

Teoría de Lenguajes

2do. Parcial – Curso 2017

Soluciones

Consideraciones generales

- i) Escriba nombre y C.I. en todas las hojas.
- ii) Numere todas las hojas.
- iii) En la primera hoja, indique el total de hojas.
- iv) Comience cada ejercicio en una hoja nueva.
- v) Utilice las hojas de un solo lado.
- vi) Entregue los ejercicios en orden.

Ejercicio 1 [Evaluación individual del obligatorio]

a)

- i) Lo que está entre [] es opcional
- ii) Entre comillas.
- iii) Entre comillas.

b)

i) No sirve porque la lista de identificadores va a ser siempre de largo 2.

ii) Es correcta.

lii) No sirve porque obligamos a que las constantes y números siempre tengan un más o un menos adelante. Además el array type tiene un solo tipo cuando puede tener n.

Ejercicio 2

Sean los siguientes lenguajes sobre un mismo alfabeto Σ . Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

a) L_1 Libre de Contexto no Regular y L_2 Libre de Contexto no vacío. Entonces $L_1 \cap L_2$ no es Regular.

Falso:

Sean $L_1 = \{a^n b^n / n \geq 0\}$ Libre de Contexto no Regular

y $L_2 = \{b^n a^n / n \geq 0\}$ Libre de Contexto no vacío

Sin embargo $L_1 \cap L_2 = \{\epsilon\}$ es Regular

b) L_3 Recursivamente Enumerable no Libre de Contexto y L_4 Libre de Contexto no Regular. Entonces $L_3 \cap L_4$ es Libre de Contexto.

Falso:

Sean $L_3 = \{a^n b^n c^n / n \geq 0\}$ R.E. no Libre de Contexto

y $L_4 = \{a^n b^n c^m / n \geq 0 \text{ y } m \geq 0\}$ Libre de Contexto

Sin embargo $L_3 \cap L_4 = \{a^n b^n c^n / n \geq 0\}$ R.E. no Libre de Contexto

Nota: $L_4 = \{a^n b^n c^m / n \geq 0 \text{ y } m \geq 0\}$ es Libre de Contexto dado que existe la siguiente gramática que lo genera:

$S \rightarrow R T$

$R \rightarrow a R b$

$T \rightarrow c T \mid \epsilon$

L_4 no es Regular dado que si aplicamos el homomorfismo $h / h(a) = a, h(b) = b$ y $h(c) = \epsilon$. $h(L_4) = \{a^n b^n c^m / n \geq 0\}$ L.C. no regular. Y si L_4 fuera regular, $h(L_4)$ debería haber sido regular por propiedad de clausura de los homomorfismos sobre los lenguajes regulares.

c) L_5 Finito (no vacío) y L_6 Recursivamente Enumerable no Libre de Contexto. Entonces $L_5 \cap L_6$ es Libre de Contexto no Regular.

Falso:

Si L_5 es Finito (no vacío), entonces $L_5 \cap L_6$ es finito, y por lo tanto Regular, no pudiendo ser Libre de Contexto pero no Regular.

d) $L_7 \cap L_8$ es Libre de Contexto no vacío. Entonces L_7 y L_8 son ambos Libres de Contexto.

Falso:

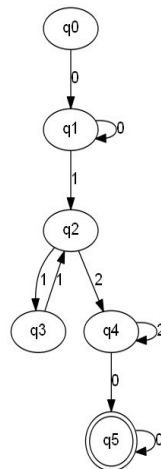
Sean por ejemplo $L_7 = \{a^n b^n c^n, n > 0\}$ y sea $L_8 = \{abc\}$. Luego, $L_7 \cap L_8 = \{abc\}$ que es Regular y por jerarquía de Chomsky es Libre de Contexto. Sin embargo, L_7 no es Libre de Contexto.

Ejercicio 3

a) $L_a = \{0^k 1^{j+1} 2^t 0^r, \text{ donde } r > 0, j \text{ par}, k, t \geq 1\}$

L_a es un lenguaje regular, siendo $L_b = L(r)$ con $r = 00^*1(11)^*22^*00^*$

El siguiente AFD genera el lenguaje L_a



A partir de este AFD y a partir del algoritmo correspondiente que identifica estados con variables y transiciones con producciones se construye la gramática lineal derecha $G_a / L_a = L(G_a)$.

$G_a = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{0, 1, 2\}, P, S)$

con P formado por las siguientes producciones: {

$S \rightarrow 0A$
$A \rightarrow 0A 1B$
$B \rightarrow 1C 2D$
$C \rightarrow 1B$
$D \rightarrow 2D 0E 0$
$E \rightarrow 0E 0$

}

G_a está simplificada porque:

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

- 1) No tiene producciones- ϵ
- 2) No tiene producciones unitarias
- 3) Todas las variables son alcanzables desde S (por ser construida a partir de un AFD en el que todos los estados son alcanzables desde el estado inicial)
- 4) Todas las variables son positivas (porque desde cada estado se alcanza el estado de aceptación del AFD)

$$L_b = \{ 0^k 1^{j+1} 2^t 0^r, \text{ donde } r=j/2, j \text{ par}, k, t \geq 1 \}$$

L_b es un lenguaje libre de contexto no regular (no se hace el PL para Lenguajes Regulares, ya que no se exigía)

Se dará una gramática independiente de contexto simplificada G_b que genera L_b .

Notar que las tiras de L_b pueden expresarse como $x = 0^k 1(11)^n 2^t 0^n$, con $k, t \geq 1$ y $n \geq 0$

Esto sugiere la gramática $G_b = (\{S, A, B, C\}, \{0, 1, 2\}, P, S)$

con P formado por las siguientes producciones: $\{ S \rightarrow AB|AC$

$A \rightarrow 0A|01$

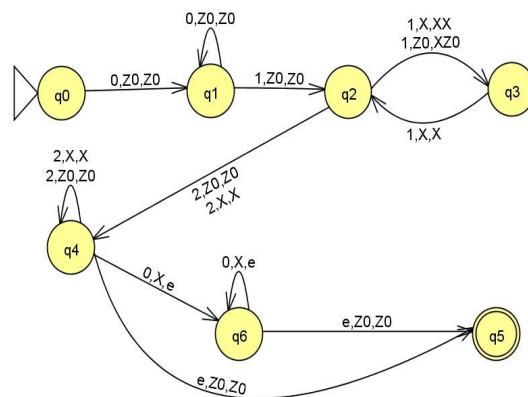
$B \rightarrow 11B0|11C0$

$C \rightarrow 2C|2 \quad \}$

G_b es simplificada porque:

- 1) No tiene producciones- ϵ
- 2) No tiene producciones unitarias
- 3) Todas las variables son alcanzables desde S
- 4) Todas las variables son positivas. En el caso de B se tiene por ejemplo la derivación $B \Rightarrow 11C0 \Rightarrow 1120$

c) Se construye $M_3 / L_3 = L(M_3)$



Es un APD NO Determinista, ya que existen las transiciones $\delta(q_4, 2, Z_0)$ y $\delta(q_4, \epsilon, Z_0)$

Ejercicio 4

$$L_4 = \{ x\#y \mid x,y \in \{a,b\}^* \text{ donde } y \in \text{Perm}(x) \}$$

a) **L_4 es un lenguaje recursivamente enumerable no LC.** En la parte (b) se presenta una gramática irrestricta que lo genera y en la (c) una Máquina de Turing que lo reconoce.

Para demostrar que no es LC, se demuestra con el CR del Pumping Lema para lenguajes LC:

Dada N la constante del Pumping Lema, se elige $z = a^N b^N \# a^N b^N$

Las descomposiciones $z = uvwxy$ a estudiar que cumplen $|vwx| \leq N$ y $|vx| \geq 1$ son:

familia	a^N	b^N	#	a^N	b^N
1	$v \ x$				
2	vx	x			
3	v	x			
4	v	$v \ x$			
5		vx			
6		vx	x	x	
7		v		x	
8		v	v	vx	
9				vx	
10				vx	x
11				v	x
12				v	vx
13					vx

Familia 1:

$$u=a^p, v=a^q, w=a^r, x=a^s, y=a^{N-p-q-r-s}b^N\#a^Nb^N$$

$$z_i = a^{N+(q+s)(i-1)}b^N\#a^Nb^N$$

$$\text{Para } i = 0, z_0 = a^{N-(q+s)}b^N\#a^Nb^N$$

Dado que $|vx| \geq 1$, tenemos $|q+s| \geq 1$ por lo que la cantidad de símbolos a la izquierda del $\#$ es menor que la cantidad de símbolos a la derecha.

Por lo cual $z_0 \notin L_4$ ya que no puede ser y una permutación de x al ser de distinto largo.

Las familias 2, 3, 4 y 5 se pueden demostrar con el mismo argumento.

Por otro lado, las familias 9, 10, 11, 12 y 13 se demuestran con un argumento similar pero el problema es que la cantidad de símbolos a la derecha del $\#$ es menor a la cantidad de símbolos de la izquierda.

Familia 6:

$$u=a^Nb^{N-p-q-r}, v=b^p, w=b^q, x=b^r\#a^s, y=a^{N-s}b^N$$

$$z_i = a^Nb^{N+p(i-1)-r}(b^r\#a^s)a^{N-s}b^N$$

$$\text{Para } i = 0, z_0 = a^Nb^{N-p-r}a^{N-s}b^N$$

Le falta el $\#$ por lo que $z_0 \notin L_4$. La familia 8 se demuestra análogamente.

Familia 7:

$$u=a^Nb^{N-p-q}, v=b^p, w=b^q\#a^r, x=a^s, y=a^{N-r-s}b^N$$

$$z_i = a^Nb^{N+p(i-1)}\#a^{N+s(i-1)}b^N$$

$$\text{Para } i = 0, z_0 = a^Nb^{N-p}\#a^{N-s}b^N$$

Dado que $|vx| \geq 1$, tenemos que o $p > 0$ y/o $s > 0$ por lo que la cantidad de b's a la izquierda del $\#$ es menor que la cantidad de b's a la derecha, y/o la cantidad de a's a la izquierda del $\#$ es mayor que la cantidad de a's a la derecha.

Si $p=s > 0$, el argumento es que las cantidades de a's y de b's son diferentes a ambos lados del #.

Por lo tanto $z_0 \notin L_4$ ya que no puede ser y una permutación de x al ser de distinto largo.

Como las planteadas son todas las descomposiciones posibles que cumplen las condiciones $|vwx| \leq N$ y $|vx| \geq 1$, cualquier otra falla en alguna de estas, por el CR del PL, el lenguaje L_4 **NO** es Libre de Contexto.

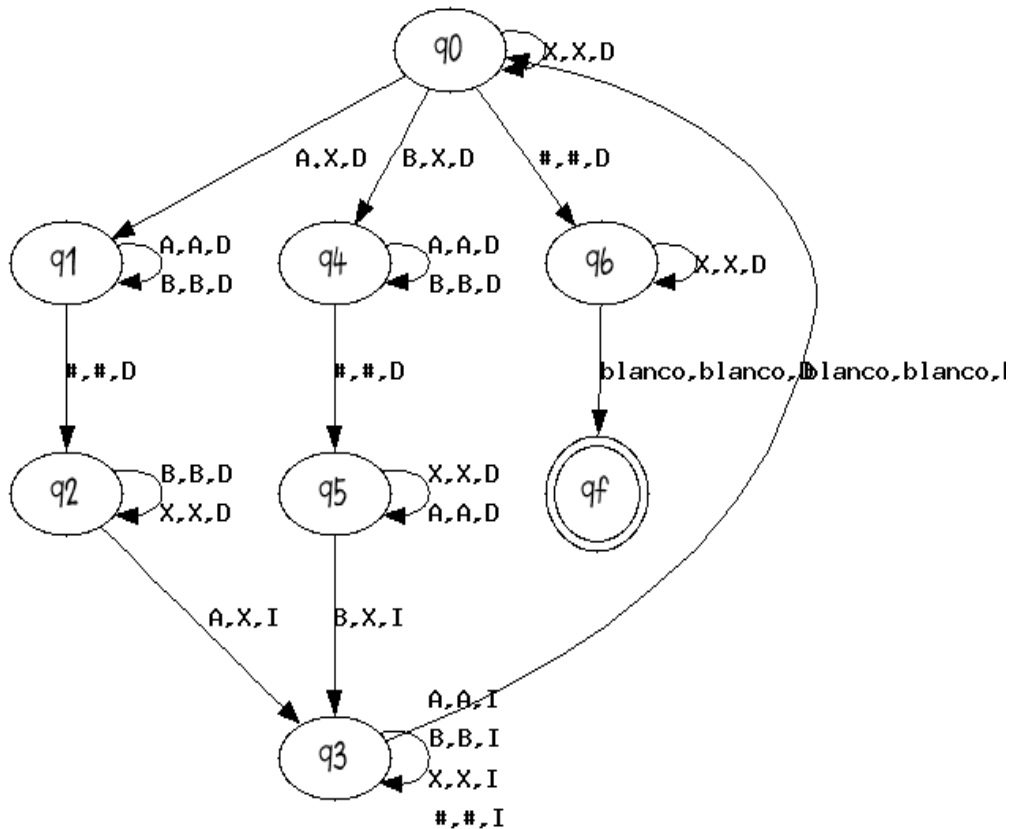
b) A continuación se construye una Gramática Irrestricta $G_4 / L_4 = L(G_4)$

$S \rightarrow aAS \mid bBS \mid \#$
 $Ab \rightarrow bA$
 $Aa \rightarrow aA$
 $AB \rightarrow BA$
 $A\# \rightarrow \#a$
 $Bb \rightarrow bB$
 $Ba \rightarrow ba$
 $BA \rightarrow AB$
 $B\# \rightarrow \#b$

Otra solución podría ser:

$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \#$
 $ab \rightarrow ba$
 $ba \rightarrow ab$

c) Finalmente se construye una MT $M_4 / L_4 = L(M_4)$



Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.