Teoría de Lenguajes
Soluciones
1er. Parcial – Curso 2018

Ejercicio 1.- [Evaluación individual del obligatorio]

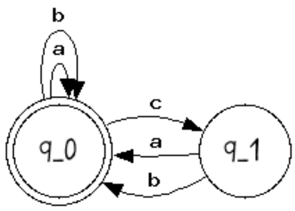
a)
p = re.compile(r'r\S*') ==> regular
p = re.compile(r'e\w*') ==> e
p = re.compile(r'e\w*\.$') ==> expressions.
p = re.compile(r'l\w*$', re.MULTILINE) ==> language
p = re.compile(r'R\w*', re.I) ==> regular
p = re.compile(r't.*?N', re.I) ==> The regular expression

b)
p = re.compile(r'^s\S*', re.I | re.MULTILINE) ==> ['So']
p = re.compile(r'^.*?[SMAL]', re.I | re.MULTILINE | re.DOTALL) ==> ['The regul', ' is', 'S']
p = re.compile(r'res\w*', re.MULTILINE |re.DOTALL) ==> ['ression', 'restricted', 'ressions']
p = re.compile(r'(l\S*|r\S*|e\S*)$', re.MULTILINE |re.DOTALL) ==> ['language', 'restricted,', 'expressions.']
p = re.compile(r'\b\w{1,2}\b') ==> ['is', 'So', 'be']
p = re.compile(r'\w*n\b') ==> ['expression', 'can']

Ejercicio 2.-

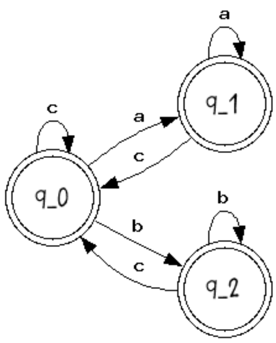
•$L_a = \{ x \,/\, x \in \Sigma^*$ y toda **c** es seguida de una **a** o **b** $\}$

Es Regular. Se construye el siguiente AFD



•$L_b = \{ x \,/\, x \in \Sigma^*$ y en x no ocurre ni la secuencia **ba** ni la **ab** $\}$

Es Regular. Se construye el siguiente AFD



•$L_c = L_a \cap L_b$

Es Regular porque la intersección de lenguajes regulares es regular.

Nota: Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas.
Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

•L_d = { x / $x \in \Sigma^*$ y x es de la forma $a^p bc^m$, m>p>0 }

El lenguaje L_d **NO es regular**. Para demostrarlo, utilizamos el contrarrecíproco del Pumping Lemma. Sea N la constante del PL, y sea $z= a^N bc^{N+1}$; notar que cumple $|z| \geq N$
Consideramos todas las descomposiciones posibles para z = uvw que cumplan:
$|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$

i) $u=a^j$ $\quad j+p \leq N$
$v= a^p$ $\quad p \geq 1$
$w= a^{N-j-p} bc^{N+1}$

$z_i= a^j a^{ip} a^{N-j-p} bc^{N+1} = a^{N+(i-1)p} bc^{N+1}$

Tomando i=2 $z_2 = a^{N+p} bc^{N+1}$ y se cumple que $N+p \geq N+1$ (porque $p \geq 1$), con lo cual se cumple que la cantidad de a's es mayor o igual que la cantidad de c's. Por lo tanto z_2 no pertenece al lenguaje L_d.
Esta es la única familia a analizar bajo los supuestos $|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$
Cualquier otra descomposición falla justamente en alguna de esas condiciones, con lo cual, por el CR del PL **L_d NO es un lenguaje regular**.

•L_e = { x / $x \in \Sigma^*$ y x es de la forma $a^p bc^m$, $0 \leq m \leq p$ }

El lenguaje L_e **NO es regular**. Para demostrarlo, utilizamos el contrarrecíproco del Pumping Lemma. Sea N la constante del PL, y sea $z= a^N bc^N$; notar que cumple $|z| \geq N$
Consideramos todas las descomposiciones posibles para z = uvw que cumplan:
$|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$

i) $u=a^j$ $\quad j+p \leq N$
$v= a^p$ $\quad p \geq 1$
$w= a^{N-j-p} bc^N$

$z_i= a^j a^{ip} a^{N-p} bc^N = a^{N+(i-1)p} bc^N$

Tomando i=0 $z_0 = a^{N-p} bc^N$ y se cumple que $N - p < N$ (porque $p \geq 1$), con lo cual se cumple que la cantidad de a's es menor que la cantidad de c's. Por lo tanto z_0 no pertenece al lenguaje L_e.
Esta es la única familia a analizar bajo los supuestos $|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$
Cualquier otra descomposición falla justamente en alguna de esas condiciones, con lo cual, por el CR del PL **L_e NO es un lenguaje regular**.

•$L_f = L_d \cup L_e$

Es Regular, ya que existe la expresión regular **aa*bc* | b** que define el lenguaje de la unión.

Ejercicio 3.-

Sea un AFND-ε M_3 = ($\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\},\{a,b\}, \delta,q_0,\{q_4\}$) donde δ está dada por :

	a	b	ε
q_0	$\{q_1,q_2\}$	$\{q_1,q_3\}$	{}
q_1	{}	{}	$\{q_0\}$
q_2	$\{q_4\}$	{}	{}
q_3	{}	$\{q_4\}$	{}
q_4	{}	{}	{}

a) Definición de la relación R_L

$x\ R_L\ y$ si $\forall z \in \Sigma^*$, $xz \in L \wedge yz \in L$
$\vee$ $xz \notin L \wedge yz \notin L$

b) Pasaje AFND-eps → AFND y se aplica δ'(q,a) = ε-clausura(δ(ε-clausura(q),a))

ε-clausura({q0}) = {q0}
ε-clausura({q1}) = {q0,q1}
ε-clausura({q2}) = {q2}
ε-clausura({q3}) = {q3}
ε-clausura({q4}) = {q4}

δ'	***a***	***b***
q0	{q0,q1,q2}	{q0,q1,q3}
q1	{q0,q1,q2}	{q0,q1,q3}
q2	{q4}	{ }
q3	{ }	{q4}
q4	{ }	{ }

F'={q4}

Pasaje AFND → AFD

	δ''	***a***	***b***
p0	[q0]	[q0,q1,q2]	[q0,q1,q3]
p1	[q0,q1,q2]	[q0,q1,q2,q4]	[q0,q1,q3]
p2	[q0,q1,q3]	[q0,q1,q2]	[q0,q1,q3,q4]
p3	[q0,q1,q2,q4]	[q0,q1,q2,q4]	[q0,q1,q3]
p4	[q0,q1,q3,q4]	[q0,q1,q2]	[q0,q1,q3,q4]

F''={p3,p4}

Minimización

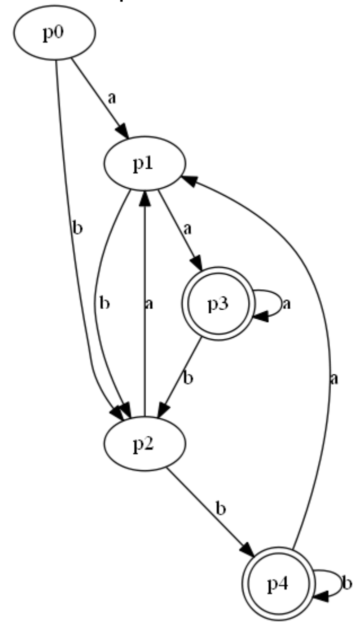
Π_0 [p0,p1,p2] [p3,p4]
Π_1 [p0] [p1] [p2] [p3] [p4]

AFD Mínimo

δ	***a***	***b***
p0	p1	p2
p1	p3	p2
p2	p1	p4
p3	p3	p2
p4	p1	p4

Estados finales {p3, p4}

Se observa que el AFD mínimo es completo.



La cantidad de clases de equivalencia de la relación R_{L3} coincide con el número de estados del AFD mínimo completo, por lo que resulta que hay **cinco clases** definidas por R_{L3}.

c) Se plantean las ecuaciones características asociadas a cada estado del AFD mínimo, cuyas incógnitas son los conjuntos de palabras (tiras) que permiten pasar desde cada estado a un estado final del AFD.
En la resolución se utiliza el Lema de Arden: la única solución a la ecuación

$X = rX \mid s$ es: $X = r^*s$ si $\varepsilon \notin L(r)$.

$X_0 = aX_1 \mid b X_2$
$X_1 = aX_3 \mid bX_2$
$X_2 = aX_1 \mid bX_4$
$X_3 = aX_3 \mid bX_2 \mid \varepsilon$
$X_4 = aX_1 \mid bX_4 \mid \varepsilon$

Aplicando Arden a las dos últimas ecuaciones resulta:
$X_3 = a^*(bX_2 \mid \varepsilon)$
$X_4 = b^*(aX_1 \mid \varepsilon)$

Sustituyendo X_3 y X_4 en las ecuaciones para X_1 y X_2 resulta:

X_1 = a*bX_2 | aa*
X_2 = b*aX_1 | bb*

Sustituyendo ahora la expresión para X_2 en la ecuación de X_1 y recíprocamente quedan:

X_1 = a*bb*aX_1 | a*bbb* | aa*
X_2 = b*aa*bX_2 | b*aaa* | bb*

Aplicando Arden nuevamente obtenemos

X_1 = (a*bb*a)*(a*bbb*| aa*)
X_2 = (b*aa*b)*(b*aaa*| bb*)

Finalmente, sustituyendo las E.R. para X_1 y X_2 en la ecuación para X_0 se llega a

$\mathbf{r_3}$ = X_0 = a(a*b b*a)*(a*bbb*| aa*) | b(b*aa*b)*(b*aaa* | bb*)

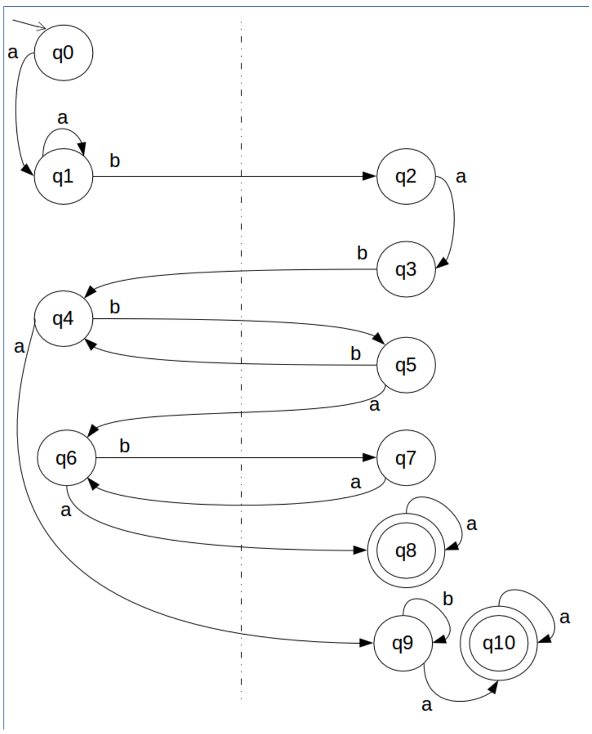
d)

i) *ba* R_{L3} *bba* SI se cumple; observamos que ambas tiras partiendo del estado inicial p0 llegan al mismo estado p1 en el AFD mínimo, y por lo tanto están en la misma clase de la relación R_{M3}, cuyas clases coinciden con las de R_{L3} en el AFD mínimo.

ii) *aaabb* R_{L3} *abaa* NO se cumple*;* si concatenamos **b** al final de cada una de las tiras obtenemos que *aaabbb* $\in$ L_3 mientras que *abaab* $\notin$ L_3.

Ejercicio 4.-

a)



Nota: Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas.
Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

b)