Teoría de Lenguajes
Teoría de la Programación I
Soluciones

Ejercicio 1
Sea $L_1 = \{ a^{k \bmod 3} b^k \# a^{(k+1) \bmod 3} b^{2k} / \text{ con } k \geq 0\}$

a) Clasifique a L_1 según la Jerarquía de Chomsky
b) Construya un autómata M_1 / $L_1 = L(M_1)$ ¿Es determinístico? Justifique.
c) Construya una gramática G_1 / $L_1 = L(G_1)$

a) Clasifique a L_1 según la Jerarquía de Chomsky

El lenguaje es libre de contexto, no regular.

Que es L.C. se demuestra con la construcción del A.P.D. del parte b) o con la construcción de la G.L.C. de la parte c)

Que no es Regular se demuestra usando el contra-recíproco del P.L. para Leng. Reg.
Sea $n \in N$

Elegimos $z = a^{(3n) \bmod 3} b^{3n} \# a^{(3n+1) \bmod 3} b^{2(3n)} = b^{3n} \# a b^{6n} \in L$
y $|z| = 9n+2 \geq n$

Estudiamos todas las descomposiciones de $z = uvw$ talque $|uv| \leq n$ y $|v| \geq 1$
y trataremos de encontrar un $i \geq 0$ para c/descomposición tal que $uv^iw \in L$

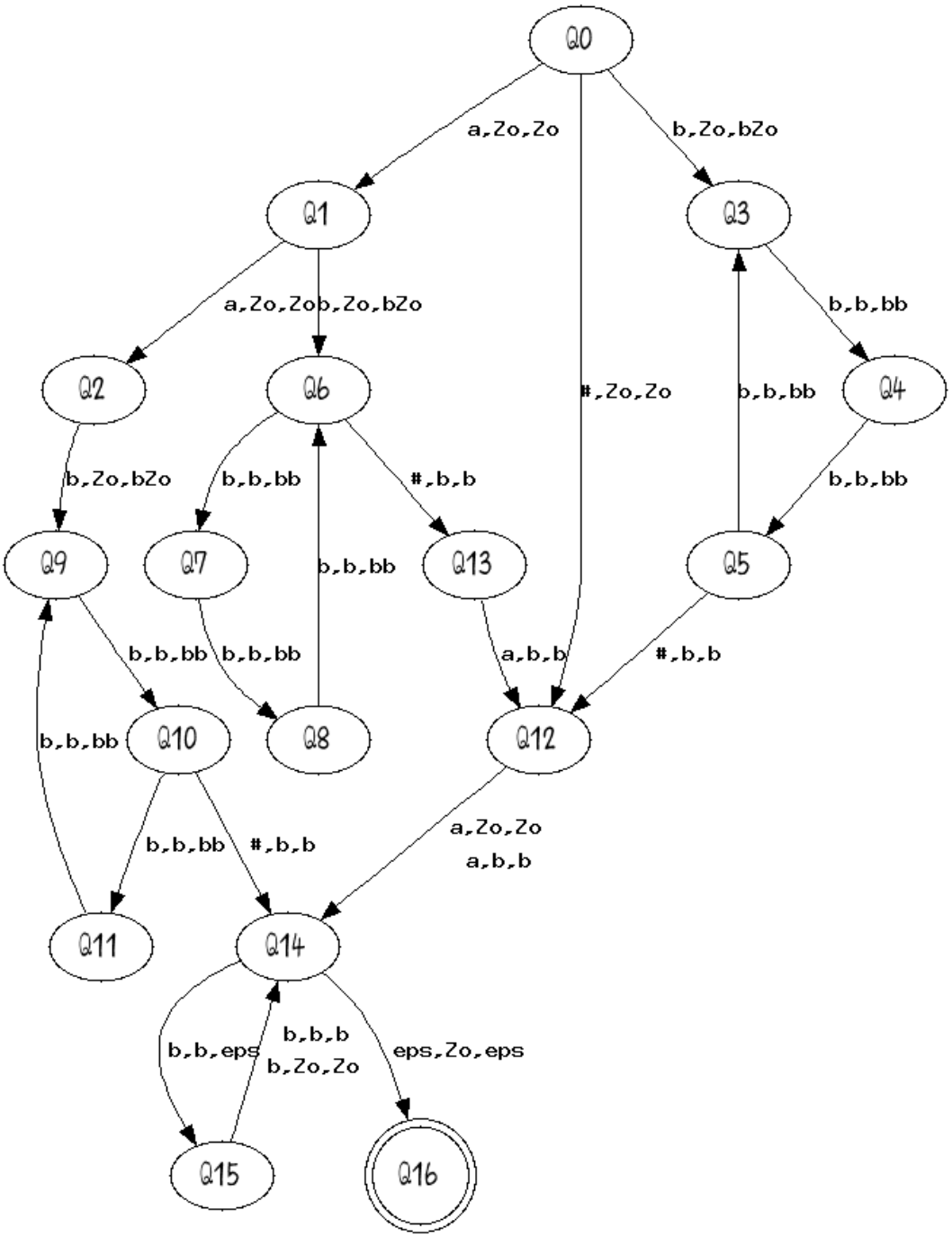
	b^{3n}	#	a	b^{6n}
Familia Nº 1	v			

La única familia de descomposiciones que cumple $|uv| \leq n$ y $|v| \geq 1$ es la familia 1, donde:
$u = b^p$
$v = b^q$ con $p+q \leq n$ y $q \geq 1$
$w = b^{3n-p-q} \# a b^{6n}$

$uv^iw = b^p (b^q)^i b^{3n-p-q} \# a b^{6n} = b^{3n+q(i-1)} \# a b^{6n}$
Eligiendo i=2 vemos que $uv^iw \in L$, porque la cantidad de b_s a la derecha del # no es el doble de las b_s a la izquierda del #, dado que $q \geq 1$.

Al haber estudiado todas las descomposiciones posibles para la tira z, hemos demostrado que L no puede ser regular.

b) Construya un autómata M_1 / $L_1 = L(M_1)$ ¿Es determinístico? Justifique.



c) Construya una gramática G_1 / $L_1 = L(G_1)$

S → T | abRbb | aabbQbbbb
T → bbbTbbbbbb | #a
R → bbbRbbbbbb | #aa
Q → bbbQbbbbbb | #

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 2

Sea $L_2 = \{ a_{1...}a_{n+1}\# b_{1...}b_n / a_i,b_i \in \{0,1\}, b_i=a_i \text{ XOR } a_{i+1}, i=1..n, n>0\}$

a) Clasifique a L_2 según la Jerarquía de Chomsky
b) Construya un autómata M_2 / $L_2 = L(M_2)$ ¿Es determinístico? Justifique.
c) Construya una gramática G_2 / $L_2 = L(G_2)$

a) Clasifique a L_2 según la Jerarquía de Chomsky

El lenguaje es recursivamente enumerable (en las siguientes partes del ejercicio se construye una Máquina de Turing y una gramática irrestricta que lo reconoce/genera). Demostraremos que no es libre de contexto, utilizando el contrarrecíproco del Pumping Lemma para lenguajes libres de contexto. Sea N la constante del PL, consideramos la tira $z= 0^{N+1}1^{N+1}\#0^N10^N$ que pertenece al lenguaje. Consideramos las descomposiciones uvwxy de z que cumplen las hipótesis del PL (|vx|>0, |vwx|≤N).

Caso	0^{N+1}	1^{N+1}	#	0^N	1	0^N
1	v x					
2	v x	x				
3	v	x				
4	v	v x				
5		v x				
6		v x	x	x		
7		v		x		
8		v	v	v x		
9				v x		
10				v x	x	x
11				v		x
12				v	v	v x
13						v x

Casos 1, 2, 3, 4 y 5: si vx está antes del #, entonces considero i=0, y obtengo una tira z_0 donde la cantidad de símbolos antes del # es 2N+2-|vx|, que es ≤ 2N+1. Pero toda tira del lenguaje cumple que la cantidad de símbolos a la izquierda del numeral es mayor en uno que la cantidad de símbolos a la derecha, por lo que z_0 no pertenece al lenguaje, contradiciendo las condiciones del PL.

Casos 6 y 8: Si v o x incluye al #, tomando i=0, z_0 no tiene # y por lo tanto no pertenece al lenguaje.

Caso 9, 10, 11, 12 y 13: si vx está después del #, tomo i=2 y el número de símbolos a la derecha del # es ≥2N+2 (la cantidad de símbolos a la izquierda), y por lo tanto (por razonamiento análogo al caso 1), no pertenece al lenguaje.

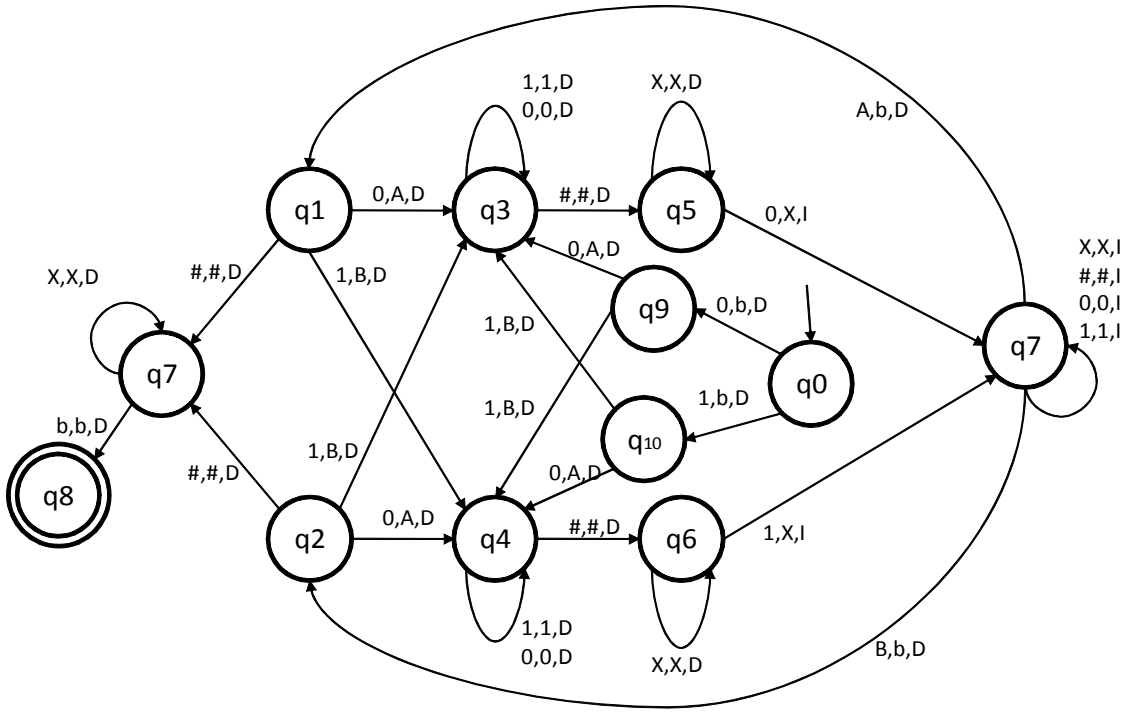
Caso 7:
Si |v|=0 cae en los casos anteriores (analogó a 1, 2, 3, 4 y 5).
Si |x|=0 cae en los casos anteriores (analogó a 9, 10, 11, 12 y 13).

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

En otro caso: si $u=0^{N+1}1^{j}$, $v=1^{k}$, $w=1^{N+1-j-k}\#0^{l}$, $x=0^{m}$,$y=0^{N-m}10^{N}$
tomando i=0, nos queda $z_0=0^{N+1}1^{N+1-k}\#0^{N-m}10^{N}$
Como |vx|>0, puede ser m>0 o k>0.
Si m>0, entonces a la izquierda del numeral hay N+1 ceros al principio, e inmediatamente a la derecha hay N-m, o sea estrictamente menos de N, pero si perteneciera al lenguaje debería haber N.
Si k>0, el razonamiento es análogo, viendo que hay N+1-k unos inmediatamente antes del numeral, y N ceros al final de la tira.

Como estas son todas las descomposiciones posibles, por el contrarrecíproco del Pumping Lemma, el lenguaje no es recursivamente enumerable.

b) Construya un autómata M_2 / $L_2 = L(M_2)$ ¿Es determinístico? Justifique.



Es una MT Deterministica, ya que $|\delta(x,y,z)| \leq 1$

b) Construya una gramática G_2 / $L_2 = L(G_2)$

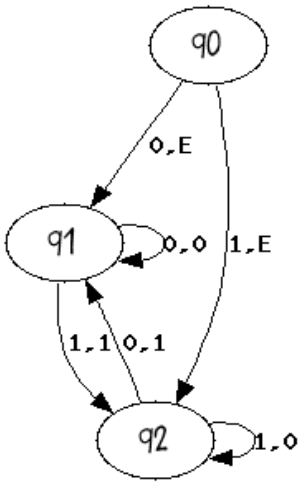
S → 0 C S' # | 1 U S' #
S' → 0 S' | 1 S' | 0 | 1
U 0 → 0 B C
U 1 → 1 A U
C 0 → 0 A C
C 1 → 1 B U
A 0 → 0 A
A 1 → 1 A
B 0 → 0 B
B 1 → 1 B
A # → # 0
B # → # 1
C # → #
U # → #

Ejercicio 3 – Teoría de Lenguajes

Construya una máquina de Mealy M: $(Q,\Sigma,\Lambda,\delta,\lambda,q_0)$, con $\Lambda=\{0,1\}$; $\Sigma=\{0,1\}$ que transforme tiras de la forma $a_{1\ldots}a_n$ (con n>1) en tiras de la forma $b_{1\ldots}b_{n-1}$, con $b_i=a_i$ XOR a_{i+1} para i=1..n-1.

Ejemplos:

Secuencia (Entrada)	Decodificación (Salida)
00110	0101
1111	000
010101	11111



Ejercicio 4 - Teoría de Lenguajes

a) Sea una gramática G_4 con las siguientes producciones:

S → CS'F
S' → 0S'X1Y | 0X1Y
0Y → Y0
X1 → 1X
1F → F1
XY → YX
XF → F
CY → 0C
1Y → Y1
0F → F0
CF → ε

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique adecuadamente.

i) G_4 genera un lenguaje libre de contexto.
ii) G_4 genera un lenguaje recursivamente enumerable pero no libre de contexto.
iii) G_4 genera un lenguaje recursivamente enumerable.

La gramática G_4, genera el lenguaje $L_4 = \{ 0^{2k}1^k / k\geq 1 \}$

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

i) ***Verdadero:*** L_4 es libre de contexto, ya que puede ser generado por una gramática libre de contexto que contenga las siguientes reglas de producción: { S → 00S1 | 001 }

ii) ***Falso:*** Por lo dicho en i), L4 es Libre de Contexto

iii) ***Verdadero:*** Por Jerarquía de Chomsky, si un lenguaje es LC es RE.

b) Indique si los siguientes lenguajes son equivalentes. Justifique.

- L_a=L(1(0|1)*0)
- L_b=L(M_b), con M_b=({q_0, q_1, q_2, q_3},{0,1},δ, q_0,{q_3}), siendo δ:

	0	1
q_0	{q_1}	{q_2}
q_1	{q_1}	{q_1}
q_2	{ q_1, q_3}	{q_2}
q_3	{q_3}	{q_2}

La idea consiste en construir el autómata mínimo equivalente al M_b que reconozca L_b y encontrar una expresión regular a partir del AFDM para L_b. Luego compararla con la expresión dada para L_a.

AFND ⇒ AFD

	0	1
[q_0]	[q_1]	[q_2]
[q_1]	[q_1]	[q_1]
[q_2]	[q_1 q_3]	[q_2]
[q_1 q_3]	[q_1 q_3]	[q_1 q_2]
[q_1 q_2]	[q_1 q_3]	[q_1 q_2]

Donde el estado inicial es [q_0] y el conjunto de estados finales { [q_1 q_3] }, contiene solo ese estado.

AFD ⇒ AFDM

Π_0: [q_0] [q_1] [q_2] [q_1 q_2] [q_1 q_3]

Π_1: [q_0] [q_1] [q_2] [q_1 q_2] [q_1 q_3]

Π_2: [q_0] [q_1] [q_2] [q_1 q_2] [q_1 q_3]

Π_3: [q_0] [q_1] [q_2] [q_1 q_2] [q_1 q_3]

de donde el AFDM contiene como estados a cada clase de la Π_3, siendo [q_0] el estado inicial y [q_1 q_3] el único estado final.

Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones para poder encontrar la ER, basado en el método del cálculo de las clases de equivalencia de R_M.

$X_0 = 0X_1 \mid 1X_2$
$X_1 = (0|1)X_1$

$X_2 = 0X_3 \mid 1X_2$
$X_3 = 0X_3 \mid 1X_2 \mid \varepsilon$

$X_1 = \phi$
$X_3 = 0^*(1X_2 \mid \varepsilon)$
$X_2 = 00^*1X_2 \mid 0 \mid 1X_2 = 0^*1X_2 \mid 0 = (0^*1)^* 0$
$X_0 = 1(0^*1)^*0$

Y que es justamente la misma ER dada para L_a.
Se deduce que L_a y L_b son equivalentes

Ejercicio 3 - Teoría de la Programación I

Sean los conjuntos de naturales A y B tales que A es decidible y B es r.e. pero no decidible. ¿Son las siguientes afirmaciones verdaderas o falsas? Justifique.

i. A-B necesariamente es r.e.
ii. B-A necesariamente es r.e.
iii. B-A necesariamente es decidible.
iv. B-A necesariamente no es decidible.

i. ***Falso.*** El conjunto de los naturales es un conjunto decidible, ya que su función característica total es P-Computable:

```
PROGRAM(X0)
        X1:=SUC(0)
RESULT(X1)
```

K es un conjunto r.e. pero no decidible (teorema 19). Luego, N-K es K^c, que no es r.e. (visto en el teórico).

ii. ***Verdadero.*** Observar que B-A = $B \cap A^c$. Como A es un conjunto decidible, su complemento también lo es (teorema 17) y por lo tanto también es r.e. (teorema 18). Como los conjuntos r.e. son cerrados bajo la intersección (teorema 13), $B \cap A^c$ es r.e.

iii. ***Falso.*** Consideremos al conjunto K (visto en la parte i) y al conjunto vacío, que es decidible dado que el siguiente programa computa su función característica total:

```
PROGRAM(X0)
        X1:=0
RESULT(X1)
```

Luego, K-∅ = K, que no es un conjunto decidible.

iv. ***Falso.*** Consideremos al conjunto K y al conjunto N (vistos en la parte i) . K-N es el conjunto vacío, que es decidible (ver parte anterior).

Ejercicio 4 - Teoría de la Programación I
Defina brevemente los siguientes conceptos:
i. Problema de decisión.
ii. Conjunto NP.
iii. Conjunto NP-Completo.

Ver Garey & Johnson.