

Teoría de Lenguajes Soluciones

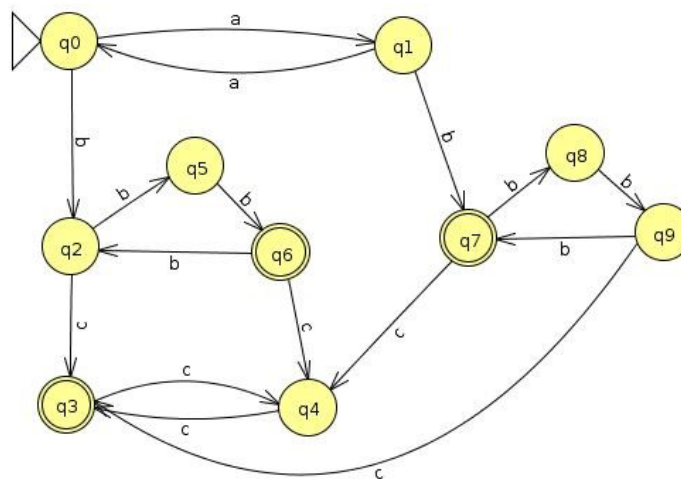
Ejercicio 1

Sea $L_1 = \{ a^p b^q c^r \mid (p+r) \bmod 2 = q \bmod 3, q \geq 1 \}$

a) R_L : Sea un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ y dos strings $x, y \in \Sigma^*$
 $x R_L y \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^*$ se cumple que: $xz \in L \wedge yz \in L$ ó $xz \notin L \wedge yz \notin L$

R_M : Sea un Autómata Finito Determinista $M: (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
 Dados $x, y \in \Sigma^*$, $x R_M y \Leftrightarrow \delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y)$

b)



Dada la definición de R_M de la parte a), la cantidad de clase de equivalencia coinciden con la cantidad de estados. Por lo tanto la respuesta es **11**, considerando además el estado "pozo" que no fue dibujado.

c) Las clases de equivalencia definidas según la relación R_L coinciden con las clases de R_M si M es el autómata mínimo (Myhill-Nerode). El autómata anterior ya es el mínimo (se debiera mostrar la aplicación del algoritmo), con lo cual la respuesta es **11**.

d) Una gramática simplificada para generar L_1 se puede deducir de M_1 , asociando una variable a cada estado de M_1 :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow a S_1 \mid b S_2 \\ S_1 &\rightarrow a S \mid b S_7 \\ S_2 &\rightarrow b S_5 \mid c S_3 \\ S_3 &\rightarrow \varepsilon \mid c S_4 \\ S_4 &\rightarrow c S_3 \\ S_5 &\rightarrow b S_6 \\ S_6 &\rightarrow \varepsilon \mid b S_2 \mid c S_4 \\ S_7 &\rightarrow a S_8 \mid c S_4 \mid \varepsilon \\ S_8 &\rightarrow b S_9 \\ S_9 &\rightarrow b S_7 \mid c S_3 \end{aligned}$$

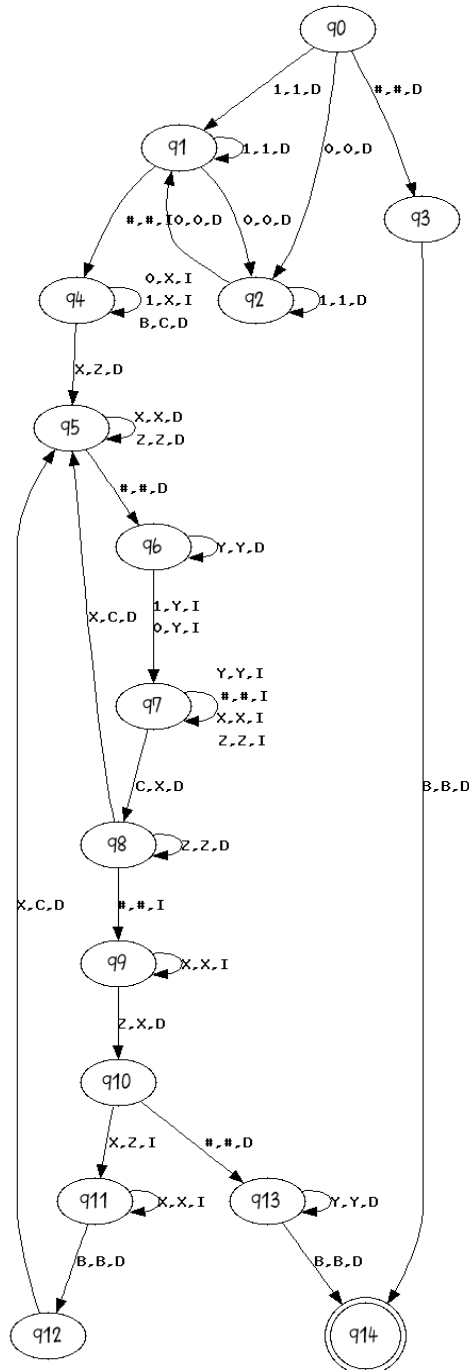
Esta gramática no está simplificada porque contiene producciones épsilon, las eliminamos:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow a S_1 \mid b S_2 \\ S_1 &\rightarrow a S \mid b S_7 \mid b \\ S_2 &\rightarrow b S_5 \mid c S_3 \mid c \\ S_3 &\rightarrow c S_4 \\ S_4 &\rightarrow c S_3 \mid c \\ S_5 &\rightarrow b S_6 \mid b \\ S_6 &\rightarrow b S_2 \mid c S_4 \\ S_7 &\rightarrow a S_8 \mid c S_4 \\ S_8 &\rightarrow b S_9 \\ S_9 &\rightarrow b S_7 \mid c S_3 \mid b \mid c \end{aligned}$$

Esta gramática está simplificada porque no contiene producciones épsilon, ni unitarias, ni tiene símbolos inútiles.

Ejercicio 2

a)



Observaciones:

La MT propuesta es un autómata determinístico (dado el estado y el símbolo bajo el cabezal de la cinta, hay un único resultado de la función de transición de la MT).

Inicialmente la MT chequea que el número de ceros en x sea par.

Si $w = x\#y = \#$, se va directo al estado final de aceptación.

Si el largo de x no es nulo, se marcan todos los ceros y unos de x con el símbolo X, se inicializa un contador C en la celda a la izquierda del primer elemento de x y un contador Z en el primer elemento de x. El contador Z recorre todos los elementos de x hasta llegar a #.

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Para cada posición de Z, se recorren usando el contador C todos los elementos de x y se marca un elemento de y por cada elemento de x (se saltea el elemento con el contador Z).

Cuando la celda a la izquierda de # tenga el valor Z y se termine la iteración correspondiente, se habrán marcado $|x|^2$ elementos de y. Se verifica entonces que no queden elementos de y sin marcar, y de ser así se acepta la tira.

b) Una posible gramática podría contener las siguientes reglas de producción:

$S \rightarrow R\# \mid \#$
 $R \rightarrow YR00 \mid YR1 \mid YY00 \mid Y1$
 $Y0 \rightarrow 0YT$
 $Y1 \rightarrow 1YT$
 $Y\# \rightarrow \#$
 $T\# \rightarrow \#0 \mid \#1$
 $T0 \rightarrow 0T$
 $T1 \rightarrow 1T$
 $01 \rightarrow 10$
 $10 \rightarrow 01$

Ejercicio 3

Sea $L_3 = \{ (01)^p a^q b^{(p+q) \bmod 2} \mid p > q > 0 \}$

a) Se demostrará que L_3 NO es Regular y luego en las partes siguientes se ve que es Libre de Contexto. Para ver que NO es Regular se utilizará el PL para lenguajes regulares. Sea N la cte del PL.

Sea $z = (01)^{2N+1} a^{2N} b$, $|z| = 4N + 2 \geq N$

Se consideran las siguientes descomposiciones que cumplen $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq N$ (*)

$$\begin{aligned}
 1) \quad & u = (01)^t \\
 & v = (01)^r \\
 & w = (01)^{2N+1-t-u} a^{2N} b \quad \text{con } t \geq 0 \text{ y } r \geq 1
 \end{aligned}$$

Considerando $i=0$ tenemos que:

$Z_0 = uw = (01)^t (01)^{2N+1-t-u} a^{2N} b = (01)^{2N+1-u}$, esta tira no pertenece al lenguaje pues $u \geq 1$, por lo que no cumple que $p > q$ ya que en este caso $p=q$.

$$\begin{aligned}
 2) \quad & u = (01)^t, \\
 & v = (01)^r 0 \\
 & w = 1(01)^{2N-t-r-1} a^{2N} b \quad \text{con } t \geq 0, r \geq 0, 2r+2t+1 \leq N
 \end{aligned}$$

Considerando $i=0$ tenemos que:

$Z_3 = uw = 1(01)^{2N-r} a^{2N} b$, esta tira no pertenece al lenguaje pues no es de la forma que define el lenguaje al comenzar en 1 y tener **dos** 1's seguidos.

$$\begin{aligned}
 3) \quad & u = (01)^t 0 \\
 & v = 1(01)^r \\
 & w = (01)^{2N-t-r-1} a^{2N} b \quad \text{con } t \geq 0 \text{ y } r \geq 0
 \end{aligned}$$

Considerando $i=0$ tenemos que:

$Z_3 = uw = 0(01)^{2N-r-1} a^{2N} b$, esta tira no pertenece al lenguaje pues no es de la forma que define el lenguaje, ya que comienza con **dos** 0's.

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

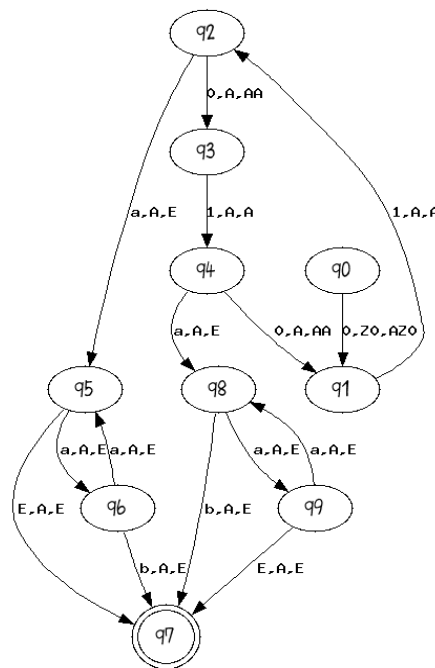
- 4) $u = (01)^t 0$
 $v = 1(01)^r 0$
 $w = 1(01)^{2N-t-r-2} 1a^{2N}b$ con $t \geq 0$ y $r \geq 0$

Considerando $i=0$ tenemos que:

$Z_4 = uw = (01)^{2N-r-1} a^{2N} b$, esta tira no pertenece al lenguaje pues no es de la forma que define el lenguaje, si bien r puede ser 0, la cantidad de pares (01) es menor que la cantidad de a 's (por el 0 del substring u y el 1 del substring w).

Por lo tanto, como estas son todas familias que cumplen (*) por contrarrecíproco del Pumping Lemma L_3 **NO es regular**.

b) Construcción de un APD y con esto se demuestra que el L_3 es Libre de Contexto.



El APD construido es NO Determinista, ya que en el estado $q5$ existen: $\delta(q5, a, A)$ y $\delta(q5, \epsilon, A)$. También sucede lo mismo en $q9$.

c) Una posible gramática es la que contiene las siguientes reglas de producción:

$S \rightarrow A \mid Bb$
 $A \rightarrow CAa \mid CEa$
 $B \rightarrow CBa \mid Ea \mid CEaa$
 $E \rightarrow CCE \mid CC$
 $C \rightarrow 01$

Como no está simplificada al tener una producción unitaria, se elimina:

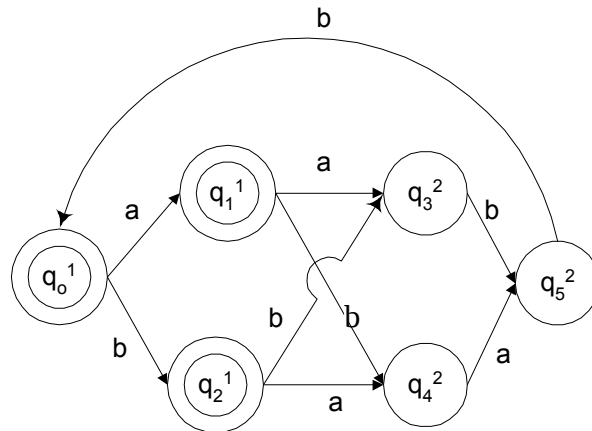
$S \rightarrow CAa \mid CEa \mid Bb$
 $A \rightarrow CAa \mid CEa$
 $B \rightarrow CBa \mid Ea \mid CEaa$
 $E \rightarrow CCE \mid CC$
 $C \rightarrow 01$

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

La gramática anterior contiene solamente símbolos útiles, y no tiene ni producciones epsilon ni unitarias.

Ejercicio 4

a)



b)

