Teoría de Lenguajes
Teoría de la Programación I
Soluciones

Ejercicio 1

L_1 = { s#w / s,w $\times${0,1}*, s es substring de w}

a) Clasifique a L_1 según la Jerarquía de Chomsky.

El lenguaje es recursivamente enumerable como vermos en la parte b) al construir una G.I. que lo genera o en c) al construir una M.T. que lo reconoce. Demostraremos que NO es libre de contexto, utilizando el CR del PL (para Libres de Contexto).
Para eso elegimos la tira $z = 0^N1^N\#0^N1^N$, siendo N la constante del Pumping Lemma (notar que el s=w)
Consideramos todas las descomposiciones posibles de la tira z en uvwxy que cumplen $|vx|>0$ y $|vwx| \leq N$, y probamos que existe un i tal que uv^iwx^iy no pertenece a L_1

Familia	0^N	1^N	#	0^N	1^N
1	v x				
2		v x			
3				v x	
4					v x
5	v	x			
6				v	x
7	v x	x			
8	v	v x			
9				v x	x
10				v	v x
11		v x	x	x	
12		v	v	v x	
13		v		x	

Familia 1
$u = 0^j$
$v = 0^k$
$w = 0^l$
$x = 0^m$
$y = 0^{N-j-k-l-m}1^N\#0^N1^N$ con $k+m>0$
$z_2 = 0^{N+k+m}1^N\#0^N1^N$ no pertenece al lenguaje pues al ser $k+m>0$, la tira $0^{N+k+m}1^N$ no es substring de 0^N1^N al tener mayor cantidad de 0's

Familia 2
Es análoga, pero razonando con los 1's.

Familia 5, 7 y 8
Son análogas a la Familia 1, pero razonando tanto con 0's como con 1's (crecen los 2).

Familia 3
$u = 0^N1^N\#0^l$
$v = 0^k$
$w = 0^p$
$x = 0^m$
$y = 0^{N-l-k-p-m}1^N$ con $k+m > 0$
$z_0 = 0^N1^N\#0^{N-k-m}1^N$ no pertenece al lenguaje pues al ser $k+m>0$, la tira $0^{N-k-m}1^N$ no puede contener un substring estrictamente mayor que ella.

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Familia 4
Es análoga, pero razonando con los 1's.

Familias 6, 9 y 10
Son análogas a la Familia 3, pero razonando tanto con 0's como con 1's (crecen los 2).

Familias 11
$u = 0^N 1^j$
$v = 1^k$
$w = 1^{N-j-k-l}$
$x = 1^l \# 0^m$
$y = 0^{N-m} 1^N$
$z_0 = 0^{N-k} 1^{N-l} 0^{N-m} 1^N$ no pertenece al lenguaje pues z_0 no tiene el #.

Familias 12
En forma analoga a la familia 11, se puede demostrar que eligiendo i=0, z_0 no pertenece al lenguaje, dado que z_0 no tiene el #.

Familia 13
$u = 0^N 1^j$
$v = 1^k$
$w = 1^{N-j-kl} \# 0^l$
$x = 0^m$
$y = 0^{N-l-m} 1^N$ con $k+m > 0$

Asuminos en este caso, que tanto k como m son ambos >0, sino se cae en un caso particular de alguno de los casos anteriores.

En cualquier caso, al elegir i=0, z_0 no pertenece al lenguaje, porque la cantidad de 0's de la tira a la derecha del # siempre queda menor que la de 0's de la izquierda, entonces no hay substring posible del w (derecha del #) que contenga menos 0's.

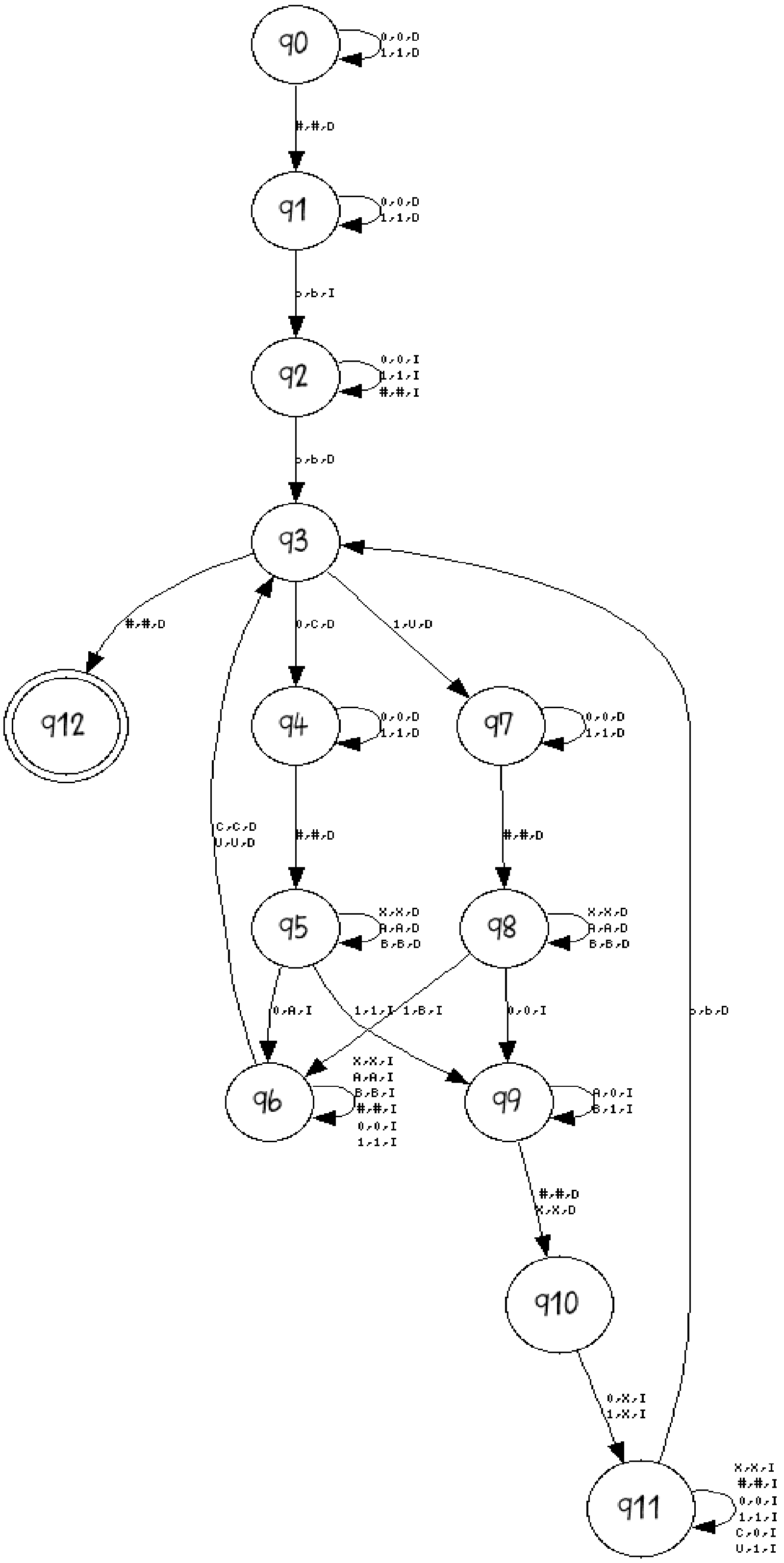
Como estas son todas las descomposiciones posibles de z en uvwxy que cumplen $|vx|>0$ y $|vwx| \leq N$, por el CR del PL el **lenguaje L_1 NO es libre de contexto**.

b) Construya una gramática G_1 / $L_1 = L(G_1)$

S -> #PQR
Q -> C0Q | U1Q | epsilon
0C -> C0
1C -> C1
#C -> 0#
0U -> U0
1U -> U1
#U -> 1#
P -> 0P | 1P | epsilon
R -> 0R | 1R | epsilon

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

c) Construya un autómata M_1 / $L_1 = L(M_1)$.



Ejercicio 2

Sea L_2 = { w / w ×{a,b}* / w es de la forma $ba^m b^{j+1}$, j > m > 0, j par}

a) Clasifique a L_2 según la Jerarquía de Chomsky

El lenguaje es Libre de Contexto no regular. Para demostrarlo, utilizaremos el contra recíproco del Pumping Lemma, para demostrar que no es Regular y un autómata Push Down (el de la parte c) o una GLC (el de la parte b) para demostrar que es Libre del Contexto.

Sea N la constante del PL, y sea $z=ba^{2N-1}b^{2N+1}$; notar que cumple |z| > N
Consideramos todas las descomposiciones posibles para z = uvw que cumplan:
$|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$

Se puede observa que estas son las familias de descomposiciones que cumplen las restricciones:

Familia I

u = **ε** $r+1 \leq N$
v = ba^r $r \geq 0$
w = $a^{2N-1-r}b^{2N+1}$

$z_i=(ba^r)^i a^{2N-1-r}b^{2N+1}$. En este caso, para i=2 z_2 quedaría $ba^r ba^{2N-1}b^{2N+1}$ haciendo que la tira no sea de la forma del lenguaje.
Por lo tanto, z_2 no pertenece al lenguaje. Notar que si r=0, la tira contendrá dos b's antes de las a's y tampoco pertenecerá al lenguaje.

Familia II

u = ba^r $r+s+1 \leq N$
v = a^s $s \geq 1$
w = $a^{2N-1-r-s}b^{2N+1}$

$z_i=ba^{2N-1+(i-1)s}b^{2N+1}$. En este caso, para i=2 z_2 quedaría $ba^{2N-1+s}b^{2N+1}$ pero como $s \geq 1$, la cantidad a's es mayor o igual a la cantidad de b's.
Por lo tanto, z_2 no pertenece al lenguaje.

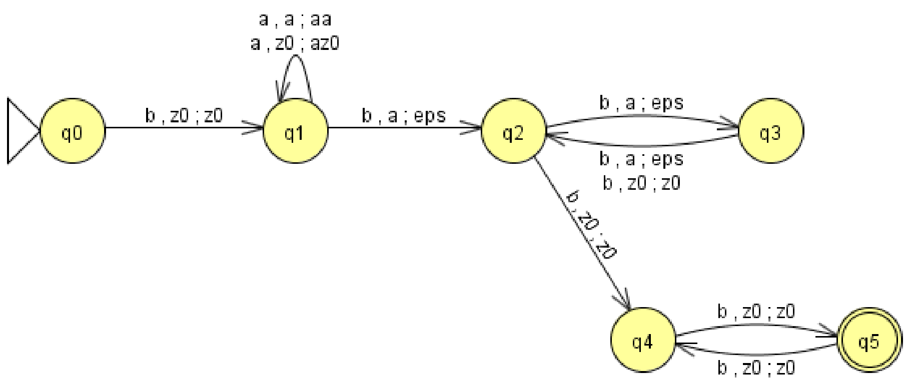
Como se dijo antes, estas son todas las familias a analizar bajo los supuestos $|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$. Con lo cual, por el CR del PL L_2 NO es un lenguaje regular.

b) Construya una gramática G_2 / L_2 = $L(G_2)$

Sea G_2 : (V, T, P, S)

V = {S, S', S''}
T = {a, b}
P = {
  S → bS'
  S' → S'bb | aS'bb | aaS'bb | abbb
}

c) Construya un autómata M_2 / $L_2 = L(M_2)$. ¿Es determinista? Justifique.



Sí, es determinista, ya que:

- Para todo estado, dado un símbolo y un tope del stack, sólo existe una única transición para ese estado, símbolo de entrada y tope del stack.
- No hay transiciones que consuman un símbolo de la tira de entrada desde el mismo estado en el que hay transiciones ε (ver estado q3).

Ejercicio 3

Indique si las siguientes propiedades son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

a) Si L es un lenguaje infinito, entonces L es libre de contexto
b) Si L es un lenguaje libre de contexto, entonces L es infinito
c) Si L_3 y L_4 son lenguajes libres de contexto no regulares, entonces $L_3 \cup L_4$ también es libre de contexto no regular

a) **Falso**, $\{a^n b^n c^n$ / n natural $\}$ es infinito y no es libre del contexto.

b) **Falso**, el lenguaje vacío, es regular entonces (por jerarquía de Chomsky) es LLC, es finito.

c) **Falso**, sea $L_3 = \{a^i b^j$ con $i > j\}$ y sea $L_4 = \{a^i b^j$ con $i <= j\}$, la unión de L_3 con L_4 es L(a*b*) que es un lenguaje regular.

Ejercicio 4

Sea $L_5 = \{w / w \in \{a,b\}^*$ y w es de la forma $a^m b^j$, $j > m \geq 0\}$

a) Construya una gramática simplificada G_5 / $L_5 = L(G_5)$

$S \rightarrow aSb \mid Sb \mid b$

b) Demuestre por inducción completa que las tiras generadas por la gramática pertenecen a L_5.

Se desea probar que $L(G_5) \subseteq L_5$ o, en otras palabras, "si $S \Rightarrow^* w$ entonces $w \in L_5$". Para realizar la siguiente demostración se utiliza inducción completa en la cantidad de derivaciones necesarias para generar una tira w.

Paso Base: la derivación que tiene menos pasos es la que consiste solamente en aplicar la producción $S \rightarrow b$, donde $b = a^0 b^1 \in L_5$.

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Hipótesis Inductiva: dado h se cumple que "si S $\ast^{k}$ w $\ast$k ≤ h, entonces w $\times$ L_5".

Tesis Inductiva: se debe probar que para toda tira w "si S $\ast_{h+1}$ w entonces w $\times$ L_5".

Ahora bien, si S =>$^{h+1}$, se debe aplicar alguna de las reglas $S \rightarrow aSb$ ó $S \rightarrow Sb$ luego:

- S=> aSb =>^{h} aw'b = w Entonces S $\ast^{h}$ w'. En virtud de la hipótesis inductiva w' $\times$ L_5 y, por tanto, w' es de la forma $a^m b^j$ con j > m $^{24}_{12}$ 0. Luego, aw'b = $aa^m b^j b$ = $a^{m+1}b^{j+1}$ donde j+1 > m+1 $^{24}_{12}$ 0. En conclusión w $\times$ L_5.

- S=>Sb =>^{h} w'b = w Entonces S $\ast^{h}$ w'. Análogamente, en virtud de la hipótesis inductiva w' $\times$ L_5 y, por tanto, w' es de la forma $a^m b^j$ con j > m $^{24}_{12}$ 0. Luego, w'b = $a^m b^j b$ = $a^m b^{j+1}$ donde j+1 > m $^{24}_{12}$ 0. En conclusión w $\times$ L_5.

Por último, en virtud del principio de inducción completa si S $\ast^{*}$ w entonces w $\times$ L_5, o lo que es análogo $L(G_5)$ $\times$ L_5.