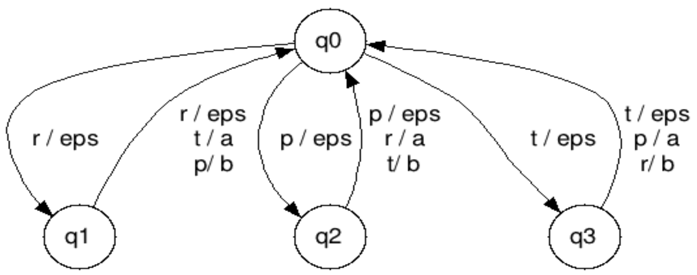
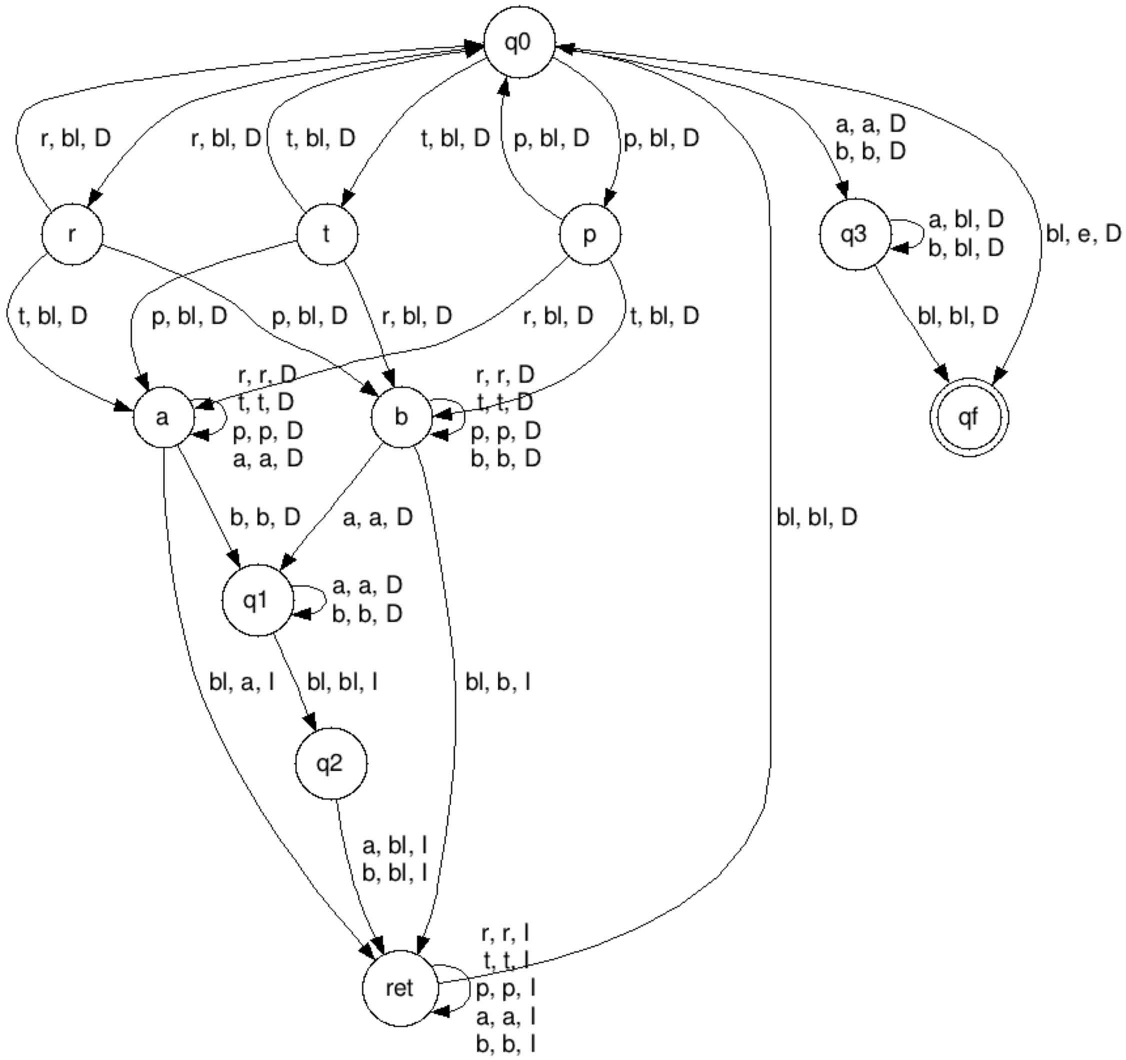
# Teoría de Lenguajes
Soluciones

## Ejercicio 1

a)




b)



## Ejercicio 2

Sea $L_2 = \{ a^p b^q c^r$ / $r < p + q \ \wedge \ r > p \ \vee r > q; \ p, q, r > 0 \}$

a) Clasifique a $L_2$ según la Jerarquía de Chomsky.

b) Construya una gramática $G_2$ / $L_2 = L(G_2)$. Si es posible simplificarla, simplifíquela.

c) Construya un autómata $M_2$ / $L_2 = L(M_2)$. ¿Es determinista? Justifique.

a) Se demostrará que no es un lenguaje Regular aplicando el Contra-reciproco del PL para lenguajes regulares. Luego en la parte b) se mostrará como puede ser una gramática Libre de Contexto que genere $L_2$

Dado N constante cualquiera, elijo $z = a^N bc^N \ \ L_2$ y $|z|=2N+1 > N$ (cumple que la cantidad de c's es menor que la cantidad de a's y b's y que la cantidad de c's es mayor que la cantidad de b's)
Estudiamos todas las descomposiciones de $z = uvw$ talque $|uv| \leq N$ y $|v|\geq 1$
y trataremos de encontrar un $i\geq 0$ para c/descomposición tal que $uv^i w \ \ L_2$
Caso 1)
$u = a^p$
$v = a^q$ con $p+q \leq N$ y $q \geq 1$
$w = a^{N-p-q} bc^N$
$z_i = uv^i w = a^p (a^q)^i a^{N-p-q} bc^N = a^{N+q(i-1)} bc^N$
Eligiendo $i=0$ vemos que $z_0 = a^{N-q} bc^N$ NO pertenece $L_2$, porque la cantidad de c's es **mayor o igual** que la suma de a's (N-q) y b's (1) ya que $q \geq 1$
Cualquier otra descomposición no cumple $|uv| \leq N$ y $|v|\geq 1$ con lo cual se concluye que $L_2$ no es regular.

b) La idea consiste en dividir en dos casos: las tiras en donde (r>p) las genero a partir de la variable A y (r>q) las genero a partir de la variable B. Luego, S (símbolo inicial de la gramática $G_2$) deriva en cualquiera de ellas.

i) $r>p \Rightarrow r = t + p$ con $t>0$ y $r < p + q \Rightarrow p + t < p + q$ ; $q = t + s$ con $s,t>0$
$\Rightarrow x= a^p\, b^t\, b^s\, c^{t+p} = a^p b^t b^s c^t c^p$ con $s,t>0$

$A \rightarrow a\, A\, c \mid a\, V\, c$
$V \rightarrow b\, V\, c \mid b\, R\, c$
$R \rightarrow b\, R \mid b$

ii) $r>q \Rightarrow r = q + t$ con $t>0$ y $r < p +q \Rightarrow q + t < p + q$ ; $p = t + s$ con $t,s>0$
$\Rightarrow x = a^{t+s} b^q c^{q+t} = a^s a^t\, b^q\, c^q\, c^t$, con $t,s>0$

$B \rightarrow a\, B \mid a\, B\, c \mid a\, W\, c$
$W \rightarrow b\, W\, c \mid bc$

En definitiva: $G_1$( {S,T,V,Q,W}, {a,b}, P, S) siendo P el siguiente conjunto de reglas:

$S \rightarrow A \mid B$
$A \rightarrow a\, A\, c \mid a\, V\, c$
$V \rightarrow b\, V\, c \mid b\, R\, c$
$R \rightarrow b\, R \mid b$
$B \rightarrow a\, B \mid a\, B\, c \mid a\, W\, c$

**Nota:** Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

W → b W c | bc

Así esta gramática NO está simplificada puesto que tiene producciones unitarias, con lo cual es necesario eliminarlas

Aplicando el algoritmo visto en el curso, las eliminamos y surgen

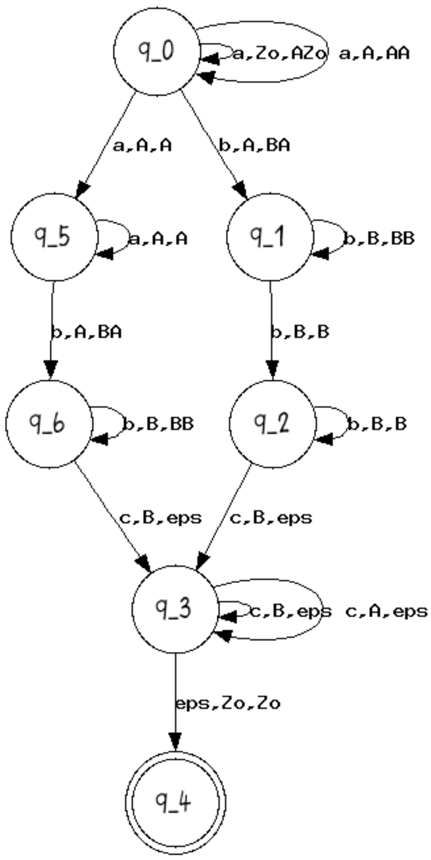
S → a A c | A c | a V cc | a B c | a W c

Finalmente, una gramática con las siguientes producciones está simplificada

S → a A c | a V c | a B | a B c | a W c
A → a A c | a V c
V → b V c | b R c
R → b R | b
B → a B | a B c | a W c
W → b W c | bc

puesto que:
- no tiene producciones epsilon
- no tiene producciones unitarias
- todos sus símbolos son útiles

c) Se construye un ADP NO Determinista, el cual toma desde $q_0$ un camino según la condición de las c's con respecto a las a's o b's



El NO Determinismo se puede observar en:
$\delta(q_0,a,A) = \{ (q_0, AA), (q_5,A) \}$, también en $\delta(q_1,b,B) = \{ (q_1, BB), (q_2,B) \}$

## Ejercicio 3

Sea $L_3 = \{ (0^k1^k)^t \ / \ k, t > 0 \}$

a) Clasifique a $L_3$ según la Jerarquía de Chomsky.
b) Construya una gramática $G_3$ / $L_3 = L(G_3)$.

**a)** El lenguaje es recursivamente enumerable, lo cual se demuestra por la G.I. de la parte b).
Y no es libre de contexto, por el contra-recíproco del P. L. que aplicaremos a continuación.

Sea N la cte. del PL, elijo $z= 0^N1^N0^N1^N$ y considero todas las descomposiciones de z = uvwxy que satisfacen: $|vx| > 0$ y $|vwx| \leq N$

| Caso | $0^N$ | $1^N$ | $0^N$ | $1^N$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | vx | | | |
| 2 | vx | x | | |
| 3 | v | x | | |
| 4 | v | vx | | |
| 5 | | vx | | |
| 6 | | vx | x | |
| 7 | | v | x | |
| 8 | | v | vx | |
| 9 | | | vx | |
| 10 | | | vx | x |
| 11 | | | v | x |
| 12 | | | v | vx |
| 13 | | | | vx |

Caso 1
Elegimos i=2, entonces la cantidad de 0s del inicio es mayor que la cantidad de unos que le sigue. Por lo tanto $z_2$ no pertenece al lenguaje.

Casos 5, 9 y 13
Estos casos son análogos 1. Es decir se pueden justificar de forma similar, salvo que a veces hay que considerar la cantidad de 1 en lugar de los 0s, y en el caso 13 se compara con la cantidad de 0 que le precede en lugar de que le sigue.

Caso 2
Nota: en este caso estamos considerando que la x tiene al menos un 0, y al menos un 1.
Elegimos i=0, entonces las dos subsecuencias maximales de 0s consecutivos no tienen el mismo largo. En $L_3$ todas tienen el mismo largo k. Por lo tanto $z_0$ no pertenece al lenguaje.

Casos 4, 6, 8, 10 y 12
Estos casos son análogos 2. Es decir se pueden justificar de forma similar.

**Nota:** Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Caso 3
Nota consideramos que v tiene al menos un 0 y x tiene al menos un 1, sino estaríamos en el caso 1 o 5.
Elegimos i=0, entonces las dos subsecuencias maximales de 0s consecutivos no tienen el mismo largo. Por lo tanto $z_0$ no pertenece al lenguaje.

Casos 7 y 11
Estos casos son análogos 3. Es decir se pueden justificar de forma similar.

Como estas son todas las descomposiciones que cumplen |vwx| N y |vx|>0, y para cada uno
de ellos existe un i tal que $z_i$ no está en el lenguaje, entonces concluimos que $L_3$ no es libre de contexto.

**b)**

S → IABF // se genera: I $C^kU^k$ $X^t$ F
A → CAU | CU
B → XB | X

UX → X1U // se mueven las Us a la derecha generando un 1
U1 → 1U // por cada X

CX → X0C // se mueven las Cs a la derecha generando un 0
C1 → 1C // por cada X
C0 → 0C

UF → F // las Us y Cs desaparecen cuando llegan a la F
CF → F

IX → I // la I se mueve a la derecha eliminando las Xs
I0 → 0I // luego que ya pasaron las Us y las Cs
I1 → 1I // desapareciendo al llegar a la F
IF → epsilon

Ejemplo de derivación (donde =>* representa que se aplicaron varios pasos en la derivación):

```
S =>
I A       B                         F =>*
I C C U U X       X       X         F =>
I C C U   X1U     X       X         F =>
I C C U   X1      X1U     X         F =>
I C C U   X1      X1      X1U       F =>
I C C     X1U1    X1      X1U       F =>
I C C     X11U    X1      X1U       F =>
I C C     X11     X1U1    X1U       F =>
I C C     X11     X11U    X1U       F =>
I C C     X11     X11     X1U1U     F =>
I C C     X11     X11     X11UU     F =>
I C       X0C11   X11     X11UU     F =>*
I C       X011C   X11     X11UU     F =>
I C       X011    X0C11   X11UU     F =>*
I C       X011    X011C   X11UU     F =>
I C       X011    X011    X0C11UU   F =>*
I C       X011    X011    X011CUU   F =>
```

```
I         X0C011  X011    X011CUU   F =>*
I         X0011C  X011    X011CUU   F =>
I         X0011   X0C011  X011CUU   F =>*
I         X0011   X0011C  X011CUU   F =>
I         X0011   X0011   X0C011CUU F =>*
I         X0011   X0011   X0011CCUU F =>*
I         X0011   X0011   X0011     F =>*
           0011    0011    0011    IF =>
           0011    0011    0011
```

## Ejercicio 4

Decir si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Justifique adecuadamente cada respuesta.

a) Sea $\Sigma$ un alfabeto, $L_a \subseteq \Sigma^*$, $h:\Sigma \rightarrow \Sigma$ un homomorfismo y $h^{-1}$ el homomorfismo inverso de h.
Se cumple $L_a = h(h^{-1}(L_a))$ siendo $L_a$ un lenguaje regular.

b) Dado el lenguaje $L_b = L(ab^*a)$, se cumple:
  i) aa $R_{Lb}$ ab
  ii) ba $R_{Lb}$ a

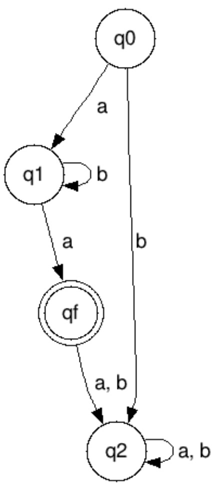
c) Sean $M_{C1}$ y $M_{C2}$ Autómatas Finitos Deterministas / $L(M_{C1}) = L(M_{C2}) = L_c \subseteq \Sigma^*$ y sean dos tiras u, $w \in \Sigma^*$; se cumple que u $R_{Lc}$ w $\Rightarrow$ ( u $R_{Mc1}$ w ) v ( u $R_{Lc}$ w $\Rightarrow$ u $R_{Mc2}$ w )

d) Si $L_d$ libre de contexto no regular y $L_{d'}$ regular, se cumple que $L_d - L_{d'}$ es libre de contexto.

a) **Falso**. Sea el homomorfismo h definido de la siguiente forma: h(a)=b y h(b)=b, y $L_a = L(a^*)$.

$h^{-1}(L_a) = \varnothing$, luego $h(h^{-1}(L_a)) = h(\varnothing) = \varnothing$ <> $L_a$

b) Sea $M_b$ un AFD $(Q,\Sigma,\delta,F)$ tal que $L_b=L(M)$:

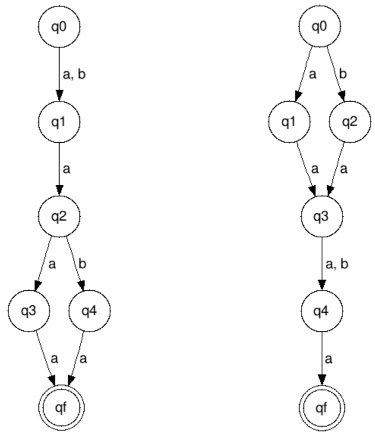



**Nota:** Como $M_b$ es mínimo y completo, cada estado define una clase de equivalencia del $R_L$.

**Nota:** Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

i) **Falso**. La tira aa pertenece al lenguaje $L_b$ y la tira ab no pertenece al lenguaje, por lo tanto están en diferentes clases de equivalencia de $R_L$.
ii) **Falso**. La tira ba termina en el estado $q_2$ del AFD y la tira a termina en el estado $q_1$, por lo tanto están en diferentes clases de equivalencia de $R_L$.

c) **Falso**. Sea $L_c$ = L( (a|b)a(a|b)a ) y sean $M_{C1}$ y $M_{C2}$ respectivamente:




Sean u = aaa y w = bab, tiras para las cuales no se cumple la afirmación.

d) **Verdadero**. Por definición, $L_d - L_{d'} = L_d \cap L_{d'}^c$
El complemento de un lenguaje regular, es un lenguaje regular (los lenguajes regulares son cerrados bajo el complemento). Por lo tanto $L_{d'}^c$ es regular.
Por propiedad del teórico, la intersección entre un LLC y un lenguaje regular es LLC.