Teoría de Lenguajes
Soluciones

Ejercicio 1

i) Clasificamos $L_1 = \{ x \,/\, x \in \{a,b,c\}^* \text{ y } 0 < |x|_c < |x|_b < |x|_a \}$ según la Jerarquía de Chomsky.

El lenguaje L_1 es Recursivamente Enumerable lo cual se demuestra con la construcción de la GI del Ejercicio 2 o con la construcción de una MT del Ejercicio 3.

Que no es Libre de Contexto se demuestra usando el contra-recíproco del P.L. para Lenguajes Libres de Contexto.

Dado N, elegimos $z = a^{N+2}b^{N+1}c^N$ perteneciente a L_1, tal que $|z| = 3N + 3 >= N$
Estudiamos todas las descomposiciones de $z = uvwxy$ / $uwx <= N$ y $vx > 0$

Familia	$\mathbf{a^{N+2}}$	$\mathbf{b^{N+1}}$	$\mathbf{c^N}$
1	vx		
2	vx	x	
3	v	x	
4	v	vx	
5		vx	
6		vx	x
7		v	x
8		v	vx
9			vx

Familia 1
$u = a^p$
$v = a^q$ $\quad q+s>0$
$w = a^r$ $\quad q+r+s<=N$
$x = a^s$
$y = a^{N+2-p-q-r-s}b^{N+1}c^N$

$z_i = a^p (a^q)^i a^r (a^s)^i a^{N+2-p-q-r-s}b^{N+1}c^N = a^{N+2+(q+s)(i-1)}b^{N+1}c^N$
con $i=0$ $z_0=a^{N+2-(q+s)}b^{N+1}c^N$, como $q+s>0$ $|z_0|_a<=|z_0|_b$, por lo tanto z_0 no pertenece a L_1.

Familia 5
El estudio de la familia 5 es análogo al de la familia 1, salvo que al elegir $i=0$ $|z_0|_b<=|z_0|_c$, por lo tanto z_0 no pertenece a L_1.

Familia 9
$u = a^{N+2}b^{N+1}c^p$
$v = c^q$ $\quad q+s>0$
$w = c^r$ $\quad q+r+s<=N$
$x = c^s$
$y = c^{N-p-q-r-s}$

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

$z_i = a^{N+2}b^{N+1}c^p\,(c^q)^i\,c^r\,(c^s)^i\,c^{N-p-q-r-s} = a^{N+2}b^{N+1}c^{N+(q+s)(i-1)}$
con i=2 $z_2= a^{N+2}b^{N+1}c^{N+(q+s)}$, como q+s>0 $|z_2|_c>=|z_2|_b$, por lo tanto z_2 no pertenece a L_1.

Familia 2
$u = a^{N+2-p-q-r}$
$v = a^p$ p+r+s>0
$w = a^q$ p+q+r+s<=N
$x = a^rb^s$
$y = b^{N+1-s}c^N$

asumimos además que r>0 y s>0, sino caemos en las familias 3 y 1 respectivamente.

$z_i = a^{N+2-p-q-r}\,(a^p)^i\,a^q\,(a^rb^s)^i\,b^{N+1-s}c^N = a^{N+2+p(i-1)-r}(a^rb^s)^ib^{N+1-s}c^N$
con i=0 $z_0=a^{N+2-p-r}b^{N+1-s}c^N$, como s>0 $|z_0|_b<=|z_0|_c$, por lo tanto z_0 no pertenece a L_1.

Familia 4
El estudio de la familia 4 es análogo al de la familia 2, salvo que en este caso asumimos que v tiene a_s y b_s sino caemos en las familias 5 y 3 respectivamente.
Entonces eligiendo i=0 $|z_0|_b<=|z_0|_c$, por lo tanto z_0 no pertenece a L_1.

Familia 6
El estudio de la familia 4 es análogo al de la familia 2, salvo que en este caso asumimos que x tiene b_s y c_s sino caemos en las familias 7 y 5 respectivamente.
Entonces eligiendo i=2 $|z_0|_b>=|z_0|_a$, por lo tanto z_0 no pertenece a L_1.

Familia 8
El estudio de la familia 8 es análogo al de la familia 2, salvo que en este caso asumimos que v tiene b_s y c_s sino caemos en las familias 9 y 7 respectivamente.
Entonces eligiendo i=2 $|z_0|_b>=|z_0|_a$, por lo tanto z_0 no pertenece a L_1.

Familia 3
$u = a^{N+2-p-q}$
$v = a^p$ p+s>0
$w = a^qb^r$ p+q+r+s<=N
$x = b^s$
$y = b^{N+1-r-s}c^N$

asumimos además que p>0 y s>0, sino caemos en las familias 5 y 1 respectivamente.

$z_i = a^{N+2-p-q}\,(a^p)^i\,a^qb^r\,(b^s)^i\,b^{N+1-r-s}c^N = a^{N+2+p(i-1)}b^{N+1+s(i-1)}c^N$
con i=0 $z_0=a^{N+2+p(i-1)-r}b^{N+1-s}c^N$, como s>0 $|z_0|_b<=|z_0|_c$, por lo tanto z_0 no pertenece a L_1.

Familia 7
El estudio de la familia 7 es análogo al de la familia 3, salvo que en este caso asumimos que v tiene b_s y x tiene c_s sino caemos en las familias 9 y 5 respectivamente.
Entonces eligiendo i=2 $|z_0|_b>=|z_0|_a$, por lo tanto z_0 no pertenece a L_1.

Como estas son todas la descomposiciones posibles que cumplen |uwx| <=N y |vx|>0, se concluye que L_1 no es un Lenguaje Libre de Contexto.

ii) Clasificamos L_2 = { x / x $\in$ {a,b}* y $0< |x|_b < |x|_a$ } según la Jerarquía de Chomsky.

El lenguaje L_2 es Libre de Contexto, no Regular.

Que es Libre de Contexto se demuestra con la construcción de la GLC del Ejercicio 2 o con la construcción del APD del Ejercicio 3.

Que no es Regular se demuestra usando el contra-recíproco del P.L. para Lenguajes Regulares.

Sea $n \in N$

Elegimos $z = b^n a^{n+1} \in L_2$ y $|z| = 2n+1 \geq n$

Estudiamos todas las descomposiciones de z = uvw talque $|uv| \leq n$ y $|v| \geq 1$ y trataremos de encontrar un $i \geq 0$ para cada descomposición tal que $uv^iw \notin L_2$

Familias	**b^n**	**a^{n+1}**
1	v	

Familia 1
$u = b^p$
$v = b^q$ con $1 \leq q \leq n$ y $p \geq 0$
$w = b^{n-p-q}a^{n+1}$

$z_i = uv^iw = b^p(b^q)^i\, b^{n-p-q}a^{n+1} = b^{n+(i-1)q}a^{n+1}$

Tomando i=2, $z_2 = b^{n+q}a^{n+1}$ que $\notin L_2$ porque como $q \geq 1$, al menos la cantidad de **b**'s de z_2 es igual (y sino es mayor) a la cantidad de **a**'s, violando la condición de las tliras de L_2.

Entonces, como estas son todas la descomposiciones posibles que cumplen $|uv| \leq n$ y $|v| \geq 1$, se concluye que L_2 no es un Lenguaje Regular.

iii) Clasificamos L_3 = { x / x $\in$ {a,b,c}* y $|x|_c > 0$, $|x|_b$ par , $|x|_a$ impar } según la Jerarquía de Chomsky.

El lenguaje L_3 es Regular, y se demuestra con la construcción de la gramática regular del Ejercicio 2 o con la construcción del AF del Ejercicio 3.

Ejercicio 2

i) Construcción de G_1 / $L_1 = L(G_1)$

S ->IaaaTBBCF
T ->aTBC|aTB|aT|eps
aB ->Ba|ab
bB ->Bb|bb
cB ->Bc|cb
IB ->Ib
aC ->Ca|ac
bC ->Cb|bc
cC ->Cc|cc
IC ->Ic
aF ->Fa
bF ->Fb
cF ->Fc
IF ->eps

La idea es primero controlar la cantidad de símbolos y al final permitir cualquier permutación con esa cantidad.

ii) Construcción de G_2 / $L_2 = L(G_2)$

S -> Sab | aSb | abS | Sba | bSa | baS | bAa | aAb | AbA
A -> Aa | a

Ver que se intenta contemplar todas las variantes posibles en que pueden estar los símbolos del alfabeto.

iii) Construcción de G_3 / $L_3 = L(G_3)$

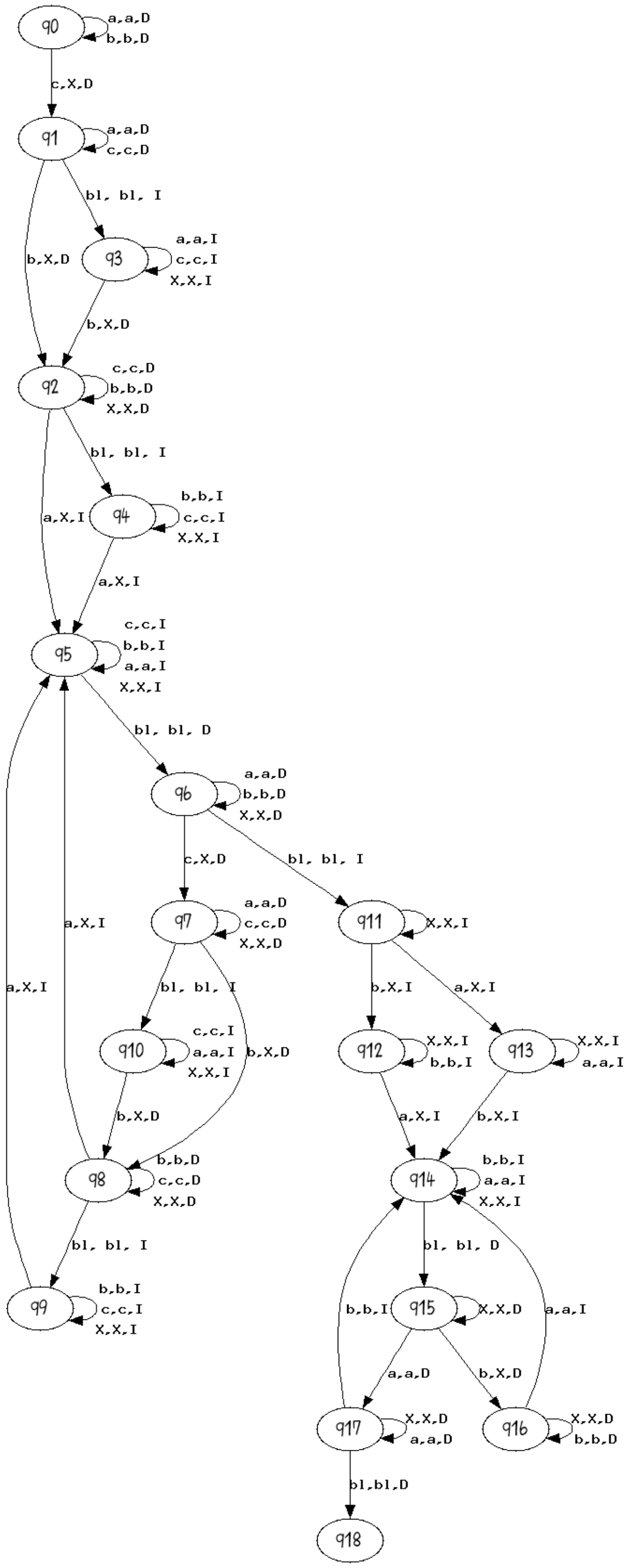
S -> cC | aA | bB
C -> aA_1 | bB_1 | cC
A_1 -> aC | bD_1 | cA_1 | eps
D_1 -> bA_1 | cD_1 | aB_1
B_1 -> cB_1 | bC | aD_1
A -> aS | bD | cA_1
D -> bA | cD_1 | aB
B -> bS | aD | cB_1

Es una gramática regular (lineal derecha).

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Ejercicio 3

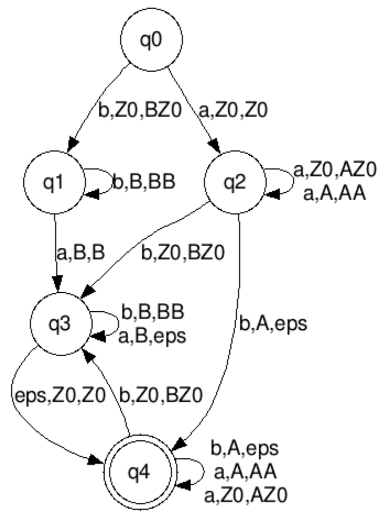
i) Construcción de un autómata M_1 / L_1 =L(M_1)



El autómata (Máquina de Turing) es determinista.
Se cumple que $| \delta(q,a,X) | \leq 1$

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

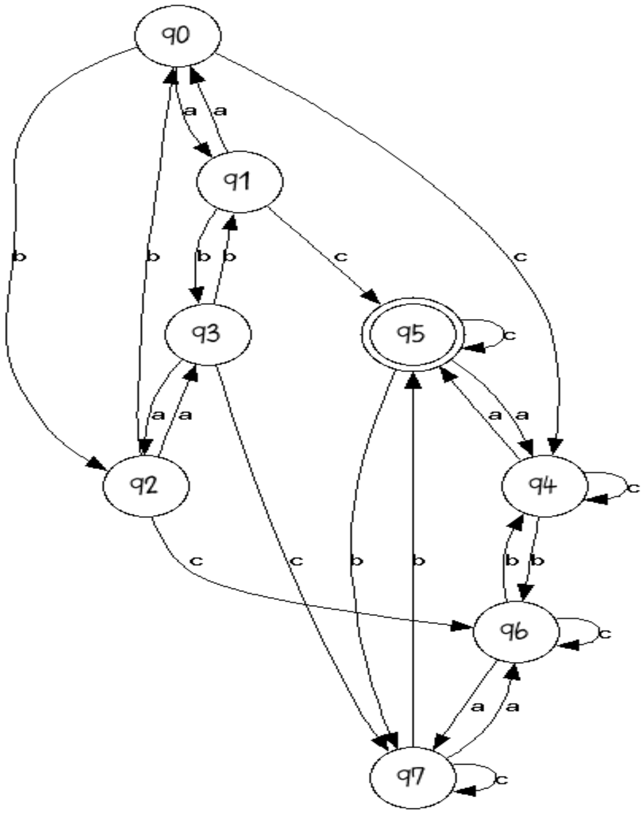
ii) Construcción de un autómata M_2 / L_2 =L(M_2)



El autómata con stack es Determinista, ya que cumple:

- | δ(q,a,X) | $\leq$ 1 $\forall$ a $\in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$; q $\in$ Q ; X $\in \Delta$
- si $\exists$ δ(q,ε,X), entonces NO $\exists$ δ(q,a,X)

iii) Construcción de un autómata M_3 / L_3 =L(M_3)

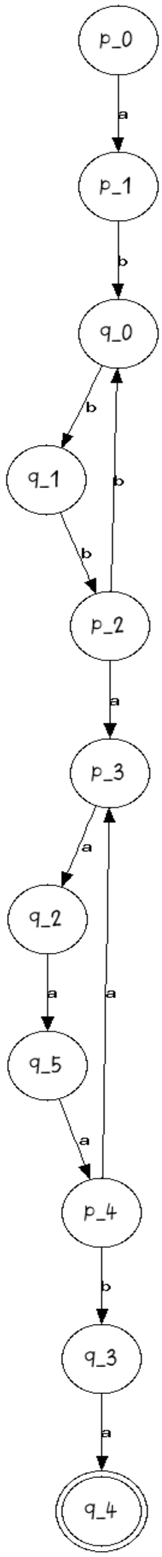


Es un Autómata Finito Determinista

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Ejercicio 4

a) L = { < $b^{2p}a^{2k+1}$, $ab^pa^{2k}b$ > / p, k > 0 }



Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

b) Indique si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Justifique.

i) Sean L_1 libre de contexto y L_2 regular, entonces $L_3 = L_1 \cap L_2$ es libre de contexto.

VERDADERO. Se dará una idea de la construcción de un APD M_3 / L_3 = L(M_3) aunque no la demostración formal de que ese autómata reconoce efectivamente L_3.

Sea M_1 / L_1 = L(M_1) ; M_1 = (Q_M , Σ, Γ, δ_M , q_0 , Z_0 , F_M) y sea M_2 / L_2 = L(M_2) ;
M_2 = (Q_A , Σ, δ_A , p_0 , F_A).
Se construye un APD M_3 / L_3 = L(M_3) que "corre en paralelo M_1 y M_2".
M_3 simula movimientos en M_1 con entrada *epsilon* sin cambiar el estado de M_2.
Cuando M_3 hace un movimiento con entrada **a**, M_1 simula el movimiento y también simula a M_2 con cambios de estado con esa entrada **a**.
M_3 acepta si y sólo si ambos autómatas M_1 y M_2 aceptan.
Formalmente, se define entonces M_3 = ($Q_A \times Q_M$, Σ, Γ, δ, [p_0,q_0], Z_0 , $F_A \times F_M$)
donde δ es definido por δ([p, q], a, X), contiene ([p', q'], γ) si y sólo si δ_A (p, a) = p' y δ_M (q, a, X) contiene (q', γ).
Notar que **a** puede ser *epsilon*, en cuyo caso p' = p.

ii) Sean L_4 y L_5 finitos definidos sobre el mismo alfabeto Σ, entonces $L_6 = L_4^c \cap L_5^c$ es finito.

FALSO. Se puede ver con un contraejemplo.
Sean $L_4 = L_5 = \{\varepsilon\}$. Entonces $L_4^c = L_5^c = \Sigma^+$ para algún Σ. Justamente Σ^+ es un lenguaje infinito (son todas las tiras definidas sobre Σ). Entonces L_6 no es finito.

iii) Sea L_8 recursivamente enumerable no libre de contexto, entonces ∃ L_7 y L_9 libres de contexto tal que $L_7 \subset L_8 \subset L_9$

VERDADERO. Si L_7 es el lenguaje vacío y L_9 es Σ^*, ambos regulares y por Jerarquía de Chomsky libres de contexto, si L_8 es $\{ a^nb^nc^n / n>0 \}$ que se vio en el curso que es re pero no libre de contexto, queda probado.

iv) $\{ (aba)^n / n>0 \} \cap \{ a^n / n>0 \} = \{ (aa)^n / n>0 \}$

FALSO. No existen elementos en la intersección de los lenguajes, ya que el primer lenguaje tiene tiras que contienen por lo menos una "b", y el segundo lenguaje tiene tiras que contienen solamente a's.