Teoría de Lenguajes
Soluciones
1er. Parcial – Curso 2011

Ejercicio 1 [Evaluación individual del obligatorio]

I
La salida es nula. Pues el **.** no matchea con el salto de línea

II
Idem anterior

III
Se imprime el mismo texto de la entrada, pues el modificador s hace que el **.** matchee con el salto de línea

IV
Idem anterior

V
Idem anterior

VI
Solo se imprime:

```
Imagine there's no heaven
It's easy if you try
```

Debido a que el .*? no es greedy

VII

```
Ima,
```

El ^ solo matchea contra la primer línea

VIII

```
Ima,It's easy if y,N,Ab,Ima,Livin,
```

El ^ matchea contra el comienzo de cada líena

IX

```
,Imagine
```

Pues `([a-z]*)\W*` matchea con epsilon

X

```
Imagine,there
```

Pues `[a-z]*` matchea con `Imagine` y `\W*` con el espacio

Ejercicio 2

Sea L_2 el lenguaje reconocido por el autómata finito $M_2=\{Q, \Sigma,\delta,q_0, F\}$ donde:
$Q=\{q_0, q_1, q_2\}$ $\Sigma=\{a,b\}$ $F=\{q_0\}$ y la δ dada por:

	a	**b**
$\mathbf{q_0}$	$\{q_1\}$	$\{\}$
$\mathbf{q_1}$	$\{\}$	$\{q_2\}$
$\mathbf{q_2}$	$\{q_0\}$	$\{\}$

Demuestre que si $x \in L_2$, entonces x tiene el doble de a's que de b's.

Demostraremos por inducción completa en la cantidad de pasos que lleva reconocer w, las siguientes propiedades:

P0 Si δ (q0,w)=q0 ==> w y $|w|_b$= n, entonces $|w|_a$=2n
P1 Si δ (q0,w)=q1 => w y $|w|_b$= n, entonces $|w|_a$ =2n+1
P2 Si δ (q0,w)=q2 => w y $|w|_b$= n, entonces $|w|_a$ =2(n-1)+1=2n-2+1=2n-1

Paso Base:

PB0) Si δ (q0,w)=q0 y |w|=0 => $|w|_b$ =0 y $|w|_a$ =2*0=0, que se cumple porque w= ε
PB1) Si δ (q0,w)=q1 y |w|=1 => $|w|_b$ =0 y $|w|_a$ =2*0+1=1, que se cumple porque w=a
PB2) Si δ (q0,w)=q2 y |w|=2 => $|w|_b$ =1 y $|w|_a$ =2*1-1=1, que se cumple porque w=ab

Paso Inductivo:

Si la cantidad de pasos para reconocer w es menor o igual que h, se cumple:

HI0) Si δ (q0,w)=q0 => w y $|w|_b$ = n, entonces $|w|_a$ = 2n
HI1) Si δ (q0,w)=q1 => w y $|w|_b$ =n, entonces $|w|_a$ = 2n+1
HI2) Si δ (q0,w)=q2 => w y $|w|_b$ =n n>0, entonces $|w|_a$ = 2n-1

Tesis inductivas:

TI0) Si δ(q0,w)=q0 y cant_pasos(w)=h+1 => w=w'a, porque la única transición entrante a q0 está etiquetada con una "a" y δ(q0,w)=δ(δ(q0,w'),a) por definición de $\tilde{\delta}$ y $\hat{\delta}$ → (cant_pasos(w')=h y δ(w',q0)=q2) w' cumple $|w|_b$ = n y $|w|_a$= 2n-1 (por HI2), y por lo tanto w cumple $|w|_b$ = n y $|w|_a$= 2n

TI1) Si δ(q0,w)=q1 y cant_pasos(w)=h+1 => w=w'a, porque la única transición entrante a q0 está etiquetada con una "a" y δ(q0,w)=δ(δ(q0,w'),a) por definición de $\tilde{\delta}$ y $\hat{\delta}$ → (cant_pasos(w')=h y δ(w',q0)=q0) w' cumple $|w|_b$ = n y $|w|_a$ = 2n (por HI0), y por lo tanto w cumple $|w|_b$ = n y $|w|_a$ = 2n+1

TI2) Si δ(q0,w)=q2 y cant_pasos(w)=h+1 => w=w'b, porque la única transición entrante a q0 está etiquetada con una "b" y δ(q0,w)=δ(δ(q0,w'),b) por definición de $\tilde{\delta}$ y $\hat{\delta}$ → (cant_pasos(w')=h y δ(w',q0)=q1) w' cumple $|w|_b$ = n y $|w|_a$ = 2n+1 (por HI1), y por lo tanto w cumple $|w|_b$ = n+1 y $|w|_a$ =2n+1=2(n+1)-1=2$|w|_b$ - 1

Como se cumple la Propiedad P0 en el estado final, toda tira del lenguaje cumple que tiene el doble de a's que de b's

Ejercicio 3

Sea L_3 el lenguaje reconocido por el autómata finito M_3={Q, Σ,δ,q_0, F } donde:

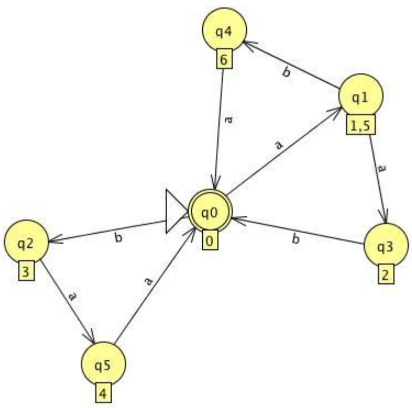
Q={q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 } Σ={a,b} F={q_0}

y la δ dada por:

	a	b
q_0	{q_1, q_3}	{q_5}
q_1	{q_2}	{}
q_2	{}	{q_0}
q_3	{}	{q_4}
q_4	{q_0}	{}
q_5	{q_6}	{}
q_6	{q_0}	{}

a) Construya el autómata mínimo para M_3**.**

Primero lo convierto en un AFD:

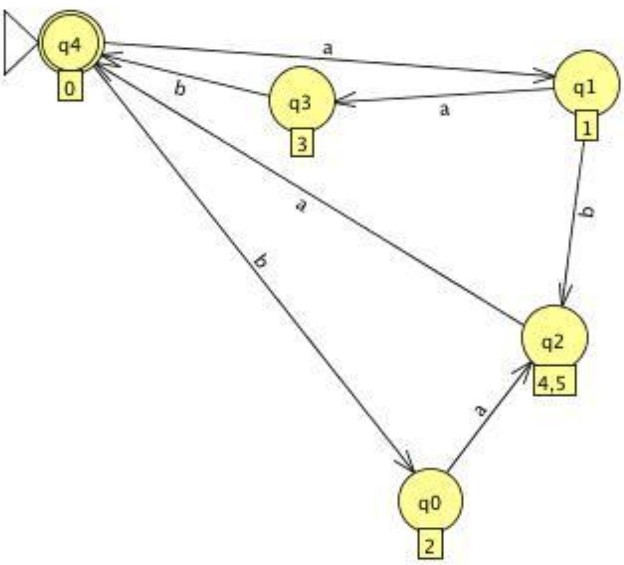


Y luego lo minimizo:

[q_0] [$q_1q_2q_3q_4q_5$]

[q_0] [q_1] [q_2] [q_3] [q_4q_5]

[q_0] [q_1] [q_2] [q_3] [q_4q_5]



b) Obtenga las clases de equivalencia de la relación R_L para el lenguaje L_3, dando una expresión regular para cada una de ellas. Justifique su razonamiento.

Como el autómata es mínimo, por el Teorema de Myhill-Nerode, la relación R_M coincide con R_L. Por lo tanto, calculo las clases de equivalencia de R_M para el autómata.

$X_4 = \varepsilon | X_3b | X_2a \Rightarrow X_4 = \varepsilon | X_4aab | (X_4ab | X_4ba)a = \varepsilon | X_4(aab | aba | baa) \Rightarrow X_4 = (aab | aba | baa)^*$
$X_3 = X_1a \Rightarrow X_3 = X_4aa \Rightarrow X_3 = (aab | aba | baa)^*aa$
$X_2 = X_1b | X_0a \Rightarrow X_2 = X_4ab | X_4ba \Rightarrow X_2 = (aab | aba | baa)^*ab | (aab | aba | baa)^*ba$
$X_1 = X_4a \Rightarrow X_1 = (aab | aba | baa)^*a$
$X_0 = X_4b \Rightarrow X_0 = (aab | aba | baa)^*b$
$X_p = (X_0b | X_2b | X_3b)(a|b)^*$

c) Dé una expresión regular para el lenguaje L_3. Justifique.

La expresión de q_4, que es el único estado final, es la que denota al lenguaje.

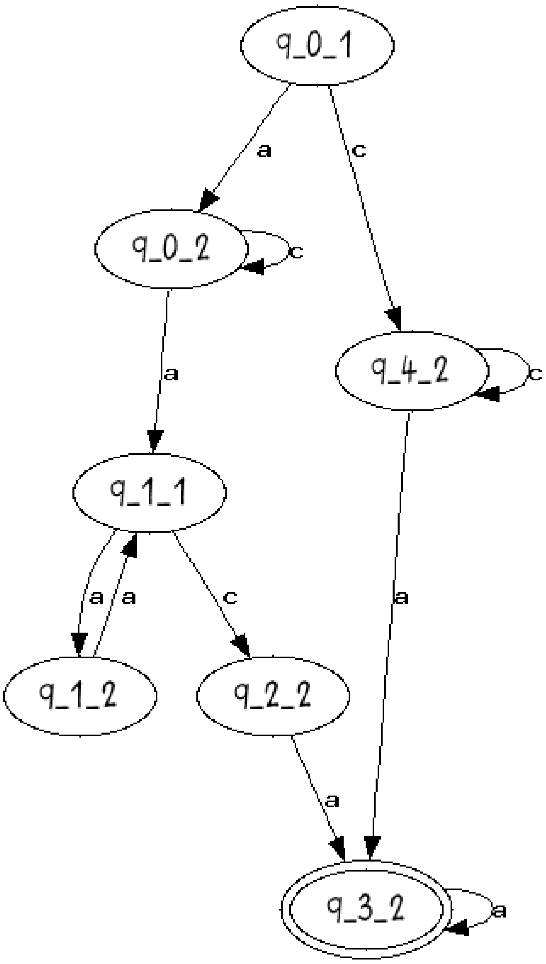
d) ¿Se cumple que i) *ba* R_L *abaab*
ii) *aab* R_L *aabb* ? Justifique

i) $\hat{\delta}(q_4,ba)=q_2$ y $\hat{\delta}(q_4,abaab)=q_2$, por lo tanto están en la misma clase de R_M (del autómata mínimo) y por ende de R_L. Por lo tanto, están relacionadas.
ii) $\hat{\delta}(q_4,aab)=q_4$ y $\hat{\delta}(q_4,aabb)=q_0$, por lo tanto están distintas clases de R_M (del autómata mínimo) y por ende de R_L. Por lo tanto, no están relacionadas.

<u>Nota:</u> el $\hat{\delta}$ va desde q_4 porque en el dibujo quedó q_4 como estado inicial; habitualmente el inicial lo dibujamos con q_0.

Ejercicio 4

a) Construya un AFD de dos cintas que acepte a $L_a = \{ (a^m c, c^k a^n) \ / \ m,k \geq 0 \ n>m\}$

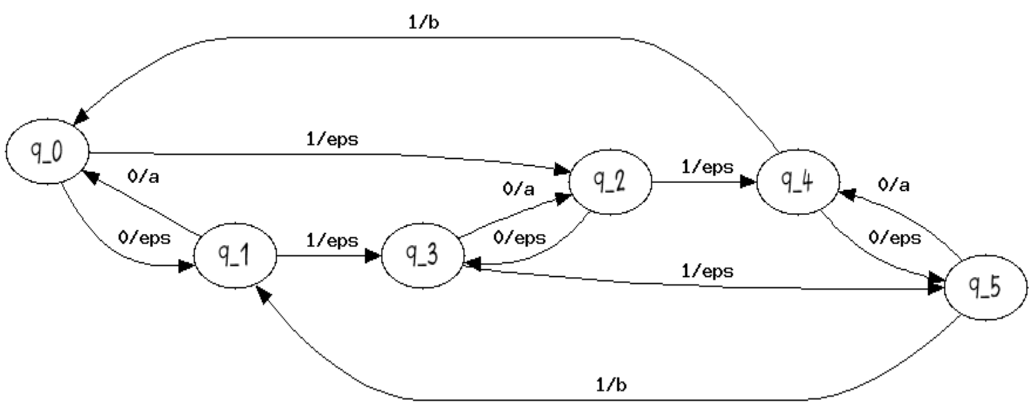


b) Construya una máquina de Mealy M: $(Q,\Sigma,\Lambda,\delta,\lambda,q_0)$, con $\Sigma=\{0,1\}$, $\Lambda=\{a,b\}$; tal que dada una entrada *x* emita una salida *y* que verifique:

cant_a(y) = piso(cant_0(x)/2)
cant_b(y) = piso(cant_1(x)/3)

Ejemplos:

Entrada	Salida
00011101111	**abab**
110000111	**aab**
00111111000	**abba**



donde, siendo *x* la entrada:

q_1 significa: $|x|_0 \mod 2 = 1$; $|x|_1 \mod 3 = 0$

Ejercicio 5

Indique si los siguientes lenguaje son regulares. Justifique.

a) $L_5 = \{ a^m c^{2k} a^n \ / \ n>m\geq 0, k>0\}$

El lenguaje no es regular. Para demostrarlo, utilizamos el contrarrecíproco del Pumping Lemma. Sea N la constante del PL, y sea $z= a^N cca^{N+1}$; notar que cumple $|z|>N$

Consideramos todas las descomposiciones posibles para z = uvw que cumplan:
$|uv| \leq N$ y $|v|\geq 1$

Se puede observar que como los N primeros símbolos de la z elegida contienen solo a's, la única familia de descomposiciones posible es:

i) $u=a^p$ $p+j \leq N$
$v=a^j$ $j \geq 1$
$w= a^{N-p-j} cca^{N+1}$

$z_i= a^{N+(i-1)j} cca^N$ En este caso, para i=2 z_2 quedaría $a^{N+j} cca^{N+1}$ pero como $j \geq 1$, la cantidad de a's antes de las c's es mayor o igual a la cantidad de a's que vienen luego de las c's.
Por lo tanto z_2 no pertenece al lenguaje.

Como se dijo antes, es la única familia a analizar bajo los supuestos $|uv| \leq N$ y $|v|\geq 1$
Con lo cual, como esas son todas las descomposiciones posibles, por el CR del PL L_5 no es un lenguaje regular.

b) $L_6 = \{ a^m c^{2k} a^n \ / \ n>0, m\geq 0, k>0\}$

El lenguaje es regular. La siguiente expresión regular lo describe:

a*cc(cc)*aa*