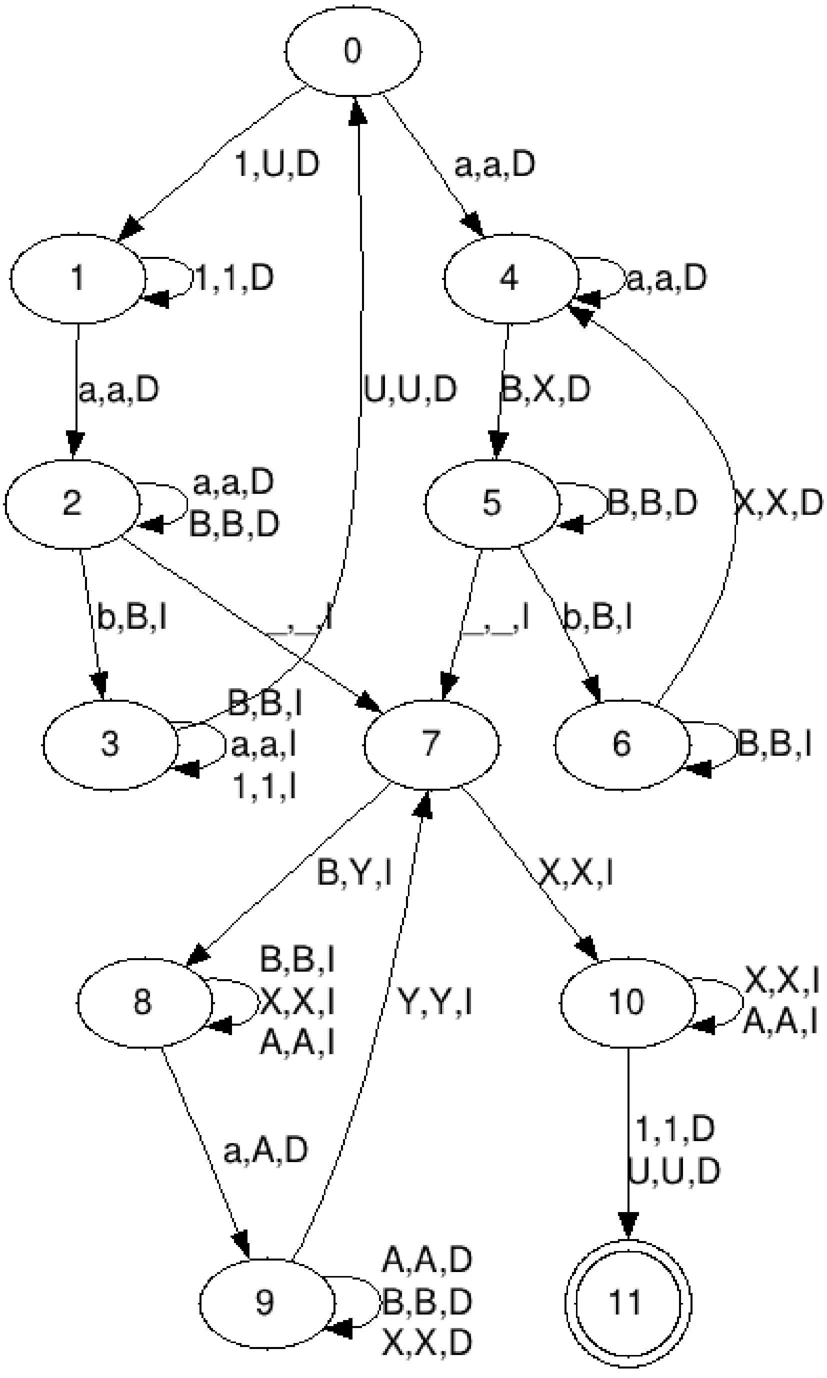
Teoría de Lenguajes
Teoría de la Programación I
Soluciones

Ejercicio 1

a) **Sea $L_1 = \{ 1^k a^m b^n \ / \ (n \bmod k)=m \ \ n,k,m>0 \}$.**
Construya un autómata M_1 / $L_1 = L(M_1)$.



b) Sea $L_{11} = \{ 1^k ab^n \ / \ (n \bmod k)=1 \quad n,k>0 \}$.
Construya una gramática G_{11} / $L_{11} = L(G_{11})$.

```
S -> IAMF
A -> 1A | 1      # genero k cantidad de 1s
M -> CM | C      # genero n div k cantidad de Cs
                 # que luego al multiplicar por los 1 me va devolver las n bs

1C -> C1B        # muevo a las Cs a las izquierda, y agrego un B por cada 1C
                 # logrando que la cantidad de Bs sea el resultado de multiplicar
                 # la cantidad de 1s por la cantidad de Cs
BC -> CB         # muevo las Cs a la izquierda
B1 -> 1B         # muevo las Bs a la derecha
IC -> I          # borro la C luego que pasó todos los 1s

BF -> Fb         # convierto B en el terminal b
1F -> F'ab       # me aseguro que no quedan más multiplicadores Cs
                 # y agrego la a y b del modulo 1

1F' -> F'1       # muevo la F' a la izquierda
IF' -> eps       # elimino todas las variables
```

Ejercicio 2

Sea $L_2 = \{ 1^t 0^k (10)^p 1^r \ / \ t,p,r > 0 \ , \ k > p + r\}$

a) Clasifique a L_2 según la Jerarquía de Chomsky.

Sea N la constante del PL, y sea $z= 10^{N+2}101^N$; (con k=N+2, p=1, r=N, t=1), $|z| \geq N$
Consideramos todas las descomposiciones posibles para z = uvw que cumplan:
$|uv| \leq N$ y $|v|\geq 1$

Analizamos las siguientes familias de descomposiciones:

i) $u=\varepsilon$ $\quad p+1 \leq N$
$v=10^p$ $\quad p \geq 0$
$w= 0^{N+2-p}\,101^N$
$z_i= (10^p)^i\, 0^{N+2-p}101^N$
Tomando i=0, $z_0 = 0^{N+2-p}101^N$ que NO pertenece a L_2 porque NO comienza en **1**

ii) $u=10^p$ $\quad 1+p+q \leq N$
$v=0^q$ $\quad q \geq 1$
$w= 0^{N+2-p-q}\,101^N$
$z_i= 10^p\,(0^q)^i\, 0^{N+2-p-q}101^N$
Tomando i=0, $z_0 = 10^p0^{N+2-p-q}101^N = 10^{N+2-q}101^N$
Para que z_0 pertenezca a L_2 la cantidad de 0's entre los dos primeros 1's debe ser **mayor** que la cantidad de pares de 10 + la cantidad de 1's del final de la tira
Se da que N+2-q > 1+N, o sea que 1-q>0.
Pero q≥1 . Entonces absurdo. Con los cual z_0 NO pertenece a L_2

Estas son todas las familias que cumplen $|uv| \leq N$ y $|v|\geq 1$ de donde L_2 no es un lenguaje regular.

Para ver que es Libre de Contexto, se construye una gramática Libre de Contexto en la parte b)

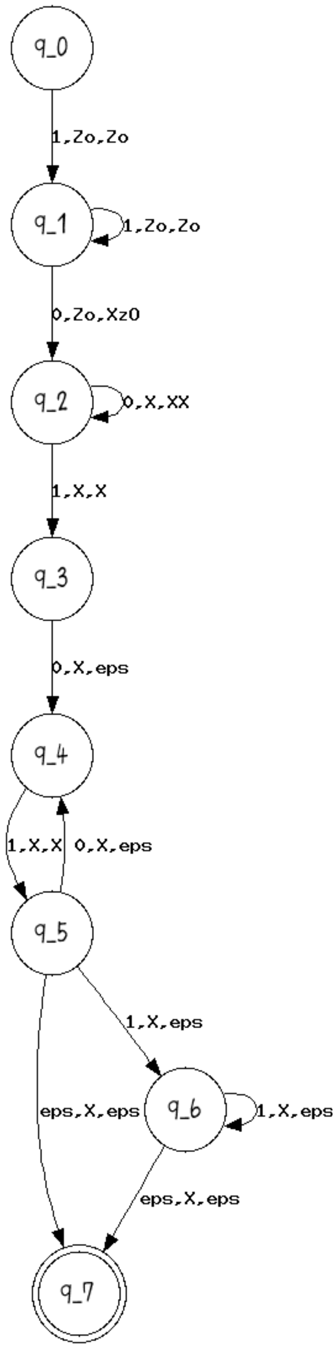
b) Construya una gramática simplificada G_2 / $L_2 = L(G_2)$.

Se escriben las reglas de producción:

$S \rightarrow 1S \mid 1A$ – genero los 1_s que quiero, al menos uno
$A \rightarrow 0A1 \mid 0B1$ – genero tanto 0_s como 1_s (del final, al menos uno)
$B \rightarrow 0B10 \mid 0C10$ – genero tanto 0_s como pares 10 (al menos uno)
$C \rightarrow 0C \mid 0$ – genero la cantidad de 0_s que se quiera (al menos uno) y con eso aseguro la relación $k > p + r$

Se puede ver que está simplificada al no contar con producciones ε, ni producciones unitarias y todos sus variables son útiles.

c) Construya un autómata M_2 / $L_2 = L(M_2)$. ¿Es determinista? Justifique.



Ejercicio 3

Indique si las siguientes propiedades son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

a) Si L_a es un lenguaje libre de contexto no regular, y L_b es regular distinto de Σ^*, entonces
$L_a \cup L_b$ es libre de contexto no regular.

*FALSO. Si L_a es el lenguaje {x/ x es de la forma $a^n b^n$} y L_b = L(a*b*), la unión es L(a*b*) que es regular por definición.*

b) La unión de dos lenguajes regulares es regular.

VERDADERO. A partir de los AFND que reconocen los dos lenguajes, se construye un nuevo autómata que reconoce la unión (ver teórico).

c) La unión infinita de lenguajes regulares es regular.

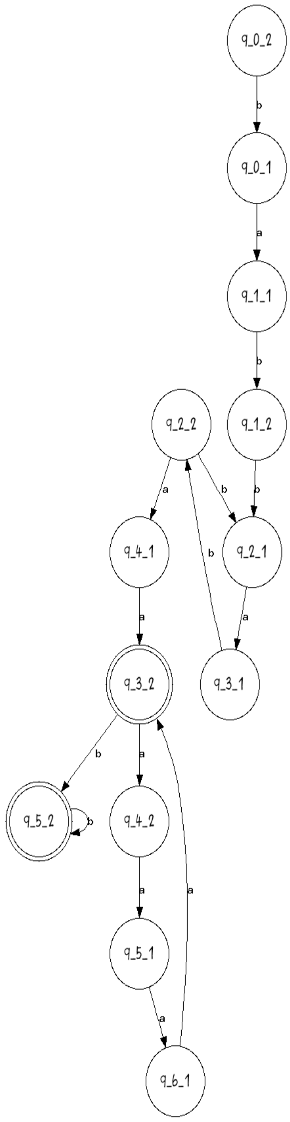
FALSO. Considere los lenguajes {x/ x es de la forma $a^n b^n$} con n natural, todos regulares por ser finitos. Su unión es el lenguaje {x/ x es de la forma $a^n b^n$}, que se vio en teórico que no es regular.

d) Si L_c es un lenguaje recursivamente enumerable no libre de contexto, entonces el lenguaje resultante de quitarle una tira a L_c no puede ser libre de contexto.

VERDADERO. Supongamos que L_c - {w} es libre de contexto (siendo w una tira del lenguaje). {w} es un lenguaje finito, luego es regular (se construye el autómata que reconoce solamente la tira), luego es libre de contexto (por Jerarquía de Chomsky). Pero la unión de lenguajes libres de contexto es libre de contexto (se puede construir una gramática a partir de las gramáticas de los lenguajes), y entonces L_c sería libre de contexto, lo cual contradice la hipótesis.

Ejercicio 4

a) Construya un Autómata Finito Determinista de dos cintas que acepte la relación:
$\{<(ab)^k a^t \,,\, b^k a^t b^s> \;\; / \;\; t$ impar, $k>1, s\geq 0\}$



b)

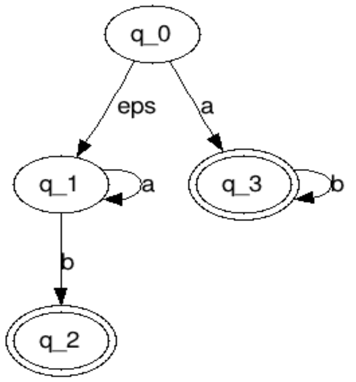
i. Defina la relación R_L vista en el curso.

Ver teórico.

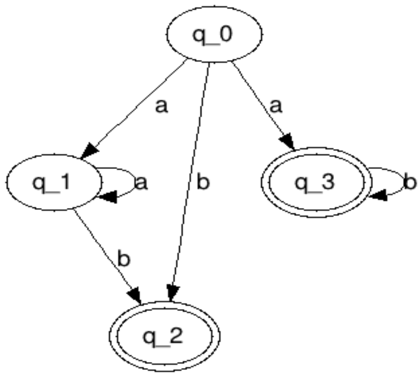
ii. Dé las clases de R_L del lenguaje L(a*b | ab* | a)

Lo que hacemos es construir el autómata para el lenguaje, minimizarlo y calcular las clases de R_M. Por Myhill-Nerode, esas son las clases de R_L

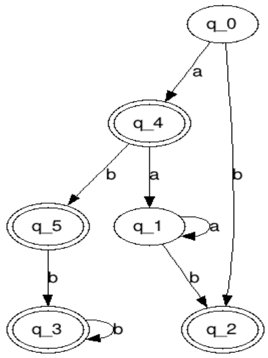
Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.



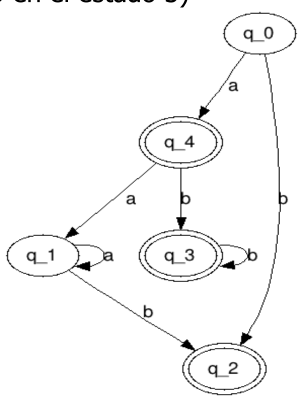
Construimos un AFND



Construimos AFD



Minimizo (se unen los estados 3 y 5 en el estado 3)



Clases de R_M

X0 = ε

X1 = X1 a | X4 a

X2 = X0 b | X1 b

X3 = X3 b | X4 b

X4 = X0 a

Xp = X2 a | X2 b | X3 a | Xp a | Xp b

X4 = X0a = a

X1 = X1 a | X4 a = X1 a | aa => X1 = aaa*

X2 = X0 b | X1 b => X2 = b | aaa*b

X3 = X3 b | X4 b = X3 b | ab => X3 = abb*

Xp = X2 a | X2 b | X3 a | Xp (a | b)

Xp = (aaa*ba | aaa*bb | abb*a) (a | b) *

Ejercicio 4 [Teoría de la Programación 1]

Sean la función f: |N x |N→|N y los conjuntos de naturales A, B y C que cumplen:

C ={n ∈ |N / ∃j,k tales que j ∈ A, k ∈ B, n=f(j,k) }

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

i) A y B no son decidibles ⇒ C no es decidible.

Falso. Basta considerar el caso en que f es la función vacía. Como no existe un natural que cumpla n=f(j,k), C=∅. El conjunto vacío es decidible pues el siguiente programa computa su función característica total:

```
PROGRAM(X0)
  X1:= 0;
RESULT(X1)
```

ii) A y B son decidibles ⇒ C es decidible.

Falso. Sean A=B=|N y la siguiente función f:

f(i, n) = <i,n> si <Ix(i), n>↓
indef. en caso contrario.

El conjunto C se puede reescribir como:

C = {n ∈ |N / ∃j,k tales que j ∈ A, k ∈ B, n=f(j,k) } $=^{f(j,k)=<j,k> \text{ y } A=B=|N}$
= {<j,k> ∈ |N / ∃j,k ∈ |N, f(j,k) ↓} $=^{\text{def } f}$
= {<j,k> ∈ |N / <Ix(j),k>↓}

Supongamos que C es decidible y, por tanto. su función característica C_C total es computable.

C_C(<i,n>) = 1 $\Leftrightarrow^{\text{def } Cc}$ <i,n> ∈ C $\Leftrightarrow^{\text{def } C}$ <Ix(i), n>↓ $\Leftrightarrow^{\text{def STOP}}$ STOP(i,n)=1

Luego STOP es una función computable, lo cual es un absurdo. El absurdo se genera al suponer que C es decidible ⇒ tesis.

iii) f no es computable ⇒ C no es decidible.

Falso. Basta con tomar A vacío, para que C=∅ que, como ya se demostró en (i), es un conjunto decidible.

Otra solución (del ejercicio 4 [Teoría 1]):

i) **Falso.** Considerar:
A = { i / <Ix(i), i>↓ }
B = { i / <Ix(i), i>↑ }
C = {1 } (f(x,y) = 1 ∀x,y ∈ N)
C es decidible

ii) **Falso**. Sean A = conjunto de los N

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

B = conjunto de los N
C = { z / f(x, y) = x si ϕ_x es total
en caso contrario
Entonces f es constante en el segundo argumento (y)
Entonces, para decidir TOT computo f(i,0)

iii) **Falso**. Similar al ii)
Solo que f(x,y) = 1 si ϕ_x es total
0 en caso contrario
(al menos uno con 0 y uno con 1)
C es decidible, ya que C={0,1}