Ejercicio 1.-

Sea NxN = {(0,0) , (0,1) , (1,0) , (0,2) , (1,1) , (2,0) , ... } el conjunto de pares de naturales,

y la función $J : N^2 \rightarrow N$ definida por : $J(m,n) = 1/2(m+n)(m+n+1) + m$

a) Es J inyectiva ? Sobreyectiva ? Demostrar

b) Construir 2 funciones $K:N\rightarrow N$ y $L:N \rightarrow N$, tales que $J^{-1}(n) = (K(n),L(n))$

c) Demostrar que el conjunto de los racionales es numerable

Ejercicio 2.-

Sea Σ un alfabeto finito, Σ^* el conjunto de todas las tiras sobre Σ.

a) Demostrar que Σ^* es un conjunto numerable.

b) Id. **a** con Σ alfabeto infinito numerable

Ejercicio 3.-

Demostrar que los siguientes conjuntos no son numerables :

a) El conjunto de los reales

b) El conjunto potencia de los naturales (el conjunto de todos los subconjuntos de naturales).

Ejercicio 4.-

Definir las siguientes funciones sobre programas P :

mav-var-num : Prog $\rightarrow$ N
computa el máximo número de variable utilizada en un programa

cant-sent : Prog $\rightarrow$ N
computa la cantidad de sentencias de un programa

Ejercicio 5.-

Indicar qué función computa el siguiente programa. Demostrar.

$$
\begin{array}{l}
\text{PROGRAM (X0)} \\
c\left\{
\begin{array}{l}
\text{X1:= SUC(X0);} \\
\text{X1:= PRED(X1);} \\
\text{X2 := 0;} \\
c'\left\{
\begin{array}{l}
\text{WHILE X1} \neq 0 \text{ DO} \\
c''\left\{
\begin{array}{l}
\text{X2 := X0 + X2;} \\
\text{X1:= PRED(X1);}
\end{array}
\right\} \\
\mathit{END}
\end{array}
\right\}
\end{array}
\right\} \\
\text{RESULT (X2)}
\end{array}
$$

Se sugiere utilizar la siguiente abreviación :
Φ (x,y,z) = Ω [X0 $\rightarrow$ x, X1 $\rightarrow$ y, X2 $\rightarrow$z]

Suponer conocido el siguiente resultado :
$\forall$ x,y,z <c'',Φ (x,s(y),z)> $\Rightarrow$ Φ (x,y,z+x)

Ejercicio 6.-

Escribir las siguientes macros en P :

- IF <cond> THEN <sent> ELSE <sent> FI
- $X \ \Theta \ Y \ = \ X - Y \quad \left\{\begin{array}{ll} X - Y & \text{si} \quad X \geq Y \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{array}\right\}$
- X = Y
- X < Y
- X MOD Y
- PRIMO(n) $\rightarrow$ el resultado es el enésimo número primo
- PRIMEXP(m,n) $\rightarrow$ el resultado es el exponente del enésimo número primo en la descomposición en factores primos del número **m**
- ES_PRIMO(n) $\rightarrow$ el resultado es **verdadero** si **n** es primo, **falso** en caso contrario
- DECOD-ASSIGN-VAR(X)
- DECOD-ASSIGN-EXPR(X)
- VALOR-DE (X,σ) - Valor de la variable X en el estado σ
- ACTUALIZAR (X,Y,σ) - Nuevo estado σ [X $\leftarrow$ Y]
- EVAL-ASSIGN(X,σ) - Estado resultante de evaluar la asignación X en σ
- COD-SEC (S1,S2) - Dados los códigos de sentencias S1 y S2 calcula el código de la secuencia. Recordar que S1 puede ser el código de una secuencia.
- LOOP - Ciclo infinito
- SKIP - Ningún efecto

Ejercicio 7.-
Sean los programas :

P ≡ PROGRAM (Xi)
C
RESULT (Xj)

Q ≡ PROGRAM(Xi)
C
Xmax+1 := 0
RESULT(Xj)

Construir una macro en P que dado el código de un programa (P) **p** devuelva el de un par **<p',n>** donde p' es el código de Q y n el número de la sentencia "Xmax+1 := 0".

Ejercicio 8.-
Demostrar que :

$$\rho\,(p,m) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists n \text{ /ejec-sent-num } (p,n,m) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

no es computable.

(ejec-sent-num (p,n,m) = 1 si la sentencia número **m** es ejecutada alguna vez en la computación de Ix(p) con entrada **n**
0 en caso contrario)

Ejercicio 9.-
Demostrar que no existe un programa que pueda decidir si dos programas arbitrarios computan la misma función.

Ejercicio 10.-
Sea $f : N \mathrm{x} N \rightarrow N$ una función total

Decimos que $g : N \rightarrow N$ viene de f por ***miniminalización***, notación $g(x) = \mu\, y(f(x.y)=0)$, cuando :

$$g(x) = y \text{ sii } f(x,y) = 0 \text{ y } \forall\, z < y,\ f(x,z) \neq 0$$

Demostrar que si f es computable, también lo es g.

Ejercicio 11.-
¿ Son computables las siguientes funciones? Demostrar.

a) K(n) = 1 si <Ix(n),n> $\downarrow$
indef. en caso contrario

b) cstop(p,n) = 1 si <Ix(p),n> $\uparrow$
indef. en caso contrario

Ejercicio 12.-

Sea $R = \{ x \in N / (\exists y \in N) < Ix(x),y> \Rightarrow K \}$

a) Demostrar que R es recursivamente enumerable.

b) Es R decidible ? Demostrar.

Ejercicio 13.-

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables ?

a) $\{ x \in N / \Phi_X (x) = 1 \}$

b) $\{ x \in N / \Phi_X \neq id_N \}$

c) $\{x \in N / \Phi_X = id_N \}$

Ejercicio 14.-

Sea *M* un lenguaje similar a *P* , sin la sentencia WHILE y con la sentencia FOR :

```
FOR <var1> = <var2> TO <var3> DO
    <sent>
ENDFOR
```

(en las sentencias del cuerpo del FOR no se modifican las variables del cabezal)

a) Es toda función P-computable M-computable ?

b) Sean $g : N \rightarrow N$ y $h : NxN \rightarrow N$ funciones M-computables.
Mostrar que : $f : N \rightarrow N$, definida por :
$f(0) = g(0)$
$f(n+1) = h(n,f(n))$
es M-computable.

Ejercicio 15.-

Sea $f(p,q) = 1$ si $\forall x\ (< Ix(p),x >\downarrow\ \Rightarrow < Ix(q),x >\downarrow)$ $(dom(\Phi_p) \subseteq dom(\Phi_q))$
indefinido en caso contrario

¿ Es f computable ? Demostrar.

Ejercicio 16.-

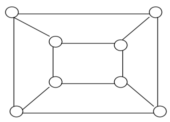
Sea $A \subseteq N$ un conjunto recursivamente enumerable y
$f : N \rightarrowtail N$, una función parcial computable

Demostrar que los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables :

a) $f[A] = \{ x \in N \ / \ (\exists\, y \in A)\ f(y) = x \}$

b) $f^{-1}[A] = \{ x \in N \ / \ f(x) \in A \}$

Ejercicio 1.-
Dado el siguiente grafo :



Determinar si tiene:
a) un circuito hamiltoniano.
b) un cubrimiento de vértices de tamaño 4.
c) i) un 2-clique
ii) un 3-clique.

Definiciones:
- Un circuito hamiltoniano es un circuito que pasa por todos los vértices sin repetir ninguno.
- Un cubrimiento de vértices de tamano ***k*** es un conjunto de ***k*** vértices tal que toda arista tiene por lo menos uno de sus extremos en el conjunto.
- Un ***k-clique*** es un subgrafo con ***k*** vértices *completo* (es decir, entre 2 vértices cualesquiera de él, existe una arista).

Ejercicio 2.-

¿ Es ***NP-completo*** el problema de hallar un circuito hamiltoniano en un grafo tal que en cada nodo inciden exactamente 2 aristas ?

Ejercicio 3.-

Demostrar que el problema del **k-clique** (dado un grafo, ¿contiene un k-clique?) es ***NP-completo*** reduciendo el problema de *"satisfactibilidad"* a él.

Sugerencia:
Sea **F** = $F_1 F_2 ... F_k$ una expresión en FNC (Forma Normal Conjuntiva), donde cada F_i es un factor, o sea un a disyunción de literales ($\mathbf{x_{i1} \mid x_{i2} \mid ... \mid x_{ik}}$) donde $\mathbf{x_{ij}}$ es un literal (variable proposicional simple o negada)
Se construye un grafo no dirigido **G** = (V,E) cuyos vértices son pares de enteros [i,j] . La primera componente del par, representa un factor y la segunda un literal en el factor; o sea que cada vértice del grafo, corresponde a un literal de un factor particular. Las aristas de **G** son los pares (**[i,j] , [l,m]**) tal que $i \neq l$ y $x_{ij} \neq \neg x_{lm}$
Observar que [i,j] y [l,m] son adyacentes en **G**, si corresponden a factores diferentes y es posible asignar valores a las variables en literales x_{ij} y x_{lm} en una forma tal, que ambos literales tienen valor 1.

Ejercicio 4.-

Demostrar que el problema de hallar un cubrimiento de vértices de tamaño ***k*** en un grafo es ***NP-completo***, reduciendo el problema del **k-clique** a él.
Sugerencia:

Dado **G** = (V,E) considere el grafo complementario $\mathbf{G}^c$ = (V , E^c)

Observar que si $S \subseteq V$ es un *k-clique* entonces V - S es un cubrimiento de vértices de $\mathbf{G}^c$.

Ejercicio 5.-

Considere el siguiente problema:
Dado un grafo dirigido **G** = (V,E) y un entero positivo ***k***, ***k*** < |V |, ¿ existe un subconjunto S de V, con |S | < ***k*** y tal que S contiene al menos un vértice de cada ciclo de **G** ?

Demostrar que es ***NP-completo*** reduciendo el problema del cubrimiento de vértices a él.
Sugerencia:

Transformar el grafo **G** en un grafo dirigido que contenga, por cada arista (*u*,*v*) de **G**, una arista de *u* a *v* y otra de *v* a *u*.

Ejercicio 6.-
<u>Problema **A**</u>:

Dado un conjunto de **n** números S = $i_1, i_2, ..., i_n$, determinar si existe una partición de S en dos subconjuntos S_1 y S_2 tales que se cumple:

i) $S_1 \cup S_2 = S$.
ii) $S_i \neq \emptyset$, i = 1,2.
iii) $\sum_{ij \in S_1} ij = \sum_{ij \in S_2} ij$

<u>Problema **B**</u>:

Dadas **m** tareas, cada una de ellas con un tiempo $t_1, t_2, ..., t_m$ asociado y dos procesadores de idénticas características, determinar si existe alguna forma de distribuir las tareas entre ambos procesadores, de forma tal que todas las tareas sean ejecutadas antes de un tiempo límite ***q***.

Se pide:

Sabiendo que el problema **A** es ***NP-completo*** ,demostrar que el problema **B** también lo es.

Ejercicio 7.-

Problema **A**:
Dado **G** = (V,E), *u,v* vértices dados en V.
Determinar si existe un camino hamiltoniano de *u* a *v*.
(Camino hamiltoniano: camino simple que pasa por todos los vértices).

Problema **B**:
Dado **G** = (V,E), costos C(e) $\in$ Z^+ asociados a las aristas *u,v* vértices dados en V.
Determinar si existe un camino simple en **G**, de *u* a *v*, de costo mayor o igual que **k**.

Problema **C**:
Dado **G** = (V,E), costos C(e) $\in$ Z^+ asociados a las aristas *u,v* vértices dados en V.
Determinar si existe un camino simple de costo máximo entre *u* y *v*.

Se pide:
a) Sabiendo que el problema **A** es ***NP-completo*** demuestre que el problema **B** es ***NP-completo***.
b) Suponga usted que encuentra un algoritmo polinómico que resuelve el problema **C**.
¿ Qué conclusiones puede sacar de ello? Justifique su razonamiento.

Ejercicio 8.-

Demostrar que el problema del "Subgrafo común de k aristas" es NP-completo.

Dados 2 grafos G = (V1,E1) H = (V2,E2) y k >= 0,
¿ existen dos subconjuntos E1´ $\subseteq$ E1 y E2´ $\subseteq$ E2, con |E1´| = |E2´| = k, tal que los subgrafos G´ = (V1, E1´) y H´= (V2, E2´) son isomorfos ?
Sugerencia : Recordar el problema del k-clique.