Teoría de Lenguajes
Soluciones

Ejercicio 1
Decir si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas.
Justifique adecuadamente cada respuesta. Sean Σ un alfabeto y L_a , L_b , $L_c \subseteq \Sigma^*$

- L_a, tal que L_a^c es Libre de Contexto
- L_b Recursivamente Enumerable
- L_c Libre de Contexto No Regular

Sean: $L_1 = (L_b - L_a) . L_a$
$L_2 = L_b \cap L_a^c$
$L_3 = L_c \cap L_a^c$

Entonces:
a) L_1 es Regular
b) L_1 NO es Regular
c) L_2 es Libre de Contexto
d) L_3 es Libre de Contexto

Solución:
Sea $\Sigma = \{a,b,c\}$

a)Falso.
$L_a = \{\varepsilon\}$ Regular, $L_a^c = \Sigma^* - \{\varepsilon\}$ Regular, por tanto Libre de Contexto
$L_b = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ que es Libre de Contexto y por tanto RE

$L_1 = \{a^n b^n : n > 0\}.\{\varepsilon\} = \{a^n b^n : n > 0\}$ que es No Regular

b)Falso.
$L_a = \{\}$ Regular, $L_a^c = \Sigma^*$ Regular, por tanto Libre de Contexto
$L_b = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ que es Libre de Contexto y por tanto RE

$L_1 = \{a^n b^n : n \geq 0\}.\{\} = \{\}$ que es Regular

c)Falso.
$L_a = \{\}$ Regular, $L_a^c = \Sigma^*$ Regular, por tanto Libre de Contexto
$L_b = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ RE no Libre de Contexto

$L_2 = L_b$ que no es Libre de Contexto

d)Falso.
L_a es tal que $L_a^c = \{a^n b^n c^p : n,p \geq 0\}$ que es Libre de Contexto No Regular
$L_c = \{a^t b^r c^r : t,r \geq 0\}$ que es Libre de Contexto No Regular

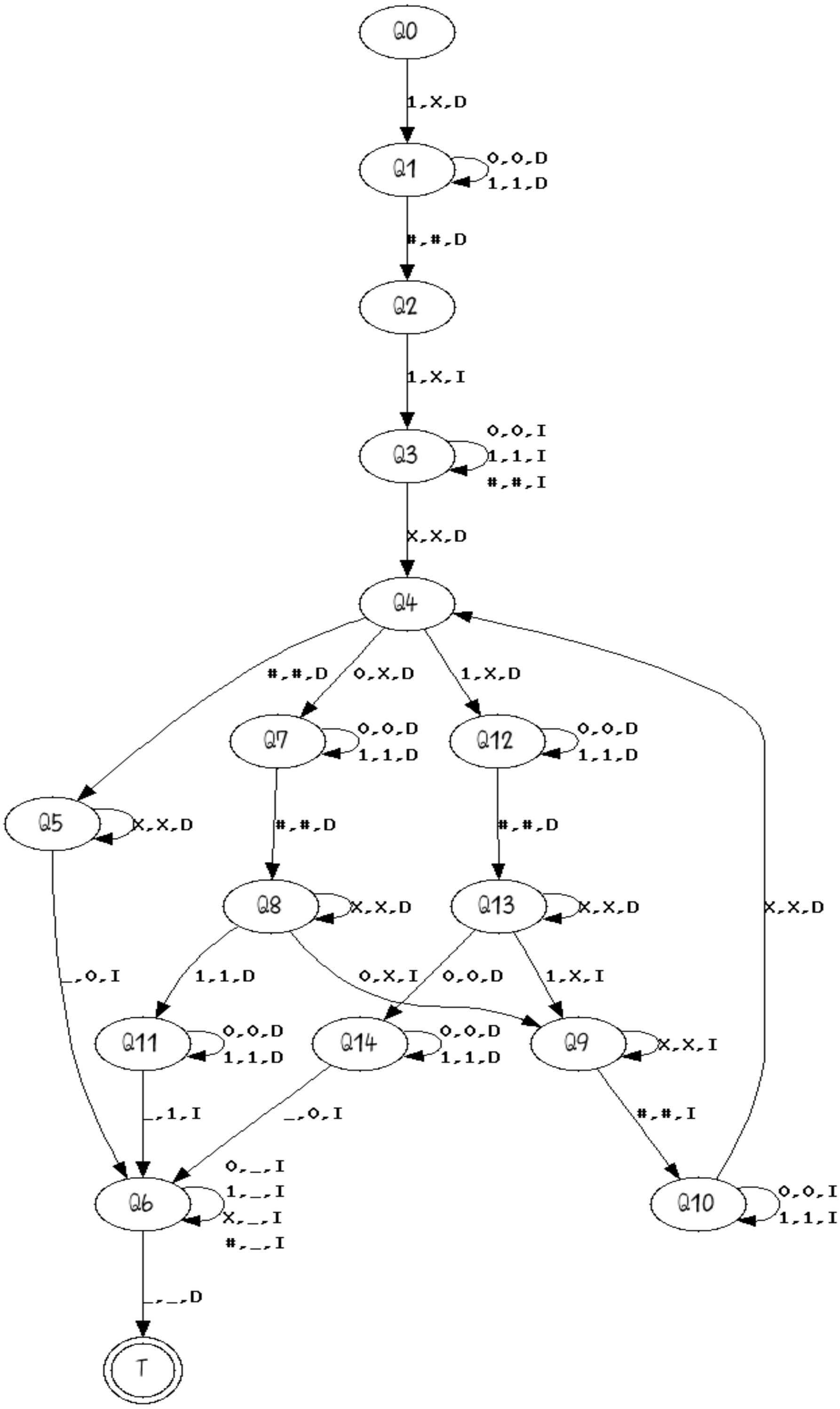
$L_3 = \{a^n b^n c^p : n,p \geq 0\} \cap \{a^t b^r c^r : t,r \geq 0\} = \{a^k b^k c^k : k \geq 0\}$ que es RE No Libre de Contexto

Ejercicio 2

Sea $L_2 = \{ x\#y \ / \ x,y \in L(1\ (0|1)^*)$ representan números en binario $\wedge\ |x|=|y| \}$.
Construya una Máquina de Türing que compute la función f: $L_2 \rightarrow \{0,1\}$ talque:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < y \text{ en binario} \\ 0 & \text{si } x \geq y \text{ en binario} \end{cases}$$

Solución:



Ejercicio 3
Sea L_3 = { $1^q0^n1^m0^r1^p$ / con m ≥r; n<p; m,p,q>0 }

Solución:

a) Clasifique a L_3 según la Jerarquía de Chomsky.

Se demostrará que no es un lenguaje Regular aplicando el Contra-reciproco del PL para lenguajes regulares.

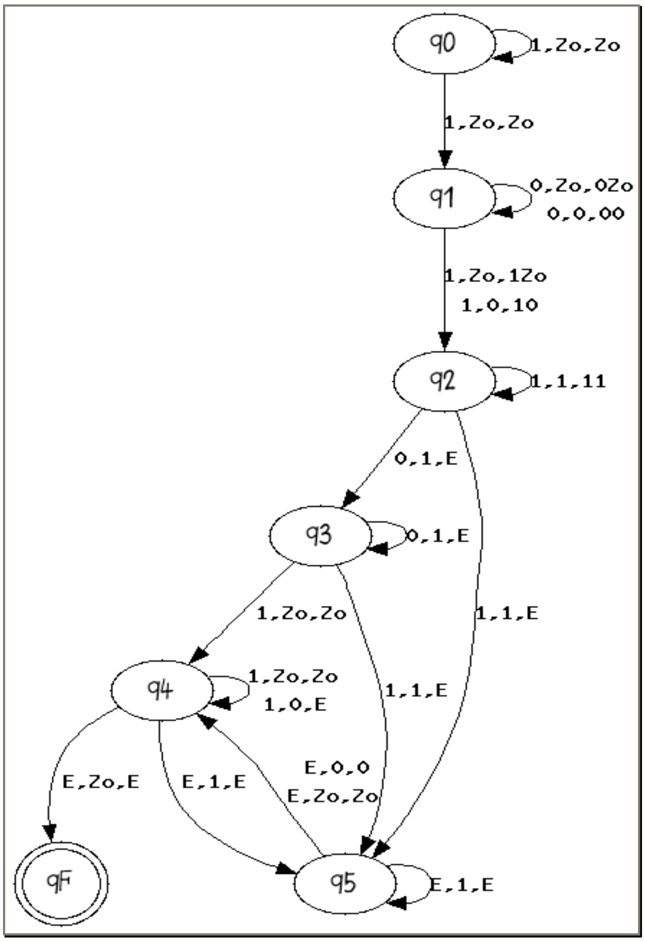
Dado N constante cualquiera, elijo z = $1^N0^{N-1}1 \in L_3$, $|z|=2N > N$ (el primer 1 corresponde a 1^q, porque q = 1, m = N-1, r = N-1 y p = 1)
Estudiamos todas las descomposiciones de z = uvw tal que $|uv| \leq N$ y $|v|\geq1$
y trataremos de encontrar un i ≥ 0 para cada descomposición tal que $uv^iw \in L_3$
Caso 1)
u = 1^a con a ≥ 0
v = 1^b con b > 0
w = $1^c0^{N-1}1$ con c ≥ 0
$z_i = uv^iw = 1^a\,1^{bi}\,1^c0^{N-1}1$
Eligiendo i=0 vemos que $z_0 = 1^a1^c0^{N-1}1$ NO pertenece L_3, porque la se viola la regla de m ≥ r.
Cualquier otra descomposición no cumple $|uv| \leq N$ y $|v|\geq1$ con lo cual se concluye que L_3 no es regular.

b) Construya una gramática G_3 / $L_3 = L(G_3)$. ¿Está simplificada? Justifique.

$S \rightarrow S_1S_2 \mid 1S_10S_21 \mid 1S_1S_21 \mid 1S_1S_31$
$S_1 \rightarrow 1 \mid 1S_1$
$S_2 \rightarrow 0S_21 \mid S_21 \mid S_31$
$S_3 \rightarrow 1S_30 \mid 1S_3 \mid 1$

Esta gramática está simplificada ya que no contiene producciones epsilon, producciones unitarias y todos sus símbolos son útiles.

c) Construya un autómata M_3 / L_3 = L(M_3).¿Es determinista? Justifique.



El autómata es NO determinista, basta con ver el estado q0 que para el mismo tope del stack y elemento de la tira, tiene más de una transición.

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

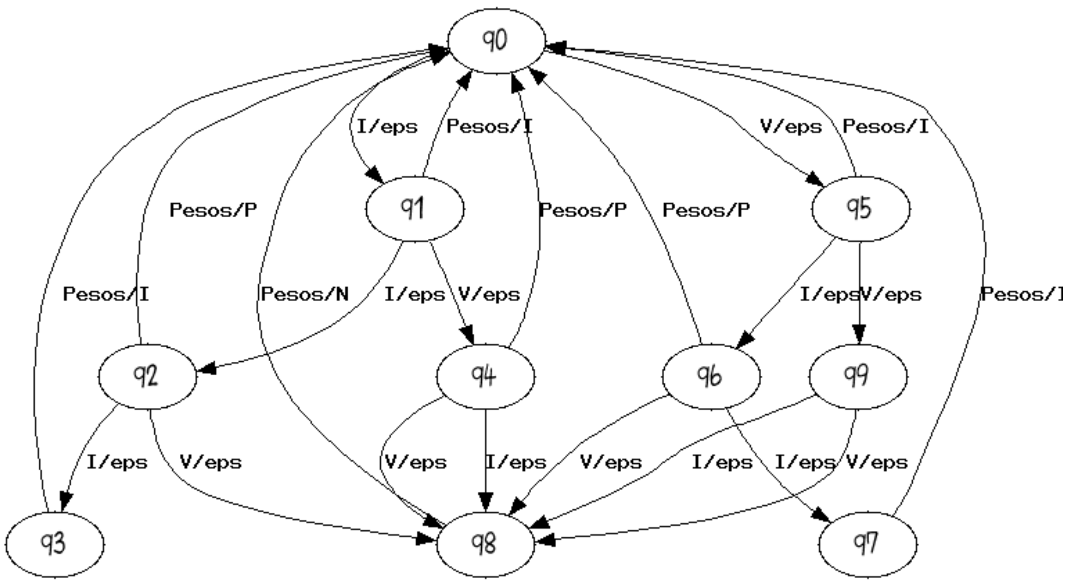
Ejercicio 4

a) Construya un Autómata con Salida M: $(Q,\Sigma,\Lambda,\delta,\lambda,q_0)$ recibe una entrada de la forma: $w_1\$w_2\$\ldots\ \$w_n\$$ tal que $1 \leq |w_i| \leq 3$ e imprime:

- **P** si w_i se corresponde con un número romano par
- **I** si w_i se corresponde con un número romano impar
- **N** si w_i NO se corresponde con un número romano válido

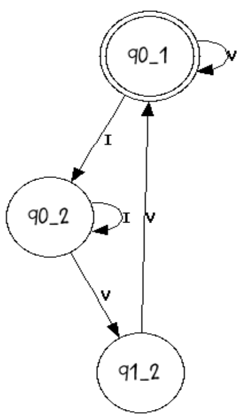
Considere: $\Lambda=\{P,I,N\}$; $\Sigma=\{i,v\}$; $\lambda : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow (\Lambda \cup \{\varepsilon\})$

Solución:



b) Construya un autómata de dos cintas para el siguiente lenguaje:
$L_4=\{ (x\$,y\$) \ / \ x,y \in \{i,v\}^*,\ 2|x|_i = |y|_v \}$

Solución:



Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

c) Sea L_5 el lenguaje reconocido por el siguiente autómata finito M={Q, Σ, δ, q_0, F} donde:
Q={ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 } Σ={ 0, 1 } F={ q_1 } y δ dada por:

	0	**1**	**ε**
q_0	{q_1}	{q_2}	{q_1}
q_1	{q_4}	{q_1}	{}
q_2	{q_1,q_3}	{q_2}	{}
q_3	{q_3}	{q_4}	{q_2}
q_4	{q_4}	{q_2}	{}

i. Defina la relación de equivalencia R_L presentada en el curso para un L cualquiera.
ii. Construya el autómata finito mínimo M' / L_5 =L(M')
iii. Exprese las clases de equivalencia definidas por la relación R_{L5} mediante expresiones regulares. Justifique su razonamiento

Solución:

I) Sea L lenguaje / L $\subseteq \Sigma^*$ con Σ alfabeto; x,y peretenecen a Σ*, diremos que:
x RL y sii para todo z perteneciente a Σ^* (xz pertenece a L y yz pertenece a L) ó
(xz no pertenece a L y yz no pertenece a L)

ii)
Pasaje AFND-esp → AFND

Calculo la eps-clausura para cada estado:

Estado	**esp-clausura**
q0	{q0, q1}
q1	{q1}
q2	{q2}
q3	{q3,q2}
q4	{q4}

Aplicando la fórmula para δ':
δ'(qi, a) = eps-clausura(δ˜(eps-clausura(qi), a))

δ'	**0**	**1**
q0	{q1,q4}	{q1,q2}
q1	{q4}	{q1}
q2	{q1,q2,q3}	{q2}
q3	{q1,q2,q3}	{q2,q4}
q4	{q4}	{q2}

Pasaje AFND → AFD

M''={Q, Σ, δ'', q_0, F} donde: Q={ q0,q14,q4,q2,q123,q1234,q12 }, Σ={ 0, 1 },
F={ q0,q14, q123,q1234,q12} y δ'' dada por:

δ''	**0**	**1**
[q0]	[q14]	[q12]
[q14]	[q4]	[q12]
[q4]	[q4]	[q2]
[q2]	[q123]	[q2]
[q123]	[q123]	[q124]
[q1234]	[q1234]	[q124]
[q12]	[q1234]	[q12]
[q124]	[q1234]	[q12]

Pasaje AFD → AFD-Min

M'''={Q, Σ, δ''', q_0, F} donde: Q={ r0,r1,r2,r3,r4 }, Σ={ 0, 1 }, F={ r0, r1, r3 } y δ''' dada por:

Aplico el algoritmo visto en el curso
Π0 : {Q – F} {F}

Π0 : {q4, q2} {q0, q124, q14, q12, q1234, q123}

Nota: En la solución se omite la comparación de transiciones entre los pares de estado para determinar si son o no distinguibles, pero hacerlo forma parte de la justificación necesaria para la resolución del ejercicio.

Π1 : {q4} {q2} {q14} {q0, q124, q12, q123, q1234}
Π2 : {q0} {q4} {q2} {q14} {q124, q12, q123, q1234}
Π3 : {q0} {q4} {q2} {q14} {q124, q12, q123, q1234}

Condición de parada: Π2 = Π3

Renombro los estados:
r0 = {q0}
r1 = {q14}
r2 = {q2}
r3 = {q12, q123, q1234,q124}
r4 = {q4}

δ'''	**0**	**1**
r0	r1	r3
r1	r4	r3
r2	r3	r2
r3	r3	r3
r4	r4	r2

iii) Como el autómata M' es mínimo, las clases R_M son iguales a las R_L:

Planteamos el sistema de ecuaciones correspondiente:

X0 = eps
X1 = X0,0
X2 = X2.1 | X4.1
X3 = X3.(0|1) | X1.1 | X0.1 | X2.0
X4 = X4.0 | X1.0

Resolvemos el sistema de ecuaciones aplicando la siguiente fórmula vista en teórico:
X = Xr | s, eps no pertenece a r → X = sr*

X0 = eps
X1 = 0
X4 = 000*
X2 = X4.1 | 1* = 000*11*
X3 = X3.(0|1) | X1.1 | X0.1 | X2.0 = (01|1|00*11*)(0|1)*

Entonces, las expresiones regulares que denotan las clases de equivalencia R_M para cada estado son:
C0 = eps
C1 = 0
C2 = 000*11*
C3 = (01|1|000*11*)(0|1)*
C4 = 000*