para el que la tira $uv^iwx^iy \notin L_2$.

Las descomposiciones son las siguientes:

```
        00.......00bb.......bbaa.......aa11.......11
Caso 1    v x
Caso 2        v  x....x
Caso 3           v   x
Caso 4         v.....v    x
Caso 5                  v x
Caso 6                    v   x...x
Caso 7                       v   x
Caso 8                            v x
Caso 9                   v          x
Caso 10                             v......v  x
Caso 11                                v x...x
Caso 12                                     v x
Caso 13                              v        x
```

Caso 1:

$u=0^j$

$v=0^k$ $\qquad k+m>0$

$w=0^l$

$x=0^m$

$y=0^{N-m-l-k-j}\ b^N a^N 1^{N+1}$

Como $k+m>0$, entonces $z_0=uwy= 0^{N-m-k}b^N a^N 1^{N+1} \notin L_2$, porque tiene menos 0's que a's. El caso 8 es análogo pero al revés (menos a's que 0's). El caso 12 quedarían menos 1's que b's. El caso 5 tomo i=2 y entonces z_2 tiene mayor o igual cantidad de b's que 1's

Caso 2

$u=0^{N-m-k-j}$

$v=0^k$

$w=0^m$ $\qquad k+j+l>0 \text{ ; } k+m+j+l \leq N$

$x=0^j b^l$

$y= b^{N-l}\ a^N 1^{N+1}$

(Suponemos que j>0 sino estamos en el caso 3 y l>0 sino estamos en el caso 1).
$z_2 \notin L_2$ porque quedan más 0's que a's y/o la cantidad de b's supera la cantidad de 1's. Es idéntico el caso 4 y los casos 6 y 10 es similar, quedando más a's que 0's. El caso 11 es similar, tomando i=0 quedan menos 1's que b's o menos a's que 0's.

Caso 3
$u=0^j$
$v=0^k$
$w= 0^{N-j-k}b^l$ $k+m>0$
$x=b^m$
$y= b^{N-l-m} a^N 1^{N+1}$

Como $k+m>0$, entonces al menos $k>0$ o $m>0$. Si $k>0$, $z_0=0^{N-k}b^N a^N 1^{N+1} \notin L_2$, porque quedan más 0's que a's. Si $m>0$ (estamos planteando que k podría ser 0), $z_2=0^N b^{N+m} a^N 1^{N+1} \notin L_2$, porque la cantidad de b's es mayor o igual a la cantidad de 1's. El caso 7 es similar. Los casos 9 y 13 pueden quedar menos a's que 0's y/o mayor o igual cantidad de 1's que b's.

Como esas son todas las descomposiciones posibles que cumplen $|vx|>0$, $|vwx|\leq N$, por el contrarecíproco del Pumping Lema, demostramos que L_2 **NO** es libre de contexto.

b) Se construye una gramática irrestricta para generar L_2

generación de símbolos
S → R1 | 1
R → a0R | a0 | b1Q | b1
Q → b1| Qb1
1 → 11

permutaciones necesarias
mover 0 a la izquierda y derecha
a0 → 0a
b0 → 0b
10 → 01 (no es necesaria por cómo se genera la tira)
0a → a0
0b → b0
01 → 10

mover b a la izquierda y derecha (observar que no se repiten reglas)
1b → b1
ab → ba
b1 → 1b
ba → ab

mover 1 a la izquierda (observar que no se repiten reglas)
a1 → 1a

observar que no es necesario mover las 'a', ya que el resto de los símbolos tienen libertad de movimiento

Ejercicio 3
Sean

$L_3 = \{ c^p a^m c^q \ / \ p+q =2m \ ; \ p,q > 0 \}$
$L_4 = \{ c^p a^m c^q \ / \ p \text{ impar} \ ; \ m \text{ par} \ ; \ q \geq 1 \ ; \ m \geq 0 \ ; \ p > 0 \}$

a) Clasifique L_3 y L_4 según la Jerarquía de Chomsky.

Utilizando el contrarrecíproco del Pumping Lemma, demostraremos que L_3 no es Regular.
Sea N la constante del PL, consideramos la tira $z = c^N a^N c^N$ que pertenece a L_3

Consideramos ahora todas las descomposiciones z = uvw que cumplen:
$|v|>0$ y $|uv|\leq N$.
Se va a mostrar que en todas ellas existe algún i, para el que la tira $uv^iw \notin L_3$.

Por la elección de la tira, la única descomposición que cumple (*) es:

$u = c^p$ $p\geq 0$
$v = c^q$ $q>0$
$w = c^{N-p-q}a^Nc^N$

Tomando i=0; $z_o = c^{N-q}\cdot a^Nc^N$ que $\notin L_3$ porque N-q+N < 2N (el doble de la cantidad de a's es mayor que la cantidad de c's)

Por lo comentado, esta es la única descomposición de z que cumple $|v|>0$ y $|uv|\leq N$
Entonces por el contrarecíproco del Pumping Lema para lenguajes regulares podemos afirmar que L_3 NO es Regular.

En la parte b) se construye una gramática libre de contexto que lo genera.

Para le lenguaje L4, se puede dar la siguiente ER: **c(cc)*(aa)*cc***

o también directamente una gramática lineal que lo genera (parte b))

b) Construya gramáticas G_3 y G_4 simplificadas / $L_3 = L(G_3)$ y $L_4 = L(G_4)$.

G_3 es una GLC que tiene las siguientes reglas de producción:

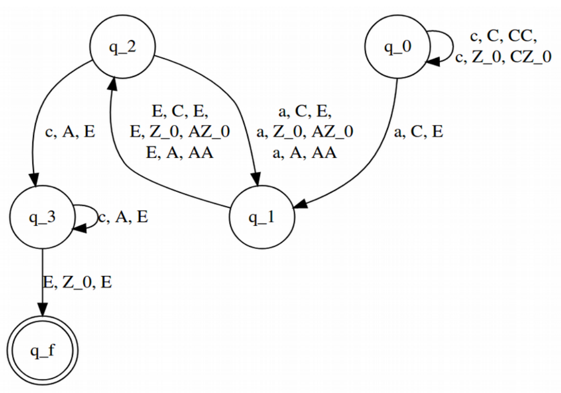
S → cAaBc | ccAaaBcc | ccaaBcc | ccAaacc | ccaacc | cac | cAac | caBc
A → cca | ccAa
B → aBcc | acc

G4 es una gramática lineal (derecha en este caso) que tiene las siguientes reglas de producción:

S → cC |cA | cD
C → cS
A → aB | cD | c
D → cD | c
B → aA

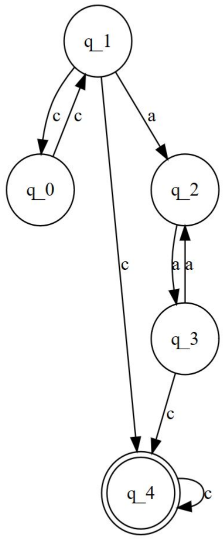
Ambas gramáticas están simplificadas dado que no contienen producciones unitarias, producciones épsilon y además todos sus símbolos son útiles.

c) Construya autómatas M_3 y M_4 / $L_3 = L(M_3)$ y $L_4 = L(M_4)$ ¿Son deterministas? Justifique.



El autómata M_3 es determinista dado que para todo estado se cumple que existe como máximo una transición a otro estado (tomando en cuenta el símbolo leído y el tope del stack) y cuando se trata de una transición con épsilon, no existe otra transición partiendo desde ese mismo estado con igual tope.

En el caso de M_4 se tiene el siguiente AF



Es NO determinista, ya que existen las transiciones
$\delta(q_1, c) = \{q_0 , q_4 \}$

Ejercicio 4