Teoría de Lenguajes
Teoría de la Programación 1
Soluciones

Ejercicio 1

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

a) Si $L_a \cap L_b$ es regular no vacío, entonces L_a es regular o L_b es regular
Falso. Se plantea el siguiente contraejemplo. Sea Σ ={a,b,c,d} , $L_a=\{a^nb^n, n\geq 0\}$ y $L_b=\{c^nd^n, n\geq 0\}$, donde $L_a \cap L_b = \{\varepsilon\}$ y por tanto regular, pero ni L_a ni L_b son regulares.

b) Si $L_c \cap L_d$ es regular no vacío y L_c es regular , entonces L_d es regular
Falso. Se plantea el siguiente contraejemplo. Sea Σ ={a,b}, y $L_c=\{\varepsilon\}$ y $L_d=\{a^nb^n, n\geq 0\}$. Entonces $L_c \cap L_d = \{\varepsilon\}$; que justamente es L_c que es regular; pero L_d no es regular.

c) Según la Jerarquía de Chomsky, para un alfabeto Σ, si L_e es recursivamente enumerable y L_f es regular con $L_e \subseteq \Sigma^*$ y $L_f \subseteq \Sigma^*$, entonces $L_f \subset L_e$
Falso. Se plantea el siguiente contraejemplo. Sea Σ ={a,b,c} , $L_e=\{a^nb^nc^n, n\geq 0\}$ y $L_f=\{a^*b^*c^*\}$. Acá se cumple en realidad que $L_e \subset L_f$

Ejercicio 2

Sea

$$L_2 = \{ (ab)^{n+m} (ba)^{2m}\# , n>0, m\geq 0 \}$$

a) Clasifique L_2 según la Jerarquía de Chomsky.

El lenguaje L_2 NO es regular. Se demuestra utilizando el contrarecíproco del Pumping Lema para Lenguajes Regulares (PL1).

Sea N la cte. del PL y tomamos (n=1, m=N) $z = (ab)(ab)^N(ba)^{2N}\#$, $z \in L_2$ con $|z| = 6N+3 \geq N$. Se estudian todas las descomposiciones de z=uvw que cumplen: $|v|>0$ y $|uv|\leq N$

Caso 1:

$u=(ab)^p$ $p\geq 0$
$v=(ab)^qa$ $q\geq 0$
$w=b(ab)^{N-p-q}(ba)^{2N}\#$

$z = (ab)^p ((ab)^qa)^i b(ab)^{N-p-q}(ba)^{2N}\# = (ab)^p b(ab)^{N-q}(ba)^{2N}\#$ tomando i=0 quedando z_0 con dos **b**'s seguidas entonces 2 veces y si p=0 comienza con **b** entonces $z_0 \notin L_2$

Caso 2:

$u=(ab)^p$ $p\geq 0$
$v=(ab)^q$ $q>0$
$w=(ab)^{N-p-q+1}(ba)^{2N}\#$

$z = (ab)^p (ab)^{q\,i} (ab)^{N-p-q+1}(ba)^{2N}\# = (ab)^{q\,i} (ab)^{N-q+1}(ba)^{2N}\#$ y tomando i=0
$z_0 = (ab)^{N-q+1}(ba)^{2N}\#$ la cual $\notin L_2$ ya que la cantidad de **ba**'s es ≥ que el doble de la cantidad de **ab**'s del principio de la tira al ser q>0

Caso 3:

$u=(ab)^p a$ $p \geq 0$
$v=b(ab)^q$ $q \geq 0$
$w=(ab)^{N-p-q}(ba)^{2N}\#$

$z = (ab)^p\, a\, (b(ab)^q)^i\, (ab)^{N-p-q}(ba)^{2N}\#$ y tomando i=0 $z_0 = (ab)^p\, a\, (ab)^{N-p-q}(ba)^{2N}\#$ la cual $\notin L_2$ ya que aparecen 2 **a**'s consecutivas entre medio de la secuencia de **ab**'s

Caso 4

$u=(ab)^p a$ $p \geq 0$
$v=(ba)^q$ $q>0$
$w=b(ab)^{N-p-q}(ba)^{2N}\#$

$z = (ab)^p\, a(ba)^{q\,i}\, b(ab)^{N-p-q}(ba)^{2N}\# = a\,(ba)^{q\,i}\, b(ab)^{N-q}(ba)^{2N}\#$ y tomando i=0
$z_0 = ab(ab)^{N-q}(ba)^{2N}\# = (ab)^{N-q+1}(ba)^{2N}\#$ la cual $\notin L_2$ ya que la cantidad de **ba**'s es ≥ que el doble de la cantidad de **ab**'s del principio de la tira al ser q>0

Estas son todas las descomposiciones que cumplen |v|>0 y |uv|≤ N, y para todas ellas encontramos un i donde $z_i \notin L_2$, con lo cual **L_2 NO es Regular.**

En la parte b) se construye una gramática libre de contexto, con lo cual clasificamos L_2 como Lenguaje Libre de Contexto NO Regular.

b) Construya una gramática $G_2 / L_2 = L(G_2)$.

Se dará una gramática independiente de contexto simplificada $G_2 / L_2 = L(G_2)$.

$G_2 = (\{S,A,B\}, \{a,b,\#\},P,S)$

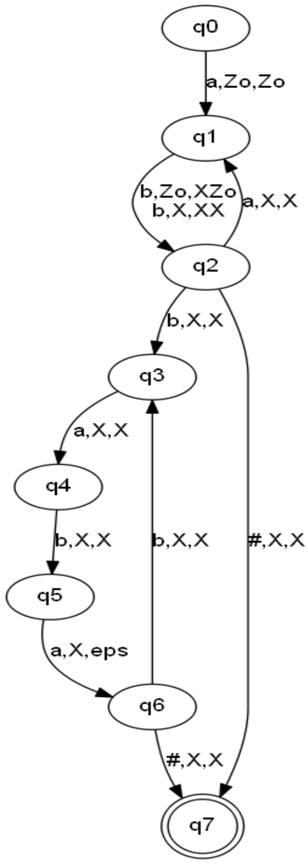
con P formado por las siguientes producciones:

S → AB# | A#
A → abA | ab
B → abBbaba | abbaba

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

c) Construya un autómata M_2 / $L_2 = L(M_2)$ ¿Es determinista? Justifique.

El APD que se construye es de aceptación por estado final



Es un autómata con stack <u>determinista</u>, ya que para cada estado y símbolo en el stack hay una transición única para cada símbolo de la tira de entrada.

Ejercicio 3
Sea
$L_3 = \{ a^{2k}c^{p*k}b^{k+q}$; con $q>0$, $k\geq 0$, $p\in\{0,1\}$ $\}$

a) Clasifique L_3 según la Jerarquía de Chomsky.

Se utiliza el contrarrecíproco del PL para demostrar que L_3 NO es libre de contexto. Sea N la cte. del PL, elijo (tomando q=1, k=N, p=1) $z= a^{2N}c^Nb^{N+1}$, $z \in L_3$,
$|z| = 4N+1\geq N$
Estudiamos todas las descomposiciones de z=uvwxy que cumplen $|vx|>0$, $|vwx|\leq N$

	a...a	**c...c**	**b...b**
1	vx		
2	v x...	...x	
3	v	x	
4	v..	..v x	
5		vx	
6		v x...	...x
7		v	x
8		v...	...v x
9			v x

Caso 1

u = a^j
v = a^k
w = a^l
x = a^p
y = $a^{2N-j-k-l-p}c^Nb^{N+1}$

$k+l+p \leq N$
$k+p >0$

$z_i = a^{2N+(i-1)(k+p)}c^Nb^{N+1}$, tomando i=2, $z_2 = a^{2N+k+p}c^Nb^{N+1}$, como k+p>0 se ve que cant_a's(Z_2) > 2* cant_c's(z_2) con lo cual $z_2 \notin L_3$.

El caso 9 es similar pero tomamos i=0, con lo cual $z_0 = a^{2N}c^Nb^{N+1-k-p}$, de donde se ve que cant_c's(Z_0) ≥ cant_b's(z_0) con lo cual $z_0 \notin L_3$..

Para el casos 5 quedaría $z_i = a^{2N}c^{N+(i-1)(k+p)}b^{N+1}$, y tomando por ejemplo i=2, como k+p >0, cant_c's(z_2) ≥ cant_b's(z_2) con lo cual $z_2 \notin L_3$.

Caso 2

u = $a^{2N-k-l-p}$
v = a^k
w = a^l
x = a^pc^q
y = $c^{N-q}\ b^{N+1}$

$k+l+p+q<N$
$q>0$ para diferenciarlo del caso 1
$p>0$ para diferenciarlo del caso 3

$z_i = a^{2N+(i-1)k-p}\ (a^p\ c^q)^i\ c^{N-q}\ b^{N+1}$, con i=2, $z_2 = a^{2N+k}\ c^q\ a^p\ c^N\ b^{N+1}$, $\notin L_3$ por mezclarse las a's con c's.

Los casos 4, 6 y 8 son análogos. En el 4 se mezclan a's con c's y en los casos 6 y 8 se mezclan c's con b's

Caso 3

u = a^{2N-k-l}
v = a^k
w = a^lc^p
x = c^q
y = $c^{N-p-q}\ b^{N+1}$

$k+l+p+q < N$
$k+q>0$

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

$z_i = a^{2N+(i-1)\,k}\, c^{\,N+(i-1)\,q}\, b^{N+1}$, con i=2, $z_2 = a^{2N+k}\, c^{N+q}\, b^{N+1}$. Como k+q>0, al menos uno de los índices debe >0.

- si k>0 y q=0, cant_a's(Z_2) ≥ 2*cant_c's(z_2) entonces $z_2 \notin L_3$
- si q>0, cant_c's(z_2) ≥ cant_b's(z_2) y entonces $z_2 \notin L_3$ no importando el valor de k, ya que sino sale por el item anterior.

Para el caso 7, se debiera tomar i=0. En este caso sucede que $z_0 = a^{2N}\, c^{N-p}\, b^{N+1-q}$ y
- si p>0, cant_a's(z_0) > 2*cant_c's(z_0), entonces $z_0 \notin L_3$
- si q>0, cant_a's(z_0)≥ 2*cant_b's(z_0), entonces $z_0 \notin L_3$

Como estas son todas las descomposiciones de z=uvwxy que cumplen |vwx|≤ N y |vx|>0 [y, para cada uno de ellos, existe un i / z_i no está en el lenguaje], L_3 **no** es Libre de Contexto.

Luego en la parte b) se construye una Gramática Irrestricta, con lo cual se prueba que es recursivamente enumerable.

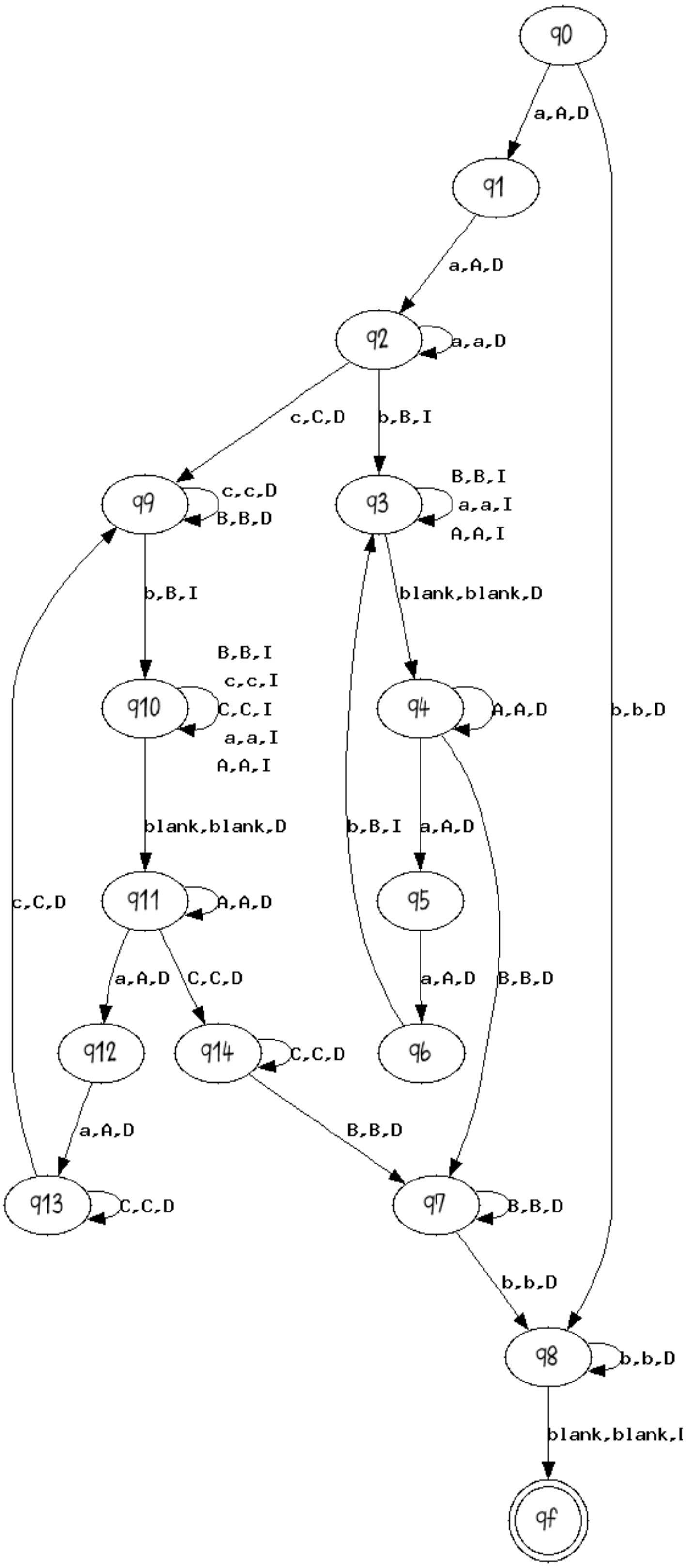
b) Construya una gramática G_3 / L_3 = L(G_3).

Se dará una gramática sin restricciones G_3 / L_3 = L(G_3).

G_3 = ({S,S_0,S_1,C}, {a,b,c},P,S} con P formado por las siguientes producciones:

S → S_0 | S_1
S_0 → aaS_0b | S_0b | b - - genera con p=0
S_1 → aaS_1Cb | S_1b | b - - genera con p=1
bC → Cb
aC → ac
Cc → cc

c) Construya un autómata M_3 / $L_3 = L(M_3)$.

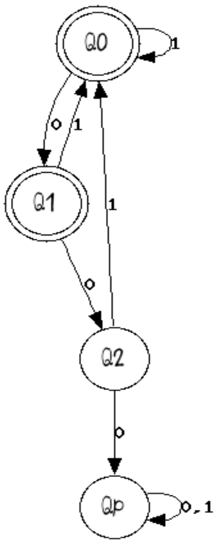


Ejercicio 4 [Teoría de Lenguajes]

a) Sea el lenguaje L_{4a} de las tiras definidas sobre {0,1}* donde todo par de 0's consecutivos viene seguido inmediatamente de al menos un 1.

i. Construya un AFD M_4 / $L_{4a} = L(M_4)$
ii. Dé mediante expresiones regulares las clase de equivalencia definidas por R_{L4a}, siendo R_L la relación definida en el curso

i.



Demostramos que M_4 es mínimo, aplicando el algoritmo de minimización y observando que no se puede minimizar más:

π_0 : $[Q_2, Q_p]$ $[Q_0, Q_1]$

Desde Q_2 con 1 se va a $[Q_0, Q_1]$ y desde Q_p con 1 se va a $[Q_2, Q_p]$, por lo tanto Q_2 y Q_p se separan.
Desde Q_0 con 0 se va a $[Q_0, Q_1]$ y desde Q_1 con 0 se va a $[Q_2, Q_p]$, por lo tanto Q_0 y Q_1 se separan

π_1: $[Q_2]$ $[Q_p]$ $[Q_0]$ $[Q_1]$

ii. Como M_4 es mínimo, sabemos por el corolario del Teorema de Myhill-Nerode que las clases de *RL* y R_M coinciden.

$X_0 = \varepsilon \mid X_0\, 1 \mid X_1\, 1 \mid X_2\, 1$
$X_1 = X_0\, 0$
$X_2 = X_1\, 0$
$X_p = X_2\, 0 \mid X_p\, (0|1)$

$X_1 = X_0\, 0$
$X_2 = X_0\, 00$
$X_p = X_0\, 000 \mid X_p\, (0|1) \;\rightarrow\; X_p = X_0\, 000\, (0|1)^*$
$X_0 = \varepsilon \mid X_0\, 1 \mid X_0\, 01 \mid X_0\, 001 \;\rightarrow\; X_0 = \varepsilon \mid X_0\, (1 \mid 01 \mid 001) \;\rightarrow\; X_0 = (1 \mid 01 \mid 001)^*$

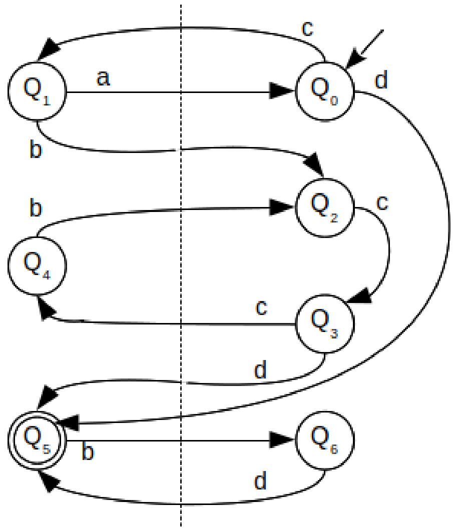
Entonces:

$X_0 = (1 \mid 01 \mid 001)^*$
$X_1 = (1 \mid 01 \mid 001)^*\, 0$
$X_2 = (1 \mid 01 \mid 001)^*\, 00$
$X_p = (1 \mid 01 \mid 001)^*\, 000\, (0|1)^*$

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

b) Construya un autómata de dos cintas para el siguiente lenguaje:

$L_{4b}=\{ <a^k b^{p+q}, c^{2q+k} d^{p+1}> / \ k,p,q\geq 0 \}$



Ejercicio 4 [Teoría de la Programación 1]

i. Computable

Este es un programa en P que la computa:

```
PROGRAM(<i,j,k>)
        X1:=1; -- flag de fin y resultado
        X2:=EVAL_PROG(i,k);
        X3:=EVAL_PROG(j,k);
RESULT(X1)
```

ii. No Computable

Definimos g'(i) = g(Id,i,i), siendo Id un índice de la identidad (converge para todo valor de su argumento).

g'(i) = g(Id,i,i) = 1 si <Id,i>↓ ◂ <Ix(i),i>↑
indef en caso contrario

g'(i) = 1 si <Ix(i),i>↑
indef en caso contrario

Supongamos g es computable; entonces también lo es g'.
Pero g' es la función característica parcial de K(C). Absurdo.

iii. Computable

Este es un programa en P que la computa:

```
PROGRAM(<i,j,k>)
        X0:=0;
        X1:=EVAL_PROG_STEP(i,k,j);
        X2:=EVAL_PROG_STEP(j,k,i);
        IF (FST(X1)=1 AND FST(X2)=1) THEN
        X0:=1
RESULT(X0)
```

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**