

Teoría de Lenguajes

Solución 2do. Parcial – Curso 2015

Ejercicio 1 [Evaluación individual del obligatorio]

a)

- i) Sirve
- ii) No sirve, reconoce tiras de la forma: $a + + b$
- iii) Sirve
- iv) No sirve, no reconoce tiras de la forma: $a * b * c$

b)

- i) Devuelve error sintáctico.
Asumiendo que la entrada era correcta, como sucedía con los ejemplos de prueba del laboratorio, lo que se debía corregir era la especificación en JCUP, seguramente tenía un error.

c)

- iii)

Ejercicio 2

Dado el siguiente lenguaje:

$$L_2 = \{ \text{tiras de la forma } w_0w_1\dots w_N\#x_0x_1\dots x_N\#w_0x_0w_1x_1\dots w_Nx_N \ ; \ w_i, x_i \in \{0,1\} \}$$

- a) Clasifique L_2 según la Jerarquía de Chomsky. Justifique.

Este lenguaje es recursivamente enumerable, y no es un lenguaje libre de contexto, lo cual se demuestra aplicando el contra-recíproco del Pumping Lema para lenguajes libres de contexto. Tomamos la tira cuyo $W = 0^N$ y $X = 0^N$ y nos queda $0^N\#0^N\#0^{2N}$ (notar que la primera y segunda secuencia de "0" son del mismo largo y que es la mitad del largo de la tercera secuencia de "0")

Analizamos las descomposiciones de $z = uvwxy$ y tomamos aquellas familias que cumplen las condiciones $|vx| \geq 1$ y $|vwx| \leq N$

familias	0^N	#	0^N	#	0^{2N}
1	v x				
2			v x		
3					v x
4	v x	x	x		
5	v		x		
6	v	v	v x		
7			v x	x	x
8			v		x
9			v	v	v x

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Familia 1:

$$\begin{aligned} u &= 0^p \\ v &= 0^q & q+s &\geq 1 \\ w &= 0^r & q+r+s &\leq N \\ x &= 0^s \\ y &= 0^{N-p-q-r-s} \# 0^N \# 0^{2N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_i &= 0^{q(i-1)} 0^{s(i-1)} \# 0^N \# 0^{2N} \\ z_{2N+1} &= 0^{q2N} 0^{s(2N)} \# 0^N \# 0^{2N} = 0^{(q+s)2N} \# 0^N \# 0^{2N} \end{aligned}$$

luego como $(q+s)2N \geq 2N$, haciendo que el largo de la primera secuencia de 0's sea estrictamente mayor que el largo de la segunda tira de 0's (no se cumple nunca que sean iguales), entonces $z_{2N+1} \notin L_2$

Familia 2:

Análogo a la familia 1 para z_{2N+1} y tomando adecuadamente la descomposición de z , el largo de la segunda secuencia de "0", es mayor o igual a $2N$, por lo tanto $z_{2N+1} \notin L_2$

Familia 3:

$$\begin{aligned} u &= 0^N \# 0^N \# 0^{2N-p-q-r-s} \\ v &= 0^p & p+r &\geq 1 \\ w &= 0^q & p+q+r &\leq N \\ x &= 0^r \\ y &= 0^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_i &= 0^N \# 0^N \# 0^{2N+(p+r)(i-1)} \\ z_3 &= 0^N \# 0^N \# 0^{2N+2(p+r)} \end{aligned}$$

luego como $2N + 2(p+r) \geq 2N + 2$ el largo de la tercera secuencia de "0" es estrictamente mayor al doble del largo de la primera y la segunda (no se cumple que sea exactamente el doble), entonces $z_3 \notin L_2$

Familia 4:

$$\begin{aligned} u &= 0^{N-p-q-r} \\ v &= 0^p & p+r+1+t &\geq 1 \\ w &= 0^q & p+q+r+1+t &\leq N \\ x &= 0^r \# 0^t \\ y &= 0^{N-t} \# 0^{2N} \end{aligned}$$

$$z_i = 0^{N-p-q-r} (0^p)^i 0^q (0^r \# 0^t)^i 0^{N-t} \# 0^{2N}$$

luego z_0 tiene solo un "#", por lo tanto $z_0 \notin L_2$

Familias 6 , 7 y 9:

Son análogas a la familia 4, eligiendo $i=0$, z_0 queda con un solo "#", por lo tanto $z_0 \notin L_2$

Familia 5:

$$\begin{aligned} u &= 0^{N-p-q} \\ v &= 0^p & p+r &\geq 1 \end{aligned}$$

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

$$\begin{aligned} w &= 0^q \# 0^t & p+q+1+t+r &\leq N \\ x &= 0^r \\ y &= 0^{N-r-t} \# 0^{2N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_i &= 0^{N-p-q} 0^{p_i} 0^q \# 0^t 0^{r_i} 0^{N-r-t} \# 0^{2N} \\ &= 0^{N+p(i-1)} \# 0^{N+r(i-1)} \# 0^{2N} \end{aligned}$$

$$z_2 = 0^{N+p} \# 0^{N+r} \# 0^{2N}$$

Si $r \geq 1$:

$N + r \geq N + 1$, haciendo que el largo de la segunda secuencia de "0" sea estrictamente mayor que la mitad del largo de la tercera secuencia de "0", por lo tanto $z_2 \notin L_2$

Si $p \geq 1$:

$N + p \geq N + 1$, haciendo que el largo de la primera secuencia de "0" sea estrictamente mayor que la mitad del largo de la tercera secuencia de "0", por lo tanto $z_2 \notin L_2$

Familia 8:

Es análoga a la anterior, pero se trabaja sobre la segunda (0^N) y tercera (0^{2N}) secuencia de ceros.

Estas son todas las descomposiciones que cumplen las condiciones $|vx| \geq 1$ y $|vwx| \leq N$ y para cada una encontramos un i / $z_i \notin L_2$, entonces podemos afirmar que **L_2 no es Libre de Contexto.**

Para justificar que **L_2 es R.E.**, se construye en b) una Gramática Irrestriccta

b) Construya una gramática G_2 / $L_2 = L(G_2)$.

// Agrega la marca de comienzo P, que se moverá a la derecha al terminar de generar y ordenar, y cambiará las variables M y N por #
 $S \rightarrow PS'MN$

// Genera toda la tira W y X, y sus terminales intercalados
// Los terminales de W se generan directamente (0,1)
// Los terminales de X se generan con las variables C y U ($C = 0, U = 1$)
// Para cada combinación $WiXi$ de 0 y 1, se genera una variable que luego generará los terminales intercalados

// $W = 00, X = 01, Y = 10, Z = 11$
 $S' \rightarrow 0CWS' \mid 0UXS' \mid 1CYS' \mid 1UZS' \mid$
 $0CW \mid 0UX \mid 1CY \mid 1UZ$

// Mueve las variables C y U a la derecha, luego de los 0 y 1
 $C0 \rightarrow 0C$
 $C1 \rightarrow 1C$
 $U0 \rightarrow 0U$
 $U1 \rightarrow 1U$

// Mueve las variables W, X, Y, Z a la derecha, luego de 0, 1, C, U
 $W0 \rightarrow 0W$
 $W1 \rightarrow 1W$
 $WC \rightarrow CW$

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

WU → UW

X0 → 0X

X1 → 1X

XC → CX

XU → UX

Y0 → 0Y

Y1 → 1Y

YC → CY

YU → UY

Z0 → 0Z

Z1 → 1Z

ZC → CZ

ZU → UZ

// Mueve las variables W, X, Y, Z (hacia la derecha), pasando por la primera marca (M) sin hacer cambios

WM → MW

XM → MX

YM → MY

ZM → MZ

// Mueve las variables C y U (hacia la derecha), pasando por la primera marca (M), generando los 0 y 1 correspondientes a la tira X

CM → M0

UM → M1

// Mueve las variables W, X, Y, Z (hacia la derecha), pasando por la segunda marca (N), generando los terminales intercalados

WN → N00

XN → N01

YN → N10

ZN → N11

// Mueve la marca del principio P hacia la derecha, cambiando las variables M y N por #

P0 → 0P

P1 → 1P

PM → #P

PN → #

Otra posible solución:

S → CS'MF

S' → WX S' | WX

W → 0A | 1B

X → D | E ; permite generar algo de la forma, C 0AE 1BD 1BE... M F

AM → MA ; A sólo genera al final

AF → F0

A1 → 1A

A0 → 0A

BM → MB ; B sólo genera al final

BF → F1

B1 → 1B

B0 → 0B

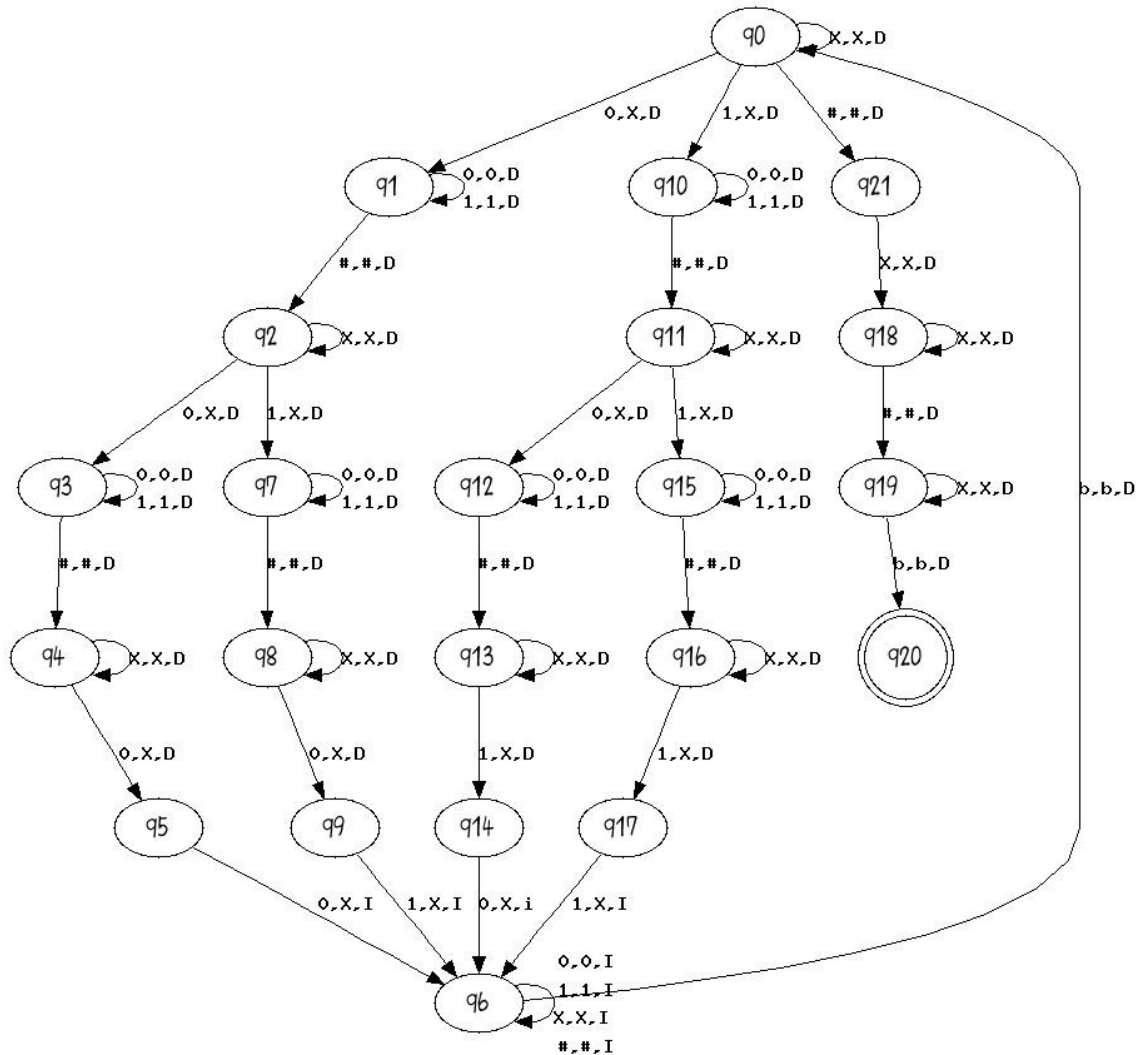
Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

DM → M0D ; D genera al medio y al final
DF → F0
D1 → 1D
D0 → 0D

EM → M1E ; E genera al medio y al final
EF → F1
E1 → 1E
E0 → 0E

CM → #C
CF → #
C1 → 1C
C0 → 0C

c) Construya un autómata $M_2 / L_2 = L(M_2)$.



Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 3

Dados los siguientes lenguajes:

$$L_a = \{ x / x \in \{0,1\}^* \text{ donde } x \text{ es de la forma } (01)^p 0^t 1^m \text{ con } p, m > 0 ; t \geq 0 \}$$

$$L_b = \{ x / x \in \{0,1\}^* \text{ donde } x \text{ es de la forma } (01)^p 0^t 1^m \text{ con } p > m > 0 ; t \geq 0 \}$$

- a) Construya gramáticas simplificadas G_a y G_b / $L_a = L(G_a)$ y $L_b = L(G_b)$.
Deberá justificar porque las gramáticas propuestas están simplificadas.

G_a sería una gramática con las siguientes producciones:

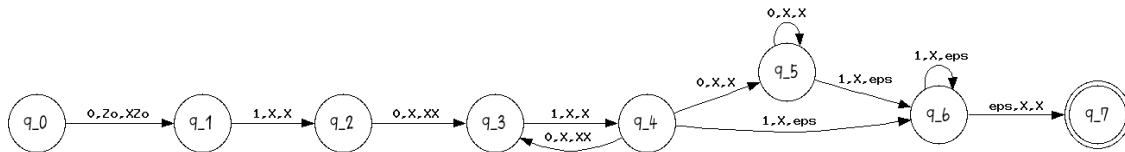
$$\begin{aligned} S &\rightarrow 01S \mid 01A \\ A &\rightarrow 0A \mid 1B \mid 1 \\ B &\rightarrow 1B \mid 1 \end{aligned}$$

G_b sería una gramática con las siguientes producciones

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 01S \mid 01A \\ A &\rightarrow 01A1 \mid 01B1 \mid 011 \\ B &\rightarrow 0B \mid 0 \end{aligned}$$

Ambas gramáticas están ya simplificadas, puesto que no contienen producciones epsilon ni unitarias; además, todos sus variables son útiles $\{S, A, B\}$

- b) Construya un autómata M_b / $L_b = L(M_b)$. ¿Es determinista? Justifique. Si fuera NO determinista, indique todos los casos donde se produce dicho NO determinismo.



Es APD NO Determinista.

Se observa el no determinismo en las siguientes transiciones:

$$\delta(q_4, 0, X) \{(q_3, XX), (q_5, X)\}$$

$$\delta(q_6, 1, X) \{(q_6, eps)\} \text{ pero existe } \delta(q_6, eps, X) \{(q_7, X)\}$$

Ejercicio 4

Decir si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Justifique.

- a) Si L_1 es recursivamente enumerable, entonces es infinito

Falso: Como no se especifica características de L_1 (sólo que es RE), L_1 podría ser por ejemplo el Lenguaje que contiene solamente $\{a\}$, que es un lenguaje *finito*, regular y por jerarquía de Chomsky RE.

- b) Si L_2 es recursivamente enumerable pero NO libre de contexto y L_3 es libre de contexto pero NO regular, entonces $L_4 = L_2 \cap L_3 = \emptyset$

Falso: Alcanza con tomar lenguajes que contengan la tira ε en ambos para que su intersección sea justamente esa tira.

A modo de contraejemplo: $L_2 = \{a^k b^k c^k, k \geq 0\}$ y $L_3 = \{a^k b^k, k \geq 0\}$