XXVI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS
EMALCA - VENEZUELA 2013

Teoría Ergódica

DE LOS ATRACTORES TOPOLÓGICOS Y ESTADÍSTICOS

Eleonora Catsigeras

Instituto de Matemática y Estadística
"Prof. Ing. Rafael Laguardia" (IMERL)
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Uruguay

eleonora@fing.edu.uy

MÉRIDA, VENEZUELA, 1 AL 7 DE SEPTIEMBRE DE 2013

XXV ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana.

La XXV Escuela Venezolana de Matemáticas recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de Venezuela, el Banco Central de Venezuela, el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA) y Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA).

2010 Mathematics Subject Classification: 37A, 37D, 37C40

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
Rif: G-20004206-0

Teoría Ergódica de los Atractores Topológicos y Estadísticos
Eleonora Catsigeras

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas
Preprensa e impresión: Gráficas Lauki C. A.
Depósito legal If66020136202422
ISBN 978-980-261-144-7
Caracas, Venezuela
2013

Agradecimiento

A las instituciones y personas que organizan y promueven la XXVI Escuela Venezolana de Matemáticas, y especialmente al Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC)

Eleonora Catsigeras [1]
7 de mayo de 2013
Montevideo

[1] Instituto de Matemática y Estadística "Prof. Ing. Rafael Laguardia"(IMERL), Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay. La autora fue también parcialmente financiada por la Comisión Sectorial de Investigación Científica (CSIC) de la Universidad de la República y por la Agencia Nacional de Investigación e Innovación (ANII) de Uruguay.

Prefacio

Este libro expone y complementa los contenidos de un curso breve e intensivo de Teoría Ergódica en la XXVI Escuela Venezolana de Matemática. En los primeros tres capítulos se revisan rápidamente los conceptos y resultados básicos de la teoría ergódica de los sistemas dinámicos. Los últimos tres capítulos constituyen el objetivo principal del curso. Enfoca en las propiedades ergódicas de los atractores topológicos y estadísticos.

Está destinado a estudiantes de cursos de postgrado en Matemática. Pero no requiere conocimientos previos en sistemas dinámicos. Requiere en cambio, como prerrequisitos, algunos conocimientos básicos de topología en espacios métricos, de la teoría de la medida abstracta e integración abstracta, y de geometría diferencial.

Los capítulos 1 y 2 introducen los conceptos y resultados básicos de la teoría ergódica de los sistemas dinámicos discretos: definición y existencia de medidas invariantes y ergódicas, enunciados equivalentes a la ergodicidad, y los enunciados de los teoremas ergódicos de Birkhoff-Khinchin, de Oseledets, y de descomposición ergódica. El capítulo 3, introduce, esencialmente mediante ejemplos, algunosresultados sobre sistemas dinámicos hiperbólicos.

Los capítulos 4, 5 y 6, que son el objetivo principal de este curso, exponen resultados de la teoría topológica y ergódica de los atractores. El capítulo 4 introduce las medidas Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) o físicas. El capítulo 5 introduce las medidas de Gibbs para sistemas suaves, y una reseña breve de la Teoría de Pesin. Finalmente, el capítulo 6 estudia el caso general, no necesariamente diferenciable, y demuestra la existencia de atractores topológicos de Milnor y de atractores estadísticos de Ilyashenko, y la relación entre estos y las medidas "SRB-like" o pseudo-físicas.

Índice general

Capítulo 1

Dinámica medible y topológica

Usaremos definiciones, notación y algunos resultados básicos de teoría de la medida abstracta y de la topología en espacios métricos compactos, cuyos enunciados y demostraciones se pueden encontrar por ejemplo en [26], [80] o [91].

1.1. Dinámica de los automorfismos de medida.

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea $T : X \mapsto X$ una transformación medible, es decir $T^{-1}(A) \in \mathcal{A} \ \ \forall A \in \mathcal{A}$.

Definición 1.1.1. Sistema dinámico discreto
Se llama *sistema dinámico discreto* por iterados de T hacia el futuro a la aplicación que a cada $n \in \mathbb{N}$ le hace corresponder la transformación $T^n : X \mapsto X$ donde $T^n := T \circ T \ldots \circ T \ \ n$ veces, si $n \geq 1$ y $T^0 := id$. Es inmediato chequear que T^n es medible para todo $n \in \mathbb{N}$.
Si además T es bi-medible (i.e. $T : X \mapsto X$ es medible, invertible y su inversa $T^{-1} : X \mapsto X$ es medible), entonces *el sistema dinámico discreto,* por iterados de T hacia el futuro y el pasado, se define como la aplicación que a cada $n \in \mathbb{Z}$ le hace corresponder T^n, donde T^{-1} es la inversa de T y $T^n := (T^{-1})^{|n|} := T^{-1} \circ T^{-1} \circ \ldots T^{-1} \ \ |n|$ veces si $n \leq -1$.

Se observa que si $T^{n+m} = T^n \circ T^m \ \forall \ n, m \in \mathbb{N}$, y además si T es bi-medible se cumple esa propiedad para todos $n, m \in \mathbb{Z}$. Esta propiedad algebraica (cuando T es bi-medible) se llama *propiedad de grupo.* Significa que el sistema dinámico es una acción del grupo de los enteros en el espacio X.

Definición 1.1.2. Se llama *órbita positiva o futura* $o^+(x)$ por el punto $x \in X$, y x se llama estado inicial de la órbita, a la sucesión

$$o^+(x) := \{T^n(x)\}_{n \in N}.$$

Si T es bi-medible se llama órbita negativa o pasada a la sucesión

$$o^-(x) := \{T^{-n}(x)\}_{n \in N}$$

y se llama *órbita* $o(x)$ *bilateral* (o simplemente órbita cuando T es bi-medible) a la sucesión bi-infinita

$$o(x) := \{T^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Cuando T es medible pero no bi-medible, llamamos simplemente órbita a la órbita positiva o futura.

Se observa que $T^{n+m}(x) = T^n(T^m(x))$ y por lo tanto el iterado $T^m(x)$ es el estado inicial de la órbita por x que se obtiene corriendo el instante 0 al que antes era instante m.

Definición 1.1.3. *Punto fijo* (o periódico de período 1) es x_0 tal que $T(x_0) = x_0$. *Punto periódico* es x_0 tal que existe $p \geq 1$ tal que $T^p(x_0) = x_0$. El período es el mínimo $p \geq 1$ que cumple lo anterior. Se observa, a partir de la propiedad de grupo, que si un punto es periódico de período p entonces su órbita está formada por exactamente p puntos.

Definición 1.1.4. Sea T medible en un espacio $(X, \mathcal{A})$. Una medida μ se dice que es *invariante por T, o que T preserva μ,* o se dice también que T es un *automorfismo del espacio de medida* $(X, \mathcal{A}, \mu)$), si

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \ \ \forall A \in \mathcal{A}.$$

Se observa que pueden no existir medidas de probabilidad invariantes para cierta $T : X \mapsto X$ transformación medible dada, como se muestra en el Ejemplo 1.1.7. Sin embargo:

Teorema 1.1.5. Existencia de medidas invariantes.
Sea X un espacio métrico compacto, y sea $T : X \mapsto X$ continua. Entonces existen (usualmente infinitas) *medidas de probabilidad en la sigma-álgebra de Borel, que son invariantes para T.*

Demostraremos este teorema en la siguiente sección 1.2.

Ejercicio 1.1.6. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ u espacios de medida y sea $T : X \mapsto Y$ medible. Se define $T^*\mu$ como la medida en $(Y, \mathcal{B})$ tal que $(T^*\mu)(B) := \mu(T^{-1}(B)) = \nu(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

(a) Encontrar un ejemplo en que $T^*\mu = \nu$ pero $\mu(A) \neq \nu(T(A))$ para algún $A \in \mathcal{A}$ tal que $T(A) \in \mathcal{B}$.
(b) Encontrar un ejemplo en que T sea medible, cumpla $T^*\mu = \nu$ pero T^{-1} no sea medible.
(c) Demostrar que si T es medible, invertible y su inversa T^{-1} es medible, entonces $T^*\mu = \nu$ si y solo si $(T^{-1})^*\nu = \mu$. Cuando se cumplen todas esas condiciones, se dice que T (y por lo tanto también T^{-1}) es un isomorfismo de espacios de medida.

Ejemplo 1.1.7. Sea $T : [0,1] \mapsto [0,1]$ tal que $T(x) = x/2$ si $x \neq 0$ y $T(0) = 1 \neq 0$. Afirmamos que:
No existe medida de probabilidad invariante por T.

Demostración: Si existiera, llamémosla μ. Consideremos la partición de intervalo (0,1] dada por los subintervalos disjuntos dos a dos $A_n = (1/2^{n+1}, 1/2^n]$ para $n \in \mathbb{N}$. Se cumple $T^{-1}(A_n) = A_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Como μ es T invariante se deduce $\mu(A_n) = \mu(A_0)\ \ \forall n \geq 0$. Se tiene $\mu((0,1] = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n) = \sum_{n\geq 0} \mu(A_0) \leq 1$. Luego $\mu(A_0) = 0$, de donde $\mu((0,1]) = 0$ y $\mu(\{0\}) = 1$. Luego $\mu(T^{-1}(\{0\})) = 1$ lo cual es absurdo porque $T^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. $\square$

Ejercicio 1.1.8. Probar que si $T : X \mapsto X$ es medible entonces T preserva la medida μ si y solo si para toda $f \in L^1(\mu)$ se cumple

$$\int f \circ T \, d\mu = \int f \, d\mu$$

Proposición 1.1.9. *Sea $T : X \mapsto X$ una transformación medible en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$. Si μ es una medida finita o sigma-finita y $\mathcal{A}_0$ es un álgebra que genera a $\mathcal{A}$ tal que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)\ \forall A \in \mathcal{A}_0$ entonces μ es invariante por T.*

Demostración: Sea $\nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$ definida para todo $A \in \mathcal{A}$. En la subálgebra $\mathcal{A}_0$ la premedida ν coincide con la premedida μ (ambas restringidas a la subálgebra son premedidas). Como existe una única extensión de una premedida dada en un álgebra a la sigma álgebra generada, entonces $\mu = \nu$ en $\mathcal{A}$. $\square$

Corolario 1.1.10. *Si $T : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^k$ es una transformación Borel medible y μ es una medida σ-finita tal para todo conjunto A que sea unión finita de rectángulos de R^k se cumple $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ entonces μ es invariante por T en toda la sigma-álgebra de Borel.*

1.2. Prueba de existencia de medidas invariantes

En esta sección X denota un espacio métrico compacto y $T : X \mapsto X$ una transformación continua, a menos que se indique lo contrario.

Introduciomos algunas definiciones y resultados del Análisis Funcional:
Notación: El espacio de las funciones continuas y su dual.
Denotamos $C^0(X,\mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas $\psi : X \mapsto \mathbb{R}$ con la topología de la convergencia uniforme en X (inducida por la norma del supremo). Es decir

$$\operatorname{dist}(\psi_1,\psi_2) := \|\psi_1 - \psi_2\|_0,$$

donde se denota

$$\|\psi\|_0 := \max_{x\in X} |\psi(x)| \quad \forall\ \psi \in C^0(X,\mathbb{R}).$$

Denotamos $C^0(X,[0,1])$ al subespacio de funciones continuas $\psi : X \mapsto [0,1]$ que toman valores no negativos ni mayores que 1, con la norma del supremo definida antes (o del máximo, en nuestro caso, pues X es un espacio métrico compacto).
El espacio $C^0(X,[0,1])$ es métrico acotado y cerrado. En efecto, el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas en $C^0(X,[0,1])$ es continua, y pertenece a $C^0(X,[0,1])$). Además $C^0(X,[0,1])$ tiene una base numerable de abiertos, y por lo tanto existe un subconjunto numerable $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ denso en $C^0(X,[0,1])$ (ver por ejemplo [26, Proposition 4.40])
Denotamos como $C^0(X,\mathbb{R})^*$ al dual de $C^0(X,\mathbb{R})$; es decir al conjunto (al que luego dotaremos de una topología adecuada) de todos los operadores lineales

$$\Lambda : C^0(X,\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}.$$

Definición 1.2.1. El espacio $\mathcal{M}$ de las probabilidades y la topología débil* Sea X un espacio métrico compacto. Sea $\mathcal{M}$ el *espacio de todas las medidas de probabilidad.*
En $\mathcal{M}$ introducimos la siguiente topología, llamada *topología débil*:*
Si $\mu_n,\mu \in \mathcal{M}$ decimos que la sucesión $\{\mu_n\}$ es convergente a μ en la topología débil*, es decir

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \mu \quad \text{en } \mathcal{M},$$

cuando:

$$\lim_{n\to+\infty} \int \psi\, d\mu_n = \int \psi\, d\mu \quad \text{en } \mathbb{R} \ \ \forall\ \psi \in C^0(X,\mathbb{R}).$$

Observación 1.2.2. Por definición de convergencia en la topología débil* de una sucesión de medidas de probabilidad, la sucesión converge a la medida μ si y solo si para cada función continua, la sucesión de integrales converge a la integral respecto a μ. Es falso que para todo A boreliano la sucesión de medidas de A converja a $\mu(A)$. En efecto, véase el ejercicio siguiente:

Ejercicio 1.2.3. Sea $X = [0,1]$. Para cada $n \geq 0$ sea μ_n la medida delta de Dirac concentrada en el punto $1/2^n$.

a) Probar que existe $\mu = \lim_{n\to+\infty}\mu_n$ en la topología débil* y encontrar la medida límite μ.
b) Encontrar $A \subset [0,1]$ boreliano tal que no existe $\lim_{n\to+\infty}\mu_n(A)$.
Sugerencia: $A = \{1/2^{2j} : j \geq 0\}$.
c) Encontrar $B \subset [0,1]$ boreliano tal que existe $\lim_{n\to+\infty}(\mu_n(B)) \neq \mu(B)$.

Observación 1.2.4. Observemos que, para cada $\mu \in \mathcal{M}$, el operador $\Lambda_\mu : C^0(X,\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ definido por:

$$\Lambda_\mu(\psi) := \int \psi \, d\mu$$

es lineal, positivo (es decir $\Lambda_\mu(\psi) \geq 0$ si $\psi \geq 0$) y acotado (es decir existe $k > 0$ tal que $|\Lambda_\mu(\psi)| \leq k$ para toda $\psi \in C^0(X,\mathbb{R})$ tal que $\|\psi\|_0 \leq 1$). Además $\Lambda_\mu(\psi) = 1$ si $\psi : X \mapsto \mathbb{R}$ es la función constante igual a 1.
El siguiente teorema establece el recíproco de la propiedad observada arriba, y es un resultado clásico de la Teoría Abstracta de la Medida y del Análisis Funcional:

Teorema de Representación de Riesz
Sea X un espacio métrico compacto.
Para todo operador lineal $\Lambda : C^0(X,\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ *que sea positivo y acotado, existe y es única una medida finita* μ (de Borel y positiva) *tal que*

$$\Lambda(\psi) = \int \psi \, d\mu \quad \forall \ \psi \in C^0(X,\mathbb{R})$$

Además si $\Lambda(1) = 1$ *entonces* μ *es una probabilidad. Es decir,* $\mu(X) = 1$*, ó, usando nuestra notación,* $\mu \in \mathcal{M}$*.*

Una demostración del Teorema de Representación de Riesz puede encontrarse, por ejemplo, en [80, Teorema 2.3.1]
Debido al Teorema de Representación de Riesz, el espacio $\mathcal{M}$ se puede identificar con el espacio de los operadores lineales de $C^0(X,\mathbb{R})$ que son positivos, acotados y que valen 1 para la función constante igual a 1. (Recordemos que el espacio de los operadores lineales de $C^0(X,\mathbb{R})$ se llama dual de $C^0(X,\mathbb{R})$ y se denota como $C^0(X,\mathbb{R})^*$). En el Análisis Funcional se definen diversas topologías en el dual de un espacio de funciones. Una de ellas es la llamada *topología débil**, que es la topología de la convergencia *punto a punto,* definida como sigue:

$$\lim_{n\to+\infty} \Lambda_n = \Lambda \text{ en } C^0(X,\mathbb{R})^*$$

si y solo si

$$\lim_{n\to+\infty} \Lambda_n\psi = \Lambda\psi \text{ en } \mathbb{R} \ \ \forall \ \psi \in C^0(X,\mathbb{R}).$$

De las definiciones anteriores, deducimos que la topología débil estrella en $\mathcal{M}$ es la topología inducida por la topología débil estrella (o de la convergencia punto a punto) en el dual $C^0(X,\mathbb{R})^*$ del espacio funcional de las funciones continuas. La topología débil* puede definirse como la topología producto de las definidas por la convergencia de los valores numéricos $\Lambda_n(\psi)$ que toman los operadores Λ_n para cada $\psi \in C^0(X,\mathbb{R})$ fija.
El siguiente teorema es clásico del Análisis Funcional, y es una consecuencia del teorema de Tichonov (ver por ejemplo [26, Teorema 4.43])que establece, bajo ciertas hipótesis, la compacidad de la topología producto:

Teorema 1.2.5. (Corolario del Teorema de Tichonov) *Si X es un espacio métrico compacto, entonces para toda constante $k > 0$ el subconjunto de los operadores lineales acotados por k es compacto en el espacio dual $C^0(X,\mathbb{R})^*$ con la topología débil estrella.*

Como caso particular, observemos que el espacio $\mathcal{M}$ de las probabilidades de Borel en X (via el teorema de Representación de Riesz) es un subconjunto *cerrado* del espacio de los operadores lineales acotados con la topología débil estrella (es decir, si $\Lambda_n(1) = 1$ y $\Lambda_n \to \Lambda$, entonces $\Lambda(1) = 1$).
Más detalladamente:

Teorema 1.2.6. Compacidad y metrizabilidad del espacio de probabilidades
Sea X un espacio métrico compacto. Sea $\mathcal{M}^1$ el espacio de todas las medidas μ (de Borel, positivas y finitas)*tales que $\mu(X) \leq 1$. Sea en $\mathcal{M}^1$ la topología débil*, definida en* 1.2.1. *Entonces:*
(a) $\mathcal{M}^1$ *es compacto.*
(b) $\mathcal{M}^1$ *es metrizable.* (Es decir, existe una métrica dist que induce la topología débil*; esto es una distancia en $\mathcal{M}^1 \times \mathcal{M}^1$ tal que

$$\lim_n \operatorname{dist}(\mu_n, \mu) = 0 \text{ si y solo si } \lim_n \mu_n = \mu$$

con la topología débil*).
(c) *Si $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C^0(X,[0,1])$ es un conjunto numerable denso de funciones, entonces la siguiente métrica induce la topología débil* en $\mathcal{M}^1$:*

$$dist(\mu,\nu) := \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \left| \int \psi_i \, d\mu \; - \; \int \psi_i \, d\nu \right| \quad \forall\ \mu,\nu \in \mathcal{M}^1. \tag{1.1}$$

(d) $\mathcal{M}^1$ *es secuencialmente compacto.* (Es decir, toda sucesión de medidas en $\mathcal{M}^1$ tiene alguna subsucesión convergente).

Consecuencia: Siendo $\mathcal{M} = \{\mu \in \mathcal{M}^1 : \mu(X) = 1\}$ cerrado en $\mathcal{M}^1$, se deduce que

(e) *El espacio de probabilidades $\mathcal{M}$ con la topología débil* es compacto, metrizable y secuencialmente compacto.*

Ejercicio 1.2.7. Demostrar el Teorema 1.2.6 como consecuencia del Corolario 1.2.5, identificando el espacio $\mathcal{M}^1$ con el dual de $C^0(X, \mathbb{R})$ via el Teorema de Representación de Riesz.

Proposición 1.2.8. *Sea $\{\psi_i : i \geq 1\}$ un conjunto numerable denso en $C^0(X, [0, 1])$. Dos medidas μ_1 y μ_2 en $\mathcal{M}^1(X)$ coinciden si para todo $i \geq 1$ se cumple*

$$\int \psi_i \, d\mu_1 = \int \psi_i \, d\mu_2$$

Demostración: Por la unicidad de la medida del teorema de Riesz alcanza probar que para toda $\psi \in C^0(X, \mathbb{R})$ se cumple:

$$\int \psi \, d\mu_1 = \int \psi \, d\mu_2 \tag{1.2}$$

La igualdad (1.2) vale obviamente para ψ idénticamente nula. Si ψ no es idénticamente nula, basta demostrar (1.2) para $\psi / \|\psi\|_0$, donde $\|\psi\|_0 = \max_{x \in X} |\psi(x)|$. Entonces supongamos que $\|\psi\|_0 = 1$. Cualquier función real ψ puede escribirse como $\psi = \psi^+ - \psi^-$, donde $\psi^+ = \max\{\psi, 0\}$, $\psi^- = -\min\{\psi, 0\}$. Observemos que $\psi^+, \psi^- \in C^0([0, 1])$. Si demostramos la igualdad (1.2) para ψ^+ y ψ^-, entonces vale también para ψ. Basta entonces probar la igualdad (1.2) para toda $\psi \in C^0(X, [0, 1])$. Por la densidad de las funciones $\{\psi_i\}$ en $C^0(X, [0, 1])$, existe una sucesión ψ_{i_n} convergente uniformemente (es decir con la norma del supremo en $C^0(X, \mathbb{R})$), a la función ψ. Por lo tanto, converge también puntualmente y está uniformemente acotada por 1. Cada ψ_{i_n} verifica la igualdad (1.2). Luego, por el teorema de convergencia dominada, ψ también cumple (1.2). □

Observación 1.2.9. Sea X un espacio métrico compacto no vacío, sea $\mathcal{B}$ la sigma-álgebra de Borel, y sea $\mathcal{M}$ el espacio de todas las medidas de probabilidad de Borel en X con la topología débil*.
El espacio $\mathcal{M}$ es no vacío. Por ejemplo, si elegimos un punto $x \in X$ entonces $\delta_x \in \mathcal{M}$, donde δ_x es la probabilidad Delta de Dirac soportada en el punto $x \in X$. Esto es δ_x es la probabilidad que a cada boreliano $B \subset X$ le asigna $\delta_x(B) = 1$ si $x \in B$, y $\delta_x(B) = 0$ si $x \notin B$.

Ahora agreguemos una dinámica en X:

Definición 1.2.10. El pull back $T^* : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$
Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, sea $T : X \mapsto X$ medible y sea $\mathcal{M}$ el conjunto de las medidas de probabilidad en $(X, \mathbb{A})$. Definimos el siguiente operador en $\mathcal{M}$, llamado pull back del mapa T:

$$T^* : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M} \qquad (T^*\mu)(B) = \mu(T^{-1}(B)) \ \ \forall \ \mu \in \mathcal{M} \ \ \forall \ B \in \mathcal{B}.$$

Es inmediato verificar que μ es invariante por T si y solo si $T^*\mu = \mu$, es decir, las medidas invariantes por T son los puntos fijos por T^* en el espacio $\mathcal{M}$.

Ejercicio 1.2.11. Probar que para toda $\psi \in L^1(\mu)$ se cumple:

$$\int \psi \, dT^*\mu = \int \psi \circ T \, d\mu.$$

Sugerencia: Chequear primero para las funciones características χ_B de los borelianos, luego para las combinaciones lineales de las funciones características (funciones simples), y luego para las funciones medibles no negativas, usando el Teorema de convergencia monótona. Finalmente probar la igualdad para toda $\psi \in L^1(\mu)$ separando ψ en parte real e imaginaria, y cada ψ real en su parte positiva y negativa.

Proposición 1.2.12. *Sea X espacio métrico compacto, y $\mathcal{M}$ el espacio de las probabilidades de Borel en X con la topología débil*. Si $T : X \mapsto X$ es continuo, entonces $T^* : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ es continuo en $\mathcal{M}$.*

Demostración. Basta chequear que si $\lim_n \mu_n = \mu$ en $\mathcal{M}$ entonces $\lim_n T^*\mu_n = T^*\mu$. En efecto, como $\lim_n \mu_n = \mu$, entonces, para toda $\psi \in C^0(X, \mathbb{R})$:

$$\lim_{n \to +\infty} \int \psi \, d\mu_n = \int \psi \, d\mu$$

En particular, siendo $T : X \mapsto X$ continuo, la igualdad anterior se cumple para $\psi \circ T$. Luego deducimos que

$$\lim_{n \to +\infty} \int \psi \circ T \, d\mu_n = \int \psi \circ T \, d\mu.$$

Usando el resultado del Ejercicio 1.2.11, deducimos que

$$\lim_{n \to +\infty} \int \psi \, dT^*\mu_n = \int \psi \, dT^*\mu \quad \forall \ \psi \in C^0(X, \mathbb{R}).$$

Por lo tanto la sucesión de medidas $T^*\mu_n$ converge en la topología débil* de $\mathcal{M}$, a la medida $T^*\mu$ como queríamos demostrar. □

Ahora probaremos el Teorema 1.1.5, utilizando el llamado *procedimiento de Bogliubov-Krylov* [10]. Este procedimiento parte de cualquier medida de probabilidad en el espacio X, toma promedios aritméticos de los iterados del operador pull back T^* de esta medida hasta tiempo n, y finalmente una subsucesión convergente en la topología débil estrella de esos promedios. Se obtienen medidas invariantes por T (bajo la hipótesis de que $T : X \mapsto X$ es continuo). El procedimiento de Bogliubov-Krylov permite "fabricar" medidas de probabilidad invariantes, usando como "semilla" cualquier medida de probabilidad.

Demostración del Teorema 1.1.5 de existencia de medidas invariantes:

Demostración. Elijamos una medida de probabilidad de Borel cualquiera $\rho \in \mathcal{M}$. Construyamos para cada $1 \leq n \in \mathbb{N}$, la siguiente probabilidad:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (T^*)^j \rho$$

Es inmediato probar, a partir de la definición del operador T^* (que cumple $T^*\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ para todo boreliano B), que

$$T^*\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (T^*)^{j+1} \rho$$

Como el espacio $\mathcal{M}$ de las probabilidades de Borel es secuencialmente compacto con la topología débil*, existe una subsucesión $\{\mu_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ (con $\lim_i n_i = +\infty$), que es convergente en $\mathcal{M}$. Llamemos $\mu \in \mathcal{M}$ a su límite; es decir:

$$\mu = \lim_{i \to +\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i - 1} (T^*)^j \rho$$

Basta demostrar ahora que $T^*\mu = \mu$, es decir μ es una probabilidad T-invariante. Usando la continuidad del operador T^* (Proposición 1.2.12), deducimos que

$$T^*\mu = \lim_{i \to +\infty} T^* \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i - 1} (T^*)^j \rho \right) = \lim_{i \to +\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i - 1} (T^*)^{j+1} \rho$$

Integrando cada $\psi \in C^0(X, \mathbb{R})$ respecto de la medida $T^*\mu$, y luego respecto de la medida μ, aplicando la definición de límite de la sucesión de medidas μ_{n_i} con la topología débil*, y la continuidad del operador T^* en $\mathcal{M}$, obtenemos:

$$\int \psi \, dT^*\mu - \int \psi \, d\mu = \lim_{i \to +\infty} \left(\int \psi \, d\, T^*\mu_{n_i} - \int \psi \, d\mu_{n_i} \right) =$$

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{1}{n_i} \left(\int \psi \, d\, (T^*)^{n_i} \rho - \int \psi \, d\rho \right)$$

Entonces

$$\left| \int \psi \, d\, T^*\mu - \int \psi \, d\mu \right| \leq \lim_{i \to +\infty} \frac{1}{n_i} \|\psi\|_0 \left(\rho(X) + \rho(T^{-n_i}(X)) \right) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\|\psi\|_0 = 0.$$

En la última igualdad tuvimos en cuenta que ρ es una probabilidad. Obtuvimos que

$$\left|\int \psi \, d\,T^*\mu - \int \psi \, d\mu\right| = 0 \ \ \forall \ \psi \in C^0(X, \mathbb{R}).$$

Por lo tanto los operadores lineales $\psi \mapsto \int \psi \, dT^*\mu$ y $\psi \mapsto \int \psi \, d\mu$ son el mismo. Por la unicidad de la medida en el teorema de Riesz deducimos que $T^*\mu = \mu$, como queríamos demostrar. $\square$

Ejercicio 1.2.13. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad en $(X, \mathcal{A})$. Suponga que existe $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que $T^*\mu(A) \leq 2\mu(A)$ para todo boreliano $A \subset X$.
a) Probar que $2\mu - T^*\mu \in \mathcal{M}(X)$.
b) Si X es un espacio métrico compacto, $\mathcal{A}$ es la sigma-álgebra de Borel y si T es continua, probar que dado $\mu_0 \in \mathcal{M}(X)$ existe $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que $2\mu - T^*\mu = \mu_0$. Sugerencia: Para todo $\mu \in \mathcal{M}(X)$ definir $G(\mu) = 1/2 \cdot (T^*\mu + \mu_0), \quad \mu_n = 1/n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} G^j(\mu_0)$ y tomar una subsucesión convergente en $\mathcal{M}(X)$. Probar que G es continuo en $\mathcal{M}(X)$. Observar que G conmuta con las combinaciones lineales finitas *convexas* de probabilidades. Es decir si $\mu = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nu_i$, donde $\nu_i \in \mathcal{M}(X), \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1$ y $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, entonces $G(\nu) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i G(\nu_i)$.

1.3. Ejemplos y puntos periódicos hiperbólicos

Ejemplo 1.3.1. Sea en S^1 (el círculo) la rotación $T(e^{2\pi i x}) = e^{(2\pi i)(x+a)}$, donde a es una constante real. Si a es racional, T se llama *rotación racional* en el círculo, y si a es irracional, T se llama *rotación irracional.* A través de la proyección $\Pi : \mathbb{R} \mapsto S^1$ dada por $\Pi(x) = e^{2\pi i x}$, la medida de Lebesgue m en $\mathbb{R}$ induce una medida $m_\sim$ en S^1 dada por $m_\sim(A) = m(\Pi^{-1}(A) \cap [0, 1])$. Esta medida $m_\sim$ se llama medida de Lebesgue en el círculo. Como m en $\mathbb{R}$ es invariante por traslaciones, es fácil probar que $m_\sim$ en el círculo S^1 es invariante por las rotaciones.

Ejercicio 1.3.2. Probar que para la rotación racional en el círculo todos los puntos son periódicos con el mismo período. Probar que la rotación irracional en el círculo no tiene puntos periódicos. Probar que la medida de Lebesgue en el círculo es invariante por las rotaciones.

Observación 1.3.3. Aunque no es inmediato, se puede probar que *todas las órbitas de la rotación irracional del círculo son densas.* (Lo probaremos en §2.4.2).

Ejercicio 1.3.4. Tent map Sea el intervalo [0,1] dotado de la sigma álgebra de Borel. Sea $T : [0,1] \mapsto [0,1]$ dada por $T(x) = 2x$ si $x \in [0, 1/2]$ y $T(x) = 2 - 2x$ si $x \in [1/2, 1]$. Probar que T preserva la medida de Lebesgue en el intervalo. (Sugerencia: graficar T y probar que la preimagen de un intervalo I tiene la misma medida que I. Usar el corolario 1.1.10.

Definición 1.3.5. Sea $T : X \mapsto X$ Borel medible en un espacio métrico X. Decimos que un punto periódico x_0 de período p es *un atractor* si existe un entorno V de x_0 invariante hacia delante por T^p (es decir $T^p(V) \subset V$) y tal que

$$\operatorname{dist}(T^n(x_0), T^n(y))_{n \to +\infty} \to 0 \ \ \forall y \in V$$

Cuando T es invertible con inversa medible decimos que un punto periódico x_0 de período p es *un repulsor* si existe un entorno V de x_0 invariante hacia atrás por T^p (es decir $T^{-p}(V) \subset V$) y tal que

$$\operatorname{dist}(T^n(x_0), T^n(y))_{n \to -\infty} \to 0 \ \ \forall y \in V$$

Proposición 1.3.6. *Sea $f : S^1 \mapsto S^1$ un difeomorfismo;* es decir f es de clase C^1 (i.e. derivable con derivada continua), invertible (i.e. biyectiva; existe la transformación inversa $f^{-1} : S^1 \mapsto S^1$), y su inversa f^{-1} es también de clase C^1)

Supongamos que el difeomorfismo $f : S^1 \mapsto S^1$ preserva la orientación (i.e. $f' > 0$). Sea x_0 un punto periódico de período p tal que la derivada $(f^p)'(x_0)$ es menor que 1. Entonces x_0 es un atractor. Análogamente, si $(f^p)'(x_0)$ es mayor que 1 entonces x_0 es un repulsor.

Demostración: La segunda afirmación se obtiene de la primera usando f^{-p} en lugar de f^p. Demostremos la primera afirmación renombrando como f a la transformación f^p. Entonces x_0 es fijo. Grafíquese $f(x)$ para $x \in S^1 \approx [0,1]$ del intervalo $[0,1]$ en sí mismo, en el que se ha identificado el 0 con el 1 en el punto x_0. La gráfica de f corta a la diagonal por lo menos en el punto $0 \sim 1 = x_0$ Gráficamente, los iterados futuros de y en un entorno de x_0 suficientemente pequeño, se obtienen trazando la vertical de abscisa y, cortándola con la gráfica de f, trazando luego la horizontal por ese punto, cortándola con la diagonal, trazando la vertical por ese punto, cortándola con la gráfica de f, y así sucesivamente (ver por ejemplo [37, Figure on page 19]). Si la función es continua con derivada continua, y la derivada $f'(x_0) = a > 0$ en el punto fijo x_0 es menor que uno, entonces los sucesivos puntos en la gráfica de f obtenidos por la construcción anterior, tienden monótonamente al punto fijo x_0. En efecto, por la definición de diferenciabilidad y de derivada: $\|f(y) - f(x_0)\| \leq (a + (1-a)/2)\,\|y - x_0\|$ para todo y suficientemente cercano a x_0, digamos $\|y - x_0\| < \delta$. Es decir $\|f(y) - x_0\| \leq b\|y - x_0\|$ donde $0 < b = a + (1-a)/2 = (1+a)/2 < 1$. Luego, $f(y)$ también cumple $\|f(y) - x_0\| < \delta$. Se puede aplicar, por inducción, la desigualdad anterior a todos los iterados futuros $f^n(y)$ (es decir para todo $n \in \mathbb{N}$). Obtenemos $\|f^n(y) - x_0\| \leq b^n \|y - x_0\|$. Siendo $0 < b < 1$, deducimos que $f^n(y)$ converge monótonamente a x_0. $\Box$

Definición 1.3.7. Un punto periódico x_0 con período p de un difeormofismo $f : X \mapsto X$ en una variedad diferenciable X se dice *hiperbólico* si los valores propios (complejos) de la derivada $df^p_{x_0}$ de f^p en x_0, tienen todos módulo diferente de 1. Se recuerda que la derivada $df^p_{x_0}$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m$, donde m es la dimensión de la variedad X.

Consecuencia: Si x_0 es un punto periódico hiperbólico de un difeomorfismo f de clase C^1 del círculo S^1, entonces es un atractor si $|(f^p)'(x_0)| < 1$, y es un repulsor si $|(f^p)'(x_0)| > 1$. (Siendo x_0 hiperbólico, sabemos que $|f^p)'(x_0)| \neq 1$ por definición, así que los dos casos anteriores son los únicos posibles). En efecto, si f preserva al orientación del círculo, aplicamos la Proposición 1.3.6, y si f invierte la orientación, aplicamos la misma Proposición a f^2 para deducir que x_0 es un punto fijo atractor (resp. repulsor) de f^2. Es fácil probar que si x_0 es un punto fijo de f que es atractor (resp. repulsor) para f^2, entonces también es atractor (resp. repulsor) para f.
Para un difeomorfismo f en el círculo S^1, y más en general para un mapa de clase C^1 en una variedad de dimensión 1, un punto periódico hiperbólico x_0 se llama *pozo* si $|(f^p)'(x_0)| < 1$, y se llama *fuente* si $|(f^p)'(x_0)| > 1$. Generalizando este resultado cuando la variedad tiene dimensión mayor que uno, adoptamos la siguiente definición:

Definición 1.3.8. Pozos, fuentes y sillas
Sea $f : X \mapsto X$ un difeomorfismo en una variedad diferenciable X. Sea x_0 un punto periódico hiperbólico para f de período p (i.e. los valores propios de $df^p_{x_0}$ tienen todos módulo diferente de 1). El punto x_0, y también la órbita (finita) de x_0, se llama *pozo* si los valores propios de $df^p_{x_0}$ tienen todos módulo menor que 1. Se llama *fuente* si todos tienen módulo mayor que 1. Y se llama *silla* si alguno tiene módulo mayor que 1 y algún otro módulo menor que 1. (Obsérvese que las sillas solo pueden existir si la dimensión de la variedad es 2 o mayor).

Ejercicio 1.3.9. (a) Encontrar ejemplo de un difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ con un punto fijo hiperbólico tipo silla, otro ejemplo con un pozo y otro con una fuente. (b) Encontrar un ejemplo de $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ que tenga exactamente tres puntos fijos, sean los tres hiperbólicos, uno tipo fuente, otro pozo y otro silla. (c) Demostrar que para cualquier difeomorfismo $f : M \mapsto M$, los pozos son atractores, las fuentes son repulsores, y las sillas no son atractores ni repulsores.

Ejercicio 1.3.10. Encontrar un ejemplo de difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ que tenga un punto fijo atractor que no sea pozo (i.e. que no sea hiperbólico), otro que tenga un punto fijo repulsor que no sea fuente (i.e. que no sea hiperbólico) y otro que tenga un punto fijo no hiperbólico que no sea ni fuente ni pozo pero que todas las órbitas futuras en un entorno cualquiera de x_0 suficientemente pequeño, o bien tiendan a x_0 o bien se salgan del entorno.

Exponente de Lyapounov negativo significa contracción exponencial: *Si* $f : S^1 \mapsto S^1$ *es un difeomorfismo y* x_0 *es un punto fijo atractor hiperbólico* (i.e. $|f'(x_0)| < 1$, es decir x_0 es un pozo), *entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \operatorname{dist}(f^n(x), x_0)}{n} = -\lambda < 0 \ \ \forall x \textit{ en algún entorno de } x_0$$

donde $-\lambda = \log|f'(x_0)| < 0$ *se llama exponente de Lyapounov en* x_0.

Ejercicio 1.3.11. Demostrar la afirmación anterior. Sugerencia: Probar que

$$\frac{\operatorname{dist}(f^{n+1}(x), x_0)}{\operatorname{dist}(f^n(x), x_0)} \to e^{-\lambda} < 1$$

Interpretación: La distancia de $f^n(x)$ al atractor hiperbólico se contrae exponencialmente con coeficiente asintóticamente igual a e elevado al exponente de Lyapounov $-\lambda < 0$.

Exponente de Lyapounov positivo significa dilatación exponencial: *Si* $f : S^1 \mapsto S^1$ *es un difeomorfismo y* x_0 *es un punto fijo repulsor hiperbólico* (i.e. $|f'(x_0)| > 1$, es decir x_0 es una fuente) *entonces*

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{\log \operatorname{dist}(f^n(x), x_0)}{n} = \sigma > 0 \ \ \forall x \textit{ en algún entorno de } x_0$$

donde $\sigma = \log|f'(x_0)| > 0$ *se llama exponente de Lyapounov en* x_0.

Ejercicio 1.3.12. Demostrar la afirmación anterior. Sugerencia: Aplicar lo ya probado a f^{-1} y la fórmula de derivada de la función inversa para deducir que

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{\operatorname{dist}(f^{n+1}(x), x_0)}{\operatorname{dist}(f^n(x), x_0)} \to e^{\sigma} > 1$$

Interpretación: La distancia de $f^n(x)$ al repulsor hiperbólico (al crecer n y mientras $f^n(x)$ esté en un entorno pequeño del repulsor) se dilata exponencialmente con coeficiente asintóticamente igual a e elevado al exponente de Lyapounov $\sigma > 0$.

Ejercicio 1.3.13. Flujo polo norte-polo sur Llamaremos *sección de flujo polo norte-polo sur* en el círculo S^1, a un difeomorfismo $f : S^1 \mapsto S^1$ de clase C^1, que preserva la orientación, y tal que existen solo 2 puntos fijos N y S, son ambos hiperbólicos, N repulsor y S atractor. Graficar f en $[0,1]_{mod 1}$ tomando $0 \sim 1 = N$. Demostrar que todas las órbitas excepto N y S son monótonas y convergen a S. (Sugerencia: ver prueba de la afirmación 1.3.6.) Demostrar que las únicas medidas de probabilidad invariantes son las combinaciones lineales convexas de δ_N y δ_S. Sugerencia: considerar una partición numerable del intervalo $(0, S)$ formado por $A_n = [x_n, x_{n+1})$ para $n \in \mathbb{Z}$ donde x_0 se elige cualquiera en el intervalo abierto $(0, S)$ y $x_n := f^n(x_0)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Usando argumento similar a la prueba del ejemplo 1.1.7, probar que $\mu((0, S)) = 0$. Análogamente probar que $\mu((S, 1)) = 0$, de donde $\mu(\{N, S\}) = 1$.

Definición 1.3.14. Difeomorfismo Morse-Smale en S^1. Un difeomorfismo $f : S^1 \mapsto S^1$ se dice *Morse-Smale* si preserva la orientación y existen exactamente una cantidad finita de puntos periódicos (todos del mismo período) y son todos ellos hiperbólicos.

Ejercicio 1.3.15. Probar que en un difeomorfismo f Morse-Smale en el círculo las únicas medidas invariantes son las combinaciones lineales convexas de las medidas

$$\frac{\delta_{x_0} + \delta_{f(x_0)} + \ldots + \delta_{f^{p-1}(x_0)}}{p}$$

donde x_0 es un punto periódico de período p. Sugerencia: Graficar f^p en $S^1 = [0, 1]/\sim$ donde $0 \sim 1$ es un punto periódico de período p. Probar que los atractores y los repulsores se alternan. Probar que para toda medida invariante el arco entre un repulsor y un atractor consecutivos tiene medida cero, usando el procedimiento del ejercicio 1.3.13.

1.4. Dinámica topológica

Definición 1.4.1. Recurrencia topológica. Sea $T : X \mapsto X$ una transformación Borel medible en un espacio topológico X. Sea $x \in X$. Se llama *omega-límite de* x al conjunto

$$\omega(x) = \{y \in X : \exists n_j \to +\infty \text{ tal que } T^{n_j}(x) \mapsto y\}$$

Cuando T es bi-medible (i.e. T es medible, invertible y con inversa medible) se llama *alfa-límite de* x al conjunto

$$\alpha(x) = \{y \in X : \exists n_j \to -\infty \text{ tal que } T^{n_j}(x) \mapsto y\}$$

Un punto x se dice *recurrente* si

$$x \in \omega(x)$$

Dicho de otra forma x es recurrente si existe una subsucesión $n_j \to +\infty$ tal que $T^{n_j}(x) \to x$. Luego para todo entorno V de x existe una subsucesión $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_j}(V) \cap V \neq \emptyset$.

Ejercicio 1.4.2. Sea X un espacio métrico compacto y sea $T : X \mapsto$ continua. Probar que:
(a) $\omega(x)$ es compacto no vacío para todo $x \in X$.
(b) $\omega(T^n(x)) = \omega(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir el conjunto $\omega(x)$ depende de la órbita por x y no de qué punto en la órbita de x se elija.
(c) $T(\omega(x)) = \omega(x) \subset T^{-1}(\omega(x))$ para todo $x \in \mathbb{N}$. Es decir $\omega(x)$ es un conjunto invariante por T hacia el futuro.
(d) Si además T es un homeormorfismo (i.e. T es continua, invertible y con inversa T^{-1} continua) probar que:
(i) $\alpha(x)$ es compacto no vacío para todo $x \in X$, $\alpha(T^n(x)) = \alpha(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $T(\alpha(x)) = \alpha(x) = T^{-1}(\alpha(x))$.
(ii) Si $x \in \omega(x)$ entonces $\alpha(x) \subset \omega(x)$. Sugerencia: Si $x \in \omega(x)$ entonces $T^{-n}(x) \in \omega(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, luego $\alpha(x) \subset \overline{\omega(x)} = \omega(x)$.
(iii) $x \in \omega(x)$ si y solo si $\omega(x) = \overline{o(x)}$, donde $o(x) = \{T^n(x) : \ n \in \mathbb{Z}\}$.

Definición 1.4.3. Conjunto no errante. Sea $T : X \mapsto X$ una transformación Borel medible en un espacio topológico X. Un punto $x \in X$ es *no errante* si para todo entorno V de x existe una sucesión $n_j \to +\infty$ tal que $T^{n_j}(V) \cap V \neq \emptyset$. El conjunto de los puntos no errantes de T (que puede ser vacío) se denota como $\Omega(T)$ y se llama *conjunto no errante.*

Ejercicio 1.4.4. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y sea $T : X \mapsto X$ Borel medible.
(a) Probar que el conjunto de los puntos recurrentes está contenido en el conjunto no errante $\Omega(T)$ (la inclusión opuesta no es necesariamente cierta, como se verá más adelante).
(b) Sea μ una medida de probabilidad invariante por T. Si X tiene base numerable de abiertos probar (sin usar el enunciado del teorema de recurrencia de Poincaré que viene más adelante) que $\mu(\Omega(T)) = 1$, es decir: casi todo punto es no errante para cualquier medida de probabilidad invariante por T.
Sugerencia: Probar que para todo V de la base de abiertos que tenga medida positiva la sucesión de conjuntos medibles $T^{-n}(V), \ n \in \mathbb{N}$ no puede ser de conjuntos disjuntos dos a dos a partir de un cierto n_0 en adelante. Deducir que existe una subsucesión $n_j \to +\infty$ tal que $T^{-n_j}(V) \cap V \neq \emptyset$ y esto implica $V \cap T^{n_j}(V) \neq \emptyset$. Un punto es errante (no es no errante) si está contenido en algún V abierto tal que no cumple lo anterior. Deducir que los puntos errantes forman un conjunto de medida nula.

Definición 1.4.5. Transitividad topológica Sea X un espacio topológico y $T : X \mapsto X$ Borel medible. Se dice que T es *transitiva* si dados dos abiertos U y V no vacíos, existe $n \geq 1$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
Supóngase que X es de Hausdorff sin puntos aislados. Es fácil probar que *si existe una órbita positiva densa entonces T es transitiva.* Y si además, T es continua y el espacio topológico tiene base numerable de abiertos y es de Baire

(esto es: toda intersección numerable de abiertos densos es densa) entonces T *es transitiva si y solo si existe una órbita positiva densa.*
La transitividad significa que para cualquier abierto U, por pequeño que sea, *los iterados positivos de U transitan por todo el espacio desde el punto de vista topológico* (es decir, por todos los abiertos del espacio).

Observación 1.4.6. Se observa que para dos conjuntos cualesquiera U y V:

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset \text{ si y solo si } T^{-n}(V) \cap U \neq \emptyset$$

Es fácil ver que si T es continua y transitiva, entonces dados dos abiertos U y V no vacíos, existe $n_j \to +\infty$ tal que $T^{-n_j}(V) \cap U \neq \emptyset$. En particular, tomando $U = V \ni x$, se deduce que:
Si $T : X \mapsto X$ es continua y transitiva entonces $\Omega(T) = X$.

Ejercicio 1.4.7. Probar las afirmaciones de la Observación 1.4.6 y las que están inmediatamente después de la definición de transitividad en 1.4.5.

1.5. Recurrencia y Lema de Poincaré

Sea $T : X \mapsto X$ Borel medible en un espacio métrico compacto X. Recordando la Definición 1.4.1 y teniendo en cuenta la compacidad secuencial de X, un punto x es recurrente si y solo si *para todo entorno V de x existen infinitos iterados hacia el futuro de x en V.* Es decir, existe $n_j \to +\infty$ tal que $T^{n_j}(x) \in V$.

Definición 1.5.1. Sea $T : X \mapsto X$ medible en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$. Sea $E \in \mathcal{A}$. Un punto $x \in E$ *vuelve infinitas veces a E* si existen infinitos iterados hacia el futuro de x en E. Mejor dicho: existe $n_j \to +\infty$ tal que $T^{n_j}(x) \in E$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Los siguientes dos teoremas, llamados Lemas de Recurrencia de Poincaré, se encuentran por ejemplo en [54, pag. 32-35] (ver también [55]). En [98, §1.4] se encuentra también la versión medible siguiente:

Teorema 1.5.2. Lema de Recurrencia de Poincaré. Versión medible
Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una medida de probabilidad μ. Sea E un conjunto medible tal que $\mu(E) > 0$. Entonces μ-c.t.p de E vuelve infinitas veces a E.

Demostración. Sea $F_N := \bigcap_{n \geq N} T^{-n}(X \setminus E)$ y sea $F := \bigcup_{N \geq 0} F_N$. Por construcción $x \in F$ si y solo si $T^n(x) \notin E$ para todo n suficientemente grande. Esto ocurre si y solo si la órbita futura $\{T^n(x)\}_{n \geq 0}$ de x no pasa infinitas veces por E. Basta probar entonces que $\mu(F \cap E) = 0$.

Por construcción $T^{-1}(F_N) = F_{N+1}$. Como μ es T-invariante, tenemos $\mu(F_{N+1}) = \mu(F_N)$ para todo $N \geq 0$. Luego $\mu(F_N) = \mu(F_0)$ para todo $N \geq 0$. Siendo $F_{N+1} \supset F_N$ para todo $N \geq 0$, entonces $\mu(F) = \lim_{N \to +\infty} \mu(F_N) = \mu(F_0)$ y $F \supset F_0$. Luego $\mu(F \setminus F_0) = 0$. Como $E \cap F_0 = \emptyset$, deducimos que $E \cap F \subset F \setminus F_0$, de donde $\mu(E \cap F) = 0$, como queríamos demostrar. □

Teorema 1.5.3. Lema de Recurrencia de Poincaré. Versión topológica

Sea $T : X \mapsto X$ Borel-medible en un espacio topológico X con base numerable. Si T preserva una medida de probabilidad μ, entonces μ-c.t.p. es recurrente (es decir $x \in \omega(x)$ μ-c.t.p. $x \in X$).

Demostración: Sea $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una base de abiertos. Por 1.4.1: $x \notin \omega(x)$ si y solo si $x \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$, donde

$$A_j = \{x \in V_j : x \text{ no vuelve infinitas veces a } V_j\}.$$

Por 1.5.2 $\mu(A_j) = 0$ Luego, la unión numerable de los conjuntos A_j, que coincide con el conjunto de los puntos no recurrentes, tiene μ medida nula. □

Ejercicio 1.5.4. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una probabilidad μ. Sea $E \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(E) > 0$. Probar que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_E(T^n(x))$$

diverge μ- c.t.p $x \in E$

Ejercicio 1.5.5. Sea $T : X \mapsto X$ Borel medible en el espacio topológico X compacto , y preservando una medida de probabilidad μ. Sea supp (μ) el soporte compacto de μ (i.e. el mínimo compacto con medida μ igual a 1). Probar que $\emptyset \neq \text{supp}(\mu) \subset \overline{\text{Rec}(T)}$ siendo $\text{Rec}(T)$ el conjunto de los puntos recurrentes de T.

Teorema 1.5.6. Teorema de Hopf. *Sea $T : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^k$ Borel bimedible (medible, invertible con inversa medible) que preserva la medida de Lebesgue m. Entonces casi todo punto de $\mathbb{R}^n$ o bien es recurrente o bien tiene omega límite vacío.*

Ejercicio 1.5.7. Demostrar el teorema de Hopf enunciado antes. Sugerencia: $\mathbb{R}^k = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ donde X_i es una bola abierta de radio $r_i \to +\infty$ creciente con i. Sea

$$\widetilde{X}_i = \{x \in X_i : T^j(x) \in X_i \text{ para infinitos valores positivos de } j\}.$$

Sea $\widetilde{T}_i : \widetilde{X}_i \mapsto \widetilde{X}_i$ la transformación que a cada $x \in \widetilde{X}_i$ hace corresponder el primer retorno a X_i: $\widetilde{T}(x) = T^j(x) \in \widetilde{X}_i$ para el mínimo $j = j(x)$ natural positivo tal que $T^j(x) \in X_i$. Probar que $m(\widetilde{T}_i \widetilde{X}_i) = m(\widetilde{X}_i)$; luego c.t.p. de $\widetilde{X}_i$ está en la imagen de $\widetilde{T}_i$. Probar que $\widetilde{T}_i$ preserva m. Aplicar el teorema de recurrencia de Poincaré para deducir que m-c.t.p de $\widetilde{X}_i$ es recurrente. Probar que c.t.p. de X_i o bien es recurrente o bien su omega límite no intersecta a X_i.

Observación 1.5.8. En [28], y en la bibliografía allí citada, se reseñan varios otros resultados sobre recurrencia, además de los lemas básicos de recurrencia de Poincaré. Algunos de estos resultados miden, en relación a potencias de n, la frecuencia con la que órbita futura del punto recurrente x se acerca a x, la vinculan con las medidas ergódicas y con la entropía métrica del sistema (la entropía métrica es, gruesamente hablando, una medición, ponderada según una probabilidad invariante μ, del desorden espacial que produce f al ser iterada).

1.6. Ergodicidad

Definición 1.6.1. Ergodicidad I
Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida de probabilidad y $T : X \mapsto X$ medible que preserva μ. Se dice que T es *ergódica* respecto a la medida μ, o que μ es una *medida ergódica* para T, si dados dos conjuntos medibles con medida positiva U y V existe $n \geq 1$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Nota: Observar que la ergodicidad es la versión en el contexto medible de la transitividad topológica. Se resalta que por definición, si una medida es ergódica para T, entonces es T-invariante. No se define ergodicidad de medidas no invariantes.

Definición 1.6.2. Ergodicidad II
Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida de probabilidad y $T : X \mapsto X$ medible que preserva μ. Se dice que T *es ergódica* respecto a la medida μ, o que μ es una *medida ergódica* para T, si todo conjunto medible A que sea invariante por T (es decir $T^{-1}(A) = A$) tiene o bien medida nula o bien medida 1.

Teorema 1.6.3. *T es ergódica según la definición I para la medida de probabilidad μ si y solo si es ergódica según la definición II.*

Demostración: Supongamos que no se cumple la definición II. Entonces, existe un conjunto A invariante por T que tiene medida positiva distinta de 1. Luego el complemento A^c de A es también invariante por T y tiene medida positiva. Como $A = T^{-1}(A)$, toda órbita positiva con estado inicial en A está contenida en A. Deducimos que no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(A)$ intersecta a A^c. Concluimos que T no es ergódica según la definición I.
Recíprocamente, suponemos por hipótesis que se cumple la definición II. Todo conjunto A invariante por T tiene medida o bien nula o bien 1. Supongamos por

absurdo que no se cumple la definición I. Entonces existen conjuntos medibles U y V con medida positiva tales que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-n}(V)\cap U=\emptyset$. Entonces el conjunto

$$A=\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\big(\bigcup_{n\geq N} T^{-n}(V)\big)$$

es medible, invariante por T (verificar que $T^{-1}(A)=A$) y tiene medida positiva (verificar que $\mu(A)\geq\mu(V)$ usando que μ es medida de probabilidad T-invariante), pero A no intersecta a U que también tiene medida positiva. De lo anterior se deduce que A no puede tener medida 1, con lo que encontramos un conjunto invariante que tiene medida positiva menor que 1, contradiciendo la hipótesis. □

Ejercicio 1.6.4. Sea $T:X\mapsto X$ que preserva una medida de probabilidad μ. (a) Probar que μ es ergódica para T si y solo si todo conjunto A medible invariante para el futuro (i.e. $A\subset T^{-1}(A)$) cumple $\mu(A)=0$ ó $\mu(A)=1$). (b) Probar que μ es ergódica para T si y solo si todo conjunto A medible invariante para el pasado (i.e. $T^{-1}(A)\subset A$) cumple $\mu(A)=0$ ó $\mu(A)=1$. Sugerencias: (a) Considerar $B=\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(A)$, probar que $\mu(B)=\mu(A)$ y que B es T-invariante. (b) Considerar el complemento de A.

Definición: Una medida de Borel μ en un espacio topológico se dice *positiva sobre abiertos* si $\mu(V)>0$ para todo abierto V no vacío.

Ejercicio 1.6.5. Sea X un espacio topológico y $T:X\mapsto X$ Borel medible que preserva una medida de probabilidad μ que es positiva sobre abiertos. Probar que si T es ergódica respecto de μ entonces T es transitiva (topológicamente).

Ejercicio 1.6.6. Probar que los difeomorfismos Morse-Smale en el círculo tienen medidas ergódicas pero no son transitivos topológicamente.

Observación 1.6.7. Más adelante demostraremos que *la medida de Lebesgue es ergódica para la rotación irracional del círculo* (Teoremas 2.4.1 y **??**). Luego, como la medida de Lebesgue es positiva sobre abiertos, la rotación irracional es transitiva topológicamente. Entonces existe alguna órbita densa. Es fácil ver, usando que la rotación en el círculo conserva las distancias, que al existir una órbita densa, *todas las órbitas son densas.*
También probaremos que el *tent map T en el intervalo es ergódico respecto a la medida de Lebesgue.* Luego T es topológicamente transitivo y existe órbita densa. Sin embargo no todas las órbitas en el futuro por T son densas: en efecto, existen órbitas periódicas (que, como órbitas en el futuro, son conjuntos finitos, y por lo tanto no son densos).

1.6.8. Promedios temporales asintóticos de Birkhoff

El Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin, que enunciaremos completamente más adelante (Teorema 2.1.2), establece que si $T : X \mapsto X$ es una transformación medible que tiene medidas de probabilidad T-invariantes, entonces para toda probabilidad μ que sea T-invariante y para toda función $\psi \in L^1(\mu)$, existe μ-c.t.p. $x \in X$ el siguiente límite:

$$\widetilde{\psi}(x) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(x).$$

Teorema 1.6.9. Ergodicidad III. *Sea $T : X \mapsto X$ medible en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ y sea μ una probabilidad invariante por T. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) *μ es ergódica para T*
(ii) *Toda función $\psi : X \mapsto \mathbb{R}$ que sea medible e invariante por T* (es decir $\psi(x) = \psi(T(x))\ \forall\, x \in X$), *es constante μ-c.t.p.*
(iii) *Para toda función medible y acotada $\psi : X \mapsto \mathbb{R}$ existe el siguiente límite* μ-c.t.p *y es igual a $\int \psi\, d\mu$:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(x) = \int \psi\, d\mu \quad \mu - \text{c.t.p. } x \in X \tag{1.3}$$

Probaremos el Teorema 1.6.9 en el parágrafo 1.6.11.

Observación 1.6.10. Hipótesis de Bolzmann de la Mecánica Estadística: Antes de demostrar el Teorema 1.6.9, interpretaremos el significado de la afirmación en la parte (iii) para fundamentar su relevancia. Ella es un caso particular del Teorema Ergódico de Birkhoff, que veremos más adelante, que establece que para toda medida μ ergódica se cumple la igualdad (1.3), no solo cuando ψ es medible y acotada, sino también para toda $\psi \in L^1(\mu)$.
La igualdad (1.3) posee un significado relevante en la teoría ergódica, pues afirma que *el promedio espacial* de cada función ψ con respecto a la probabilidad μ en el espacio X (i.e. el valor esperado $\int \psi\, d\mu$ de cada variable aleatoria ψ) coincide con *el promedio temporal asintótico* de los valores observados de ψ a lo largo de μ-casi toda órbita. Este promedio temporal asintótico es el límite cuando $n \to +\infty$ de los promedios temporales $(1/n)\sum_{j=0}^{n-1} \psi(T^j(x))$ de los valores de ψ, observados a lo largo del pedazo finito de órbita desde el instante 0 hasta el instante $n-1$. Salvo casos excepcionales, es falso que el límite de los promedios temporales exista para todos los puntos $x \in M$. Además, aunque para toda medida invariante μ ese límite existe μ-c.t.p. (Teorema ergódico de Birkhoff), es falso en general (salvo cuando μ es ergódica) que coincida con el promedio espacial de ψ respecto a la probabilidad μ. Por lo tanto las medidas

ergódicas μ para T tienen un significado estadístico relevante, pues permite estimar el promedio temporal a largo plazo (esto es el promedio estadístico de las series de observaciones $\psi(T^j(x))$ a largo plazo, llamésmole por ejemplo el "clima") en los sistemas determinísticos, para μ-casi todo estado inicial $x \in X$, calculando el valor esperado de ψ respecto a la probabilidad μ. Sin embargo, aplicar la igualdad (1.3) para hacer esa estimación, puede ser muy erróneo cuando μ no es ergódica, o cuando μ no es invariante por T, o cuando el estado inicial x no pertenece al conjunto de μ-probabilidad igual a 1.
La igualdad (1.3) de los promedios temporales asintóticos con el promedio espacial (o sea el valor esperado) es lo que en la Mecánica Estadística se llama Hipótesis de Boltzmann. Es una hipótesis importante para demostrar propiedades de la dinámica de sistemas formado por una cantidad finita pero muy grande de partículas que evolucionan determinísticamente en el tiempo (por iteraciones de un mapa T medible) preservando una medida de probabilidad dada μ en el espacio X de todos los estados posibles (llamado "espacio de fases"). Para los sistemas llamados conservativos esta medida de probabilidad μ es la medida de Lebesgue, normalizada para que $\mu(X) = 1$. Aplicando el Teorema 1.6.9, la hipótesis de Boltzmann se traduce en la hipótesis de ergodicidad de esa probabilidad μ.

1.6.11. Prueba del Teorema 1.6.9:

Demostración. **(i) $\Rightarrow$ (ii):**
Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $A_a = \{x \in X : \psi(x) \leq a\} \subset X$. Como ψ es medible, A_a es medible . Siendo $\psi(T(x)) = \psi(x)$ para todo $x \in X$, tenemos $T^{-1}(A_a) = A_a$. Como μ es ergódica, entonces $\mu(A_a)$ vale 0 o 1. Considere la función $g : \mathbb{R} \mapsto \{0, 1\}$ definida como $g(a) := \mu(A_a)$. Por construcción $A_a \subset A_b$ si $a < b$. Luego $g(a) \leq g(b)$ si $a < b$. Entonces g es creciente y solo puede tomar valores 0 ó 1. Sea

$$k = \text{ínf}\{a \in \mathbb{R} : g(a) = 1\} = \sup\{a \in \mathbb{R} : g(a) = 0\} \in [-\infty, +\infty]. \qquad (1.4)$$

Probemos que $k \in \mathbb{R}$. En efecto $\psi(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in M$; entonces $\emptyset = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{-n}$, $\;X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Como $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\text{lím}_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 1$ y $\text{lím}_{n\to-\infty} \mu(A_n) = 0$. Esto implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(n_0) = 1$ y $g(-n_0) = 0$. Por lo tanto $-n_0 \leq k \leq n_0$. Ahora probemos que $\mu(A_k) = 1$. De (1.4) deducimos que $0 = \mu(A_{k-(1/n)}) \leq \mu(A_k) \leq \mu(A_{k+(1/n)})$ $\forall\ 1 \leq n \in \mathbb{N}$ Además $A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k+(1/n)} = X$, y $A_{k+(1/n+1)} \subset A_{k+(1/n)}$. Luego $\mu(A_k) = \text{lím}_{n\to+\infty} \mu(A_{k+(1/n)}) = 1$. Hemos probado que $\mu(A_k) = 1$. Por otra parte $B_k := \{x \in X : \psi(x) \geq k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_{k-(1/n)})$, donde $\mu(X \setminus A_{k-(1/n)}) = 1$. Como $A_{k-(1/n+1)} \supset A_{k-(1/n)}$, obtenemos $\mu(B_k) = 1$. Por lo tanto $\mu(A_k \cap B_k) = 1$, es decir para μ−c.t.p. $x \in M$ se cumple $\psi(x) = k$.
ii) $\Rightarrow$ iii):

Como μ es invariante por T tenemos $\int \psi \circ T^j \, d\mu = \int \psi \, d\mu \ \ \forall \ j \in \mathbb{N}$. Luego $\int \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j \, d\mu = \int \psi \, d\mu \ \ \forall \ \ n \geq 1$. Tomando límite cuando $n \to +\infty$ y aplicando el Teorema de Convergencia Dominada, deducimos que

$$\int \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j \, d\mu = \int \psi \, d\mu$$

Consideremos la siguiente función definida μ-c.t.p:

$$\Phi(x) := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(x) \mu - \text{c.t.p. } x \in X.$$

Aquí, en la hipótesis de existencia μ-c.t.p. de esta función Φ, es decir en la hipótesis de existencia μ-c.t.p. del límite de los promedios temporales, estamos aplicando el Teorema Ergódico de Birkhoff (como si ya estuviera demostrado). Entonces tenemos

$$\int \Phi \, d\mu = \int \psi \, d\mu.$$

Para tener definida la función Φ en todo punto $x \in X$, tomemos

$$\Phi(x) := 0 \ \forall \ x \in X \text{ tal que } \ \nexists \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(x).$$

Afirmamos que Φ es invariantes por T. Basta chequear que dado $\epsilon > 0$ existe N tal que para todo $n \geq N$ se cumple

$$\Big| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(T(x)) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(x) \Big| =$$

$$= \Big| \frac{1}{n} \psi(T^{n+1}(x)) - \psi(x) \Big| < \epsilon \quad \forall \ x \in X.$$

En efecto la desigualdad anterior se verifica para todo n suficientemente grande porque, por hipótesis, $0 \leq |\psi(x)| \leq k$ para todo $x \in X$, para cierta constante $k > 0$. Entonces, para toda sucesión $n_j \to +\infty$ tal que exista el límite del promedio temporal hasta n_j de ψ, con estado inicial x, también existe ese límite con estado inicial $T(x)$, y ambos límites coinciden. Deducimos que

$$\Phi(x) = \Phi(T(x)) \ \ \forall \ x \in X.$$

Es decir, Φ es función real invariante por T. Aplicando la hipótesis (ii) tenemos que Φ es μ-c.t.p. constante, igual a cierto número real K. Entonces

$$\int \psi \, d\mu = \int \Phi \, d\mu = \int K \, d\mu = K.$$

Deducimos que $K = \int \psi \, d\mu$, es decir $\Phi(x) = \int \psi \, d\mu$ para μ-c.t.p. $x \in X$. Esto implica la igualdad (1.3), probando (iii).
(iii) $\Rightarrow$ (i)
Sea $A \subset X$ medible e invariante por T, y consideremos la función característica χ_A. Es una función medible y acotada, y como A es invariante por T, para todo $x \in X$ tenemos $\chi_A \circ T^j(x) = \chi_{T^{-j}(A)}(x) = \chi_A(x) \in \{0, 1\}$. Entonces

$$\widetilde{\chi}_A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) = \chi_A(x) \in \{0, 1\} \ \forall \ x \in X.$$

En particular vale la igualdad anterior para μ-c.t.p. $x \in X$. Como

$$\widetilde{(\chi_A)}(x) = \int \chi_A \, d\mu = \mu(A) \quad \mu - \text{c.t.p. } x \in X$$

deducimos que $\mu(A) \in \{0, 1\}$. Por lo tanto μ es ergódica, terminando de probar (i). □

1.7. Existencia de medidas ergódicas

Teorema 1.7.1. Existencia de medidas ergódicas *Sea X un espacio métrico compacto y sea $T : X \mapsto X$ continua. Entonces existen medidas de probabilidad ergódicas para T. Además, toda medida T-invariante es el límite en la topología débil* de una sucesión de medidas que son combinaciones lineales finitas de medidas ergódicas.*

Demostraremos el teorema 1.7.1 de existencia de medidas ergódicas al final de esta sección, en el parágrafo 1.7.4.

1.7.2. Singularidad mutua y continuidad absoluta

Recordamos que dos medidas de probabilidad μ y ν se dicen mutuamente singulares $\mu \perp \nu$ cuando existe algún conjunto medible $A \subset X$ tal que $\mu(A) = 1$ y $\nu(A) = 0$. Entonces $\mu(X \setminus A) = 0$ y $\nu(X \setminus A) = 1$ y la relación mutuamente singular es simétrica.
Dadas dos medidas de probabilidad μ y ν se dice que μ es absolutamente continua respecto de ν, y se denota $\mu \ll \nu$, cuando para todo conjunto medible A tal que $\nu(A) = 0$ se cumple $\mu(A) = 0$.
Se dice que dos medidas μ y ν son equivalentes, y se denota $\mu \sim \nu$, cuando $\mu \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$.
Se observa que si $\mu \ll \nu$ entonces $\mu \not\perp \nu$ (el recíproco es falso).
El siguiente teorema es clásico en la Teoría abstracta de la Medida (en particular en la Teoría de Probabilidades):

Teorema de Descomposición de Lebesgue-Radon-Nikodym.
Dadas dos medidas de probabilidad μ y ν existen dos probabilidades μ_1 y μ_2, y un único real $t \in [0,1]$, tales que

$$\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2, \quad \mu_1 \ll \nu, \quad \mu_2 \perp \nu.$$

Si además $t \neq 0, 1$ entonces μ_1 y μ_2 son únicas.
El enunciado clásico de este Teorema, establece que *existen únicas las medidas finitas $t\mu_1$ y $(1-t)\mu_2$* (posiblemente alguna de ellas es cero) tales que sumadas dan μ, siendo $t\mu_1 \ll \nu$ y $(1-t)\mu_2 \perp \nu$.
La demostración del Teorema de Descomposición de Lebesgue-Radon-Nikodym se encuentra por ejemplo en [26, Theorem 3.8] ó en [80, Teorema 6.2.3].
Del teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym se deduce que en el caso particular $\mu \ll \nu$, se cumple $t = 1$, $\mu_1 = \mu$, y μ_2 es cualquiera. Análogamente, si $\mu \perp \nu$, entonces $t = 0$, $\mu_2 = \mu$ y μ_1 es cualquiera. En el caso que $\mu \not\ll \nu$, $\mu \not\perp \nu$, es única la pareja (μ_1, μ_2) de probabilidades en la descomposición de Radon-Nikodym.
Volvamos ahora a las propiedades de las medidas de probabilidad ergódicas para una transformación T:

Teorema 1.7.3. Singularidad mutua de medidas ergódicas
Sea $T : X \mapsto X$ medible en el espacio medible $(X, \mathcal{A})$.
(a) *Si existen dos medidas de probabilidad diferentes μ y ν, ambas ergódicas para la transformación T, entonces $\mu \perp \nu$.*
(b) *Si μ y ν son medidas de probabilidad ergódicas para T y si $\mu \ll \nu$, entonces $\mu = \nu$.*

Demostración. Afirmamos que, si μ y ν son ambas ergódicas para T, y si para todo conjunto A invariante por T se cumple $\mu(A) = \nu(A)$, entonces $\mu = \nu$. En efecto, sea B cualquier conjunto medible, y denotemos χ_B a la función característica de B. Aplicando la propiedad (iii) del Teorema 1.6.9 a la función $\psi = \chi_B$, sabemos que existe un conjunto A_1, que es T-invariante, tal que $\mu(A_1) = 1$, y se cumple la igualdad (1.3) para la medida μ y para todo $x \in A_1$. Análogamente, existe un conjunto A_2, que es T-invariante, tal que $\nu(A_2) = 1$, y se cumple la igualdad (1.3) para la medida ν y para todo $x \in A_2$. Por hipótesis $\nu(A_1) = \mu(A_1) = 1 = \nu(A_2) = \mu(A_2)$. Entonces $\nu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1 \cap A_2) = 1$ y para todos los puntos $x \in A_1 \cap A_2$ se cumple la igualdad

$$\mu(B) = \int \chi_B \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_B \circ T^j(x) = \int \chi_B \, d\nu = \nu(B)$$

Deducimos entonces que $\mu(B) = \nu(B)$ para todo conjunto medible B, de donde $\mu = \nu$. Hemos terminado de probar la afirmación del principio.
Demostremos ahora la parte (a) del teorema 1.7.3. Debido a la afirmación recién demostrada, como $\nu \neq \mu$ y son ambas ergódicas, existe un conjunto

A que es T-invariante, tal que $\mu(A) \neq \nu(A)$. Por definición de ergodicidad $\mu(A), \nu(A) \in \{0, 1\}$. Luego (eventualmente sustituyendo A por su complemente en caso necesario), tenemos $\mu(A) = 1$ y $\nu(A) = 0$, de donde $\mu \perp \nu$, demostrando (a).
La parte (b) es una consecuencia inmediata de (a), pues si $\mu \ll \nu$ entonces $\mu \not\perp \nu$. Por lo tanto, como μ y ν son ergódicas y $\mu \not\perp \nu$, aplicando la parte (a) deducimos que $\mu = \nu$, como queríamos probar. □

1.7.4. Demostración del Teorema 1.7.1 (existencia de medidas ergódicas)

El teorema 1.7.1 es un corolario inmediato del teorema 1.7.5 que demostraremos a continuación. Las definiciones de *puntos extremales de un conjunto compacto y convexo* en un espacio vectorial topológico, y de *envolvente compacta convexa,* se emplean en el enunciado siguiente, y se incluyen abajo del mismo.

Teorema 1.7.5. *Sea $T : X \mapsto X$ continua en el espacio métrico compacto X. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de medidas de probabilidad borelianas en X, con la topología débil*. Sea $\mathcal{M}_T \subset \mathcal{M}$ el conjunto de probabilidades invariantes por T y sea $\mathcal{E}_T \subset \mathcal{M}_T$ el conjunto de las probabilidades (invariantes) ergódicas para T.*
Entonces
(a) *$\mathcal{M}_T$ es compacto y convexo.*
(b) *$\mathcal{E}_T$ coincide con el conjunto de puntos extremales de $\mathcal{M}_T$.*
(c) *$\mathcal{M}_T$ coincide con la envolvente convexa compacta de $\mathcal{E}_T$.*

Demostraremos el Teorema 1.7.1 más adelante en esta sección. Para poder demostrarlo, necesitamos definir convexidad, envolvente convexa, puntos extremales y ver las propiedades de estos conceptos:

Combinaciones convexas y puntos extremales
Recordemos las siguientes definiciones y el teorema de Krein-Milman del Análisis Funcional:
• Sea $\mathcal{A}$ s un conjunto no vacío de un espacio vectorial topológico. Se llama *combinación convexa* de puntos de $\mathcal{A}$ a cualquier punto del espacio que pueda escribirse como una combinación lineal finita

$$t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots t_k a_k,$$

tal que $a_i \in \mathcal{A}$, $0 \leq t_i \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq k$, y $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$. Denotamos como $ec(\mathcal{A})$ al conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de $\mathcal{A}$, llamado envolvente convexa de $\mathcal{A}$. Observar que $\mathcal{A} \subset ec(\mathcal{A})$.
• El conjunto $\mathcal{A}$ se dice *convexo* si contiene a todas las combinaciones convexas de sus puntos, es decir $\mathcal{A} = ec(\mathcal{A})$. Es inmediato deducir, por inducción en

$k \geq 2$, que un conjunto $\mathcal{A}$ es convexo, si y solo si

$$ta + (1-t)b \in \mathcal{A} \quad \forall\ t \in [0,1], \ \ \forall\ a, b \in \mathcal{A}.$$

• Se llama *envolvente convexa cerrada* de $\mathcal{A}$ a $\overline{ec(\mathcal{A})}$, donde $\overline{}$ indica la clausura (o adherencia).
• Si $\mathcal{A}$ es tal que $\overline{ec(\mathcal{A})}$ es compacto, llamaremos a este último conjunto *la envolvente convexa compacta* de $\mathcal{A}$.
• Si $\mathcal{K}$ es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial topológico, se llama *punto extremal* de $\mathcal{K}$ (cuando existe) a un punto $a \in \mathcal{K}$ tal que las únicas combinaciones convexas $tb + (1-t)c = a$, con $0 \leq t \leq 1$ $b, \ c \in \mathcal{K}$, son aquellas para las cuales $b = a$ ó $c = a$.

• **Teorema de Krein-Milman**
Todo compacto no vacío y convexo en un espacio vectorial topológico contiene puntos extremales y coincide con la envolvente convexa compacta del conjunto de sus puntos extremales.
La demostración del Teorema de Krein-Milman puede encontrarse por ejemplo en [81, Teorema 3.21].

Ejercicio 1.7.6. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$. Chequear que toda combinación convexa de $\{x_1, x_2\}$ está en el segmento con extremos x_1, x_2 y recíprocamente. Para ilustrar el teorema de Krein-Milman, considerar un polígono regular K en $\mathbb{R}^2$. (K es la unión del interior del polígono con su borde). Entonces K es compacto. Chequear con argumentos geométricos que: (a) el polígono K es convexo; (b) los puntos extremales de K son los vértices del polígono; (c) todo punto de K es una combinación convexa de sus vértices. En el ejemplo del polígono, la cantidad de puntos extremales es finita. Para ilustrar el teorema de Krein-Milman cuando la cantidad de puntos extremales es infinita, considerar una circunferencia $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ y el compacto K que es la unión de la circunferencia S^1 (borde de K) con la región acotada encerrada por S^1 (interior de K). Entonces K es compacto. Chequear con argumentos geométricos que: (d) K es convexo; (e) el conjunto de puntos extremales de K es la circunferencia S^1; (f) todo punto de K es combinación convexa de dos puntos extremales.

Demostración del Teorema 1.7.5

Demostración. **(a)** Es inmediato chequear que $\mathcal{M}_T$ es convexo: en efecto, si $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T$ entonces para todo conjunto boreliano B se cumple

$$\mu_i(T^{-1}(B)) = \mu_i(B) \quad i = 1, 2.$$

Luego, cualquiera sea $0 \leq t \leq 1$ se tiene

$$[t\mu_1 + (1-t)\mu_2](T^{-1}(B)) = [t\mu_1 + (1-t)\mu_2](B),$$

de donde $t\mu_1 + (1-t)\mu_2 \in \mathcal{M}_T$, probando que $\mathcal{M}_T$ es convexo.
Ahora probemos que $\mathcal{M}_T$ es compacto. Recordemos que $\mathcal{M}$ es compacto con la topología débil* (esto fue demostrado en la sección 1.2). Luego, para demostrar que $\mathcal{M}_T$ es compacto, basta probar que $\mathcal{M}_T$ es cerrado en $\mathcal{M}$. Sea $\mu_n \to \mu$ en $\mathcal{M}$ tales que $\mu_n \in \mathcal{M}_T$. Para deducir que $\mu \in \mathcal{M}_T$ basta recordar que es continuo el operador $T^* : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$, definido como $[T^*\mu](B) = \mu(T^{-1}(B))$ para todo boreliano B. (La continuidad de T^* fue demostrada en la sección 1.2). Entonces

$$T^*\mu = \lim_n T^*\mu_n = \lim \mu_n = \mu,$$

de donde $\mu \in \mathcal{M}_T$. Esto termina la prueba de que $\mathcal{M}_T$ es cerrado en el espacio métrico compacto $\mathcal{M}$, y por lo tanto $\mathcal{M}_T$ es compacto.
(b) Probemos que μ es ergódica para T si y solo si es punto extremal de $\mathcal{M}_T$. Primero asumamos que μ no es ergódica. Entonces existe un boreliano T-invariante $A \subset X$ tal que $0 < \mu(A) < 1$. Sea $A^c = X \setminus A$ y considérense las probabilidades definidas para todo boreliano B por:

$$\mu_1(B) := \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}, \qquad \mu_2(B) := \frac{\mu(B \cap A^c)}{\mu(A^c)}.$$

Por construcción, tenemos

$$\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2, \qquad \text{donde } t := \mu(A).$$

Nótese que $\mu_1 \neq \mu_2$, porque $\mu_1(A) = 1$ y $\mu_2(A) = 0$. Además $0 < t < 1$, de donde

$$\mu \neq \mu_1, \quad \mu \neq \mu_2.$$

Por lo tanto μ no es punto extremal de $\mathcal{M}_T$. Hemos probado que si μ no es ergódica, entonces μ no es punto extremal de $\mathcal{M}_T$.
Ahora probemos el recíproco. Asumamos que μ es ergódica y probemos que μ es punto extremal de $\mathcal{M}_T$. Sea $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$, donde $0 \leq t \leq 1$ y $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T$. Por un lado, si $t = 0$ ó $t = 1$ entonces $\mu = \mu_1$ ó $\mu = \mu_2$. Por otro lado, si $0 < t < 1$ entonces $\mu_1 \ll \mu$ y $\mu_2 \ll \mu$ (pues si $\mu(B) = 0$ siendo la suma de dos sumandos no negativos, cada sumando debe ser cero, de dónde $0 = \mu_1(B) = \mu_2(B)$). Sea A un conjunto T-invariante. Por hipótesis μ es ergódica, entonces $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A^c) = 0$. Como $\mu_i \ll \mu$ para $i = 1, 2$, deducimos que $\mu_i(A) = 0$ ó $\mu_i(A) = 1$. Luego μ_i es ergódica. Por lo demostrado en el Teorema 1.7.3, $\mu_i \ll \mu$ siendo μ_i y μ ergódicas, implica que $\mu_i = \mu$. En este caso tenemos entonces $\mu = \mu_1 = \mu_2$. Hemos probado, en todos los casos, que las únicas combinaciones convexas de μ son aquellas para las cuales $\mu = \mu_1$ ó $\mu = \mu_2$. Entonces por definición, μ es extremal como queríamos demostrar.
(c) Es consecuencia directa de a) y b), y del Teorema de Krein Milman. □

Fin de la prueba del Teorema 1.7.1:
Existencia de medidas ergódicas

Demostración. Por la parte c) del Teorema 1.7.5,

$$\mathcal{M}_T = \overline{e.c.\mathcal{E}_T},$$

donde $\mathcal{E}_T$ denota el conjunto de medidas ergódicas para T y $\mathcal{M}_T$ el de todas las medidas T-invariantes. Por el Teorema 1.1.5, $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$. Luego $\mathcal{E}_T \neq \emptyset$. Para probar la última afirmación del Teorema 1.1.5 aplicamos la Definición de la clausura $\overline{e.c.\mathcal{E}_T}$ de la envolvente convexa del conjunto $\mathcal{E}_T$ de probabilidades ergódicas. Recordamos que la envolvente convexa $e.c.\mathcal{E}_T$ es el conjunto de todas las medidas que se obtienen como combinaciones lineales convexas de medidas ergódicas. Como toda medida invariante μ está en $\overline{e.c.\mathcal{E}_T}$, entonces μ se puede aproximar, tanto como uno desee en la topología débil* del espacio de probabilidades, por medidas que son por combinaciones lineales finitas y convexas de medidas ergódicas. □

Ejercicio 1.7.7. Sea $T : X \mapsto X$ una transformación continua en un espacio métrico compacto.
(I) Asuma que existe una medida μ invariante por T y positiva sobre abiertos (no necesariamente ergódica).
(a) Probar que para cada abierto V no vacío, existe una medida ergódica ν_V tal que $\nu_V(V) > 0$.
Sugerencia: Por absurdo, si $\nu(V) = 0$ para toda medida ergódica ν, entonces $\rho(V) = 0$ para toda medida de probabilidad ρ que sea combinación convexa finita de ergódicas. Probar que $\rho(V) = 0$ para toda medida ρ en la envolvente convexa compacta de las ergódicas (con la topología débil* del espacio $\mathcal{M}$ de probabilidades). Usar el Teorema 1.7.5 para concluir que $\mu(V) = 0$, contradiciendo la hipótesis.
(b) Usando el Lema de Recurrencia de Poincaré demostrar que el conjunto de los puntos recurrentes es denso en X.
(c) Concluir que $\Omega(T) = X$.
(II) Asuma que para todo abierto V existe una medida de probabilidad invariante μ_V (no necesariamente ergódica), tal que $\mu_V(V) > 0$.
(d) Demostrar que existe una medida de probabilidad invariante ν_V ergódica tal que $\nu_V(V) > 0$.
(e) Demostrar que existe una medida de probabilidad invariante ρ positiva sobre abiertos. Sugerencia: Tomar una base numerable de abiertos $\{V_i\}_{i\geq 1}$, demostrar que las medidas $\rho_n := \sum_{i=1}^{n}(1/2^i)\mu_{V_i}$ (que no son probabilidades, pero son finitas) satisfacen $0 < \rho_n(X) \leq 1$, son T-invariantes y existe $\rho = \text{lím}^*_{n\to+\infty} \rho_n$ en la topología débil* del espacio $\mathcal{M}^1$ de medidas de probabilidad finitas uniformemente acotadas por 1.

Capítulo 2

Teoremas Ergódicos.

Las hipótesis generales para este capítulo son las siguientes:
$(X, \mathcal{A})$ es un espacio medible, $T : X \mapsto X$ es una transformación medible que preserva una medida de probabilidad μ, y $f : X \mapsto \mathbb{R}$ es una función medible.
Consideremos el siguiente resultado:
Sea $T : X \mapsto X$ medible en el espacio métrico compacto X. Sea μ una medida de probabilidad en la sigma-álgebra de Borel. Entonces μ es T-invariante si y solo si para toda $f : X \mapsto \mathbb{R}$ continua se cumple

$$\int f \, d\mu = \int f \circ T \, d\mu \tag{2.1}$$

Además, vale la igualdad (2.1) para toda f continua si y solo si vale para toda $f \in L^p(\mu)$, cualquiera sea el natural $p \geq 1$.

Ejercicio 2.0.8. Probar la afirmación anterior.

2.1. Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin Enunciado y Corolarios

Definición 2.1.1. Promedios temporales Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una medida de probabilidad μ (no necesariamente ergódica). Sea $f \in L^p(\mu)$ para $1 \leq p \in \mathbb{N}$.
Se denota con $\widetilde{f}^+$ o simplemente con $\widetilde{f}$ al límite de los llamados *promedios orbitales (o promedios temporales o promedios de Birkhoff) hacia el futuro* de f, en los puntos $x \in X$ donde exista, esto es:

$$\widetilde{f}^+(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(f(x) + f \circ T(x) + \dots f \circ T^{n-1})$$

Si además T es invertible, se denota con $\widetilde{f}^-$ al límite de los promedios orbitales (o temporales o de Birkhoff) hacia el pasado, en los puntos x donde exista. Esto es:

$$\widetilde{f}^-(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(f(x) + f\circ T^{-1}(x) + \dots f\circ T^{-(n-1)}(x))$$

Teorema 2.1.2. Teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin
Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Si $T : X \mapsto X$ es medible que preserva una medida de probabilidad μ entonces:

a) *Para toda $f \in L^1(\mu)$ existe $\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\circ T^j(x)$ μ-c.t.p. en $x \in X$.*

b) *$\widetilde{f}$ es T-invariante, es decir : $\widetilde{f}\circ T = \widetilde{f}$ μ-c.t.p. Más precisamente, para todo $x \in X$ existe $\widetilde{f}(x)$ si y solo si existe $\widetilde{f}(T(x))$ y en ese caso $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(T(x))$.*

c) *Para todo natural $p \geq 1$, si $f \in L^p(\mu) \subset L^1(\mu)$, entonces $\widetilde{f} \in L^p(\mu)$ y la convergencia es también en $L^p(\mu)$.*

d) $\int f\, d\mu = \int \widetilde{f}\, d\mu$

La demostración de Birkhoff del Teorema 2.1.2 se encuentra en [9]. Otra demostración, diferente de la de Birkhoff, puede encontrarse por ejemplo, en [98, proof of Theorem 1.14, pag. 38-39], en [41, Theorem 2.1.5] o en [54, pág. 114-122] Mane (ver también [55]).
El Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin es un caso particular del llamado **Teorema Ergódico Subaditivo de Kingmann** [43], que establece la convergencia de la sucesión $\{f_n/n\}_n$ donde f_n, en vez de ser necesariamente una suma de Birkhoff, es *una sucesión subaditiva de funciones* en $L^1(\mu)$. Más precisamente, se asume por hipótesis, que

$$f_{n+m} \leq f_n + f_m \circ T^n \quad \forall \;\; n, m \in \mathbb{N}^+,$$

donde $f_1 \in L^1(\mu)$. En particular, $f_n = \sum_{j=0}^{n-1} f_1 \circ T^j$ es un ejemplo de sucesión subaditiva.
El Teorema Ergódico Subaditivo de Kingmann establece que, para toda medida μ que sea invariante por T, para toda sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ subaditiva de funciones reales en $L^1(\mu)$, *la sucesión $\{f_n/n\}_n$ converge μ-c.t.p.* Luego, este Teorema generaliza el Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin. La demostración del Teorema Subaditivo de Kingmann se encuentra en [43]. Otra demostración, que no usa el Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin, y por lo tanto puede sustituir la demostración de este último teorema, se encuentra en [6].

Corolario 2.1.3. Igualdad de los promedios temporales hacia el futuro y hacia el pasado.
Si T es medible, invertible, con inversa medible, y preserva una medida de probabilidad μ, entonces para toda $f \in L^1(\mu)$ se cumple $\widetilde{f}^+$ (promedio temporal hacia el futuro) *y $\widetilde{f}^-$* (promedio temporal hacia el pasado) *existen μ-c.t.p. y son iguales $\widetilde{f}^+ = \widetilde{f}^-$ μ-c.t.p.*
(Ver la definición de $\widetilde{f}^+$ y $\widetilde{f}^-$ en 2.1.1.)
En el siguiente Ejercicio 2.1.4, se da una guía para la demostración del Corolario 2.1.3.

Ejercicio 2.1.4. Probar el corolario 2.1.3 como consecuencia del Teorema de Birkhoff-Khinchin. Sugerencias: Para demostrar que existen $\widetilde{f}^+(x)$ y $\widetilde{f}^-(x)$ para μ-c.t.p. $x \in X$, aplicar el teorema de Birkhoff a T^{-1}, probar que toda medida μ es invariante por T si y solo sí lo es por T^{-1}, y usar que la intersección de dos conjuntos con μ-medida igual a 1 tiene medida μ-medida 1. Para probar que $\widetilde{f}^+(x) = \widetilde{f}^-(x)$ para μ-c.t.p. $x \in X$, para cada natural $n \geq 1$ denote $f_n^+ := (1/n)\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$, $f_n^- := (1/n)\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^{-j}$. Por el Teorema de Birkhoff, $f_n^- - f_n^+$ converge en $L^1(\mu)$ a $\widetilde{f}^- - \widetilde{f}^+$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe n suficientemente grande tal que $\|\widetilde{f}^- - \widetilde{f}^+\|_{L^1} \leq \|f_n^- - f_n^+\|_{L^1} + \epsilon$. Basta probar entonces que $\int |f_n^- - f_n^+|\, d\mu$ tiende a cero cuando $n \to +\infty$. Chequear que para todo $x \in X$ se cumple la siguiente igualdad:

$$f_{n+1}^-(x) - f_{n+1}^+(x) = f_{n+1}^-(x) + f_{n+1}^+(x) - 2f_{n+1}^+(x) =$$

$$= \frac{2n+1}{n}\, f_{2n+1}^+(T^{-n}(x)) \quad + \frac{f(x)}{n+1} \quad - \quad 2f_{n+1}^+(x)$$

Como f_{2n+1}^+ converge a $\widetilde{f}^+$ en $L^1(\mu)$, y además la medida μ y la función $\widetilde{f}^+$ son invariantes por T, tenemos, para todo n suficientemente grande:

$$\int |f_{2n+1}^+ - \widetilde{f}^+|\, d\mu < \epsilon$$

$$\int |f_{2n+1}^+ - \widetilde{f}^+|\, d\mu = \int |f_{2n+1}^+ \circ T^{-n} - \widetilde{f}^+ \circ T^{-n}|\, d\mu =$$

$$= \int |f_{2n+1}^+ \circ T^{-n} - \widetilde{f}^+|\, d\mu < \epsilon$$

Juntando todo lo anterior, deducir, para todo n suficientemente grande, que:

$$\|f_{n+1}^- - f_{n+1}^+\|_{L^1(\mu)} \leq$$

$$\frac{2n+1}{n+1}\, \|f_{2n+1}^+ \circ T^{-n} - \widetilde{f}^+\|_{L^1(\mu)} \quad + \quad \frac{|f(x)|}{n+1} \quad + \quad 2\,\|f_{n+1}^+ - \widetilde{f}^+\|_{L^1(\mu)}$$

$$\leq 3\epsilon + \epsilon + 2\epsilon = 6\epsilon.$$

Corolario 2.1.5. Promedios de medida de transitividad. *Para toda medida μ invariante por T y para todos los conjuntos A y B medibles, existe el límite siguiente:*

$$\tau(A,B) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A)\cap B)$$

Demostración: Denotemos χ_C a la función característica de cualquier conjunto C. Sea

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A)\cap B) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int \chi_{T^{-j}(A)}\chi_B \, d\mu = \int (\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\chi_A\circ T^j)\chi_B \, d\mu,$$

El integrando a la derecha de la igualdad anterior está dominado por $1 \in L^1(\mu)$. Por el teorema de convergencia dominada $\lim I_n = \int \widetilde{\chi}_A \chi_B \, d\mu \quad \Box$

Ejercicio 2.1.6. Probar que el límite $\tau(A,B)$ del Corolario 2.1.5 verifica las siguientes desigualdades

$$\mu(A) - \sqrt{\mu(A)[1-\mu(B)]} \leq \tau(A,B) \leq \sqrt{\mu(A)\mu(B)}.$$

Concluir que:
$\tau(A,B) = 0$ si $\mu(A) = 0$ ó $\mu(B) = 0$.
Si $\tau(A,B) = 0$ entonces $\mu(A) + \mu(B) \leq 1$
$\tau(A,B) = 1$ si y solo si $\mu(A) = \mu(B) = 1$.
Sugerencia para la primera parte: En la demostración del Corolario 2.1.5 se probó que $\tau(A,B) = \int \widetilde{\chi}_A\chi_B, d\mu$. En $L^2(\mu)$ se cumple

$$\int fg \, d\mu \leq \|f\|_{L^2}\,\|g\|_{L^2}.$$

Para probar la desigualdad de la derecha, aplicar lo anterior a $\widetilde{\chi}_A$ y χ_B, y recordar que $0 \leq \widetilde{\chi}_A \leq 1$, por lo cual $\widetilde{\chi}_A^2 \leq \widetilde{\chi}_A$. Deducir que $\|\widetilde{\chi}_A\|_{L^2} \leq \sqrt{\mu(A)}$ aplicando el teorema de Birkhoff. Para probar la desigualdad de la izquierda, aplicar la desigualdad de la derecha a A y B^c y probar que $\tau(A,B)+\tau(A,B^c) = \mu(A)$.

Corolario 2.1.7. Promedios de sucesión de funciones.
Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una medida de probabilidad μ. Sea $f_n \in L^1(\mu)$ una sucesión de funciones, dominada por $f_0 \in L^1(\mu)$, que converge μ-c.t.p. y en $L^1(\mu)$ a $f \in L^1(\mu)$. Entonces

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j\circ T^j = \widetilde{f} \quad \mu\text{-c.t.p. y en } L^1(\mu).$$

Ejercicio 2.1.8. Demostrar el corolario 2.1.7. Sugerencia: Basta probarlo para $f_n \geq 0; f_n \to 0$ *c.t.p.* Sea $G_k(x) = \sup_{n\geq k}\{f_n(x)\}$. Entonces $G_k \to 0$ *c.t.p.*, y por convergencia dominada $\|G_k\|_{L^1} \to 0$. Sea $\widetilde{G}_k = \lim_{n\to\infty}(1/n)\sum_{j=0}^{n-1} G_k \circ T^j$ que existe μ-c.t.p. por el teorema de Birkhoff. La sucesión $\widetilde{G}_k$ es decreciente con k, por lo que tiene límite, y por el lema de Fatou

$$0 \leq \int \lim \widetilde{G}_k \, d\mu \leq \lim \int \widetilde{G}_k \, d\mu = \lim \int G_k \, d\mu = 0.$$

Luego $\widetilde{G}_k \to 0$ *c.t.p.*. Finalmente, usar que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j \circ T^j(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n-1} f_j \circ T^j(x) \leq \widetilde{G}_k(x).$$

Definición 2.1.9. Dado A conjunto medible, se denomina *tiempo medio de estadía $\tau_A(x)$ de un punto $x \in X$ en A,* al siguiente límite, cuando existe:

$$\tau_A(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\#\{j \in \mathbb{N} : 0 \leq j \leq n-1, \ T^j(x) \in A\}$$

Ejercicio 2.1.10. Probar el siguiente teorema, para todo conjunto medible $A \subset X$ y para toda medida μ que sea invariante por $T : X \mapsto X$:
El tiempo medio de estadía τ_A existe μ-c.t.p. y además la convergencia es en $L^p(\mu)$ para todo $p \geq 1$ natural. Además $\int \tau_A \, d\mu = \mu(A)$. Sugerencia: Observar que el tiempo medio de estadía en A es la función $\tau_A = \widetilde{\chi}_A$, donde χ_A es la función característica de A. Aplicar el teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin.

Definición 2.1.11. Conjuntos de probabilidad total para T Sea $T : X \mapsto X$ una transformación medible tal que el conjunto $\mathcal{M}_T$ de las medidas de probabilidad T-invariantes es no vacío. Un conjunto medible $\Lambda \subset X$ se dice que tiene *probabilidad total para* T si para toda $\mu \in \mathcal{M}_T$ se cumple $\mu(\Lambda) = 1$.
Entonces, la primera parte del ejercicio anterior se puede enunciar de la siguiente forma:
Para todo conjunto medible $A \subset X$, el tiempo medio de estadía $\tau_A(x)$ existe para un conjunto de puntos con probabilidad total. Si además $\mu(A) > 0$, entonces $\tau_A(x)$ no nula μ-c.t.p. (pues $\int \tau_A \, d\mu = \mu(A)$).

En el Corolario 2.6.3 veremos un criterio para que un conjunto tenga probabilidad total, que requiere solo el conocimiento de las medidas ergódicas.

Ejercicio 2.1.12. Conjuntos estables e inestables.
Sea $T : X \mapsto X$ Borel medible e invertible con inversa medible, en un espacio métrico compacto X, tal que el conjunto de medidas invariantes por T es no vacío. Sea $f : X \mapsto \mathbb{C}$ una función compleja continua. Sea $\Lambda \subset X$ el conjunto

de probabilidad total tal que existen, y son iguales entre sí, los límites $\widetilde{f}^+(x)$ y $\widetilde{f}^-(x)$ de los promedios de Birkhoff hacia el futuro y hacia el pasado, respectivamente. Sea $x_0 \in \Lambda$. Se definen los conjuntos estable e inestable respectivamente por el punto x_0 (quizás se reducen solo a $\{x_0\}$):

$$W^s(x_0) := \{y \in X : \lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(T^n y, T^n x_0) = 0\}$$

$$W^u(x_0) := \{y \in X : \lim_{n\to-\infty} \operatorname{dist}(T^n y, T^n x_0) = 0\}$$

Probar que para todo $y \in W^s(x_0)$ existe $\widetilde{f}^+(y)$ y $\widetilde{f}^+(y) = \widetilde{f}^+(x_0)$. Probar que para todo $y \in W^u(x_0)$ existe $\widetilde{f}^-(y)$ y $\widetilde{f}^-(y) = \widetilde{f}^-(x_0)$.

Ejercicio 2.1.13. Promedios de Birkhoff para funciones reales fuera de $L^1(\mu)$.
Probar la siguiente generalización del teorema de Birkhoff-Khinchin: Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva la probabilidad μ. Sea $f : X \mapsto \mathbb{R}$ medible.
Entonces, μ-c.t.p. o bien $\widetilde{|f|}\,(x) = +\infty$ o bien $\widetilde{f}$ existe y es finito.
Sugerencia: Basta probarlo para $f \geq 0$. Dado $c > 0$ sea

$$X_c = \{x \in X : \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \leq c\}$$

X_c es T- invariante. Sea $f_m(x) = \min(f(x), m)$. Usar el teorema de Birkhoff para probar que existe $\widetilde{f}_m$ μ-c.t.p. $x \in X_c$. Sea $f|_{X_c} = \chi_{X_c} f$ donde χ_{X_c} denota la función característica de X_c. Probar que $f|_{X_c} \in L^1(\mu)$ usando el teorema de convergencia monótona y la igualdad del teorema de Birkhoff $\int f_m|_{X_c}\, d\mu = \int \widetilde{f_m|_{X_c}}\, d\mu \leq c$. Deducir que existe el límite $\widetilde{f}(x)$ para μ-c.t.p. x en X_c. Tomar la unión de los X_c para todo $c \geq 1$ natural y concluir que en el complemento de esa unión se cumple $\widetilde{f} = +\infty$.

Ejercicio 2.1.14. Sea $T : X \mapsto X$ una transformación medible en un espacio métrico compacto X, tal que es no vacío el conjunto $\mathcal{M}_T$ de probabilidades invariantes por T. Probar que el conjunto siguiente tiene probabilidad total para T (i.e. tiene probabilidad 1 para toda $\mu \in \mathcal{M}_T$):

$$\left\{x \in X : \text{ existe } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^{pj}(x) \ \ \forall\, f \in C^0(X, \mathbb{R}),\ \forall\, p \geq 1\right\}$$

Sugerencia: $\mathcal{M}_{T^p}(X) \supset \mathcal{M}_T(X)$.

2.2. Otras caracterizaciones de la ergodicidad

En esta sección, salvo indicación en contrario, $(X, \mathcal{A})$ denota un espacio medible y $T : X \mapsto X$ una transformación medible que preserva alguna medida de probabilidad μ.
Se recuerda las Definiciones 1.6.1 y 1.6.2 de ergodicidad, y los Teoremas 1.6.3, 1.6.9 y 1.7.5, en los que dimos diferentes caracterizaciones de ergodicidad. Agregamos ahora las siguientes:

Teorema 2.2.1. Ergodicidad IV
Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una medida de probabilidad μ. Las siguientes propiedades son equivalentes:
a) *T es ergódica respecto de μ.*
b) *Para toda $f \in L^1(\mu)$ se cumple*

$$\widetilde{f}(x) = \int f\, d\mu \quad \mu - c.t.p.$$

c) *Para toda pareja de conjuntos medibles A y B se cumple:*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

El enunciado y la prueba del Teorema 2.2.1 fueron extraídos, con leves modificaciones, de [54, págs. 130-131] (ver también [55]).

Demostración de que a) ⇒ b) en el Teorema 2.2.1: Por el Teorema de Birkhoff-Khinchin $\int \widetilde{f}\, d\mu = \int f\, d\mu$. Entonces basta demostrar que $\widetilde{f}$ es constante $\mu-$c.t.p.
Por el teorema de Birkhoff-Khinchin $\widetilde{f}(x)$ existe μ-c.t.p., $\widetilde{f}(x)$ existe si y solo si existe $\widetilde{f}(Tx)$ y en ese caso $\widetilde{f}(Tx) = \widetilde{f}(x)$. Dicho de otra forma, el conjunto $A = \{x \in X : \widetilde{f}(x) \text{ existe } \}$ cumple $\mu(A) = 1$, $T^{-1}(A) = A$ y para todo $x \in A : \ \widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(Tx)$.
Sea $g : X \mapsto \mathbb{C}$ definida como $g(x) = \widetilde{f}(x)$ si $x \in A$, $g(x) = 0$ si $x \notin A$. Entonces para todo $x \in X$ se cumple $g \circ T(x) = g(x)$. Por la afirmación demostrada antes $g = cte \quad \mu-$c.t.p. Pero por construcción $g = \widetilde{f} \quad \mu-$c.t.p., de donde se deduce que $\widetilde{f} = cte \quad \mu-$c.t.p. como queríamos. □

Demostración de que b) ⇒ c) en el Teorema 2.2.1:
Obsérvese que $\mu(T^{-j}A \cap B) = \int \chi_{T^{-j}(A)}\chi_B\, d\mu = \int (\chi_A \circ T^j)\chi_B\, d\mu$, de donde:

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}A \cap B) = \int (\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A \circ T^j)\chi_B\, d\mu$$

Por convergencia dominada (el integrando está acotado por la función constante $1 \in L^1(\mu)$), resulta:

$$\lim I_n = \int \lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_A \circ T^j)\chi_B \, d\mu = \int (\widetilde{\chi}_A)\chi_B \, d\mu \tag{2.2}$$

Por el teorema de Bikhoff-Khinchin, observando que $\chi_A \in L^p(\mu)$ y $\widetilde{\chi}_A$ es invariante con T, luego contante $\mu - c.t.p$, se tiene que

$$\widetilde{\chi}_A(x) = \int \widetilde{\chi}_A \, d\mu = \int \chi_A \, d\mu = \mu(A) \quad \mu - c.t.p.x \in X$$

Sustituyendo en (2.2) resulta $\lim_n I_n = \int (\mu(A))\chi_B \, d\mu = \mu(A)\mu(B)$. $\square$

Demostración de que c) $\Rightarrow$ a) en el Teorema 2.2.1: Basta demostrar que si $A, B \subset X$ son medibles con μ medida positiva, entonces existe $j \geq 1$ tal que $\mu(T^{-j}(A) \cap B) > 0$ (cf. Definición 1.6.1). Por hipótesis:

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B) = \lim \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B) > 0$$

Entonces $\sum_{j=1}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B) > 0 \quad \forall\ n$ suficientemente grande, de donde $\mu(T^{-j}(A) \cap B) > 0$ para algún $j \geq 1$ como queríamos probar. $\square$

Ejercicio 2.2.2. Ergodicidad V.
Sea $T : X \mapsto X$ que preserva una probabilidad μ. Probar que:
(a) *T ergódica respecto de μ si y solo si para todo conjunto A medible tal que $T^{-1}(A) \subset A$ ó $T^{-1}(A) \supset A$, se cumple $\mu(A)$ es o bien cero o bien uno.*
(b) *T es ergódica respecto de μ si y solo si para toda $f \in L^1(\mu)$ tal que $f \circ T \leq f$ μ-*c.t.p.*, se cumple $f = cte$* $\quad \mu-$ c.t.p.
(c) *T es ergódica respecto de μ si y solo si para todos los conjuntos A medibles que cumplen $T^{-1}(A) \subset A$ ó $A \subset T^{-1}(A)$ se verifica $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A) = 1$.*
(d) *T es ergódica respecto de μ si y solo si para todas las funciones $f \in L^1(\mu)$ tales que $f \circ T \leq f$ μ-*c.t.p., ó $f \circ T \geq f$ μ-c.t.p.*se cumple $f = cte$* $\quad \mu-$ c.t.p.
Sugerencia para (a): Basta probarlo cuando $T^{-1}(A) \supset A$, pues en caso contrario, sustituimos A por su complemento. Denote χ_A a la función característica de A. Como $T^{-1}(A) \supset A$, pruebe que $\chi_{T^{-n}(A)}(x) = 1$ para todo $x \in A$. Luego $\widetilde{\chi}_A(x) = 1$ para todo $x \in A$, y usando que χ_A es constante μ-c.t.p. si μ es ergódica, se deduce $\mu(A) = 1$ ó $\mu(A) = 0$.

Ejercicio 2.2.3. Sea X un espacio métrico compacto y sea $T : X \mapsto X$ Borel-medible tal que preserva una probabilidad μ. Sea $\{g_i : i \geq 1\}$ un conjunto numerable denso en $C^0(X, [0,1])$. Probar que son equivalentes las afirmaciones siguientes:

i) μ es ergódica.
ii) $\widetilde{f}(y) = \int f \mathrm{d}\mu$ μ-c.t.p. y; $\forall\, f \in C_0(X, \mathbb{R})$
iii) $\widetilde{g_i}(y) = \int g_i \mathrm{d}\mu$ μ-c.t.p. y; $\forall\, i \geq 1$
Sugerencia: Recordar que μ es ergódica si y solo si para toda $h \in L^1(\mu) : \widetilde{h}(y) = \int h \mathrm{d}\mu$, μ-c.t.p. y; y que las funciones continuas son densas en $L^1(\mu)$.

Ejercicio 2.2.4. Sea X un espacio métrico compacto y sea $T : X \mapsto X$ Borel-medible tal que preserva una probabilidad μ. Probar que T es ergódica respecto de μ si y solo si para toda función compleja $f : X \mapsto \mathbb{C}$ continua, el límite $\widetilde{f}$ de los promedios de Birkhoff de f es constante μ-c.t.p. Sugerencia: Usar lo probado en el ejercicio 2.2.3 y chequear, usando el Teorema de Birkhoff-Khinchin, que si $\widetilde{f}$ es una constante μ-c.t.p., entonces esta constante es $\int f\, d\mu$.

Volvamos al caso general de un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ con una transformación medible $T : X \mapsto X$ que preserva una medida de probabilidad μ. Por el Lema de recurrencia de Poincaré (Teorema 1.5.2) si un conjunto medible A cumple $\mu(A) > 0$, entonces la órbita futura de μ-c.t.p. $x \in A$ vuelve infinitas veces a A. Sin embargo, ese Lema no dice nada sobre la frecuencia de visita y la duración de las estadías de la órbita de x en el conjunto A. Las medidas ergódicas dan exactamente el valor de la frecuencia asintótica en que la órbita de x pasa dentro de A.

Definición 2.2.5. Tiempo medio de estadía.
Llamamos *tiempo medio de estadía* $\tau_A(x)$ de la órbita por $x \in X$ en un conjunto medible A a:

$$\tau_A(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\#\{j \in \mathbb{N} : 0 \leq j \leq n-1, T^j(x) \in A\}}{n} =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A \circ T^j(x) = \widetilde{\chi}_A(x)$$

Teorema 2.2.6. Ergodicidad VI.
Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una medida de probabilidad μ. Entonces μ es ergódica para T si y solo si para todo conjunto medible A el tiempo medio de estadía $\tau_A(x)$ es constante μ-c.t.p. Además, en ese caso $\tau_A(x) = \mu(A)$ μ–c.t.p.

El enunciado y la prueba de este teorema, con leves modificaciones, fue extraído de [54, pág. 133] (ver también [55]).
Demostración: Por el teorema de Birkhoff-Khinchin $\widetilde{\chi}_A \in L^1(\mu)$ y cumple $\widetilde{\chi}_A = \widetilde{\chi}_A \circ T$ $\mu - c.t.p.$ Si $\widetilde{\chi}_A = cte$ $\mu - c.t.p.$ entonces, aplicando nuevamente el teorema de Bikhoff-Khinchin:

$$\widetilde{\chi}_A(x) = \int \widetilde{\chi}_A \, d\mu = \int \chi_A \, d\mu = \mu(A) \quad \mu - c.t.p. \tag{2.3}$$

Si $\tau_A = \widetilde{\chi}_A = cte \;\; \mu - c.t.p.$ para todo A medible, tomemos en particular A tal que $T^{-1}(A) = A$. Para demostrar la ergodicidad de μ hay que probar que $\mu(A)$ es cero o uno.

$$\widetilde{\chi}_A = \text{lím} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A \circ T^j$$

Pero $\chi_A \circ T^j = \chi_{T^{-j}(A)} = \chi_A$. Luego resulta:

$$\widetilde{\chi}_A(x) = \chi_A(x) \in \{0, 1\} \quad \mu - \text{c.t.p. } x \in X \tag{2.4}$$

Por (2.3) y (2.4) se tiene $\mu(A) \in \{0, 1\}$ y μ es ergódica como queríamos probar. Recíprocamente, si μ es ergódica, entonces por la parte b) del teorema 2.2.1. $\tau_A = \widetilde{\chi}_A = cte \;\; \mu - c.t.p.$ □

Ejercicio 2.2.7. Sea $T : X \mapsto X$ es Borel medible en un espacio topológico X conexo, que preserva una medida de probabilidad μ positiva sobre abiertos. Probar que:
(a) Una función $g \in L^1(\mu)$ invariante con T (i.e. $g \circ T = g$ μ-c.t.p.) es constante μ-c.t.p. si y solo si es localmente constante c.t.p. (es decir: existe un cubrimiento de X por abiertos, tales que en cada abierto V del cubrimiento se cumple $g|_V = K_V$ constante μ-c.t.p. de V.)
(b) T es ergódica si y solo si toda función $g \in L^1(\mu)$ que sea invariante con T es localmente constante.

2.3. Ergodicidad Única

Definición 2.3.1. La transformación T es *únicamente ergódica* si existe una única medida de probabilidad que es T invariante.
Por lo visto en la sección 1.7 esta única medida es extremal en el conjunto de las probabilidades invariantes; luego es ergódica.

Teorema 2.3.2. *Sea T continua en un espacio métrico compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *T es únicamente ergódica*

ii) *Para toda $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, para todo $x \in X$ existe el siguiente límite y es un número independiente de x:*

$$\widetilde{f} := \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x).$$

iii) *Para toda $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, la sucesión de funciones continuas $\{f_n\}$ definidas por*

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$$

converge uniformemente a una constante cuando $n \to \infty$.

Demostración: i) implica iii):
Sea μ la única medida de $\mathcal{M}_T(X)$. Probaremos f_n converge uniformemente a $\int f\, d\mu$ en X. Por absurdo, supongamos que existe $\epsilon > 0$, y una sucesión $n_j \to \infty$ tal que $\sup_{x \in X} |f_{n_j}(x) - \int f\, d\mu| \geq \epsilon$ para todo $j \geq 1$. Como el supremo es un máximo, existe $x_j \in X$, donde se alcanza.
Por el teorema de Riesz, existe una medida μ_j (no necesariamente T- invariante) tal que:

$$\forall\, g \in C^0(X, \mathbb{R}) : \quad \int g\, d\mu_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=0}^{n_j - 1} g \circ T^i(x_j)$$

Por la compacidad del espacio $\mathcal{M}(X)$, existe una subsucesión convergente de esta medidas μ_j. Por simplicidad seguiremos usando la misma notación para la subsucesión que para la sucesión original.

$$\mu_j \to \nu$$

Afirmamos que ν es T- invariante. En efecto:

$$\int g\, dT^*\nu = \int g \circ T\, d\nu = \lim \int g \circ T\, d\mu_j = \lim \frac{1}{n_j} \sum_{i=0}^{n_j - 1} g \circ T^{i+1}(x_j)$$

$$= \lim \frac{1}{n_j} \sum_{i=0}^{n_j - 1} g \circ T^i(x_j) = \lim \int g\, d\mu_{n_j} = \int g\, d\nu$$

Como por hipótesis T es únicamente ergódica, se tiene $\mu = \nu$. Entonces

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\nu = \lim f_{n_j}(x_j)$$

Pero por construcción

$$|f_{n_j}(x_j) - \int f\, d\mu| \geq \epsilon \quad \text{para todo } j \geq 1$$

contradiciendo la igualdad anterior.
iii) implica ii) porque la convergencia uniforme de funciones continuas en X implica la convergencia en todo punto de X.

ii) implica i): Sea Λ el funcional lineal positivo definido por

$$\Lambda(f) = \widetilde{f}$$

para toda $f \in C^0(X, \mathbb{R})$.
Para toda medida μ que sea T invariante, por el teorema de Birkhoff

$$\int f \, d\mu = \int \widetilde{f} \, d\mu = \widetilde{f} = \Lambda(f)$$

Por el teorema de Riesz, existe una única μ que cumple

$$\int f \, d\mu = \Lambda(f)$$

Luego existe una única μ que es T- invariante. □
Como ejemplo, veremos en la próxima sección que la rotación irracional en el círculo es únicamente ergódica.

Definición 2.3.3. Conjuntos minimales
Sea T una transformación continua en un espacio métrico compacto X.
Un subconjunto $\Lambda \subset X$ es *minimal* (desde el punto de vista topológico) si es compacto, no vacío, invariante hacia el futuro (es decir: $\Lambda \subset T^{-1}(\Lambda)$), y no existe ningún subconjunto propio de Λ que sea compacto, no vacío e invariante hacia el futuro.

Tenemos la siguiente caracterización (ver parta (a) del Ejercicio 2.3.4):
Λ *es minimal si y solo si* Λ es compacto, no vacío y T-invariante (es decir: $T^{-1}(\Lambda) = \Lambda$) y no contiene subconjuntos propios que sean compactos, no vacíos e invariantes por T hacia el futuro.

Si además el mapa continuo T es invertible con inversa continua, entonces Λ *es minimal si y solo si* Λ es compacto, no vacío y T-invariante, y no contiene subconjuntos propios que sean también compactos, no vacíos y T-invariantes (ver parte (b) del Ejercicio 2.3.4).

Finalmente, es fácil ver que cualquiera sea T continua (no necesariamente invertible), un conjunto Λ compacto, no vacío e invariante, *es minimal si y solo si* todas sus órbitas hacia el futuro son densas en Λ. Esto es porque la clausura de cada una de ellas es un compacto no vacío, invariante hacia adelante, y contenido en Λ (ver también parte (a) del Ejercicio 2.3.4).

Ejercicio 2.3.4. (a) Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes (y por lo tanto cualquiera de ellas puede utilizarse como definición de Λ minimal):
(i) $\Lambda \subset X$ es compacto no vacío e invariante por T hacia el futuro, y no contiene subconjuntos propios compactos no vacíos e invariantes hacia el futuro.

(ii) $\Lambda \subset X$ es compacto no vacío y T-invariante, y no contiene subconjuntos propios compactos no vacíos e invariantes por T hacia el futuro. (Sugerencia para demostrar (i) $\Rightarrow$ (ii): probar que si Λ cumple (i), entonces $T^{-1}(\Lambda) \setminus \Lambda$ también.)
(iii) $\Lambda \subset X$ es compacto no vacío, y para todo $x \in \Lambda$ la clausura de $\{f^j(x)\}_{j \geq 0}$ es igual a Λ.
(b) Asumir ahora que T es un homeormorfismo (es decir, T es continua, invertible y su T^{-1} es continua). Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes (y por lo tanto cualquiera de ellas puede utilizarse como definición de Λ minimal):
(i) $\Lambda \subset X$ es compacto no vacío e invariante por T hacia el futuro, y no contiene subconjuntos propios compactos no vacíos e invariantes hacia el futuro.
(ii) $\Lambda \subset X$ es compacto no vacío y T-invariante, y no contiene subconjuntos propios compactos no vacíos y T-invariantes.
(iii) $\Lambda \subset X$ es compacto no vacío, y para todo $x \in \Lambda$ la clausura de $\{f^j(x)\}_{j \geq 0}$ es igual a Λ.
(iv) $\Lambda \subset X$ es compacto no vacío e invariante por T hacia el pasado (es decir $T^{-1}(\Lambda) \subset \Lambda$), y no contiene subconjuntos propios compactos no vacíos e invariantes hacia el pasado.
(v) $\Lambda \subset X$ es compacto no vacío, y para todo $x \in \Lambda$ la clausura de $\{f^{-j}(x)\}_{j \geq 0}$ es igual a Λ.

Veamos como se vincula la ergodicidad única con los conjuntos minimales:

Teorema 2.3.5. *Si T es continua en un espacio métrico compacto X, y únicamente ergódica, entonces existe un único minimal Λ, y además Λ es el soporte de la medida invariante por T.*

Ejemplo de Furstenberg: El recíproco del Teorema 2.3.5 es falso: Furnstenberg en [29] (ver también [54, Capítulo 2, §7, pág. 172] o [55]), dio un ejemplo de transformación continua en el toro que preserva la medida de Lebesgue, para la cual todo el toro es el único minimal pero la medida de Lebesgue no es ergódica. Luego, en el Ejemplo de Furstenberg, la transformación no es únicamente ergódica, pero existe un único minimal (y además este minimal es el soporte de una medida T-invariante).
Otros ejemplos en los que se prueba la existencia de más de una medida ergódica para mapas con un único conjunto minimal, se encuentran en [7].

Demostración del Teorema 2.3.5: Sea μ la única medida invariante de T. Sea Λ el soporte compacto de μ, definido como

$$\Lambda := \{x \in X : \forall\, V \text{ entorno de } x \;\; \mu(V) > 0\}.$$

Λ es cerrado en X compacto, luego es compacto.

Veamos que $\Lambda \subset T^{-1}(\Lambda)$. Sea $x \in \Lambda$ y sea $y = T(x)$. Hay que probar que $y \in \Lambda$. Para todo entorno U de y, $T^{-1}(U)$ es entorno de x, luego $0 < \mu(T^{-1}(U)) = \mu(U)$. Esto prueba que $y \in \Lambda$; luego Λ es invariante hacia adelante.

Sea Λ_0 compacto, no vacío, invariante hacia adelante. Sea $\widehat{T} = T|_{\Lambda_0} : \Lambda_0 \mapsto \Lambda_0$. Por el teorema de existencia de medidas invariantes, existe $\widehat{\nu}$ probabilidad que es $\widehat{T}$ invariante.

Sea ν probabilidad en X, definida así:

$$\nu(A) = \widehat{\nu}(A \cap \Lambda_0)$$

El soporte de ν está contenido en Λ_0. En efecto, si $x \notin \Lambda_0$, entonces existe V, entorno de x disjunto con Λ_0. Luego $\nu(V) = 0$ y x no pertenece al soporte de ν.

Probemos que ν es T-invariante:

$$\nu(T^{-1}(A) = \widehat{\nu}(T^{-1}(A) \cap \Lambda_0) = \widehat{\nu}\{x \in \Lambda_0 : T(x) \in A\} =$$

$$\widehat{\nu}(\widehat{T}^{-1}(A \cap \Lambda_0)) = \widehat{\nu}(A \cap \Lambda_0) = \nu(A).$$

Como T es únicamente ergódica, $\nu = \mu$. Luego $\Lambda = \text{sop}\ \nu \subset \Lambda_0$. Hemos probado que todo Λ_0 compacto, no vacío e invariante hacia adelante contiene a Λ. De ello se deducen dos resultados: Primero, si Λ_0 además está contenido en Λ, entonces coincide con Λ. Luego Λ es minimal. Segundo: si Λ_0 es minimal, entonces coincide con Λ. Luego Λ es el único minimal. $\square$

Ejercicio 2.3.6. Sea X un espacio métrico compacto y sea $T : X \mapsto X$ medible, tal que existe alguna medida invariante μ.

$$P = \left\{x \in X : \text{ existe } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} h \circ T^j(x)\ \forall\ h : X \mapsto \mathbb{R} \text{ medible acotada}\right\}$$

a) Probar que P es el conjunto de los puntos periódicos de T. Sugerencia: 1) Inventar una sucesión $\{a_i\}_{i\geq 0}$ de ceros y unos tal que no exista el límite cuando $n \to \infty$ de $1/n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} a_j$. (Por ejemplo: 1 uno, 1 cero, 10 unos, 10 ceros, 100 unos, 100 ceros, 1000 unos, 1000 ceros, etc). 2) Si x no es periódico mostrar que $\widetilde{\chi}_A(x)$ no existe para $A = \{T^i(x) : a_i = 1\}$.

b) Sea $A \subset X$ cualquier boreliano dado. Probar que tiene probabilidad total el conjunto $\{x \in X :\ \text{existe } \lim_{n\to\infty}(1/n) \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x))\}$.

c) Probar que si T es continua, únicamente ergódica y existe un conjunto minimal con infinitos puntos, entonces $P = \emptyset$. (Un ejemplo de tal T es la rotación irracional del círculo, como veremos a continuación).

2.4. Ergodicidad de la rotación irracional

Teorema 2.4.1. *La rotación irracional en el círculo es únicamente ergódica. Luego, es ergódica respecto a la medida de Lebesgue.*

Una prueba muy breve y clásica del Teorema 2.4.1 requiere la aplicación de la Teoría Espectral para el estudio de las propiedades de ergodicidad y de mixing de los sistemas dinámicos. No cubriremos ese tema en este texto, por lo que daremos otra prueba, pedestre y más larga. La prueba breve que aplica la Teoría Espectral puede encontrarse por ejemplo en [98, Theorem 1.8].

Demostración. Sea $T(x) = x + x_0$ (mód. 1), para todo $x \in S^1 = \mathbb{R}/\sim$ (mód.1), donde $x_0 \in (0, 1)$ es irracional dado. Aplicando el Teorema 2.3.2 parte ii), para probar que T es únicamente ergódica, probaremos que para cada $f \in C^0(S^1, \mathbb{R})$ la sucesión

$$f_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$$

converge en todo punto a una constante cuando $n \to +\infty$.
Por el Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin para Lebesgue-casi todo punto $x_1 \in S^1$ existe $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_1) = \widetilde{f}(x_1)$. Dado $\epsilon > 0$, como f es uniformemente continua en S^1 (porque es continua en el compacto S^1), existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Por la definición de la rotación T tenemos la siguiente igualdad mód. 1, para todo punto $y \in S^1$ y para todo $j \geq 0$:

$$T^j(y) = y + jx_0 = (y - x_1) + x_1 + jx_0 = (y - x_1) + T^j(x_1).$$

Luego, $|y - x_1| < \delta \ \Rightarrow \ |f(T^j(y)) - f(T^j(x_1))| < \epsilon \ \ \forall\, j \in \mathbb{N} \ \Rightarrow$

$$|f_n(y) - f_n(x_1)| < \epsilon \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sea $N \geq 1$ tal que $|f_n(x_1) - \widetilde{f}(x_1)| < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Obtenemos:

$$|f_n(y) - \widetilde{f}(x_1)| < 2\epsilon \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ si } |y - x_1| < \delta \tag{2.5}$$

Hemos probado que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (módulo de continuidad uniforme de f, y por lo tanto independiente de x_1) tal que se cumple la desigualdad (2.5) para todo punto y a distancia menor que δ de x_1. Luego $\limsup f_n(y) - \liminf f_n(y) < 2\epsilon$ si $|y - x_1| < \delta$. Como esta desigualdad vale para Lebesgue-c.t.p. $x_1 \in S^1$, dado $\epsilon > 0$ y dado $y \in S^1$, podemos siempre elegir algún $x_1 \in S^1$ tal que $|y - x_1| < \delta$ y tal que existe $\widetilde{f}(x_1)$. Entonces podemos aplicar la desigualdad (2.5) para todo $y \in S^1$ eligiendo, para cada y, algún x_1 adecuado. Deducimos que para todo $y \in S^1$ se cumple

$\limsup f_n(y) - \liminf f_n(y) < 2\epsilon$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, existe

$$\widetilde{f}(y) = \lim f_n(y) \quad \forall\, y \in S_1.$$

Aplicando nuevamente la desigualdad (2.5), deducimos que *la función $\widetilde{f}$ es continua.* Lo anterior vale para cualquier rotación del círculo. Todavía no usamos que la rotación es irracional, que aplicaremos ahora para probar que $\widetilde{f}$ es constante. La función $\widetilde{f}$ es invariante por T, es decir $\widetilde{f} = \widetilde{f} \circ T$, pues el límite de los promedios temporales de Birkhoff. Luego, $\widetilde{f}$ toma un valor constante para cada órbita. Entonces, para probar que $\widetilde{f}$ es constante (sabiendo ya que es continua) alcanza con probar que existe una órbita densa. Para probar que alguna órbita es densa alcanza con probar que existe $x_1 \in S^1$ tal que para todo $\delta > 0$ la órbita $o^+(x_1) = \{T^n(x_1) : \ n \geq 0\}$ es δ-densa (i.e. todo intervalo de longitud δ contiene algún punto de $o^+(x_1)$). La transformación T preserva la medida de Lebesgue. Aplicando el Lema de Recurrencia de Poincaré, Lebesgue-c.t.p. es recurrente. Elijamos un punto recurrente x_1. Entonces existe $n_j \to +\infty$ tal que

$$\lim_j |T^{n_j}(x_1) - x_1| = 0.$$

Fijemos $m_1 \geq 1$ tal que $|T^{m_1}(x_1) - x_1| < \delta$. Observemos que $T^{m_1}(x_1) - x_1 = m_1 x_0$ (todas las igualdades son módulo 1). Como $x_0 \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$, tenemos que $m_1 x_0 \neq 0$ (mód. 1). Además $T^{2m_1}(x_1) = T^{m_1}(x_1) + m_1 x_0$, de donde

$$|T^{2m_1}(x_1) - T^{m_1}(x_1)| = |T^{m_1}(x_1) - x_1| = m_1 x_0 = a \in (0, \delta) \neq 0$$

Por inducción en $k \geq 0$ obtenemos

$$|T^{(k+1)m_1}(x_1) - T^{km_1}(x_1)| = a \neq 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Afirmamos que el conjunto $A := \{T^{km_1}(x_1) : \ k \in \mathbb{N}\} \subset o^+(x_1)$ es δ-denso en S^1. Por un lado, para valores diferentes de $k \in \mathbb{N}$, los puntos respectivos $T^{kn_1}(x_1) \in A$ son diferentes. En efecto, si $T^{km_1}(x_1) = T^{hm_1}(x_1)$, entonces $km_1x_0 = hm_1x_0$, de donde $|k-h|m_1x_0 = 0$ (mód. 1), donde $k, h, m_1 \in \mathbb{N}$. Como $x_0 \notin \mathbb{Q}$ deducimos que $h = k$. Por otro lado, dos puntos consecutivos de A cumplen la igualdad (2.6). Entonces $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(T^{km_1}(x_1) - a, T^{km_1}(x_1)] = S^1$, lo que demuestra que A es δ-denso en S^1 (pues $\delta > a$). Siendo $A \subset o^+(x_1)$, la órbita por x_1 es δ-densa, para todo $\delta > 0$, luego es densa, terminando la demostración del Teorema 2.4.1. $\square$

Observación 2.4.2. En la demostración del Teorema 2.4.1 probamos que existe una órbita $\{f^n(x_0)\}_{n\geq 0}$ densa en la rotación irracional del círculo $S^1 = [0,1]\ |$(mód. 1) dada por $f(x) = x + a$ (mód. 1) donde a es irracional. Esto implica que

Toda órbita por la rotación irracional del círculo es densa.

Demostración. Tenemos: $f^n(y_0) = y_0 + na = x_0 + na + (y_0 - x_0) = f^n(x_0) + (y_0 - x_0)$ (mód. 1). Entonces, la órbita $\{f^n(y_0)\}_{n\geq 0}$ se obtiene de la órbita $\{f^n(x_0)\}_{n\geq 0}$ rotándola $y_0 - x_0$ (mód. 1). Como cualquier rotación en el círculo es un homeomorfismo, lleva un conjunto denso a un conjunto también denso. Por lo tanto, existe una órbita densa si y solo si todas las órbitas son densas. Ya probamos (al final de la demostración del Teorema 2.4.1), que existe una órbita densa cuando a es irracional. Concluimos que todas las órbitas son densas. □

De la prueba del Teorema 2.4.1 deducimos que las rotaciones en el círculo son ergódicas (respecto de la medida de Lebesgue) si y solo sí son únicamente ergódicas, y esto ocurre si y solo si la rotación es topologicamente transitiva. Más en general, la transitividad topológica es equivalente a la ergodicidad única para la rotación rígida en cualquier grupo topológico compacto abeliano (ver por ejemplo [60, page 266]).

Ejercicio 2.4.3. Considérese el toro k-dimensional

$$\mathbb{T}^k = (S^1)^k = [0,1]^k/(\text{mód}\{1\}^k),$$

y la operación de grupo + (mód$\{1\}^k$). Sea $x_0 \in \mathbb{T}^k$. Sea T la traslación $T(x) = x + x_0$ (mód$\{1\}^k$) para todo $x \in \mathbb{T}^k$.Si $\widetilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un representante de $x_0 \in T^k$ y si $<,>$ denota el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$, asuma que $< x_0, m > \notin Z \quad \forall m \in Z^k - \{0\}$.
a) Demostrar que T es únicamente ergódica.
b) Demostrar que $\forall x \in X$, la medida de Lebesgue es el límite cuando $n \to \infty$ de las medidas $1/n \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(x)}$.
c) Probar que la medida de Lebesgue es la única medida de probabilidad en el toro invariante por todas las traslaciones, pero que no toda traslación es únicamente ergódica. Sugerencia: las traslaciones que tienen puntos periódicos no son únicamente ergódicas.
d) Deducir que para toda traslación ergódica del toro, éste es minimal y todas las órbitas son densas.

2.5. Transformaciones Mixing.

Definición 2.5.1. Sea $T : X \mapsto X$ medible que preserva una medida de probabilidad μ. Se dice que T *es mixing respecto de* μ*, o que* μ *es mixing respecto de* T*,* si para toda pareja A, B de conjuntos medibles se cumple:

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B). \tag{2.7}$$

Teorema 2.5.2. *Toda transformación mixing es ergódica.*
(El recíproco es falso como veremos en el Ejemplo 2.5.5.)

Demostración: En el teorema 2.2.1 se prueba que T es ergódica si y solo si

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \tag{2.8}$$

Si se cumple la igualdad (2.7) de la definición de transformación mixing, entonces se cumple la igualdad (2.8) de ergodicidad. En efecto si una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales es convergente a $a \in \mathbb{R}$, entonces (aplicando la definición de límite se puede chequear fácilmente): $\lim_{n\to+\infty}(1/n)\sum_{j=0}^{n-1} a_j = a$.
$\square$
Para probar que el recíproco del Teorema 2.5.2 es falso, basta ver que la medida de Lebesgue para la rotación irracional en el círculo (que ya probamos que es ergódica en al Teorema 2.4.1) no es mixing. Probaremos que no es mixing en el Ejemplo 2.5.5 de esta sección.

Definición 2.5.3. Sea $T : X \mapsto X$ Borel-medible en un espacio topológico X. Se dice que T *es topológicamente mixing* si y solo si para toda pareja de abiertos U y V no vacíos existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \forall n \geq n_0$$

Ejercicio 2.5.4. Probar que *si T es Borel medible en un espacio topológico X y es mixing respecto a una medida de probabilidad μ positiva sobre abiertos, entonces es topológicamente mixing.*

No toda medida ergódica es mixing. En efecto:

Ejemplo 2.5.5. *La medida de Lebesgue en el círculo no es mixing para la rotación irracional.*
Demostración: Sea la rotación irracional $T : S^1 \mapsto S^1$ en el círculo S^1, definida por $T(z) = z + \alpha$ (mód.1), donde α es un número irracional (que puede tomarse en $(0,1)$). Para demostrar que su única medida de probabilidad invariante (la medida m de Lebesgue) no es mixing, basta demostrar que T no es topológicamente mixing. Sea $U \subset S^1$ un intervalo abierto de longitud $\epsilon : 0 < \epsilon < (1/4)\,\text{mín}\{\alpha, 1-\alpha\}$. Probaremos que, si para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ se cumple $T^{n_0}(U) \cap U \neq \emptyset$, entonces $T^{n_0+1}(U) \cap U = \emptyset$. De lo contrario la longitud del intervalo unión $T^{n_0+1}(U) \cup U \cup T^{n_0}(U)$ sería menor que $3\epsilon < \text{mín}\{\alpha, 1-\alpha\}$, pero contendría dos puntos x_0 y $T(x_0) = x_0 + \alpha$ que distan $\text{mín}\{\alpha, 1-\alpha\}$. $\square$

Ejercicio 2.5.6. Sea T medible, invertible con inversa medible, que preserva una medida de probabilidad μ. Probar que *T es mixing si y solo si T^{-1} lo es.* (Sugerencia: para dos conjuntos A y B cualesquiera $\mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(T^n(B) \cap A)$.)

Ejemplo 2.5.7. Sea en $S^1 = [0,1]/ \sim$ mód. 1 el tent map T definido por $T(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 1/2$, y $T(x) = 2 - 2x$ si $1/2 \leq x \leq 1$. Probaremos el siguiente resultado:
La medida de Lebesgue m en S^1 es mixing para el tent map T; luego es ergódica.

Demostración. Por definición de mixing, debemos probar que

$$\lim_{n\to+\infty} m(T^{-n}A \cap B)B = m(A)m(B) \tag{2.9}$$

para toda pareja de conjuntos medibles A y B. Si $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$, entonces la igualdad anterior es trivialmente igual a cero. Consideremos entonces el caso en que A y B son no vacíos. Fijemos el boreliano A no vacío. Primero probaremos (2.9) cuando B es un intervalo abierto; luego cuando B es un abierto, después para B compacto, y finalmente para B boreliano cualquiera.
Sea B es un intervalo abierto, con longitud a. Para cada $n \geq 1$, la gráfica de T^n está compuesta por 2^n segmentos, con pendiente 2^n (en valor absoluto) cada uno. La imagen por T^n de cualquier intervalo de longitud 2^{n-1} cubre todo el intervalo $[0,1]$ (croquizar la gráfica). La preimagen por T^n de cualquier boreliano A no vacío está formada por 2^n copias de A, todas homotéticas a A con razón $1/2^n$ y equidistantes en el segmento $[0,1]$. Luego, la intersección $T^{-n}(A) \cap B$, cuando B es un intervalo de longitud a, contiene $k = [\text{parte entera}(a \cdot 2^n)] - 1$ de esas copias homotéticas a A, y menos de $k+2$ de esas copias. Luego:

$$(\text{parte entera}(a \cdot 2^n) - 1)\, \frac{m(A)}{2^n} \leq m(T^{-n}(A) \cap B)$$
$$\leq (\text{parte entera}(a \cdot 2^n) + 1)\, \frac{m(A)}{2^n}.$$

De las desigualdades anteriores se deduce que $\lim_n m(T^{-n}(A) \cap B) = a \cdot m(A) = m(B)m(A)$. Hemos probado (2.9) cuando B es un intervalo.
Ahora consideremos el caso en que B es un abierto no vacío en el círculo. $B = \bigcup I_j$ donde $\{I_j\}$ es una colección finita o infinita numerable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos. Dividimos en dos subcasos: Si B es unión finita de intervalos disjuntos dos a dos, o si es unión infinita numerable. Si $B = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$, tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} m(T^{-n}(A) \cap B) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} m(T^{-n}(A) \cap I_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \lim_{n\to+\infty} m(T^{-n}(A) \cap I_j) = \sum_{j=1}^{N} m(A)m(I_j) = m(A) \cdot m(B).$$

Si $B = \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j$, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$0 \leq m(B) - m(B_N) = m(B \setminus B_N) < \epsilon, \tag{2.10}$$

donde $B_N = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ Luego:

$$0 \leq m(T^{-n}(A) \cap B) - m(T^{-n}(A) \cap B_N) =$$
$$= m(T^{-n}(A) \cap (B \setminus B_N)) \leq m(B \setminus B_N) < \epsilon \ \ \forall\, n \geq 0.$$

Es decir:

$$0 \leq m(T^{-n}(A) \cap B) - m(T^{-n}(A) \cap B_N) < \epsilon \ \ \forall\, n \geq 0 \tag{2.11}$$

Por lo probado antes $\lim_{n\to+\infty} m(T^{-n}(A) \cap B_N) = m(A)m(B_N)$. Entonces, para todo n suficientemente grande

$$|m(T^{-n}(A) \cap B_N) - m(A)m(B_N)| < \epsilon. \tag{2.12}$$

Reuniendo las desigualdades (2.10), (2.11), (2.12), obtenemos, para todo n suficientemente grande, la siguiente cadena de desigualdades:

$$|m(T^{-n}(A) \cap B) - m(A)m(B)| \leq |m(T^{-n}(A) \cap B) - m(T^{-n}(A) \cap B_N)| +$$
$$+ |m(T^{-n}(A) \cap B_N) - m(A)m(B_N)| + m(A)|m(B_N) - m(B)| < 3\epsilon.$$

Lo anterior demuestra que $\lim_{n\to+\infty} m(T^{-n}(A) \cap B) = m(A)m(B)$. Hemos probado la igualdad (2.9) cuando B es abierto. Ahora demostremos que si la igualdad (2.9) se cumple para un conjunto B, entonces también se cumple para su complemento B^c. En efecto:

$$m(T^{-n}(A) \cap B^c) = m(T^{-n}(A)) - m(T^{-n}(A) \cap B) =$$
$$= m(A) - m(T^{-n}(A) \cap B) \to_n m(A) - m(A)m(B) = m(A)m(B^c).$$

Entonces, como (2.9) vale para todos los abiertos B, y es una propiedad cerrada en complementos, se cumple también para todos los compactos B. Ahora probémosla para cualquier boreliano B. Dado ϵ, existe un compacto K y un abierto V tales que $K \subset B \subset V$ y $m(V \setminus K) < \epsilon$. Luego

$$m(V) = m(B) + m(V \setminus B) \leq m(B) + m(V \setminus K) < m(B) + \epsilon.$$

Análogamente

$$m(K) = m(B) - m(B \setminus K) \geq m(B) - m(V \setminus K) > m(B) - \epsilon.$$

Entonces:

$$m(T^{-n}(A) \cap B) \leq m(T^{-n}(A) \cap V) \to_n m(A)m(V) \leq m(A)m(B) + \epsilon,$$
$$m(T^{-n}(A) \cap B) \geq m(T^{-n}(A) \cap K) \to_n m(A)m(K) \geq m(A)m(B) - \epsilon.$$

Lo anterior prueba que para todo n suficientemente grande

$$|m(T^{-n}(A) \cap B) - m(A)\, m(B)| < 2\epsilon,$$

de donde se deduce que la igualdad (2.9), como queríamos demostrar. $\square$

2.6. Descomposición Ergódica

El propósito de esta sección es enunciar el Teorema 2.6.2, de descomposición o desintegración ergódica. El mismo extiende el resultado de existencia de medidas ergódicas para transformaciones continuas en espacios métricos compactos, probando cómo se puede descomponer o desintegrar una medida invariante μ en función de las que son ergódicas.

Definición 2.6.1. Descomposición o Desintegración Ergódica
Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $T : X \mapsto X$ una transformación medible tal que existe alguna medida de probabilidad μ (definida en $\mathcal{A}$) invariante por T.
(i) Sea $A \in \mathcal{A}$. Decimos que μ tiene *descomposición o desintegración ergódica* para el conjunto A si para μ-c.t.p. $x \in X$ existe una medida ergódica μ_x tal que:

(a) La función real definida μ-c.t.p por $x \mapsto \mu_x(A)$ es medible para μ-c.t.p. $x \in X$. (Entonces está en $L^1(\mu)$ pues está acotada por 1)

(b)

$$\mu(A) = \int_{x\in X} \big(\mu_x(A)\big)\, d\mu.$$

(ii) Sea $h \in L^1(\mu)$. Decimos que μ tiene *descomposición o desintegración ergódica* para la función h si para μ-c.t.p $x \in X$ existe una medida ergódica μ_x tal que $h \in L^1(\mu_x)$ y tal que:

(c) La función real definida μ-c.t.p por $x \mapsto \int h\, d\mu_x$ es medible para μ-c.t.p. $x \in X$ y está en $L^1(\mu)$.

(d)

$$\int h\, d\mu = \int_{x\in X} \Big(\int h\, d\mu_x\Big)\, d\mu.$$

Teorema 2.6.2. .
Descomposición Ergódica en espacios métricos compactos
Sea X un espacio métrico compacto provisto de la sigma-álgebra de Borel. Sea $T : X \mapsto X$ una transformación medible que preserva una medida de probabilidad μ.
Entonces, para todo $A \in \mathcal{A}$ y para toda $h \in L^1(\mu)$ existe descomposición ergódica de μ.
Más aún, para μ-c.t.p. $x \in X$ existe y es única una medida ergódica μ_x (llamada **componente ergódica** de μ a la que pertenece x) *tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j(x)} = \mu_x,$$

donde el límite es en la topología débil estrella del espacio $\mathcal{M}$ de probabilidades.

La demostración del Teorema 2.6.2 para transformaciones continuas en espacios métricos se encuentra por ejemplo en [54, Cap.II §] (ver también [55]). Una generalización para transformaciones medibles que preservan una medida de probabilidad, se encuentra en en [41, Theorem 2.3.3]. Ahora veamos alguna de sus consecuencias:
Recordamos la Definición 2.1.11: Un conjunto medible $A \subset X$ se dice que tiene *probabilidad total* si $\mu(A) = 1$ para toda medida de probabilidad μ en X que sea invariante por T (bajo la hipótesis que existen medidas de probabilidad invariantes por T).

Corolario 2.6.3. *Si X es un espacio métrico compacto, y si $T : X \mapsto X$ es continua, entonces existen medidas ergódicas para T. Además un conjunto medible $A \subset X$ tiene probabilidad total si y solo si $\nu(A) = 1$ para toda medida de probabilidad ν ergódica para T.*

Demostración. Usando el Teorema 2.6.2, y la definición 2.6.1, existen medidas ergódicas para T . Además, para cualquier conjunto medible A, cualquiera sea la medida invariante μ tenemos, para el complemento A^c de A, la siguiente igualdad:

$$\mu(A^c) = \int \Big(\int \chi_{A^c} \, d\mu_x \Big) \, d\mu,$$

donde μ_x es una medida ergódica, que depende del punto x y está definida para μ-c.t.p. $x \in X$. Como $\chi_{A^c} \geq 0$ entonces la función $x \mapsto \int \chi_{A^c} \, d\mu_x = \mu_x(A^c)$ es no negativa. Las medidas μ_x son ergódicas según enuncia el Teorema 2.6.2 y la Definición 2.6.1. Concluimos que $\mu(A^c) = 0$ para toda medida invariante μ, si y solo si $\nu(A^c) = 0$ para toda medida ergódica ν. $\square$

Capítulo 3

Dinámica diferenciable: Hiperbolicidad uniforme y no uniforme

El siguiente ejemplo es conocido como .^{A}rnold's cat map"(el mapa del gato de Arnold). Esto es porque su dinámica fue representada por el matemático ruso Vladimir Arnold en [3], con un dibujo similar al de la Figura 3.1 de este capítulo. En su dibujo (ver por ejemplo uno parecido al original en [47, Figure 2]), Arnold utiliza el contorno de la figura estilizada de un gato, en lugar de una manzana como hacemos nosotros en la Figura 3.1 de este capítulo. En su dibujo, Arnold "muestra" el efecto de la propiedad de mixing del mapa sobre los trazos del contorno del gato, el cual, en pocos iterados, se vuelve irreconocible.

3.1. Ejemplo de automorfismo lineal hiperbólico en el toro.

Sea el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\sim$ donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por:$(a, b) \sim (c, d)$ en $\mathbb{T}^2$ si $c - a$ y $d - b$ son enteros. (Otra notación que se usa para $\mathbb{R}^2/\sim$ es $\mathbb{R}^2|_{mod \mathbb{Z}^2} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.)
Sea $\Pi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{Z}^2$ la proyección del espacio de recubrimiento $\mathbb{R}^2$ del toro definida por $\Pi(a, b) = (a, b)_{mod\ \mathbb{Z}^2}$ donde esto último indica la clase de equivalencia de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Sea $f : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ dada por

$$f(x) = \Pi(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(\Pi^{-1}(x))) \quad \forall\, x \in \mathbb{T}^2.$$

Llamaremos a f automorfismo lineal hiperbólico de matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro, o simplemente "$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro". Abusando de la notación, a un punto $x \in \mathbb{T}^2$ lo denotaremos con cualquier representante suyo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $(a, b) \in \Pi^{-1}(\{x\})$.

Ejercicio 3.1.1. Probar que $(0, 0)$ es el único punto fijo por la transformación $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro. Probar que

$$\{(1/5, 2/5), (4/5, 3/5)\} \quad \text{y} \quad \{(3/5, 1/5), (2/5, 4/5)\}$$

son dos órbitas periódicas por f y que son las únicas de período 2. Probar que

$$\{(1/2, 1/2), (1/2, 1), (1, 1/2)\}$$

es una órbita periódica de período 3.

La topología en el toro es el cociente de la topología usual en $\mathbb{R}^2$. Es metrizable y la métrica está dada por

$$\operatorname{dist}(x, y) =$$

$$\text{mín}\{\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} : (a, b) \in \Pi^{-1}(x), (c, d) \in \Pi^{-1}(y)\}.$$

La medida de Lebesgue en el toro es la medida de Borel $\widetilde{m}$ definida por $\widetilde{m}(B) = m(\Pi^{-1}B \cap [0, 1]^2)$ donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$. Se observa que la medida de Lebesgue en el toro es una medida de probabilidad. Donde no dé lugar a confusión renombraremos como m a la medida de Lebesgue en el toro.

Proposición 3.1.2. *La medida de Lebesgue m en el toro es invariante por la transformación $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

Demostración:
Denotamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a la matriz de coeficientes enteros que define la transformación f en el toro. Observamos que $\det(A) = 1$.
Sea B un boreliano en el toro.

$$m(f^{-1}(B)) = \int \chi_{f^{-1}(B)}(x)\, dm(x) = \int \chi_B \circ f(x)\, dm(x).$$

Haciendo el cambio de variables lineal e invertible $z = f(x)$ en la integral anterior resulta

$$m(f^{-1}(B)) = \int \chi_B(z) J(z)\, dm(z)$$

donde $J(z) = |\det df^{-1}(z)| = |\det df(x)|^{-1}$ es el jacobiano del cambio de variables $z = f(x)$. En nuestro caso una parametrización local de la superficie del toro $\mathbb{T}^2$ está dada por $\Pi|_{B_\delta(\Pi^{-1}(x))}$, donde $B_\delta(\Pi^{-1}(x))$ es la bola abierta en $\mathbb{R}^2$ de radio $\delta > 0$ (suficientemente pequeño) y centro en un punto denotado como $\Pi^{-1}(x) \in \mathbb{R}^2$ que se proyecta por $\Pi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ en el punto $x \in \mathbb{T}^2$. Calculando la derivada $df(x)$ y el Jacobiano con las coordenadas en esa carta local, resulta $T_x\mathbb{T}^2 \sim \mathbb{R}^2$, y

$$J(z) = (\det A)^{-1} = 1 \ \ \forall z \in \mathbb{T}^2.$$

Entonces $m(f^{-1}(B)) = \int \chi_B(z)\, dm(z) = m(B)$. □

Dinámica del ejemplo de automorfismo lineal hiperbólico en el toro. Estudiemos la dinámica por iterados de la transformación lineal $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ que tiene como matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

F se llama levantado de f a $\mathbb{R}^2$ y f se llama proyección de F en el toro. La dinámica de F está relacionada fuertemente con la dinámica de su proyección f en el toro.

En efecto la proyección $\Pi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ *cuando restringida a un entorno suficientemente pequeño del origen* $(0, 0)$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

Π transforma la dinámica de F en la de f. Más precisamente

$$\Pi \circ F = f \circ \Pi$$

Luego, aplicando $\Pi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ a una órbita de F se obtiene una órbita de f. Y la preimagen por Π de una órbita por f es una infinidad numerable de órbitas por F tal que una se obtiene de otra trasladándola en $\mathbb{R}^2$ según un vector de coordenadas enteras.

El comportamiento topológico local de las órbitas de F en un entorno suficientemente pequeño V del origen es el mismo (a menos del homeomorfismo $\Pi|_V$) que el de las órbitas de f en el abierto $\Pi(V)$.

Variedades invariantes.

Los valores propios de la matriz A son

$$\sigma := (3 + \sqrt{5})/2 > 1, \quad 0 < \lambda := (3 - \sqrt{5})/2 < 1.$$

Las direcciones propias respectivas tienen pendientes irracionales, la primera positiva y la segunda negativa. Se deduce que las dos rectas que pasan por el origen y tienen direcciones según los vectores propios de la matriz A son invariantes por F en el plano. Entonces sus proyecciones en el toro son curvas invariantes por f y se cortan transversalmente en el origen (y también se cortan transversalmente en todos sus otros puntos de intersección en el toro).

F restringida a la recta r_1 que tiene dirección propia de valor propio mayor que 1, expande las distancias exponencialmente con tasa $\log(3 + \sqrt{5})/2 > 0$. Es decir, contrae distancias hacia el pasado como $\sigma^{-n} = e^{-n \log \sigma}$:

$$\frac{\text{dist}(F^{-n}(a,b),(0,0))}{\text{dist}((a,b),(0,0))} = e^{-n \log \sigma} \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \quad \forall \ (a,b) \in r_1 \setminus (0,0).$$

Proyectando r_1 en el toro se obtiene una curva $W^u(0,0) = \Pi(r_1)$ inmersa en el toro, que se llama *variedad inestable por* $(0,0)$.
$W^u(0,0)$ pasa por el origen, *es densa en el toro* (esto se puede demostrar usando que la pendiente de r_1 en el plano es irracional y usando que la rotación irracional en el círculo es densa en el círculo), *es invariante por* f *y cumple:*

$$W^u(0,0) = \{y \in \mathbb{T}^2 : \lim_{n \to -\infty} f^n(y) = (0,0)\}$$

Esto último se debe a que $r_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n \to -\infty} F^n(a,b) = (0,0)\}$. Observamos que la subvariedad $W^u(0,0) = \Pi(r_1)$ es inmersa y densa en $\mathbb{T}^2$, pero *no es subvariedad encajada en* $\mathbb{T}^2$. Es decir, la topología que se define a lo largo de la subvariedad $W^u(0,0)$ no es la inducida por su inclusión en $\mathbb{R}^2$. Los abiertos en $W^u(0,0)$ están generados por los arcos abiertos (homeomorfos a intervalos abiertos en la recta real). Estos no se obtienen como intersección de un abierto en $\mathbb{T}^2$ con $W^u(0,0)$ pues cualquier abierto en $\mathbb{T}^2$ cortado con $W^u(0,0)$ contiene una infinidad de arcos conexos, debido a la densidad de $W^u(0,0)$.
Variedad inestable local: En este ejemplo, existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tal que, denotando $W^u_{loc}(0,0)$ (variedad inestable local) a la componente conexa de $W^u(0,0)$ intersecada con la bola de centro $(0,0)$ y radio ϵ en el toro $\mathbb{T}^2$, se tiene:

$$\frac{\text{dist}(f^{-n}(y),(0,0))}{\text{dist}(y,(0,0))} = e^{-n \log \sigma} \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \quad \forall \ y \in W^u_{loc}(0,0).$$

Esta igualdad se obtiene porque la bola de centro $(0,0)$ y radio $\epsilon > 0$ en el toro $\mathbb{T}^2$ es difeomorfa por un preimagen de Π, con la bola de centro $(0,0)$ y radio $\epsilon > 0$ en $\mathbb{R}^2$, si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño.
Análogamente F restringida a la recta r_2 que tiene dirección propia de valor propio menor que 1, contrae las distancias exponencialmente con tasa $\log(3 - \sqrt{5})/2 < 0$. Es decir, contrae distancias hacia el futuro como $\lambda^n = e^{n \log \lambda}$:

$$\frac{\text{dist}(F^{n}(a,b),(0,0))}{\text{dist}((a,b),(0,0))} = e^{n \log \lambda} \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \quad \forall \ (a,b) \in r_2 \setminus (0,0).$$

Proyectando r_2 en el toro se obtiene una curva $W^s(0,0) = \Pi(r_1)$ inmersa en el toro, que se llama *variedad estable por* $(0,0)$.
$W^s(0,0)$ pasa por el origen, *es densa en el toro* (porque la pendiente de r_2 en el plano es irracional), *es invariante por* f*, no encajada en* $\mathbb{R}^2$ y cumple:

$$W^s(0,0) = \{y \in \mathbb{T}^2 : \lim_{n \to +\infty} f^n(y) = (0,0)\}$$

Esto último se debe a que $r_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n\to+\infty} F^n(a,b) = (0,0)\}$.
Denotando por $W^s_{loc}(0,0)$ (variedad estable local) a la componente conexa de $W^s(0,0)$ intersecada con la bola de centro $(0,0)$ y radio ϵ en el toro $\mathbb{T}^2$, se tiene:

$$\frac{\text{dist}(f^n(y),(0,0))}{\text{dist}(y,(0,0))} = e^{n\log\lambda} \ \forall\ n \in \mathbb{N}, \quad \forall\ y \in W^s_{loc}(0,0).$$

Variedades invariantes por cualquier punto: El argumento anterior puede aplicarse a cualquier punto periódico x. Deducimos que todos los puntos periódicos son hiperbólicos tipo silla (tienen un valor propio mayor que uno y otro positivo menor que uno).
En general, para cualquier punto $x \in \mathbb{T}^2$, aunque no sea periódico, la variedad estable $W^s(x)$ y la variedad inestable $W^u(x)$ se definen como la proyecciones sobre el toro de las rectas en $\mathbb{R}^2$ que pasan por $\Pi^{-1}(x)$, según las direcciones de los vectores propios de la matriz A (que son las mismas que las direcciones de las rectas r_1 y r_2 en $\mathbb{R}^2$ que pasan por el origen). Argumentando como más arriba se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} \text{dist}(f^n(y), f^n(x)) = 0 \ \ \forall\ y \in W^s(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \text{dist}(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) = 0 \ \ \forall\ y \in W^u(x),$$

y el acercamiento a cero de esas distancias se realiza como λ^n o σ^{-n} respectivamente. Las variedad inestable por un punto x no es invariante si el punto x no es fijo por f, pero su imagen por f es la variedad inestable por el punto $f(x)$ (esto se chequea inmediatamente de la construcción de $W^u(x)$ y $W^u(f(x))$ como las imágenes por Π de las rectas paralelas a r_1 por $\Pi^{-1}(x)$ y $\Pi^{-1}(f(x)) = F(\Pi^{-1}(x))$ respectivamente).
Foliaciones invariantes:
La familia de todas las variedades inestables, forman en el toro $\mathbb{T}^2$ lo que se llama una *foliación* invariante: pues cada subvariedad de la foliación (llamada hoja), al aplicarle f se transforma en otra hoja de la foliación. Análogamente, la foliación formada por las variedades estables, es invariante.
Interpretación gráfica del automorfismo lineal hiperbólico: La deformación que produce f en este ejemplo de automorfismo lineal hiperbólico en el toro $\mathbb{T}^2$, está representado en la figura 3.1. Esa figura es una modificación de la conocida llamada "gato de Arnold"(que en vez de una manzana, deforma la imagen de un gato, figura creada por Arnold, en la década de 1960 para ilustrar la deformación hiperbólica de un automorfismo lineal hiperbólico en el toro $\mathbb{T}^2$). Al iterar sucesivas veces f, la figura representada, se estira a lo largo de la foliación inestable y se contrae a lo largo de la foliación estable. Como f es invertible, los pedazos que se obtienen de identificar 0 con 1 en vertical y horizontal, no se intersecan (provienen de subconjuntos disjuntos antes de aplicar f).

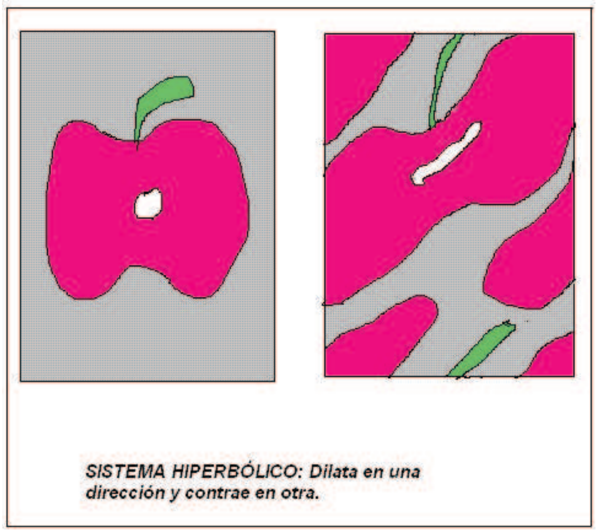

Figura 3.1: Deformación producida por el automorfismo lineal hiperbólico en el toro.

Definición 3.1.3. Exponentes de Lyapunov en puntos fijos hiperbólicos. Los logaritmos de los módulos de los valores propios de $df^p(x_0)$ dividido p, cuando x_0 es un punto periódico de período p, se llaman *exponentes de Lyapunov* en x_0. En el capítulo 3 definiremos con generalidad los exponentes de Lyapunov de cualquier sistema dinámico diferenciable, para casi todas sus órbitas (no necesariamente puntos fijos ni órbitas periódicas).

En el ejemplo del $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ f es lineal (mejor dicho F, dada por la matriz A, es lineal), por lo tanto la matriz A es, en una base adecuada de $T_{(0,0)}\mathbb{T}^2$), la derivada $df(0,0) : T_{(0,0)}\mathbb{T}^2 \sim \mathbb{R}^2 \mapsto T_{(0,0)}\mathbb{T}^2 \sim \mathbb{R}^2$. Los logaritmos de los valores propios de $A = df(0,0)$ son dos, uno positivo $\chi^+ = \log \sigma$ y el otro negativo $\chi^- = \log \lambda$. (El origen es un punto fijo hiperbólico tipo silla, pues $0 < \lambda < 1 < \sigma$).

El exponente de Lyapunov $\chi^+ := \log \mu = \log(3+\sqrt{5})/2 > 0$ es *la tasa exponencial de dilatación* al aplicar $df_{(0,0)}$, de las normas de los vectores en el subespacio propio U, que corresponde al valor propio μ de $df_{(0,0)}$. Precisamente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\|df^n_{(0,0)}u\|/\|u\|)}{n} = \log \mu = \chi^+ > 0 \quad \forall\, u \in U \setminus \{\mathbf{0}\} \subset T_xM.$$

Observar que para $n < 0$ también se cumple la misma igualdad anterior; es decir:

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{\log(\|df^n_{(0,0)}u\|/\|u\|)}{n} = \log \mu = \chi^+ \quad \forall\, u \in U \setminus \{\mathbf{0}\} \subset T_xM.$$

Además, el exponente de Lyapunov positivo χ^+ es la tasa exponencial de dilatación de las distancias a lo largo de la variedad inestable local por el punto fijo. Más precisamente

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{\log \operatorname{dist}(f^n(y),(0,0))}{n} = \chi^+ = \log\mu > 0 \ \ \forall y \in W^u(0,0)$$

Análogamente, el exponente de Lyapunov $\chi^- := \log\lambda = \log(3-\sqrt{5})/2 < 0$ negativo, se interpreta como *la tasa exponencial de contracción por f* en un entorno suficientemente pequeño del punto fijo a lo largo de la variedad estable por ese punto. Más precisamente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \operatorname{dist}(f^n(y),(0,0))}{n} = \chi^- = \log\lambda < 0 \ \ \forall y \in W^s(0,0).$$

Ejercicio 3.1.4. Sea f la transformación $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro. Probar que m- c.t.p es recurrente pero que hay puntos no recurrentes (Sugerencia: $y \in W^s(0,0) \setminus \{(0,0)\}$ no es recurrente). Probar que dados dos abiertos U y V cualesquiera en el toro, existe una subsucesión n_j de naturales tales que $f^{n_j}U \cap V \neq \emptyset$. (Sugerencia: Usar que $W^u((0,0))$ es invariante por f y pruébese que para cualquier arco compacto $K \subset W^u(0,0)$ la unión de sus iterados hacia el futuro $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(K)$ es densa en el toro.)
Deducir que f es transitiva.
Probar que todo punto es no errante. Concluir que si bien todo punto recurrente es no errante, no necesariamente todo punto no errante es recurrente.

Observación: En el capítulo 5, Corolario 5.3.5 probaremos que la transformación

$$f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en el toro es *ergódica respecto a la medida de Lebesgue.*

Ejercicio 3.1.5. Sea el automorfismo lineal hiperbólico $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ del toro $\mathbb{T}^2$. Sea P el conjunto de puntos periódicos por f. Probar que $P \neq \emptyset$, pero $\mu(P) = 0$ para toda μ invariante y ergódica para f que sea positiva sobre abiertos.

3.2. Difeomorfismos de Anosov e hiperbolicidad uniforme

En esta sección asumiremos que M es una variedad diferenciable, compacta y conexa, provista de una estructura riemanniana (i.e. existe un producto interno

$< \cdot, \cdot >: TM \times TM \mapsto \mathbb{R}$ diferenciable, definido en el fibrado tangente TM. Por lo tanto, para todo $x \in M$ y para todo $v \in T_xM$, está definida la norma $\|v\| := \sqrt{< v, v >_x}$, determinada por la métrica riemanniana en M).
Sea $f : M \mapsto M$ un difeomorfismo, lo que se denota $f \in \text{Diff}^{\,1}(M)$ y significa que f es de clase C^1, invertible, y su inversa $f^{-1} : M \mapsto M$ también es de clase C^1. Si además f y f^{-1} fueran de clase C^r para algún natural $r > 1$, se denota $f \in \text{Diff}^{\,r}(M)$ (para lo cual se requiere que M sea una variedad de clase C^r por lo menos). En esta sección, asumiremos que $f \in \text{Diff}^{\,1}(M)$ e indicaremos expresamente cuando además $f \in \text{Diff}^{\,r}(M)$ para algún $r > 1$.

Definición 3.2.1. Difeomorfismos de Anosov [2]
$f \in \text{Diff}^{\,1}(M)$ se llama *difeomorfismo de Anosov* si existe una descomposición (llamada *splitting*) $S \oplus U = TM$ del fibrado tangente TM, no trivial (i.e. $0 < \dim(S) < \dim(M)$), que es invariante por df (i.e. $df(x)S_x = S_{f(x)}, \;\; df(x)U_x = U_{f(x)}$), y existen constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1 < \sigma$, tales que, para todo $x \in M$:

$$\|df^n(x)s\| \leq C\lambda^n \|s\| \;\; \forall\, n \geq 0, \;\; \forall\, s \in S_x, \tag{3.1}$$

$$\|df^n(x)u\| \geq C^{-1}\sigma^n \|u\| \;\; \forall\, n \geq 0, \;\; \forall\, u \in U_x. \tag{3.2}$$

Para cada punto $x \in M$, los subespacios S_x y U_x se llaman *estable e inestable* respectivamente, en x. Los subfibrados S y U (formados por los subespacios S_x y U_x al variar $x \in M$), se llaman fibrados estable e inestable respectivamente. La constante $0 < \lambda < 1$ se llama tasa o coeficiente de contracción (uniforme) en el futuro a lo largo del fibrado estable, y la constante $\sigma > 1$, tasa o coeficiente de dilatación (uniforme) en el futuro a lo largo del fibrado inestable.
Nota: En la definición de difeomorfismo de Anosov, la constante C no depende de x, así como tampoco dependen de x los coeficientes λ y σ de contracción y dilatación respectivamente. Siendo la variedad M compacta, si se cambia la métrica Riemanniana, la norma de los vectores en cada subespacio tangente se cambia por una equivalente. Luego, se modifica la constante C por otra constante C' (que tampoco depende de x) manteniéndose las mismas tasas λ y σ de contracción y dilatación respectivamente. Esto permite que la definición de difeomorfismo de Anosov sea intrínseca al difeomorfismo, y no dependa de la métrica riemanniana elegida. Se puede probar que para todo f de Anosov existe una métrica riemanniana (llamada *métrica adaptada a* f) para la cual la constante C puede tomarse igual a 1).

Ejercicio 3.2.2. Probar que el autormorfismo lineal $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro $\mathbb{T}^2$ es un difeomorfismo de Anosov. Sugerencia: Tomar S_x y U_x las direcciones propias de la matriz A que define a f, λ y μ los valores propios respectivos y $C = 1$.

Ejercicio 3.2.3. Sea f un difeomorfismo de Anosov. Probar que la inversa $0 < \sigma^{-1} < 1$ de la tasa σ de dilatación hacia el futuro a lo largo del fibrado inestable, es una tasa de contracción hacia el pasado a lo largo del mismo fibrado. Precisamente:

$$\|df^{-n}(x)u\| \leq C\sigma^{-n}\|u\| \ \ \forall\, n \geq 0, \ \ \forall\, u \in U_x, \quad \forall\, x \in M. \tag{3.3}$$

Análogamente, probar que la inversa $\lambda^{-1} > 1$ de la tasa contracción λ hacia el futuro a lo largo del fibrado estable, es una tasa de dilatación hacia el futuro a lo largo del mismo fibrado estable.
Deducir que $f : M \mapsto M$ es un difeomorfismo de Anosov, si y solo si f^{-1} también lo es.

Ejercicio 3.2.4. Mostrar que el splitting $S_x \oplus U_x$ es único. Sugerencia: Probar, para todas las direcciones $[s] \subset S_x$ y $[v] \subset T_xM \setminus S_x$, las siguientes desigualdades:
$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \|df^n s\| < 0 < \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \|df^n v\|$.

Ejercicio 3.2.5. Probar que las aplicaciones $x \mapsto S_x$ y $x \mapsto U_x$ son continuas y deducir que si M es conexa, entonces $\dim S_x$ y $\dim U_x$ son constantes.
Sugerencia: Considerar una sucesión $\{x_n\}$ convergente a x y tomar una subsucesión de ella tales que S_{x_n} y U_{x_n} tengan dimensiones constantes con n y sean convergentes. Mostrar que los subespacios $\lim_n S_{x_n}$ y $\lim_n U_{x_n}$ satisfacen las desigualdades de hiperbolicidad uniforme, y forman un splitting de T_xM. Finalmente, usar la unicidad del splitting hiperbólico en el punto $x \in M$.

Ejercicio 3.2.6. Probar que en la Definición 3.2.1, la condición $0 < \dim(S_x) < \dim(M)$ es redundante.
Sugerencia: Por absurdo, si $\dim(S_x) = \dim(M)$, elegir $N \geq 1$ tal que $C\lambda^N < 1/4$. Usando la definición de diferenciabilidad de f en el punto x, probar que existe $\delta_x > 0$ tal que:

$$\operatorname{dist}(x,y) < \delta_x \ \Rightarrow \ \operatorname{dist}(f(x), f(y)) \leq \frac{\operatorname{dist}(x,y)}{2}.$$

Cubrir M con una cantidad k finita de bolas abiertas $\{B_{\delta_i}(x_i)\}_{1\leq i\leq k}$ de centros $x_1, \ldots, x_i, \ldots x_k$ y radios $\delta_i := \delta_{x_i}$. Probar que para todo $y \in M$, y para todo $n \in \mathbb{N}$ existe x_i (que depende de y y de n) tal que $\operatorname{dist}(f^{nN}(x_i), f^{nN}(y)) < \epsilon$. Deducir que $f^{nN}(M)$ se puede cubrir con k bolas de radio ϵ. Siendo f^{nN} un difeomorfismo, toda la variedad M se puede cubrir con k bolas de radio $\epsilon > 0$, siendo k constante y $\epsilon > 0$ arbitrario. Deducir que $\operatorname{diam}(M) < k\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, lo cual es una contradicción pues el diámetro de M es positivo.

Ejercicio 3.2.7. Sea $f : M \mapsto M$ un difeomorfismo de Anosov con tasa $\lambda < 1$ de contracción a lo largo del fibrado estable S, y tasa $\sigma > 1$ de dilatación a lo largo del fibrado inestable U. Probar que para todo $x \in M$:

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \|df^n(x)s\|}{n} \leq \log\lambda < 0 \ \forall s \in S_x$$

$$\limsup_{n\to-\infty} \frac{\log \|df^n(x)s\|}{-n} \leq \log\lambda < 0 \ \forall s \in S_x$$

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{\log \|df^n(x)u\|}{n} \geq \log\sigma > 0 \ \forall u \in U_x$$

$$\liminf_{n\to-\infty} \frac{\log \|df^n(x)u\|}{-n} \geq \log\sigma > 0 \ \forall u \in U_x$$

Exponentes de Lyapunov para difeomorfismos de Anosov:
En las próximas secciones enunciaremos el teorema de Oseledets que establece que los límites superior e inferior de las desigualdades de arriba, son límites que existen para μ-casi todo punto $x \in M$ (donde μ es cualquier medida de probabilidad invariante por f). Esos límites se llaman *exponentes de Lyapunov* (en el futuro) para la órbita de $x \in M$.
Por lo tanto, admitiendo el teorema de Oseledets, de las desigualdades de arriba se deducen los siguientes enunciados, que satisface todo difeomorfismo de Anosov f para toda medida de probabilidad μ que sea f-invariante:
(a) *Los exponentes de Lyapunov de la órbita por μ- casi todo punto $x \in M$, correspondientes a las direcciones u del subespacio inestable, son positivos y mayores o iguales que el logaritmo del coeficiente de dilatación $\sigma > 1$ del difeomorfismo de Anosov.*
(b) *Los exponentes de Lyapunov de la órbita por μ- casi todo punto $x \in M$, correspondientes a las direcciones s del subespacio estable, son negativos y menores iguales que el logaritmo del coeficiente de contracción $\lambda < 1$ del difeomorfismo de Anosov.*
De los enunciados (a) y (b), teniendo en cuenta que por definición de difeomorfismo de Anosov, el espacio tangente T_xM es la suma directa de los subespacios estable S_x e intestable U_x, se deduce el siguiente enunciado (para una demostración del mismo usar el teorema de Oseledets, que probaremos en el próximo capítulo, y ver Ejercicio 3.8.5):
(c) *Los exponentes de Lyapunov para un difeomorfismo de Anosov no son cero, y están "bounded away from zero"* (i.e. están fuera de un entorno de cero).

Observación 3.2.8. .
Sobre la transitividad de los difeomorfismos de Anosov. Una conjetura cuya demostración es aún un problema abierto es la siguiente:
Conjetura: Los difeomorfismos de Anosov en variedades compactas y conexas son transitivos.

Se conocen pruebas parciales: si la variedad M donde actúa el difeomorfismo de Anosov es un toro $\mathbb{T}^n$, entonces f es transitivo. Otro caso conocido: si la dimensión del fibrado inestable o la del estable es uno (de un difeomorfismo f de Anosov), entonces f es transitivo. En general, no se conocen ejemplos de difeomorfismos f de Anosov que no sean transitivos.

Observación 3.2.9. .
Sobre la ergodicidad de los difeomorfismos de Anosov.
Sea M una variedad compacta y conexa de dimensión $n \geq 2$. Si $f \in \text{Diff}^{\,2}(M)$ es un difeomorfismo de Anosov (de clase C^2), si f es transitivo y si f preserva la medida de Lebesgue m, entonces m es ergódica. Demostraremos este resultado en el Corolario 5.3.5, al definir y estudiar las medidas invariantes de probabilidad llamadas SRB (Sinai-Ruelle-Bowen) para los difeomorfismos de Anosov.

3.3. Conjuntos uniformemente hiperbólicos

Definición 3.3.1. Sea $f : M \mapsto M$ y sea $\Lambda \subset M$ un subconjunto compacto e invariante (i.e. $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$). El conjunto Λ se llama *uniformemente hiperbólico* (en breve, hiperbólico) si para todo $x \in \Lambda$ existe un splitting $S_x \oplus U_x = T_xM$ del espacio tangente T_xM a M en x, que dependen continuamente de $x \in \Lambda$, y constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1 < \sigma$, que verifican las desigualdades (3.1) y (3.2) para todo $x \in \Lambda$.
Nota: La condición de dependencia continua de S_x y U_x al variar $x \in \Lambda$ es redundante. Se puede demostrar esta continuidad a partir de las invariancia de esos subespacios, de las desigualdades de hiperbolicidad uniforme y de la compacidad del conjunto Λ (ver Ejercicios 3.2.4 y 3.2.5 y generalizarlos sustituyendo M por Λ).
Sobre las dimensiones de S_x y U_x: Son complementarias (su suma es $\dim M$), pero no necesariamente son ambas mayores que cero. Es decir, alguno de los dos subespacios puede tener dimensión cero, y el otro coincidir con T_xM. Las dimensiones pueden depender de $x \in \Lambda$. La dependencia continua de los subespacios invariantes implica que las dimensiones de S_x y U_x sean localmente constantes. Como Λ es compacto, si existen varios subconjuntos de Λ para los cuales S_x y U_x tienen dimensiones diferentes, entonces son dos a dos aislados.

De las definiciones anteriores, es inmediato deducir que $f : M \mapsto M$ es un difeomorfismo de Anosov, si y solo si la variedad M es un conjunto uniformemente hiperbólico (con dimensiones estable e inestable no nulas).

Ejercicio 3.3.2. Sea $f : M \mapsto M$. Probar que un punto periódico x de período p (i.e. $f^p(x) = x, \ f^j(x) \neq x \ \forall \ 1 \leq j < p$ es hiperbólico (i.e. los valores propios de df^p tienen módulo diferente de 1), si y solo si su órbita (finita) $\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\}$ es un conjunto uniformemente hiperbólico. Probar que si x es punto silla (es decir, $df^p(x)$ tiene valores propios con módulo menor que uno y también con módulo mayor que uno), entonces los subespacios propios de $df^p(x)$ son los subespacios estable S_x e inestable U_x, respectivamente. Probar que si x es un pozo hiperbólico (i.e. $df^p(x)$ tiene todos sus valores propios con módulo menor que uno), entonces $S_x = T_xM$ y $U_x = \mathbf{0}$. Enunciar y probar resultado dual si x es una fuente hiperbólica (i.e. $df^p(x)$ tiene todos sus valores propios con módulo mayor que uno).

3.4. Ejemplo: Herradura de Smale lineal

Un ejemplo paradigmático de conjunto hiperbólico (transitivo) que no es toda la variedad, es el siguiente, debido a Smale [89] (ver también, por ejemplo, [37, pages 97-98]):

Definición 3.4.1. Herradura de Smale lineal.
Se llama *herradura de Smale lineal* (en dimensión 2 y con 2 patas) a un difeomorfismo $T : Q = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \mapsto T(Q) \subset \mathbb{R}^2$ que satisface las siguientes condiciones (ver Figura 3.2):

a) $T(Q) \cap Q = Q_0 \cup Q_1$ donde $Q = [0,1]^2$,
$Q_0 = [1/5, 2/5] \times [0,1],\ Q_1 = [3/5, 4/5] \times [0,1]$.

b) $T^{-1}(Q_0) = [0,1] \times [1/5, 2/5],\ T^{-1}(Q_1) = [0,1] \times [3/5, 4/5]$.

c) Para $j = 0, 1$, la restricción $T|_{T^{-1}(Q_j)}(x, y)$ es una transformación afín en (x, y) con direcciones propias (1,0) y (0,1) y valores propios λ y μ reales tales que $|\lambda| = 1/5$ y $|\mu| = 5$ respectivamente. Por ejemplo:

$$T|_{T^{-1}(Q_0)}(x, y) = ((1/5)(x + 1), 5y - 1),$$

$$T|_{T^{-1}(Q_1)}(x, y) = ((-1/5)(x - 4), -5y + 4)$$

Para comprender cómo es la transformación T, ver la figura 3.2 e imaginar T como la composición de dos transformaciones: Primero considerar una transformación afín que lleva el cuadrado $Q = [0,1]^2$ a un rectángulo 5 veces más alto y 5 veces menos ancho que el cuadrado Q (contrae en horizontal y dilata en vertical). Después aplicar una transformación que "dobla"en forma biyectiva al rectángulo alto y flaco, dándole forma de herradura, superponiendo esta sobre el cuadrado Q en Q_0 y Q_1 (sin deformar Q_0 ni Q_1).
Se observa que hemos restringido la definición eligiendo valores numéricos fijos para $|\lambda|$ y $|\mu|$, iguales a 1/5 y 5 respectivamente. Sin embargo, si se toman otros valores numéricos, $0 < |\lambda| < 1/2$ y $2 < |\sigma|$, y se definen (coherentemente con

esos nuevos valores numéricos) los rectángulos compactos Q_0 y Q_1 disjuntos, como en la Figura 3.2, y tales $T(Q) \cap Q = Q_0 \cup Q_1$; y si las transformaciones $T|_{T^{-1}(Q_0)}$ y $T|_{T^{-1}(Q_1)}$ son afines con valores propios $\pm\lambda$ y $\pm\sigma$, entonces T también se llama *herradura de Smale lineal.*

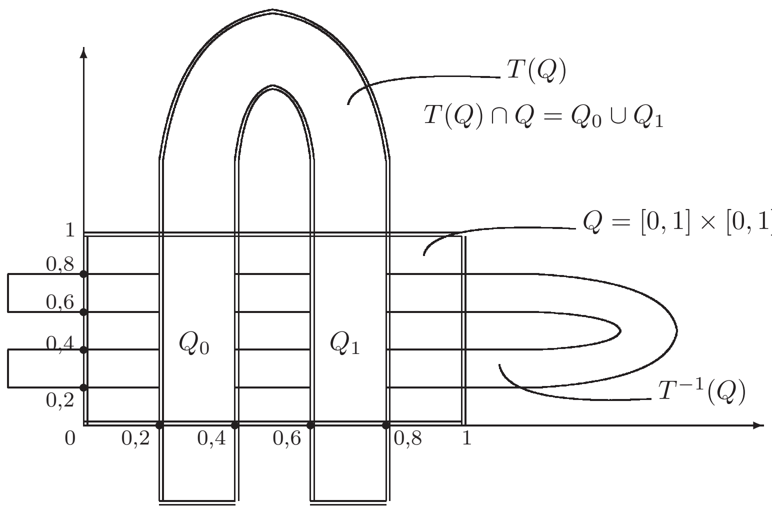

Figura 3.2: Herradura de Smale

Ejercicio 3.4.2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ una herradura de Smale lineal. Sea $Q = [0,1]^2$.
(a) Dibujar esquemáticamente $T(T(Q) \cap Q) \subset T(Q)$, $T^2(Q)$ y $\cap_{n=0}^{N} T^n(Q)$ para $N = 2, 3$.
(b) Dibujar esquemáticamente) $T^{-1}(Q) \cap Q$, y $\cap_{n=0}^{N} T^{-n}Q$ para $N = 2, 3$.
(c) Dibujar esquemáticamente) el conjunto "estable" $W^s \cap Q$ de todos los puntos de Q cuyas órbitas futuras permanecen en Q para todos los iterados $n \geq 0$. (Sugerencia: Ver que $W^s \cap Q = \cap_{n=0}^{+\infty} T^{-n}(Q)$.)
(d) Calcular el **exponente de Lyapunov negativo (tasa exponencial de contracción hacia el futuro)** de la herradura de Smale:

$$\lim_{n \to +\infty} (1/n) \log \|DT_x^n(1,0)\|, \text{ para todo punto } x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(Q).$$

(d) Definir el conjunto "inestable" $W^u \cap Q$ y el exponente de Lyapunov positivo (tasa exponencial de dilatación hacia el futuro.) Calcularlo.

Definición 3.4.3. Sea $T : Q = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ es la herradura de Smale lineal. Se llama *conjunto invariante maximal de T en Q* a

$$\Lambda := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T^{-n}Q.$$

Obsérvese que por la propiedad de intersecciones finitas no vacías de compactos, el conjunto Λ es compacto no vacío.

Ejercicio 3.4.4. Probar que el maximal invariante Λ de una herradura de Smale lineal, es un conjunto hiperbólico. Probar que Λ es el producto cartesiano de dos conjuntos de Cantor en el intervalo $[0, 1]$.

3.5. Variedades invariantes de conjuntos hiperbólicos

A continuación enunciamos algunos teoremas sobre dinámica diferenciable, que generalizan propiedades de los difeomorfismos de Anosov en una variedad compacta M, y en particular algunos de los resultados vistos en el ejemplo del automorfismo lineal hiperbólico $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro $\mathbb{T}^2$.

Teorema 3.5.1. Variedades invariantes para Λ unif. hiperbólico *Sea $f : M \mapsto M$ un difeomorfismo y $\Lambda \subset M$ un conjunto invariante, compacto y uniformemente hiperbólico. Para $x \in M$ denotemos U_x, S_x los subespacios inestable y estable respectivamente. Entonces, para cada $x \in \Lambda$ existen y son únicas:*

A) *Una subvariedad conexa $W^s(x)$, C^1-inmersa en M* (pero no necesariamente "embedded", i.e. no encajada en M, ni necesariamente compacta), *llamada variedad estable por x, tal que:*

$$x \in W^s(x), \quad f(W^s(x)) = W^s(f(x)), \quad T_x(W^s(x)) = S_x. \tag{3.4}$$

B) *Una subvariedad C^1 conexa $W^u(x)$, C^1-inmersa en M* (pero no necesariamente encajada en M ni compacta), *llamada variedad inestable por x, tal que:*

$$x \in W^u(x), \quad f(W^u(x)) = W^u(f(x)), \quad T_x(W^u(x)) = U_x. \tag{3.5}$$

tales que:

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{dist}(f^n(y), f^n(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in W^s(x), \tag{3.6}$$

$$\lim_{n \to -\infty} \operatorname{dist}(f^n(y), f^n(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in W^u(x). \tag{3.7}$$

Si además f es un difeomorfismo C^r para algún $r > 1$ entonces W^s_x y W^u_x son subvariedades de clase C^r.

Una prueba del teorema de existencia de variedades estable e inestable puede encontrarse en [34].

Observación 3.5.2. Sea $f : M \mapsto M$ un difeomorfismo de Anosov con coeficiente $\lambda < 1$ de contracción en el fibrado estable S, y coeficiente $\sigma > 1$ de dilatación en el fibrado inestable U. Admitiendo la existencia de C^1-subvariedades $W^s(x)$ y $W^u(x)$ conexas, que cumplen las condiciones (3.4) y (3.5) respectivamente, y sabiendo que los subespacios S_x y U_x dependen continuamente de x, se puede demostrar que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \operatorname{dist}(f^n(y), f^n(x))}{n} \leq \log \lambda < 0 \quad \forall\, y \in W^s(x); \tag{3.8}$$

$$\liminf_{n\to-\infty} \frac{\log \operatorname{dist}(f^n(y), f^n(x))}{n} \geq \log \sigma > 0 \quad \forall\, y \in W^u(x). \tag{3.9}$$

Observación 3.5.3. Volvamos a los difeomorfismos de Anosov, como caso particular de sistema uniformemente hiperbólico:

El Teorema o Lema de Franks [27] (ver también [53] para difeomorfismos de Anosov en el toro n-dimensional, para todo $n \geq 2$) establece que:

Teorema o Lema de Franks *Las únicas superficies compactas, conexas, sin borde y orientables que soportan un difeomorfismo de Anosov f son homeomorfas al toro $\mathbb{T}^2$, y f es conjugado a un automorfismo lineal hiperbólico.*

La demostración del Lema de Franks se encuentra en [27]. En [53], Manning generaliza la última parte del Lema de Franks, probando que los difeomorfismos de Anosov en el toro de dimensión n son conjugados a automorfismos lineales. Recientemente, en [33] se obtiene el mismo resultado que Manning, pero para difeomorfismos de Anosov en nilmanifols de dimensión 3, y no solo para el toro.

Nota: Dos homeomorfismos $f : X \mapsto X$ y $g : Y \mapsto Y$, en respectivos espacios topológicos X e Y, se dice que son *conjugados o topológicamente equivalentes* si existe un homeormorfismo $h : X \mapsto Y$ llamado *conjugación* tal que $g \circ h = h \circ f$. La conjugación implica que cada una de las propiedades de la dinámica topológica de f (transitividad, conjunto no errante, omega y alfa límites, recurrencia) se satisface para f si y solo si se satisface para g.

Debido al teorema de Franks los automorfismos lineales en el toro $\mathbb{T}^2$ son el paradigma de los difeomorfismos de Anosov en superficies, y entre ellos en particular el $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro $\mathbb{T}^2$.

En cambio, conjuntos hiperbólicos como la herradura de Smale, o topológicamente conjugadas a ella, se pueden construir en un abierto homeormorfo a un cuadrado de $\mathbb{R}^2$, en cualquier superficie (variedad de dimensión dos).

Se puede generalizar la herradura de Smale a dimensiones mayores que dos, tomando un cubo n-dimensional en el rol de cuadrado Q, y eligiendo dimensiones complementarias de contracción uniforme y de dilatación uniforme.

3.6. Expansividad o caos topológico.

Se han dado varias definiciones precisas de *caos* en la literatura matemática. Pero estas definiciones no son equivalentes entre sí (ver por ejemplo [16]). Entonces cuando uno se refiere a *sistema caótico* debería siempre incluir la definición que está utilizando, con precisión, y observar que los resultados que se obtengan con esa definición, no son necesariamente ciertos si se hubiese adoptado otra. Según sea el objetivo de investigación de quien estudia el sistema dinámico (por ejemplo, su objetivo puede ser estudiar la dinámica topológica de un conjunto abierto y denso de órbitas, o solo estudiar la de μ-casi toda órbita cuando μ es invariante, o la de Lebesgue-casi toda órbita, cuando la medida de Lebegue no es invariante, etc), adopta una u otra definición.
El estudio de las propiedades topológicas de los difeomorfismos lineales en el toro $\mathbb{T}^2$ es paradigmático para estudiar más en general, los sistemas caóticos desde el punto de vista topológico. En efecto:

Definición 3.6.1. Sea $T : X \mapsto X$ un homeomorfismo en un espacio métrico compacto X. Se dice que T es *caótico* (topológicamente) o *expansivo*, si existe una constante $\alpha > 0$ (llamada *constante de expansividad)* tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{dist}(T^n(x), T^n(z)) > \alpha \ \ \forall x \neq y \in X$$

Interpretación: El caos topológico o expansividad es una versión de "hiperbolicidad topológica." Significa que la *dinámica es α-sensible a las condiciones iniciales:* dos órbitas con estados iniciales $x \neq y$ diferentes se separan más que la distancia α, hacia el futuro ó hacia el pasado. Podrá haber parejas de órbitas, con estados iniciales próximos $x \neq y$, que se separan solo para el futuro pero no para el pasado, o al revés. Generalmente (por ejemplo en un difeomorfismo de Anosov), para la mayor parte de las parejas de estados iniciales $x \neq y$, sus órbitas se separan en el futuro y en el pasado.
La separación hacia el futuro o hacia el pasado, más que una constante uniforme α, de dos órbitas con estados iniciales $x \neq y$ (por más que x e y estén tan cerca entre sí como se desee) implica lo siguiente:
Si uno aproxima con error $\epsilon > 0$, aunque sea arbitrariamente pequeño, el estado inicial x sustituyéndolo por y tal que $0 < \operatorname{dist}(x, y) \leq \epsilon$, entonces el estado del sistema $T^n(y)$ en algún instante $n \in \mathbb{Z}$, se modificará más que $\alpha > 0$ respecto del estado $T^n(x)$ que tendría si no se hubiese cometido el error en el estado inicial. La sensibilidad a las condiciones iniciales, o expansividad, o caos topológico, se llama también "efecto mariposa": la leve modificación del estado inicial producido por el aleteo de una mariposa, por más leve que esta sea (es decir por más pequeño que sea la diferencia $\epsilon > 0$ provocada en ese estado inicial) produce una modificación "drástica" (es decir mayor que una constante uniforme $\alpha > 0$) en el estado del sistema en otro instante).

Ejercicio 3.6.2. Demostrar que la rotación del círculo (racional o irracional) no es expansiva (i.e. no es topológicamente caótica).

Ejercicio 3.6.3. Demostrar que el tent map $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ es expansivo para el futuro, esto es, existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\text{Si} \ \ \text{dist}(f^j(x), f^j(y)) < \alpha \ \forall\, j \in \mathbb{N} \ \ \text{entonces} \ \ x = y.$$

Sugerencia: Probar que la derivada $|(f^n)'|$ tiende uniformemente a $+\infty$ con n y usar $\alpha = 1/4$.

Ejercicio 3.6.4. Demostrar que la transformación $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro $\mathbb{T}^2$ es expansiva.

Observación 3.6.5. En [51], Lewowicz demostró los siguientes resultados:

Teorema de Lewowicz *Las únicas superficies* (variedades de dimensión dos) *compactas y conexas donde existen homeomorfismos expansivos, son homeomorfas al toro* $\mathbb{T}^2$*.*

Todos los homeomorfismos expansivos en el toro $\mathbb{T}^2$ *son conjugados a un Anosov* (y por el teorema de Franks son conjugados a un difeomorfismo de Anosov lineal). Por eso resulta paradigmático estudiar los difeomorfismos lineales, y el $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en particular.

3.7. Foliaciones invariantes para dif. de Anosov.

La unicidad de las variedades invariantes para los difeomorfismos de Anosov, implica que la siguiente colección no numerable de subconjuntos (subvariedades) $\{W^s_x\}_{x\in M}$, sea una partición de M. En efecto:

Proposición 3.7.1. *Sea $f : M \mapsto M$ un difeomorfismo de Anosov, y sean $x, y \in M$. Entonces o bien $W^s_x \cap W^s_y = \emptyset$, o bien $W^s_x = W^s_y$.*
Análogamente para W^u_x y W^u_y.

Demostración. Debido a (3.6) y (3.7), $y \in W^s_x$ si y solo si $x \in W^s_y$. Supongamos que existe $z \in W^s_x \cap W^s_y$. Sea $x' \in W^s_x$. Usando nuevamente (3.6) y (3.7) y la propiedad triangular, deducimos que

$$\lim_{n\to+\infty} \text{dist}(f^n(y), f^n(x')) = 0.$$

En efecto:

$$\text{dist}(f^n(y), f^n(x') \leq$$

$$\text{dist}(f^n(y), f^n(z)) + \text{dist}(f^n(z), f^n(x)) + \text{dist}(f^n(x), f^n(x')),$$

y estos tres sumandos tienden a cero cuando $n \to +\infty$. Luego $x' \in W^s_y$ para todo $x' \in W^s_x$, probando que $W^s_x \subset W^s_y$. Simétricamente, $W^s_y \subset W^s_x$. Hemos demostrado que si existe $z \in W^s_x \cap W^s_y$ entonces $W^s_y = W^s_x$. □

Definición 3.7.2. Foliaciones estable e inestable.
Se llama *foliación estable* a la partición $\{W^s_x\}_{x \in M}$ de M en variedades estables. Análogamente, se llama *foliación inestable* a la partición $\{W^u_x\}_{x \in M}$ de M en variedades inestables.
Nota sobre la definición geométrica de "foliación": Por definición, una foliación tiene una estructura geométrica precisa que transciende a la mera partición del espacio M en subvariedades inmersas disjuntas dos a dos todas de la misma dimensión $1 \leq k_1 < \dim M$. Estas variedades inmersas se llaman hojas de la foliación. La estructura geométrica de foliación consiste en la existencia de un atlas de cartas locales ξ de M que son "trivializadoras" de las hojas de la foliación: i.e. la imagen de cada ξ es el producto cartesiano $B_{k_1} \times B_{k_2}$, donde B_{k_i} es la bola unitaria de R^{k_i} ($k_1 + k_2 = \dim M$), tal que transforma la componentes conexas locales de cada hoja, en las secciones $B_{k_1} \times \{v_2\}$ (con $v_2 \in B_{k_2}$ fijo).
En general, para las foliaciones dinámicamente definidas (por ejemplo, las foliaciones estable e inestable de un f de Anosov), las cartas locales trivializadoras ξ existen, pero son solo homeormofismos sobre sus imágenes (no son siquiera C^1). Como las hojas de la foliación son subvariedades inmersas de clase C^1, entonces las *restricciones* de las cartas trivializadoras a las hojas locales, son C^1.

Definición 3.7.3. Regularidad de foliaciones invariantes.
Un partición $\mathcal{W} := \{W_x\}_{x \in M}$ del espacio M en subvariedades diferenciables inmersas en M y disjuntas dos a dos, todas de la misma dimensión, se dice que es *una foliación invariante* C^0 (desde el punto de vista dinámico) si:
(1) $f(W_x) = W_{f(x)} \ \ \forall\, x \in M$ (invariancia),
(2) cada hoja W_x es de clase C^1, y
(3) la aplicación $x \in M \mapsto T_xW_x$ que lleva cada punto x en el subespacio tangente T_xW_x en x a la hoja W_x, es continua (es decir, el subespacio tangente a la hoja varía en forma C^0 con $x \in M$).
Nota: La condición (2) de que cada hoja sea de clase C^1, implica que su subespacio tangente varíe en forma C^0 con *x variando a lo largo de la hoja respectiva.* Pero no implica que ese subespacio tangente *varíe además en forma C^0 con x en todas las direcciones transversales a la hoja.* Por lo tanto la condición (3) no es redundante: es más fuerte que la condición (2).
Análogamente, para todo $r \in \mathbb{N}$, la partición $\mathcal{W}$ es *una foliación invariante* C^r (desde el punto de vista dinámico) si cada hoja $W_x \in \mathcal{W}$ es de clase C^{r+1} y la aplicación $x \in M \mapsto T_xW_x$ es de clase C^r . Para que esta definición sea

aplicable, hay que asumir que la variedad ambiente M es de clase C^{r+1} por lo menos.
Sea $0 < \alpha < 1$. Una foliación invariante $\mathcal{W}$ es α-Hölder continua y se denota de clase C^α, si cada hoja $W_x \in \mathcal{W}$ es de clase C^1 y la aplicación $x \in M \mapsto T_x W_x$ satisface:

$$\mathrm{dist}(W_x, W_y) \leq K\,[\mathrm{dist}(x,y)]^\alpha \tag{3.10}$$

para cierta constante K. Se dice que la foliación es Lipschitz y se denota como C^{Lip}, si es 1-Hölder continua (es decir vale la desigualdad (3.10) para $\alpha = 1$.

Debido al Teorema 3.5.1, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.7.4. *Si f es difeomorfismo de Anosov de clase C^1, entonces las foliaciones estable e inestable son de clase C^0 .*

Demostración. $T_x W^s_x = S_x,\ T_x W^u_x = U_x$ y los subespacios S_x y U_x dependen continuamente de x. □

Uno podría esperar que si f es difeomorfismo de Anosov de clase C^{r+1} con $r \geq 0$, entonces las foliaciones invariantes estable e inestables sean foliaciones de clase C^r. Este último resultado es FALSO. En general, cada hoja es C^{r+1}. Pero no se puede mejorar casi nada la regularidad C^0 de las foliaciones invariantes simplemente aumentando la regularidad de f.

Teorema 3.7.5. Hölder continuidad de foliaciones invariantes para difeomorfismos de Anosov.
Si $f : M \mapsto M$ es un difeomorfismo de Anosov de clase C^k con $k > 2$, entonces las variedades estables e inestables de f son subvariedades C^k, y las foliaciones estables e inestables que forman son $\alpha-$Hölder continuas para cierto $0 < \alpha < 1$.

Una prueba de este teorema se puede encontrar en [8, Theorem 2.3.1, pag. 48].

3.8. Exponentes de Lyapunov

A lo largo de las próximas secciones asumiremos las siguientes hipótesis:
• M es una variedad diferenciable, compacta, conexa y provista de una estructura riemanniana.
• $f : M \mapsto M$ es de clase C^1 (es decir f es diferenciable y su derivada df es continua). El mapa f no es necesariamente invertible.

Notación 3.8.1. .
• $f : M \mapsto M$ es un difeomorfismo si de clase C^1, invertible y además su inversa también es de clase C^1. Denotamos $f \in \mathrm{Diff}^{\,1}(M)$.
• Si además f y su inversa son de clase C^r para algún $r \geq 2$ (para lo cual la variedad M también debe ser de clase C^r por lo menos), indicaremos $f \in \mathrm{Diff}^{\,r}(M)$.

• Denotaremos $f \in \text{Diff}^{\,1+\alpha}$ cuando $f \in \text{Diff}^{\,1}(M)$ y además $df : TM \mapsto TM$ es α-Hölder continua para cierta constante $0 < \alpha < 1$; i.e. existen constantes $\delta > 0$ y $K > 0$ tales que

$$\|df_x - df_y\| \leq K(\text{dist}(x, y))^\alpha \quad \forall\, x, y \in M \text{ such that } \text{dist}(x, y) < \delta.$$

En el primer miembro de la desigualdad anterior, $\|A\|$ denota la norma de la transformación lineal $A \in L(R^k)$ donde $k = \dim(M)$, es decir $\|A\| = \text{máx}\{\|Av\| : v \in \mathbb{R}^k, \|v\| = 1\}$.
• Denotaremos $f \in \text{Diff}^{\,1+Lip}(M)$ si $f \in \text{Diff}^{\,1}(M)$ y además df es Lipschitz, i.e. existen constantes $\delta > 0$ y $K > 0$ que satisfacen la desigualdad de α-Hölder continuidad con $\alpha = 1$.

Definición 3.8.2. Exponentes de Lyapunov
Sea $f \in \text{Diff}^{\,1}(M)$. Un punto $x \in M$ se llama *débilmente regular* si existen los siguiente límites para todo $v \in T_xM \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\|df_x^n(v)\|)}{n}; \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\|df_x^{-n}(v)\|)}{-n}.$$

Estos dos límites (números reales), se llaman *exponentes de Lyapunov en el futuro y en el pasado respectivamente, de la órbita por x correspondientes a la dirección* $[v]$.
No se definen los exponentes de Lyapunov en los puntos no regulares.
Se puede definir también puntos débilmente regulares y exponentes de Lyapunov (en el futuro) para $f \in C^1(M)$ aunque f no sea un difeomorfismo.

Más adelante veremos el Teorema de Oseledets, que demuestra, entre otros resultados, lo siguiente:

Para toda medida de probabilidad μ que sea f-invariante, μ-casi todo punto $x \in M$ es regular.

Dicho de otra forma, el conjunto de los puntos no regulares tiene medida nula para toda medida de probabilidad μ invariante por f.
Nota sobre el concepto de regularidad: En la literatura, suele llamarse punto regular a aquellos puntos x que cumplen una condición más fuerte que la que hemos adoptado nosotros en la Definición 3.8.2. En efecto, se definen condiciones adicionales de existencia de subespacios invariantes tales que para todo vector en ellos el exponente de Lyapunov en el futuro coincide con el exponente de Lyapunov en el pasado. A los puntos regulares que cumplen esa condición más fuerte, los llamaremos Lyapunov-regulares (ver Definición 3.8.6). El teorema de Oseledets establece que μ-casi todo punto $x \in M$ no solo es débilmente regular según nuestra definición 3.2.7, sino también Lyapunov-regular según la Definición 3.8.6.

Los exponentes de Lyapunov dependen de la órbita de x, pero no dependen de cuál punto se tome en la misma órbita. En efecto:

Ejercicio 3.8.3. Probar que si x es débilmente regular, entonces para todo $k \in \mathbb{Z}$ fijo, el punto $y = f^k(x)$ (es decir, cualquier punto en la órbita de x) es también débilmente regular y que el conjunto de los exponentes de Lyapunov en y coincide con el de los de x.

El siguiente ejercicio tiene como objetivo adelantarse al enunciado del teorema de Oseledets (que enunciaremos al final de esta sección).

Ejercicio 3.8.4. Sea x un punto débilmente regular.
(a) Sean $\mathbf{0} \neq v \in T_xM$, χ el exponente de Lyapunov en el futuro (o en el pasado) de la órbita de x correspondiente a una dirección $u \neq 0$. Sea $[u] \subset T_xM$ el subespacio de dimensión 1 generado por u. Demostrar que para todo $0 \neq u' = [u]$ el exponente de Lyapunov en el futuro (o en el pasado respectivamente) correspondiente a u es el mismo que el de u'.
(b) Sean χ_u^+ y χ_v^+ los exponentes de Lyapunov en el futuro de dos direcciones l.i. $0 \neq u, v \in T_xM$. Sean χ_u^- y χ_v^- los exponentes de Lyapunov en el pasado de esas dos mismas direcciones u y v. Asuma $\chi_u^+ \neq \chi_v^+$, $\chi_u^- \neq \chi^- v$. Sea $w = u+v$. Probar que $\chi_w^+ = \max\{\chi_u^+, \chi_v^+\}$ y $\chi_w^- = \min\{\chi_u^-, \chi_v^-\}$.
Sugerencia: Asuma $\chi_u^+ > \chi_v^+$. Use el primer límite de 3.8.2 con los vectores u y v, para probar que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|df^n(w)\| \geq \|df^n(u)\| - \|df^n(v)\| \geq$$

$$e^{n(\chi_u^+ - \epsilon)}(\|u\| - e^{n(\chi_v^+ - \chi_u^+ + 2\epsilon)}\|v\|) \ \ \forall\ n \geq N.$$

Fije $\epsilon < (\chi_u^+ - \chi_v^+)/2$. Tome logaritmo, divida entre n y luego $n \to +\infty$.
(c) Como en la parte (b) asuma ahora $\chi_u^+ = \chi_v^+$ y $\chi_u^- = \chi_v^-$. Pruebe que $\chi_w^+ \leq \chi_u^+ = \chi_v^+$, $\chi_w^- \geq \chi_u^- = \chi_v^-$.
(d) Sea una base $u_1, \ldots, u_k$ de T_xM. Asuma que los exponentes de Lyapunov en el futuro χ_i^+ y en el pasado χ_i^- en las direcciones u_i, cumplen $\chi_i^+ \neq \chi_j^+$ para todo $i \neq j$. Probar que para todo $0 \neq u = \sum_{i=1}^k b_i u_i \in T_xM$, se cumple:

$$\chi_u^+ = \max_{1 \leq i \leq k;\ b_i \neq 0} \chi_i^+.$$

$$\chi_u^- = \min_{1 \leq i \leq k;\ b_i \neq 0} \chi_i^-.$$

Sugerencia: usar inducción en la cantidad de coeficientes $b_i \neq 0$, y la parte (b).

Ejercicio 3.8.5. Sea x un punto débilmente regular.
Para cada $k \geq 0$ sean $E^1_{f^k(x)}$ y $E^2_{f^k(x)}$ dos subespacios L.I. (de dimensiones no nulas) de $T_{f^k(x)}M$, invariantes por f (es decir $E^i_{f^{k+1}(x)} = df_{f^k(x)} E^i_{f^k(x)}$ para todo $k \geq 0$ y para $i = 1, 2$). Asuma la siguiente hipótesis:

Hipótesis I Para cada i coinciden los exponentes de Lyapunov en el futuro y en el pasado entre sí y en todas las direcciones del subespacio E^i_x. Llámelo χ^i. Además para todo $0 \neq v \in E^1_x \oplus E^2_x$, el exponente de Lyapunov en el futuro de v es mayor o igual que el exponente de Lyapunov en el pasado de v.
(a) Probar que
(i) Para todo $k \geq 0$ y para cada $i = 1, 2$, los exponentes de Lyapunov en el futuro y en el pasado en $f^k(x)$, correspondientes a la dirección $E^i_{f^k(x)}$, coinciden entre sí y con χ^i.
(ii) Probar que para todo $0 \neq v \in E^1_{f^k(x)} \oplus E^2_{f^k(x)}$ tal que $v \notin E^1_{f^k(x)}, E^2_{f^k(x)}$, el exponente de Lyapunov $\chi^+_v(x)$ de $[v]$ en el futuro es igual a $\max\{\chi^1, \chi^2\}$, y el exponente de Lyapunov $\chi^-_v(x)$ de $[v]$ en el pasado, es igual a $\min\{\chi^1, \chi^2\}$.
(iii) Deducir que si $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, entonces el subespacio $E_{f^k(x)} = E^1_{f^k(x)} \oplus E^2_{f^k(x)}$ es invariante, de dimensión mayor que los subespacios $E^1_{f^k(x)}$ y $E^2_{f^k(x)}$ que lo generaron, y los exponentes de Lyapunov en el futuro y en el pasado para todos los vectores $\mathbf{0} \neq v \in E$ coinciden con χ.
(b) Extender (enunciar y demostrar) los resultados de la parte a), asumiendo que existe un splitting $T_xM = E^1_x \oplus E^2_x \oplus \ldots \oplus E^h_x$ que verifica la Hipótesis I.
(c) Deducir, asumiendo (b), que el conjunto de exponentes de Lyapunov diferentes en cualquier punto regular que cumpla la Hipótesis I es finito, y menor o igual que $\dim(M)$.

El ejercicio anterior motiva preguntarse cuándo se cumple la hipótesis asumida sobre la existencia de los subespacios E^i_x invariantes para los cuales los exponentes de Lyapunov en el futuro y en el pasado existen y son iguales entre sí, y diferentes para diferentes valores de i. Esta pregunta motiva la siguiente definición de regularidad:

Definición 3.8.6. Puntos Lyapunov-regulares
Un punto $x \in M$ se llama *Lyapunov regular* si existe un splitting del espacio tangente

$$T_xM = E^1_x \oplus E^2_x \oplus E^{k(x)}_x$$

(que puede reducirse como caso particular a $k(x) = 1$, $T_xM = E^1_x$), tal que existen y coinciden entre sí *los exponentes de Lyapunov en el futuro y en el pasado* $\chi_i(x)$ en toda dirección $[v] \subset E^i_x$ y además

$$\chi_1(x) < \chi_2(x) < \ldots < \chi_h(x)(x).$$

En otras palabras:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(\|df^n_x(v)\|)}{n} = \lim_{n\to-\infty} \frac{\log(\|df^n_x(v)\|)}{n} = \chi_i(x) \ \ \forall \, \{\mathbf{0}\} \neq [v] \subset E^i_x.$$

Los subespacios E^i_x en un punto Lyapunov regular, se llaman *subespacios de Oseledets.*

Nota: El Ejercicio 3.8.5 muestra que todo punto Lyapunov-regular es regular en el sentido de la Definición 3.8.2. El recíproco es falso (ver el ejemplo del Ejercicio 1.3.13).

En el enunciado del siguiente ejercicio se establece que la regularidad Lyapunov, el splitting y los exponentes de Lyapunov dependen de la órbita y no de qué punto x en cada órbita se elija.

Ejercicio 3.8.7. Sea x un punto Lyapunov-regular.
(a) Demostrar que el splitting $T_xM = \bigoplus_{i=1}^{h(x)} E^i(x)$ y el conjunto de exponentes de Lyapunov, son únicos.
(b) Demostrar que para todo $k \in \mathbb{Z}$ el punto $f^k(x)$ también es Lyapunov regular, y además $E^i_{f^k(x)} = df^k E^i(x) \forall\ 1 \leq i \leq h(f^k(x)) = h(x)$, y $\chi_i(x) = \chi_i(f^k(x))$.

Pregunta: ¿Existen abundantes puntos Lyapunov regulares?
El siguiente resultado es un teorema fundamental en la Teoría Ergódica Diferenciable y responde afirmativamente a la pregunta anterior, por lo menos desde el punto de vista medible, y con respecto a las medidas invariantes:

Teorema 3.8.8. de Oseledets
Sea M una variedad compacta riemanniana de dimensión finita. Sea $f \in$ Diff $^1(M)$. *Entonces*
(a) *El conjunto R de puntos Lyapunov regulares para f es medible.*
(b) *Las funciones que a cada punto $x \in R$ asignan los exponentes de Lyapunov son medibles.*
(c) *El conjunto R tiene probabilidad total* (para toda medida de probabilidad f-invariante μ, se cumple $\mu(R) = 1$).

La demostración de V.I. Oseledets del Teorema 3.8.8 se encuentra en [61] para difeomorfismos que preservan la medida de Lebesgue ergódica, y en [62], en general. Otras demostraciones del teorema de Oseledets pueden encontrarse por ejemplo en [8], en [54, Cap. IV §10] (ver también [55] y [95]) y en [**?**].
Generalizaciones del Teorema de Oseledets, llamados Teoremas Ergódicos Multiplicativos, enuncian resultados en los cuales df_x es sustituido por una aplicación lineal que depende de x en un espacio vectorial finito dimensional, o incluso por un cociclo en ciertos espacios de Banach infinito dimensionales. Por ejemplo, en [39], se prueba un Teorema Ergódico Multiplicativo que generaliza al Teorema de Oseledets a ciertos cociclos en espacios de Banach uniformemente convexos.

3.9. Hiperbolicidad no uniforme

Interpretación de los exponentes de Lyapunov no nulos:

Veremos por qué los exponentes de Lyapunov, cuando no son nulos, se interpretan como *la tasa exponencial asintótica de crecimiento (dilatación) o decrecimiento (contracción)* en el futuro de la norma de los vectores en el subespacio tangente, por iteración del diferencial, es decir al aplicar df^n En efecto, supongamos que un exponente de Lyapunov en el futuro y en el pasado, para la dirección $[s] \subset T_xM$ de la órbita por x, es $\chi(x) < 0$. Entonces, de la definición del límite en 3.8.2, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \geq 1$:

$$\|df_x^n(s)\| \leq e^{n(\chi+\epsilon)}\|s\| \ \forall \ n \geq N$$

Luego, para ciertos números reales $C(x) > 0$, $\lambda(x) = e^{\chi(x)+\epsilon} < 1$ (si se fija $0 < \epsilon < -\chi(x)$), se cumple

$$\|df^n(s)\| \leq C(x)[\lambda(x)]^n\|s\| \ \ \forall \ n \geq 0, \quad \text{donde } 0 < \lambda(x) < 1, \tag{3.11}$$

(Demostramos con detalle la existencia de $C(x) > 0$ y la desigualdad anterior en el Lema 3.9.3.) La desigualdad anterior significa que, en la dirección $[s]$, el diferencial n-ésimo contrae exponencialmente las normas de los vectores hacia el futuro con coeficiente $0 < \lambda = e^{\chi+\epsilon} < 1$. Este coeficiente tiende a e^χ cuando $\epsilon \to 0^+$ (y por lo tanto cuando $n \to +\infty$). Entonces un exponente de Lyapunov negativo χ es asintóticamente igual a $\log\lambda$. Decimos así que *un exponente de Lyapunov negativo $\chi(x)$ es la tasa exponencial asintótica de contracción en el futuro (o de dilatación hacia el pasado) por la derivada de f^n en la dirección* $[s]$.
Análogamente, si para la misma órbita de x existe alguna dirección $[u] \subset T_xM$, para la cual el exponente de Lyapunov en el pasado y en el futuro es $\chi(x) > 0$, entonces existen un número real $C(x) > 0$ y un valor real $\sigma(x) = e^{\chi(x)-\epsilon} > 1$ (si se fija $0 < \epsilon < \chi(x)$) tales que:

$$\|df^{-n}(u)\| \leq C(x)[\sigma(x)]^{-n}\|u\| \ \ \forall \ n \geq 0, \quad \text{donde } \sigma(x) > 1, \tag{3.12}$$

(Demostraremos la existencia de la constante $C(x) > 0$ y la desigualdad anterior en el Lema 3.9.3.) Siendo σ asintóticamente igual a e^χ, decimos que *un exponente de Lyapunov positivo $\chi(x)$ es la tasa exponencial asintótica de constracción hacia el pasado (o de dilatación hacia el futuro) por la derivada de f^{-n} en la dirección* $[u]$.

Observemos las similitudes y diferencias entre las desigualdades (3.11) y (3.12) y las de la Definición 3.3.1 de hiperbolicidad uniforme (desigualdades (3.1) y (3.2)) Las similitudes justifican la siguiente definición:

Definición 3.9.1. Hiperbolicidad no uniforme Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto medible f-invariante: $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$ (Λ no es necesariamente compacto).
Decimos que f *es no uniformemente hiperbólico en* Λ, (o que Λ es un conjunto no uniformemente hiperbólico para f), si para todo punto $x \in \Lambda$ existe un

splitting $T_xM = S_x \oplus U_x$ que depende mediblemente de $x \in \Lambda$ y que es df-invariante, i.e.
• $dfS_x = S_{f(x)}$, $\;dfU_x = U_{f(x)}$ $\;\forall\, x \in \Lambda$,
y existen números reales $C(x) > 0$ y $0 \leq \lambda(x) < 1 < \sigma(x)$, que dependen mediblemente de $x \in \Lambda$, tales que
• $\lambda(f(x)) = \lambda(x)$, $\;\sigma(f(x)) = \sigma(x)$,
• se verifican las dos desigualdades (3.11) y (3.12); es decir, para todo $n \geq 0$ y para todos $u \in U_x$ y $s \in S_x$:

$$\|df^n s\| \leq C(x)\lambda(x)^n \|s\|, \qquad \|df^{-n}u\| \leq C(x)\sigma(x)^{-n}\|u\|$$

Observación 3.9.2. Hiperbolicidad No Uniforme. A diferencia de la Definición 3.3.1 de hiperbolicidad uniforme en compactos, la hiperbolicidad no uniforme no implica la continuidad del splitting $S_x \oplus U_x$ al variar $x \in \Lambda$. Pero sí exige, por definición, que el splitting sea medible.

Nota: Si $C(x)$, $\lambda(x)$ y $\sigma(x)$ son constantes independientes de $x \in \Lambda$, y además Λ es compacto, se dice que f es uniformemente hiperbólico en Λ, o que Λ es un conjunto uniformemente hiperbólico para f, de acuerdo con la definición 3.3.1.

Lema 3.9.3. *Sea Λ un conjunto f-invariante, medible tal que todo $x \in \Lambda$ es un punto Lyapunov regular cuyo splitting $E^1_x \oplus E^2_x \oplus \ldots \oplus E^r_x = T_xM$ depende mediblemente de x ($r = r(x)$ también), y cuyos exponentes de Lyapunov respectivos $\chi_1(x) < \chi_2(x) < \ldots < \chi_i(x) < \ldots \chi_r(x)$ son **todos diferentes de cero** y dependen mediblemente de x. Entonces Λ es un conjunto no uniformemente hiperbólico.*
En extenso, existe un splitting medible $T_xM = S_x \oplus U_x$ invariante por df y funciones medibles $C(x) > 0$ y $0 < \lambda(x) < 1 < \sigma(x)$, tales que $\lambda(f(x)) = \lambda(x)$ y $\sigma(f(x)) = \sigma(x)$ y tales que se verifican las desigualdades (3.11) y (3.12) para todo $n \geq 0$, para todo $u \in U_x$ y todo $s \in S_x$, y para todo $x \in \Lambda$.

Demostración. Sean:
$$\alpha := \max\{\chi_i(x) : 1 \leq i \leq r,\ \chi_i(x) < 0\} < 0,$$
$$\beta := \min\{\chi_i(x) : 1 \leq i \leq r,\ \chi_i(x) > 0\} > 0.$$
Como α y β son máximo y mínimo de funciones medibles, son medibles. Fijemos un valor constante $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\alpha + \epsilon < 0$, $\beta - \epsilon > 0$. Denotamos

$$0 < \lambda = \lambda(x) := e^{\alpha + \epsilon} < 1, \quad \sigma = \sigma(x) := e^{\beta - \epsilon} > 1.$$

Como $\lambda(x)$ y $\sigma(x)$ son composición de funciones continuas con funciones medibles, son medibles. Por construcción, como los exponentes de Lyapunov son los mismos para x que para $f(x)$, tenemos $\lambda(x) = \lambda(f(x))$, $\sigma(x) = \sigma(f(x))$. Sean

$$S_x := \oplus\{E^i_x(x) : 1 \leq i \leq r,\ \chi_i(x) < 0\},$$

$$U_x := \oplus\{E^i_x(x) : 1 \leq i \leq r,\ \chi_i(x) > 0\},$$

donde $\oplus_{i=1}^r E_x^i(x) = T_x M$ es el splitting en los subespacios de Oselecs del espacio tangente en el punto x. Estos subespacios existen por la Definición 3.8.6 de punto Lyapunov regular; y por hipótesis dependen mediblemente de x. Las funciones $\chi_i(x)$ son medibles. Luego las preimagenes por $\chi_i : T\Lambda \mapsto \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^+$ y de $\mathbb{R}^-$ son conjuntos medibles. Finalmente, la suma directa de un conjunto finito de subfibrados medibles, es un subfibrado medible. Concluimos que S_x y U_x son subfibrados medibles de $T\Lambda$.
Por construcción, como los subespacios de Oseledets son invariantes por df, tenemos

$$df S_x = S_{f(x)}, \quad df U_x = U_{f(x)}.$$

Aplicando el resultado del Ejercicio 3.8.5, tenemos:
Para todo $s \in S_x$ el exponente de Lyapunov en el futuro (y también en el pasado) es menor o igual que $\alpha < 0$. Para todo $u \in U_x$ el exponente de Lyapunov en el pasado (y también en el futuro) es mayor o igual que $\beta > 0$. En extenso:

$$\chi_i^+(x,s) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log \|df^n(s)\|}{n} \leq \alpha < \alpha + \epsilon = \log\lambda < 0 \;\; \forall\, 0 \leq s \in S_x, \quad (3.13)$$

$$\chi_i^-(x,u) = \lim_{m\to-\infty} \frac{\log \|df^m(u)\|}{m} \geq \beta > \beta - \epsilon = \log\sigma > 0 \;\forall\, 0 \leq u \in U_x. \quad (3.14)$$

Probemos que para cada $0 \leq s \in S_x$ y para cada $0 \leq u \in U_x$, existen los siguientes números reales $H(x,s)$, $K(x,s)$ > 0:

$$H(x,s) := \sup_{n\geq 0} \frac{\|df_x^n(s)\|}{\lambda^n \|s\|}, \qquad K(x,u) := \sup_{n\geq 0} \frac{\|df_x^{-n}(u)\|}{\sigma^{-n} \|u\|}. \quad (3.15)$$

En efecto, fijemos x, u, s. En las igualdades (3.13) y (3.14), aplicamos la definición de límite, multiplicamos por n (con $|n|$ suficientemente grande), y aplicamos la exponencial. (Hay que cuidar que cuando n es negativo, al multiplicar por n se invierten el sentido de las desigualdades). Concluimos que existe $N = N(x,u,s) \geq 0$ tal que

$$\|df^n(s)\| \;/\; \lambda^n \|s\| \; < 1, \;\; \|df^{-n}(u)\| \;/\; \sigma^{-n} \|u\| \; < 1,$$

para todo $n \geq N \geq 0$. Entonces, el supremo que define $H(x,s)$, así como el supremo que define $K(x,s)$, existe y es un número real no negativo (porque para $|n| \geq N$, todos los cocientes cuyo supremo buscamos son menores que 1; y para $0 \leq |n| \leq N$ los cocientes a maximizar son positivos y una cantidad finita). Afirmamos que existen los números reales $K(x), H(x) > 0$, definidos por:

$$H(x) := \sup\big\{H(x,s) : \;\; s \in S_x, \; \|s\| = 1\big\}, \quad (3.16)$$

$$K(x) := \sup\big\{K(x,u) : \;\; u \in U_x, \; \|u\| = 1\big\} \quad (3.17)$$

Probaremos que existe $K(x)$ real (la prueba de que existe $H(x)$ real es similar). Tomemos una base $u_1, \ldots, u_k$ de U_x, donde $k = \dim(U_x)$, formada por vectores u_i de norma 1, que se encuentran todos en los subespacios de Oseledets, según la definición 3.8.6 de punto Lyapunov regular. Entonces, dado $u \in U_x$ se puede escribir: $u = \sum_{i=1}^{k_2} b_i u_i$. Si $\|u\| = 1$, entonces existe $M(x)$ tal que $0 \leq |b_i| \leq M(x)\ \forall\ 1 \leq i \leq k$. En efecto, fijada la base, cada $|b_i|$ es una función real continua del vector $u \in U_x$ (pues es la norma de la proyección ortogonal del vector u sobre el subespacio generado por u_i). Por el teorema de Weierstrass, la función continua u_i tiene un máximo M_i en el subconjunto compacto $\{u \in U_x : \|u\| = 1\} \subset T_xM$. Entonces basta tomar $M(x) := \text{máx}_{i=1}^{k} M_i$.
Tenemos:

$$\frac{\|df^{-n}(u)\|}{\sigma^{-n}} \leq \sum_{i=1}^{k} |b_i| \frac{\|df^{n}(u_i)\|}{\sigma^{-n}} \leq M(x) \sum_{i=1}^{k} K(x, u_i) =: K_1(x) \quad \forall\ n \geq 0. \tag{3.18}$$

Para la primera desigualdad usamos la propiedad triangular de la norma. Para la última desigualdad, usamos que $|b_i| \leq M(x)$ y la definición de $K(x, u_i)$. Esto prueba que existe $K_1(x) < +\infty$ definido por la igualdad (3.18). Como la desigualdad a la izquierda en (3.18) vale para todo $u \in U_x$ con $\|u\| = 1$, entonces el supremo $K(x)$ definido en (3.17) cumple $K(x) \leq K_1(x) < +\infty$. Análogamente se prueba que existe $H(x) < +\infty$ definido por (3.16).
De las definiciones de los números $H(x,s), K(x,u), H(x), K(x)$ en las igualdades (3.15), (3.16) y (3.17), definiendo $C(x) = \text{máx}\{K(x), H(x)\}$, deducimos:

$$\|df^{n}(s)\| \leq C(x)\lambda(x)^{n}\ \|s\|\ \forall n \geq 0,\ \forall\ s \in S_x,$$

$$\|df^{-n}(u)\| \leq C(x)\sigma(x)^{-n}\ \|u\|\ \forall n \geq 0,\ \forall\ u \in U_x.$$

En efecto, estas desigualdades valen cuando $\|s\| = 1$ y $\|u\| = 1$ por la definición de $H(x)$ y $K(x)$. Entonces valen para todo $s \in S_x$ y para todo $u \in U_x$ por la linealidad de df^n. Esto termina de probar el Lema 3.9.3. □

3.10. Región de Pesin y medidas hiperbólicas

En esta sección $f \in \text{Diff}^{\,1}(M)$ y M es una variedad compacta y riemanniana.

Definición 3.10.1. La *región de Pesin* $P_f \subset M$ es el conjunto de los puntos $x \in M$ Lyapunov-regulares tales que los exponentes de Lyapunov $\chi_x^1 < \chi_x^2 \cdots \chi_x^{h(x)}$ son todos diferentes de cero.

Observar que por el Teorema 3.8.8 de Oseledets, la región de Pesin es medible. Para algunos difeomorfismos la región de Pesin puede ser vacía. Por ejemplo, trivialmente, si f es la identidad $P_f = \emptyset$. Otro ejemplo: las rotaciones de la esfera S^2 (f es la rotación de la esfera, de ángulo constante alrededor de un diámetro de S^2, llamado eje polo norte-polo sur): $P_f = \emptyset$.

Ejercicio 3.10.2. (a) Construir un difeomorfismo $f : S^1 \mapsto S^1$ en el círculo S^1 que preserve la orientación, tal que $P_f = \emptyset$ y tal que en todo abierto $V \subset S^1$ la derivada f' no sea idénticamente igual a 1.
(b)Idem en la esfera S^2 con la condición de que en todo abierto $V \subset S^2$ la derivada df no es idénticamente igual a la identidad Id, ni a $-Id$.
(c) Construir un ejemplo en el círculo S^1 que cumplan las condiciones de la parte (a) y además tal que el conjunto de puntos Lyapunov regulares sea finito.
(d) ¿Existen ejemplos en el círculo que cumplan las condiciones de la parte (a) y además tal que el conjunto de los puntos Lyapunov-regulares sea infinito?
(e) Construir un difeomorfismo $f : S^1 \mapsto S^1$ tal que la región de Pesin $P_f \neq \emptyset$ pero que no coincida con el conjunto de todos los puntos Lyapunov-regulares.
(f) Probar que para todo difeomorfismo f del círculo, o bien la región de Pesin P_f es vacía o bien es finita o bien es infinita numerable, y encontrar ejemplos de los tres casos (sugerencia: probar que todo $x \in P_f$ es aislado en P_f).
(g) Demostrar que existen difeomorfismos $f : S^2 \mapsto S^2$ en la esfera tal que la región de Pesin P_f es no numerable (sugerencia: la Herradura de Smale definida en 3.4.1).

Definición 3.10.3. (Medida hiperbólica)
Una medida de probabilidad f-invariante μ se dice *hiperbólica* si $\mu(P_f) = 1$, donde P_f es la región de Pesin. En otras palabras, μ es hiperbólica si y solo si los exponentes de Lyapunov son diferentes de cero μ-c.t.p.

Para demostrar el siguiente resultado, utilizaremos el Teorema 3.8.8 de Oseledets.

Teorema 3.10.4. Medidas hiperbólicas y conjuntos no uniformemente hiperbólicos
(a) *Si μ es medida de probabilidad hiperbólica entonces existe un conjunto invariante Λ (no necesariamente compacto) tal que $\mu(\Lambda) = 1$ y f es hiperbólica* (unif. o no unif.) *en Λ.*
(b) *Si Λ es un conjunto invariante tal que f es* (unif. o no unif.) *hiperbólica en Λ, y si μ es una probabilidad f-invariante tal que $\mu(\Lambda) = 1$, entonces μ es medida hiperbólica.*
(c) *Si Λ es un conjunto invariante y compacto tal que f es* (unif. o no unif.) *hiperbólica en Λ, entonces existen medidas de probabilidad μ tales que $\mu(\Lambda) = 1$. Luego, por la parte (b), todas estas medidas son hiperbólicas. En particular existen medidas de probabilidad hiperbólicas y ergódicas soportadas en Λ.*

Demostración. **(a)** Sea Λ la región de Pesin. Por definición de puntos regulares, Λ es f-invariante, y por el Teorema 3.8.8 de Oseledets, Λ es medible. Por definición de medida hiperbólica $\mu(\Lambda) = 1$. Por el Teorema 3.8.8 de Oseledets, los exponentes de Lyapunov y el splitting en subespacios correspondientes, son funciones medibles. Debido al Lema 3.9.3, como los exponentes de Lyapunov de todo punto $x \in \Lambda$ son no nulos, Λ es (unif. o no unif.) hiperbólico.

(b) De la desigualdad (3.11), tomando logaritmo, dividiendo entre n y haciendo $n \to +\infty$, se deduce que para μ-c.t.p. $x \in \Lambda$, y para toda dirección $[s] \in S_x$, los exponentes de Lyapunov *hacia el futuro* (según Definición 3.8.2) son menores que $\log \lambda(x) < 0$. Análogamente, de la desigualdad (3.12), tomando logaritmo, dividiendo entre $-n < 0$ (se invierte el sentido de la desigualdad), y haciendo $n \to +\infty$, deducimos que para toda dirección $[u] \in U_x$ los exponentes de Lyapunov *hacia el pasado* son mayores que $\log \sigma(x) > 0$.
Por el teorema de Oseledets, μ-casi todo punto es Lyapunov regular. Entonces para μ-casi todo punto existen los subespacios de Oseledets para los cuales los exponentes de Lyapunov hacia el pasado son iguales a los exponentes de Lyapunov hacia el futuro. A priori, hay tres casos: el subespacio de Oseledets E^i_x está contenido en S_x, o está contenido en U_x, o ninguna de las dos cosas. En el primer caso, el exponente de Lyapunov hacia el futuro y hacia el pasado en E^i_x es negativo (porque es negativo hacia el futuro por estar contenido en S_x y coincide con el exponente hacia el pasado por ser un subespacio de Oseledets). En el segundo caso, el Lyapunov hacia el futuro y hacia el pasado en E^i_x es positivo (porque es positivo hacia el pasado por estar contenido en U_x y porque coincide con el exponente hacia el futuro por ser un subespacio de Oseledets). Probemos que el tercer caso es vacío; es decir todo subespacio de Oseledets está contenido en S_x o en U_x. Por absurdo, sea una dirección $[v] \in E^i_x, \;\; [v] \notin S_x, U_x$. Como $T_xM = U_x \oplus S_x$, entonces $v = u + s$ con $0 \neq u \in U_x, \; 0 \neq s \in S_x$. Como $\chi^+_s < 0$, aplicando lo probado en el Ejercicio 3.8.5, el exponente de Lyapunov χ_i hacia el futuro en E^i_x es menor o igual que $\chi^+_s < 0$. Entonces es negativo. Análogamente, como $\chi^-_u > 0$ (porque $u \in U_x$ y en U_x los exponentes de Lyapunov hacia el pasado son positivos), aplicamos lo probado en el Ejercicio 3.8.5 y deducimos que el exponente de Lyapunov χ_i hacia el pasado en E^i_x es mayor o igual que $\chi^-_u > 0$. Entonces es positivo. Pero en un subespacio de Oseledecs, el exponente de Lyapunov hacia el futuro y hacia el pasado coincide. No puede ser negativo y positivo a la vez. Entonces no hay subespacio de Oseledets que no esté incluido en S_x o en U_x.
Concluimos que en todos los subespacios de Oseledets, los exponentes de Lyapunov son no nulos. Por lo probado en el ejercicio 3.8.5, todos los exponentes de Lyapunov en cualquier dirección, hacia el futuro o hacia el pasado, son iguales a algún exponente de Lyapunov en los subespacios de Oseledecs. Entonces son no nulos. Esto vale para μ-c.t.p. $x \in M$. Entonces μ-c.t.p no tiene exponentes de Lyapunov iguales a cero; es decir, μ es una medida de probabilidad hiperbólica.
(c) Sea $\widetilde{f} = f|_\Lambda : \Lambda \mapsto \Lambda$. Siendo Λ un espacio métrico compacto y $\widetilde{f}$ continua en Λ, el Teorema 1.7.1 asegura que existen medidas de probabilidad μ soportadas en Λ invariantes y ergódicas para $\widetilde{f}$. Es inmediato chequear que μ, como medida de probabilidad en M, es invariante y ergódica para f. Por la parte b) toda tal medida es hiperbólica. □

Observación 3.10.5. Medidas hiperbólicas ergódicas: Si una medida es ergódica, entonces los exponentes de Lyapunov son constantes μ-c.t.p. (pues son funciones medibles invariantes c.t.p.). Por el mismo motivo, las dimensiones de los subespacios del splitting en la definición de Lyapunov regularidad son constantes μ-c.t.p. Por lo tanto, para las medidas hiperbólicas ergódicas, la definición del conjunto no uniformemente hiperbólico Λ, tal que $\mu(\Lambda) = 1$, adquiere las particularidades siguientes:
(i) En las desigualdades (3.11) y (3.12), las tasas de contracción y dilatación $0 < \lambda < 1 < \sigma$ son constantes independientes de $x \in \Lambda$ (mientras que en general el coeficiente $C(x) > 0$ varía con x).
(ii) Las dimensiones de los subespacios estable S_x e inestable U_x, son constantes, independientes de $x \in \Lambda$.

3.11. Variedades estable e inestable en la región de Pesin

En esta sección, M es una variedad compacta y riemanniana y $f \in \text{Diff}^{1+\alpha}(M)$, es decir f es difeomorfismo C^1 más Hölder. Recordamos que esto significa que $f \in \text{Diff}^{\,1}(M)$ y tanto df_x como df_x^{-1} son funciones Hölder-continuas del punto $x \in M$, i.e. existen constantes $\alpha, K > 0$ tales que

$$\|df_x - df_y\| \leq K\,[\text{dist}(x,y)]^{\alpha},$$

y análogamente para df_x^{-1}.
El siguiente teorema, generaliza al caso no uniformemente hiperbólico, el Teorema 3.5.1 de existencia de variedades invariantes para conjuntos uniformemente hiperbólicos (en particular para difeomorfismos de Anosov). Sin embargo, la validez de la siguiente generalización, así como la de los resultados que fundamentan la Teoría de Pesin, está restringida a difeomorfismos de clase $C^{1+\alpha}$.

Teorema 3.11.1. Variedades Estable e Inestable locales (Pesin)
Sea $f : M \mapsto M$ un difeomorfismo C^1 más Hölder en una variedad riemanniana compacta M tal que la región de Pesin $P(f)$ es no vacía. Para $x \in P(f)$ denotamos S_x y U_x los subespacios estable e inestable, respectivamente, correspondientes a los exponentes de Lyapunov negativos y positivos de $x \in \Lambda$. (Notar que $S_x \oplus U_x = T_xM$).
Entonces, para todo $x \in P(f)$ existen subvariedades locales $W^s_{loc}(x)$ y $W^u_{loc}(x)$, C^1-encajadas en M, a las que llamamos variedad estable e inestable local respectivamente, tales que:
(a)

$$T_xW^s_{\text{loc}}(x) = S_x, \quad T_xW^u_{\text{loc}}(x) = U_x.$$

(b)

$$f(W^s_{\text{loc}}(x)) \subset W^s_{\text{loc}}(f(x)), \quad f(W^u_{\text{loc}}(x)) \supset W^u_{\text{loc}}(f(x)).$$

(c) Para todo $x \in P(f)$ y para todo $y \in M$ se cumple:

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) = 0 \ \text{ si } \ y \in W^s_{\text{loc}}(x),$$

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0 \ \text{ si } \ y \in W^u_{\text{loc}}(x).$$

El teorema anterior y su demostración se encuentran en Pesin [64]. La demostración puede encontrarse también en [8, Theorem 4.1.1, pag.81] o en [34].
Se observa, en el Teorema 3.11.1, que la hipótesis f de clase C^1 más Hölder es necesaria. En efecto, Pugh en [68] construyó un ejemplo $f \in \text{Diff}^{\,1}(M)$ cuya derivada *df* es continua pero no es Hölder continua, con región de Pesin no vacía, para el que no vale el Teorema 3.11.1 de existencia de variedades invariantes.

Capítulo 4

Atractores topológicos y ergódicos

4.1. Atractores topológicos

A lo largo de esta sección $f : X \mapsto X$ es una transformación continua en un espacio métrico compacto X.

Definición 4.1.1. Estabilidad Lyapunov y orbital.
Sea $K \subset X$ un conjunto compacto no vacío invariante por f (es decir $f^{-1}(K) = K$.)
K se dice *orbitalmente estable* (hacia el futuro) si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{dist}(p, K) < \delta \;\Rightarrow\; \text{dist}(f^n(p), K) < \epsilon \;\; \forall\, n \geq 0.$$

K se dice *Lyapunov estable* (hacia el futuro) si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{dist}(p, K) < \delta \;\Rightarrow\; \exists\, q \in K \text{ tal que } \text{dist}(f^n(p), f^n(q)) < \epsilon \;\; \forall\, n \geq 0.$$

De las definiciones anteriores se deduce que si K es Lyapunov estable, entonces es orbitalmente estable. Sin embargo el recíproco no es cierto en general.

Definición 4.1.2. Atractor topológico I
Un *atractor topológico* es un conjunto K compacto y no vacío tal que
1) $K = f^{-1}(K) = f(K)$.
2) Existe un abierto $V \supset K$, llamado *cuenca local de atracción topológica* de K, tal que

$$\lim_{n \to +\infty} \text{dist}(f^n(x), K) = 0 \;\; \forall\, x \in V. \tag{4.1}$$

Consideramos, de particular importancia, los atractores topológicos *que sean orbitalmente estables* (para los cuales daremos una definición equivalente en 4.1.10).
Un atractor topológico K se llama *minimal* (como atractor topológico) si el único compacto no vacío $K' \subset K$ que cumple 1) y 2) es $K' = K$.

Observación 4.1.3. Muchos autores requieren además de las condiciones 1) y 2), que el compacto no vacío K sea orbitalmente estable o Lyapunov estable, para llamarse atractor topológico. La condición de estabilidad orbital en la Definición 4.1.2 no es redundante con las otras dos condiciones 1) y 2). En el ejemplo 4.1.8 parte (B), se muestra un conjunto compacto $\{p_0\}$ formado por un solo punto fijo p_0 que cumple las condiciones 1) y 2) de la definición 4.1.2, pero que no es orbitalmente estable.

Ejemplo: En el capítulo 1 vimos que toda órbita periódica hiperbólica tipo pozo (de un difeomorfismo $f : M \mapsto M$ en una variedad M), es un atractor topológico.

Ejercicio 4.1.4. Probar que una órbita periódica hiperbólica tipo pozo es un atractor topológico Lyapunov estable.

Ejercicio 4.1.5. (a) Sea $f : M \mapsto M$ un homeomorfismo transitivo en una variedad compacta M. Probar que M es un atractor topológico y que es minimal (como atractor topológico). Deducir que M es el único atractor topológico. Sugerencia: De la transitividad deducir que existe alguna órbita futura densa en M. Para probar que M es minimal como atractor topológico y el único atractor asumir que $K \subset M$ es un atractor topológico. Su cuenca local de atracción topológica V contiene algún punto x de una órbita futura densa. Probar que la órbita futura de x es densa. Usando la definición de atractor, probar que el omega-límite de x para cualquier $x \in V$ debe estar en K. Deducir que $K = M$.
(b) Probar que el único atractor topológico del autormorfismo lineal $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en el toro $\mathbb{T}^2$ es todo el toro.

Ejercicio 4.1.6. Sea $K \subset X$ un atractor topológico. Sea en K la topología inducida por su inclusión en el espacio métrico X. Suponga que existe $x \in K$ tal que la órbita futura de x es densa en K. Demostrar que K es minimal como atractor topológico.

Ejercicio 4.1.7. Sea $X \subset \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ un disco compacto de centro en el origen y radio $1 < r < 2$. Consideremos en X coordenadas polares $p = \rho e^{i\varphi} \in X$: $(\rho, \varphi) : \quad 0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$. Sea $f : X \mapsto X$ el homeomorfismo dado por las siguientes ecuaciones

$$f(p) = f(\rho e^{i\varphi}) = \rho * e^{i\varphi *}, \text{ donde}$$

$$\rho^* = \frac{\rho(4-\rho)}{3}, \qquad \varphi^* = \varphi + a$$

donde a es una constante $0 \leq a < 2\pi$.
(a) Dibujar algunas de las órbitas y probar que la circunferencia K de centro en el origen y radio 1 es un atractor topológico Lyapunov estable. (Sugerencia: ver la demostración de que K es atractor topológico en el ejemplo 4.1.8).
(b) Probar que si $a/(2\pi)$ es irracional entonces K es minimal como atractor topológico. (Sugerencia: usar el ejercicio 4.1.6)
(c) Si $a/(2\pi)$ es racional, ¿es K minimal como atractor topológico?

Ejemplo 4.1.8. .
Sea $X \subset \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ el disco compacto de centro en el origen y radio $1 < r < 2$, como en el ejercicio 4.1.7.
(A) Sea, en coordenadas polares, el siguiente homeormorfismo f:

$$f(p) = f(\rho e^{i\varphi}) = \rho^* e^{i\varphi^*}, \text{ donde}$$

$$\rho^* = \frac{\rho(4-\rho)}{3}, \qquad \varphi^* = \varphi + (\rho - 1)$$

Tenemos $\rho^* - 1 = (3-\rho)(\rho-1)/3$. Luego $|\rho^* - 1| \leq \lambda|\rho - 1|$ si $\rho > 3 \cdot (1-\lambda)$ donde $0 < \lambda < 1$. Entonces, por inducción en n se deduce que $\lim_{n\to+\infty} |\rho^{(n)} - 1| = 0$ donde $\rho^{(n)}$ es la distancia al origen de $f^n(p)$ para cualquier $p \neq (0,0)$. Deducimos que la distancia de $f^n(p)$ a la circunferencia K de centro 0 y radio 1 tiende a cero con $n \to +\infty$, para cualquier punto inicial $0 \neq p \in X$. Además $\rho^* = 1$ si $\rho = 1$, de donde $\rho^{(n)} = 1$ si $\rho^{(0)} = 1$. Entonces la circunferencia K de centro en el origen y radio 1 es invariante por T y por lo probado antes $\text{dist}(f^n(p), K) \to 0$. Luego K es un atractor topológico de acuerdo con la definición 4.1.2. Además K es orbitalmente estable porque $|\rho^* - 1| \leq |\rho - 1|$. Entonces $|\rho^{(n)} - 1|$ es decreciente con n si $p \neq 0$. Luego, la distancia de $f^n(p)$ a la circunferencia K decrece con n. Por lo tanto, es menor que $\epsilon > 0$ si inicialmente es menor que $\delta = \epsilon$. Esto prueba la estabilidad orbital de K.
(B) Sea ahora $g : X \mapsto X$ dado por las ecuaciones

$$g(p) = f(\rho e^{i\varphi}) = \rho^* e^{i\varphi^*}, \text{ donde}$$

$$\rho^* = \frac{\rho(4-\rho)}{3}, \qquad \varphi^* = \varphi\left(2 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \text{ para } \varphi \in [0, 2\pi).$$

En la figura 4.1 se representan algunas de las órbitas. Como en la parte (A), se prueba que la circunferencia K de centro en el origen y radio 1, es un atractor topológico orbitalmente estable. Además, si graficamos φ^* en función de φ para todo $\varphi \in [0, 2\pi]$, observamos que es creciente, con puntos fijos en 0 y 2π, siendo 0 repulsor (a la derecha de 0) y 2π atractor (a la izquierda de 2π). Entonces, si $\varphi^{(n)}$ es el ángulo en coordenadas polares del punto $f^n(p)$,

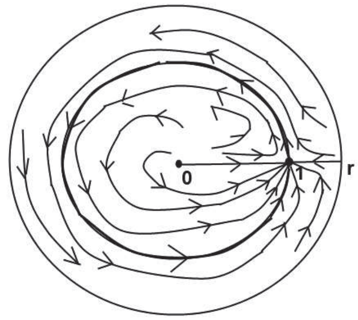

Figura 4.1: Algunas órbitas del Ejemplo g en 4.1.8 (B). El punto 1 es fijo, es un atractor topológico no orbitalmente estable

para $p = \rho\, e^{i\varphi}$, se tiene que $\lim_{n\to+\infty} \varphi^{(n)} = 2\pi \sim 0$. Luego, en este ejemplo, $1 = 1e^{2\pi\, i}$ es un punto fijo, y $\lim_{n\to+\infty} f^n(p) = 1$ para todo $p \neq 0$. Entonces $\{1\} \subset K$ también es atractor topológico según la definición 4.1.2. Pero $\{1\}$ no es orbitalmente estable: Por un lado 1 es un punto fijo, por lo tanto, si $\{1\}$ fuera órbitalmente estable, toda órbita futura con punto inicial p suficientemente cercano a 1, debería mantenerse arbitrariamente cerca de 1. Consideremos la órbita futura $o := \{f^n(p)\}_{n\geq 0}$ por $0 \neq p = \rho e^{i\varphi} \notin K$ con $0 < \varphi < \delta$ (para $\delta > 0$ suficientemente pequeño). Aunque o se acerca a K cuando n crece, y además $\lim_n f^n(p) = 1$, el ángulo $\varphi^{(n)}$ (esto es la coordenada angular de $f^n(p)$ en polares) no se mantiene a distancia menor que $\epsilon > 0$ de 0. Dicho de otra forma, la órbita $\{f^n(p)\}_n$, para algunos $n \geq 1$, se aleja del punto fijo 1 más que una constante positiva (digamos $1/6$, si $\delta > 0$ es suficientemente pequeño), aunque finalmente tiende a 1 cuando $n \to +\infty$ (ver Figura 4.1).

El siguiente resultado da una caracterización de los atractores topológicos orbitalmente estables. Debido a este resultado algunos autores definen atractor topológico agregando, a las condiciones 1) y 2) de la Definición 4.1.2, la condición de que sea orbitalmente estable.

Proposición 4.1.9. .
Caracterización de atractores topológicos orbitalm. estables
Sea $f : X \mapsto X$ un homeomorfismo en un espacio métrico compacto X.
(a) *Si V es un abierto no vacío tal que $\overline{f(V)} \subset V$ y si*

$$K := \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^n(V), \tag{4.2}$$

entonces K es compacto no vacío, es un atractor topológico orbitalmente estable y V es cuenca local de atracción de K.
(b) Recíprocamente, si K es un atractor topológico orbitalmente estable, entonces existe un abierto V que es cuenca local de atracción de K, tal que

$\overline{f(V)} \subset V$ y $K = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^n(V)$.

Definición de conjunto maximal invariante: Si K es compacto invariante no vacío que satisface la igualdad (4.2) para un abierto $V \supset K$, entonces K se llama *conjunto maximal invariante (hacia el futuro)* de V.

La Proposición 4.1.9 justifica la siguiente definición:

Definición 4.1.10. Atractor topológico II
Sea $f : X \mapsto X$ es un homeomorfismo en un espacio métrico compacto X. Un subconjunto no vacío, compacto e invariante $K \subset X$ se llama *atractor topológico orbitalmente estable* o también *atractor topológico maximal invariante* si existe un entorno abierto $V \supset K$, llamado cuenca local de atracción topológica de K, tal que

$$\overline{f(V)} \subset V, \qquad y \qquad K := \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^n(V).$$

Demostración. de la Proposición 4.1.9:
(a) Como $\overline{f(V)} \subset V$ y f es un homeomorfismo, tenemos, por inducción:

$$f^{n+1}(V) \subset \overline{f^{n+1}(V)} \subset f^n(V) \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

$$K := \cap_{n=0}^{+\infty} f^n(V) = V \cap (\cap_{n=1}^{+\infty} f^n(V)) \subset V \cap (\cap_{n=1}^{+\infty} \overline{f^n(V)}) =$$
$$= \cap_{n=1}^{+\infty} \overline{f^n(V)} \subset \cap_{n=0}^{+\infty} f^n(V)) = K.$$

Luego, todas las inclusiones anteriores son igualdades y tenemos

$$K = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{f^n(V)}, \qquad \bigcap_{n=1}^{+N} f^n(V) = f^N(V), \qquad \bigcap_{n=1}^{+N} \overline{f^n(V)} = \overline{f^N(V)} \ \ \forall \ N \geq 1.$$

Por la propiedad de intersecciones finitas no vacías de compactos, deducimos que K es compacto no vacío. Además

$$f^{-1}(K) = \cap_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(\overline{f^n(V)}) = \cap_{n=0}^{+\infty} \overline{f^n(V)} = \overline{V} \cap K = K,$$

pues, por construcción $K \subset V$. Hemos probado que K es compacto no vacío e invariante con f.
Para $\epsilon > 0$, denotamos $B_\epsilon(K) := \{x \in X : \text{dist}(x, K) < \epsilon\}$.

Afirmación A: *Para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N \geq 1$ *tal que* $\overline{f^N(V)} \subset B_\epsilon(K)$.

Por absurdo, si existe $\epsilon > 0$ y para todo $n \geq 1$ existe $x_n \in \overline{f^n(V)}$ tal que $\text{dist}(x_n, K) \geq \epsilon$, entonces tomando una subsucesión de $\{x_n\}$ convergente a un punto x, tenemos $\text{dist}(x, K) \geq \epsilon$. Además $x \in \overline{f^N(V)} \ \forall \ N \geq 1$ (pues $x_N \in \overline{f^N(V)} = \cap_{n=1}^{N} \overline{f^n(V)}$, de donde $x_m \in \overline{f^N(V)}$ para todo $m \geq N$). Entonces

$x \in \cap_{N\geq 1}\overline{f^N(V)} = K$, lo cual contradice que $\text{dist}(x, K) \geq \epsilon$. Hemos probado la afirmación A.

Para probar que K es un atractor topológico, y que V es cuenca local de atracción de K, basta probar que si $y = \lim_{j\to+\infty} f^{n_j}(x)$ para algún $x \in V$ y para alguna subsucesión $n_j \to +\infty$, entonces $y \in K$. En efecto para todo $\epsilon > 0$, tenemos $\text{dist}(y, \overline{f^{n_j}(V)}) < \epsilon$ para todo j suficientemente grande. Luego, usando la afirmación (A), como $\overline{f^{n_j}(V)} \subset B_\epsilon(K)$ para todo n_j suficientemente grande, deducimos: $\text{dist}(y, K) < 2\epsilon$. La desigualdad anterior vale para todo $\epsilon > 0$. Entonces $\text{dist}(y, K) = 0$; es decir $y \in K$, como queríamos demostrar.

Ahora resta probar que K es orbitalmente estable. Dado $\epsilon > 0$ sea $N \geq 1$ como en la afirmación (A). Siendo f un homeomorfismo, $f^N(V)$ es abierto. Además $K \subset f^N(V)$ porque $K := \bigcap_{N\geq 0} f^N(V)$. Como K es compacto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(K) \subset f^N(V)$. Si $x \in B_\delta(K)$ entonces, para todo $m \geq 0$ se cumple $f^m(x) \in f^m(B_\delta(K)) \subset f^m(f^N(V)) \subset \overline{f^{m+N}(V)} \subset \overline{f^N(V)} \subset B_\epsilon(K)$. Hemos probado que si $\text{dist}(x, K) < \delta$ entonces $\text{dist}(f^m(x), K) < \epsilon$ para todo $m \geq 0$. Luego K es orbitalmente estable, terminando la demostración de la parte (a).

(b) Sea K un atractor topológico orbitalmente estable y sea V' un abierto que es cuenca local de atracción de K, según la condición 2) de la Definición 4.1.2. Sea $\epsilon > 0$ tal que

$$\overline{B_{2\epsilon}(K)} \subset V',$$

donde $B_\epsilon(K) := \{x \in X : \text{dist}(x, K) < \epsilon\}$. Por la definición de estabilidad orbital de K existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que $f^m(B_{2\delta}(K)) \subset B_\epsilon(K)$ para todo $m \geq 0$. Como $\overline{B_\delta(K)} \subset B_{2\delta}(K)$, tenemos

$$f^m(\overline{B_\delta(K)}) \subset B_\epsilon(K) \ \ \forall\, m \geq 0.$$

Afirmación (B): Existe $N \geq 1$ tal que

$$f^m(x) \in B_\epsilon(K)\ \forall\, m \geq N,\ \forall\, x \in \overline{B_{2\epsilon}(K)}.$$

En efecto, como $\overline{B_{2\epsilon}(K)} \subset V'$ y V' satisface la condición 2) de la Definición 4.1.2, para cada $x \in \overline{B_{2\epsilon}(K)}$ existe $N_x \geq 1$ tal que $\text{dist}(f^{N_x}(x), K) < \delta$. Como f es continua, existe un entorno abierto U_x de x tal que $\text{dist}(f^{N_x}(y), K) < \delta$ para todo $y \in U_x$. Siendo $\overline{B_{2\epsilon}(K)}$ compacto, existe un subcubrimiento finito $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_h}\}$. Deducimos que para todo $y \in \overline{B_{2\epsilon}(K)}$ existe $N_{x_i} \geq 1$ tal que $\text{dist}(f^{N_{x_i}}(y), K) < \delta$. Por la construcción de δ se tiene $\text{dist}(f^m(y), K) < \epsilon$ para todo $m \geq N_{x_i}$. Luego, si $N = \max\{N_{x_i} : 1 \leq i \leq h\}$, se cumple $f^m(y) \in B_\epsilon(K)$ para todo $m \geq N$ y para todo $y \in \overline{B_{2\epsilon}(K)}$, terminando la prueba de la Afirmación (B).

Definimos el abierto V de la siguiente manera:

$$V := B_{\epsilon_0}(K)\ \cup\ f(B_{\epsilon_1}(K))\ \cup\ f^2(B_{\epsilon_2}(K)) \cup$$

$$\cup\ f^3(B_{\epsilon_3}(K))\ \cup\ \dots\ \cup\ f^N(B_{\epsilon_N}(K)),$$

$$\text{donde}\quad \epsilon_i := \epsilon\left(1+\frac{i}{2^N}\right) < 2\epsilon \qquad \forall\ \ 0\leq i\leq N.$$

Probemos que $\overline{f(V)} \subset V$. En efecto, por un lado si $0 \leq i \leq N-1$ entonces

$$\overline{f(f^i(B_{\epsilon_i}(K)))} \subset \overline{f^{i+1}(B_{\epsilon_i}(K))} \subset f^{i+1}(B_{\epsilon_{i+1}}(K)) \subset V.$$

Por otro lado, si $i = N$ entonces

$$\overline{f(f^N(B_{\epsilon_N}(K)))} \subset \overline{f(f^N(B_{2\epsilon}(K))} = f^{N+1}(\overline{B_{2\epsilon}(K)}) \subset B_\epsilon(K) \subset V,$$

debido a la construcción del natural N según la afirmación (B).
Ahora probemos que V es cuenca local de atracción de K. Sea $x \in V$. Entonces $x \in f^i(B_{2\epsilon}(K))$ para algún $0 \leq i \leq N$, es decir $x = f^i(y)$ para algún $y \in B_{2\epsilon}(K) \subset V'$, donde V' es por hipótesis una cuenca local de atracción de K. Entonces, por la propiedad 2) de la Definición 4.1.2, tenemos $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^n(y), K) = 0$. Luego

$$\lim_{m\to+\infty} \operatorname{dist}(f^m(x), K) = \lim_{m\to+\infty} \operatorname{dist}(f^{m-i}(y), K) = 0, \text{ para todo } x \in V.$$

Hemos probado que V satisface la condición 2) de la Definición 4.1.2. Entonces, por definición V es cuenca local de atracción topológica de K.
Para terminar la demostración solo falta probar que $K = \cap_{n=0}^{+\infty} f^n(V)$. Por un lado como $f(K) = K$ (porque por hipótesis K es invariante con f), y como $K \subset V$ por construcción, entonces $K = f^n(K) \subset f^n(V)$ para todo $n \geq 0$. Luego $K \subset \cap_{n=0}^{+\infty} f^n(V)$.
Ahora probemos la inclusión opuesta. Sea $y \in \cap_{n=0}^{+\infty} f^n(V)$. Entonces

$$\forall\ n \geq 1 \quad \exists\ \ x_n \in f(V) \text{ tal que } y = f^{n-1}(x_n).$$

Sea x el límite de una subsucesión convergente de $\{x_n\} \subset f(V)$, es decir

$$x = \lim_{j\to+\infty} x_{n_j}, \quad n_j \to +\infty.$$

Tenemos $x \in \overline{f(V)} \subset V$.
Dado $\epsilon' > 0$, por la estabilidad orbital de K, existe $\delta' > 0$ tal que $f^n(B_{\delta'}(K)) \subset B_{\epsilon'}(K)$ para todo $n \geq 0$. Como V es cuenca local de atracción de K, y $x \in V$, deducimos que existe N tal que $\operatorname{dist}(f^m(x), K) < \delta'\ \ \forall\ m \geq N$, en particular

$$\operatorname{dist}(f^N(x), K) < \delta'.$$

Por la continuidad de f^N, existe un entorno abierto U_x de x, tal que

$$\operatorname{dist}(f^N(z), K) < \delta'\ \forall\ z \in U_x.$$

Por construcción del punto x, $x_{n_j} \in U_x$ para todo j suficientemente grande. Luego:

$$\text{dist}(f^N(x_{n_j}), K) < \delta' \ \ \forall \ j \text{ suficientemente grande.}$$

Por la construcción del número δ' a partir de la estabilidad orbital de K, deducimos que

$$\text{dist}(f^m(x_{n_j}), K) < \epsilon' \ \ \forall \ \ m \geq N.$$

Luego, en particular, para $m = n_j - 1$, si elegimos j suficientemente grande tal que

$$n_j \geq N + 1,$$

tenemos

$$\text{dist}(f^{n_j - 1}(x_{n_j}), K) < \epsilon'.$$

Por construcción de la sucesión $\{x_n\}$ tenemos $y = f^{n_j-1}(x_{n_j})$. Deducimos que $\text{dist}(y, K) < \epsilon'$. Como $\epsilon' > 0$ es arbitrario, concluimos que $y \in K$ como queríamos demostrar. $\square$

4.2. Cuenca global de atracción topológica

Definición 4.2.1. Cuenca global de atracción topológica
Sea $f : X \mapsto X$ continua en un espacio métrico compacto X. Sea $K \subset X$ (no vacío, compacto e invariante) un atractor topológico según la Definición 4.1.2. Se llama *cuenca de atracción topológica (global) de* K al siguiente conjunto:

$$C(K) = \{x \in X : \lim_{n \to +\infty} \text{dist}(f^n(x), K) = 0\}. \tag{4.3}$$

Nota: Dado un compacto K no vacío e invariante cualquiera, aunque el conjunto $C(K)$ construido mediante la igualdad (4.3) resulte no vacío, en general no se llama a este conjunto “cuenca de atracción topológica”de K, si K no es un atractor topológico. Es decir, cuando se usa el nombre “cuenca de atracción topológica”, previamente sabemos que K satisface todas las condiciones de la Definición 4.1.2, en particular la condición 2) de existencia de un *entorno abierto* de K contenido en la cuenca global de atracción topológica.

Proposición 4.2.2. .
Propiedades de la cuenca global de atracción topológica.
Sea $f : X \mapsto X$ continua en un espacio métrico compacto X. Si $K \subset X$ es un atractor topológico, entonces su cuenca (global) de atracción topológica $C(K)$, tiene las siguientes propiedades:
(a) *$C(K)$ es abierto y no vacío.*
(b) *$C(K)$ es invariante con f, es decir $f^{-1}(C(K)) = C(K)$.*
(c) *$K \subset C(K)$.*

Como consecuencia de (a) y (b) si X es conexo, entonces o bien $K = X$ (en cuyo caso $C(K) = K = X$), o bien la cuenca de atracción $C(K)$ contiene propiamente a K (no coincide K con su cuenca).

Demostración. **(b)** Si $x \in C(K)$ entonces, por la igualdad (4.3): $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^n(x), K) = 0$. Luego,

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^n(f(x)), K) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^{n-1}(f(x)), K) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^n(x), K) = 0.$$

Esto muestra que $f(x) \in C(K)$ para todo $x \in C(K)$. Hemos probado que $f(C(K)) \subset C(K)$, o lo que es lo mismo, $C(K) \subset f^{-1}(C(K))$.
Sea ahora $y \in f^{-1}(C(K))$. Entonces $f(y) = x \in C(K)$. Luego, para todo $n \geq 0$ tenemos $f^n(x) = f^{n+1}(y)$. Entonces:

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^n(y), K) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^{n+1}(y), K) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^n(x), K) = 0.$$

Se deduce que $y \in C(K)$ para todo $y \in f^{-1}(C(K))$, probando que $f^{-1}(C(K)) \subset C(K)$.
(a) y (c) Por hipótesis K es un atractor topológico. Entonces existe $V \supset K$ abierto, cuenca local de atracción topológica de K, de acuerdo a la condición 2) de la Definición 4.1.2. De la definición de $C(K)$ en (4.3), junto con la igualdad (4.1), tenemos $V \subset C(K)$, probando que $K \subset C(K)$ y, por lo tanto, $C(K)$ es no vacío. Si $x \in C(K)$, entonces $\lim_n \operatorname{dist}(f^n(x), K) = 0$. Como V es un entorno abierto de K, deducimos que existe $N \geq 1$ (que depende de $x \in C(K)$), tal que

$$f^n(x) \in V \quad \forall \;\; n \geq N.$$

En particular, la afirmación de arriba vale para $n = N$. Luego, por la continuidad de f y la apertura de V, existe un entorno abierto U_x de x tal que

$$f^N(x) \in V \;\; \forall \;\; x \in U_x.$$

Como $V \subset C(X)$, deducimos que $f^N(U_x) \subset C(X)$, o dicho de otra forma $U_x \subset f^{-N}(C(X)) = C(X)$. Luego $C(X)$ es abierto. □

Proposición 4.2.3. *Sea $f : X \mapsto X$ continua en un espacio métrico compacto X. Sea $K \subset X$ un atractor topológico con cuenca global de atracción topológica $C(K)$. Entonces:*
(a) *Existen medidas de probabilidad invariantes para $f|_{C(K)}$.*
(b) *Existen medidas de probabilidad ergódicas para $f|_{C(K)}$.*
(c) *Toda medida de probabilidad invariante para $f|_{C(K)}$ está soportada en el atractor K (es decir $\mu(K) = 1$).*

Demostración. **(a) y (b)** Consideremos $f|_K : K \mapsto K$. Es la restricción al atractor $K \subset C(K)$ de $f|_{C(K)} : C(K) \mapsto C(K)$. Como f es continua y K es compacto, entonces, por lo demostrado en el capítulo 1, existen medidas de probabilidad invariantes para $f|_K$, y también existen medidas de probabilidad ergódicas para $f|_K$. Tomemos una de estas medidas ν invariante para $f|_K$. Definamos la medida de probabilidad μ en los borelianos B de $C(K)$ de la siguiente forma:

$$\mu(B) := \nu(B \cap K) \ \ \forall\ B \subset C(K) \ \text{ boreliano} .$$

(Observar que $\mu(C(K)) = \nu(C(K) \cap K) = \nu(K) = 1$, porque $K \subset C(K)$.) Veamos que la probabilidad μ es invariante para $f|_{C(K)}$. Sea $B \subset C(K)$ un boreliano cualquiera:

$$\mu(f^{-1}(B)) = \nu(f^{-1}(B) \cap K) = \nu(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(K)) =$$

$$= \nu(f^{-1}(B \cap K)) = \nu(B \cap K) = \mu(B),$$

pues ν es invariante con $f|_K$. Ahora veamos que si ν es ergódica para $f|_K$ entonces μ es ergódica para $f|_{C(K)}$. Sea $B \subset C(K)$ boreliano tal que $f^{-1}(B) = B$. Tenemos que $f^{-1}(B \cap K) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(K) = B \cap K$. Luego, como ν es ergódica para $f|_K$, se cumple $\nu(B \cap K) \in \{0,1\}$.. Entonces $\mu(B) = \nu(B \cap K) \in \{0,1\}$, lo que prueba la ergodicidad de μ.

(c) Sea μ una medida de probabilidad invariante para $f|_{C(K)}$; así $\mu(C(K)) = 1$. Debemos probar que $\mu(K) = 1$ (lo cual implica que $\mu(C(K) \setminus K) = 0$). Por el Lema de Recurrencia de Poincaré, μ-c.t.p. es recurrente; es decir $x \in \omega(x)$ para μ-c.t.p. $x \in C(K)$. Para probar que $\mu(K) = 1$ basta probar que $x \in K$ para cualquier $x \in C(K)$ tal que $x \in \omega(x)$. Para esto, alcanza demostrar que $\omega(x) \subset K$ para todo $x \in C(K)$. En efecto, por la definición de omega-límite, si $y \in \omega(x)$ entonces

$$y = \lim_{j \to +\infty} f^{n_j}(x), \quad n_j \to +\infty.$$

Luego:

$$\text{dist}(y, K) = \lim_{j \to +\infty} \text{dist}(f^{n_j}(x), K) \leq \limsup_{n \to +\infty} \ \text{dist}(f^n(x), K).$$

Como $x \in C(K)$, por la definición de cuenca de atracción topológica dada en (4.3), tenemos:

$$\limsup_{n \to +\infty} \ \text{dist}(f^n(x), K) = \lim_{n \to +\infty} \ \text{dist}(f^n(x), K) = 0.$$

Luego $\text{dist}(y, K) = 0$, o lo que es lo mismo $y \in K$ para todo $y \in \omega(x)$, como queríamos demostrar. $\square$

4.3. Atractores hiperbólicos caóticos

En esta sección consideramos el caso particular en que $X = M$ es una variedad diferenciable compacta y riemanniana, y $f \in \text{Diff}^{\,1}(M)$.
Se llaman *atractores hiperbólicos,* a aquellos atractores topológicos K que están soportados en las variedades inestables de un conjunto compacto no vacío (unif. o no unif.) hiperbólico $\Lambda \subset K$. Más precisamente: K es un atractor hiperbólico si es un atractor topológico y existe un conjunto invariante compacto y (unif. o no unif.) hiperbólico $\Lambda \subset K$ tal que $K \subset \bigcup_{p \in \Lambda} W^u(p)$.
El caso no trivial es cuando la dimensión de estas variedades inestables es mayor o igual que 1, para μ- casi todo punto $x \in K$ para alguna medida invariante μ, soportada en el atractor K. Como son variedades inestables de puntos de un conjunto hiperbólico, los exponentes de Lyapunov en las direcciones tangentes a estas variedades (tangentes al atractor) son positivos. Llamaremos a tales atractores topológicos, *atractores hiperbólicos caóticos.*
La búsqueda de variedades inestables que soporten el atractor, es una de las motivaciones más relevantes de la teoría de sistemas dinámicos diferenciables. Significa que la dinámica dentro de un atractor topológico K (es decir la dinámica de $f|_K$) puede ser expansiva en el futuro, o en otras palabras, caótica; por tener exponentes de Lyapunov positivos. Dicho de otra forma, veamos el caso en que el atractor K sea orbitalmente estable (ó Lyapunov estable, respectivamente). La estabilidad orbital (de Lyapunov, resp.) rige en la cuenca de atracción $C(K)$. En efecto, por definición, la estabilidad orbital (de Lyapunov resp.) tiene significado no trivial solo para las órbitas de $C(K)$ *fuera* de K. Sin embargo, no es contradictoria con una dinámica inestable y expansiva, dada por los exponentes de Lyapunov positivos, *dentro* del atractor K (ver el ejemplo de siguiente ejercicio).
El siguiente ejercicio muestra un ejemplo en el que la dinámica dentro del atractor topológico es expansiva o caótica: el atractor está formado por las variedades inestables de puntos con exponentes de Lyapunov positivos:

Ejercicio 4.3.1. Atractor Solenoide (Smale-Williams)
Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el toro sólido compacto, definido como la imagen en $\mathbb{R}^3$ de la siguiente parametrización con tres parámetros reales (en coordenadas cilíndricas)

$$(r, \varphi, \theta) \in [0, a] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi],$$

donde $0 < a < 1/2$ es una constante real:

$$\begin{aligned} x &= (r - 1/2)\cos\theta\cos\varphi \\ y &= r\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ z &= r\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}$$

(a) Interpretar el significado geométrico de los parámetros (r, φ, θ) en $\mathbb{R}^3$ y dibujar el toro sólido S. (Sugerencia, dibujar primero el disco circular de radio

a en el plano xz (es decir el plano $\{\varphi = 0\}$). Luego, observar que S es el sólido de revolución que se obtiene haciendo girar ese disco alrededor del eje de las z).
(b) Sea $f : S \mapsto \text{int}(S)$ continua, tal que lleva cada disco circular D_φ que se obtiene cortando S con el plano φ constante, en un disco circular $f(D_\varphi)$ de radio $a/4$, contenido en la sección $D_{2\varphi}$, de modo que $f|_{D_\varphi} = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ donde:
• f_1 es una rotación con eje z de ángulo φ (esto implica que $f_1(D_\varphi) = D_{2\varphi}$; cuando escribimos 2φ nos referimos a este ángulo módulo 2π).
• f_2 es una homotecia de razón $1/4$ que lleva el centro del disco $D_{2\varphi}$ al punto, en el interior de $D_{2\varphi}$, con parámetros $(a/2, 2\varphi, 0)$
• f_3 es una rotación de ángulo φ alrededor del eje perpendicular al plano del disco $D_{2\varphi}$ que pasa por el centro del círculo $D_{2\varphi}$.
Verificar que $f : S \mapsto f(S)$ es inyectiva, y que $f(S)$ es un compacto contenido en el interior de S. Dibujar $f(S)$. Sugerencia: $f(S)$ da dos vueltas alrededor del eje de las z. Ver por ejemplo [47, Figure 1].
(c) Sea $K = \bigcap_{n \geq 0} f^n(S)$ el atractor topológico con cuenca local de atracción S. Sea, para cada $N \geq 0$ el compacto $K_N = \bigcap_{n=0}^N f^n(S)$. Sea $A_N = K_N \cap \{(r, \varphi, \theta) \in S : \ \varphi = 0\}$. Dibujar A_1, A_2, K_1, K_2, y probar que $K_{N+1} \subset \text{int}(K_N)$ para todo $N \geq 0$. (Sugerencia: inducción en N).
(d) Para cada punto $p \in K$ se define la variedad inestable de p como:

$$W^u(p) = \{q \in S : \exists \ f^{-n}(q) \in S \ \forall \ n \geq 0 \ \text{ y } \lim_{n \to +\infty} \text{dist}(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) = 0\}.$$

Probar que $W^u(p)$ es una variedad inmersa en $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1. Sugerencia: Fijar un punto cualquiera $q \in W^u(p)$. No es restrictivo asumir que la coordenada φ de q es cero. Usando las secciones A_N definidas en la parte (c) probar que la componente conexa de la intersección de $W^u(p)$ con un entorno pequeño de punto q en $\mathbb{R}^3$, es un arco diferenciable.
(e) Probar que el atractor K es:

$$K = \bigcup_{p \in K} W^u(p).$$

(f) Probar que K es un atractor topológico caótico. Esto significa que para alguna medida invariante μ soportada en K, para μ-c.t.p. $p \in K$ y para toda dirección tangente inestable $0 \neq v \in T_p(W^u(p)) = T_p(K)$ el exponente de Lyapunov de v hacia el futuro es positivo. Alcanza con probar que:

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{\log \|df^n(v)\|}{n} \geq \log 2 > 0 \ \ \forall \ p \in K, \ \ \forall \ 0 \neq v \in T_p(W^u(p)).$$

(Sugerencia: probar que $\|df_p(v)\|/\|v\| \geq 2$ para todo $p \in K$ y para todo $0 \neq v \in T_p(W^u(p))$.)

4.4. Atractores ergódicos

En esta sección consideraremos $f\colon M \mapsto M$ continua en una variedad compacta y riemanniana M. Por el teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin, cualquiera sea la medida invariante μ, para μ-c.t.p. $x \in M$ y para toda función $\psi \in L^1(\mu)$ (en particular para toda función continua ψ) existe el promedio temporal asintótico $\widetilde{\psi}$ (en el futuro) definido por:

$$\widetilde{\psi}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x)).$$

Es decir, para μ-c.t.p. x fijo en la variedad M, está definido el funcional lineal

$$\psi \in C^0(M,\mathbb{R}) \ \mapsto \ \widetilde{\psi}(x).$$

Por el teorema de Representación de Riesz, existe una medida de probabilidad μ_x tal que

$$\widetilde{\psi}(x) = \int \psi \, d\mu_x \quad \text{ para } \mu - \text{c.t.p. } x \in M, \ \ \forall\ \mu \in \mathcal{M}_f,$$

donde $\mathcal{M}_f$ denota el espacio de todas las medidas de probabilidad en la sigma-álgebra de Borel de M que son f-invariantes. En los capítulos anteriores probamos que $\mu_x \in \mathcal{M}_f$. Además, dotando el espacio $\mathcal{M}$ de probabilidades (no necesariamente f-invariantes) de la topología débil-estrella, tenemos:

$$\mu_x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} \quad \text{ para } \mu - \text{c.t.p. } x \in M, \ \ \forall\ \mu \in \mathcal{M}_f,$$

donde el límite es tomado en $\mathcal{M}$ con la topología débil* y δ_y denota la probabilidad Delta de Dirac soportada en el punto $y \in M$.

En las secciones anteriores vimos además que μ_x es ergódica para μ-c.t.p. $x \in M$, para toda $\mu \in \mathcal{M}_f$. Luego, el promedio temporal asintótico $\widetilde{\psi}(x)$ coincide con el valor esperado de ψ con respecto a la probabilidad μ_x.

Por un lado, notamos que la teoría ergódica desarrollada hasta ahora es válida para μ-c.t.p. $x \in M$, y en general, no para cualquier punto $x \in M$. Dicho de otra forma, si el criterio de selección de los puntos iniciales $x \in M$ no es μ.c.t.p. para alguna medida $\mu \in \mathcal{M}_f$, entonces no necesariamente existen los promedios asintóticos de Birkhoff $\widetilde{\psi}(x)$. Y si existen, en general, no coinciden con el promedio espacial que resulta de integrar ψ respecto a una medida ergódica.

Por otro lado, cuando se tiene un atractor topológico K con cuenca local V (abierta), el criterio de selección de los estados iniciales, por la propia definición de atractor topológico, reside en tomar los puntos $x \in V$ para algún abierto V.

El criterio topológico de relevancia u "observabilidad" de conjuntos de órbitas, es que estos conjuntos sean abiertos, o más en general, con interior no vacío.
Sin embargo, en la mayoría de los ejemplos de atractores topológicos que vimos en la sección anterior, el atractor K (que está contenido en su cuenca local V) tiene interior vacío. Además vimos (Proposición 4.2.3), que las medidas μ invariantes por $f|_V$ (que siempre existen) están soportadas en K. Entonces μ-c.t.p. x de la cuenca V, está en K. Luego, el teorema ergódico de Birkhoff, y el teorema de existencia de medidas invariantes y ergódicas, *no aseguran la existencia de los promedios temporales asintóticos,* para las órbitas con punto inicial en *un conjunto de estados iniciales relevante u "observable", desde el punto de vista topológico.*
Notamos que, en general, no hay esperanza que los promedios temporales asintóticos existan para las órbitas con punto inicial en un conjunto de estados iniciales con interior no vacío (es decir, relevante u "observable", desde el punto de vista topológico). En efecto, si K es un atractor topológico con cuenca de atracción $C(K)$ (abierta), se puede demostrar que si $f|_{C(K)}$ no es únicamente ergódica (y en general no lo es), entonces el conjunto de estados iniciales $x \in C(K)$ para los cuales no existe el promedio asintótico de Birkhoff, es denso. Luego, el conjunto de estados iniciales para los cuales existe ese promedio temporal asintótico, tiene interior vacío.
Por estos motivos, entre otras razones, se adopta otro criterio de "observabilidad" de las órbitas o de selección de los estados iniciales. Es un criterio medible en vez de topológico, pero que considera a la mayoría de los puntos de la cuenca $C(K)$.

Definición 4.4.1. Criterio de observabilidad medible
Cuando el espacio es una variedad riemanniana M, *el criterio medible de "observabilidad" de las órbitas, es que formen un conjunto con medida de Lebesgue positiva.*

Lo anterior justifica las siguientes definiciones:

Definición 4.4.2. Atractor ergódico
Sea $f : M \mapsto M$ continua en una variedad compacta y Riemanniana M de dimensión finita. Denotamos con m a la medida de Lebesgue en M. Notamos que m no es necesariamente f-invariante.
Un conjunto compacto no vacío K se llama *atractor ergódico* si:
• $f^{-1}(K) = K = f(K)$
• Existe un abierto $V \supset K$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^n(x), K) = 0 \;\text{ para Lebesgue-c.t.p. }\; x \in V. \tag{4.4}$$

•

$$\exists\ \mu \text{ ergódica tal que: } \mu(K) = 1 \text{ y}$$

$$\exists\ \widetilde{\psi}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x)) = \int \psi\, d\mu \tag{4.5}$$

para Lebesgue-c.t.p. $x \in V \quad$ y $\quad \forall\ \psi \in C^0(M, \mathbb{R})$.

Un abierto $V \supset K$ que satisface las condiciones anteriores, se llama *cuenca local de atracción* del atractor ergódico K.

Nota: No todos adoptan la Definición 4.4.2. Algunos autores exigen que K sea, por definición, un atractor topológico que satisface además la condición (4.5), para llamarlo atractor ergódico (ver por ejemplo [69]).

Medida SRB o física soportada en un atractor ergódico:
Se observa que cuando existe una medida μ (ergódica; soportada en el atractor ergódico K) que satisface la igualdad (4.5) para Lebesgue-c.t.p. $x \in V$, entonces esta medida es *única.* Tal medida μ se llama *medida SRB ergódica* o también *medida física ergódica,* del atractor ergódico K.
En 4.5.6 definiremos medida SRB o medida física μ, en un contexto más general, aunque μ no esté soportada en un atractor ergódico.

Observación: Dado cualquier atractor topológico K con cuenca local V, debido a la Proposición 4.2.3 siempre existen medidas invariantes y ergódicas para $f|_V$, y están soportadas en K. Si alguna de estas medidas ergódicas μ satisface la condición (4.5) para Lebesgue-casi todo punto $x \in V$, entonces K es un atractor ergódico.

Observación 4.4.3. .
A diferencia de los atractores topológicos, para los atractores ergódicos K la atracción a K de las órbitas en su cuenca V dada por la igualdad (4.4) es solo para Lebesgue c.t.p. $x \in V$, y no necesariamente para todo punto $x \in V$. Es un *criterio de observabilidad medible Lebesgue*-c.t.p. de la cuenca. Entonces un atractor ergódico no es necesariamente un atractor topológico. En el Ejercicio 4.4.5 se muestra un ejemplo de atractor ergódico que no es topológico.
Por otra parte, un atractor topológico satisface la igualdad (4.1) para todo $x \in V$. Luego satisface (4.4). Pero no necesariamente satisface la condición de existencia de una medida SRB ergódica para la cual valga la igualdad (4.5). Entonces un atractor topológico no es necesariamente un atractor ergódico. En el ejercicio 4.4.4 se muestra un ejemplo de atractor topológico que no es ergódico.

Ejercicio 4.4.4. Sea en $Q = [0,1]^2$ la aplicación $T(x,y) = \big((1/2)x, y\big)$. Probar que el segmento $K = \{0\} \times [0,1]$ es un atractor topológico pero no es un atractor ergódico. Sugerencia: para probar que K no es atractor ergódico, demostrar que toda medida μ ergódica es delta de Dirac en un punto fijo y que el conjunto de puntos $x \in Q$ para los cuales vale la igualdad (4.4) tiene medida de Lebesgue cero.

Ejercicio 4.4.5. Sea en el disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ la transformación $f : D \mapsto D$ que deja fijo el origen y tal que para todo $z \neq 0$ expresado en polares, $f(z)$ está dado por la siguiente fórmula:

$$f(\rho e^{i\varphi}) = \widehat{\rho} e^{i\widehat{\varphi}},$$

donde

$$\widehat{\varphi} = \frac{3}{2}\varphi \text{ si } 0 \leq \varphi < \pi (\text{mód} 2\pi),$$

$$\widehat{\varphi} = \pi + \frac{\varphi}{2} \text{ si } \pi \leq \varphi < 2\pi (\text{mód} 2\pi),$$

$$\widehat{\rho} = \Big(1 - \frac{\widehat{\varphi}}{2\pi}\Big)\rho.$$

(a) Bosquejar las órbitas (Sugerencia: los puntos $\varphi = 0$ son fijos, y las demás órbitas son tales que el argumento tiende a 2π por abajo y el módulo tiende a cero).
(b) Probar que toda órbita con punto inicial z que no se encuentre en el segmento $\varphi = 0$ es tal que la distancia al origen tiende a cero y la sucesión de promedios de Birkhoff de las funciones continuas ψ tiende a $\int \psi \, d\delta_0$, donde δ_0 es la Delta de Dirac soportada en el origen.
(c) Concluir que $K = \{0\}$ es un atractor ergódico pero no es atractor topológico.
Nota: En este ejemplo f es discontinuo en el semieje real positivo. Sin embargo, puede construirse un ejemplo continuo con bosquejo similar de órbitas.

Observación 4.4.6. Por un lado tenemos el criterio de observabilidad de la cuenca local V del atractor. O bien la atracción se produce para todo estado inicial x en el abierto V (criterio de observabilidad topológica) o bien la atracción se produce solo para Lebesgue c.t.p. $x \in V$ (criterio de observabilidad Lebesgue-medible). El criterio de observabilidad de la cuenca es entonces el *criterio con el cual se eligen los estados iniciales* para observar a dónde son atraídas las órbitas.

Definición 4.4.7. Atracción topológica En forma independiente al criterio de observabilidad de los estados iniciales en la cuenca local, la atracción en sí misma, definida por la igualdad (4.1) para los atractores topológicos, y por la igualdad (4.4) para los atractores ergódicos se llama *atracción topológica.* Esta significa, por definición, que el límite de la distancia al atractor K existe y es cero, desde los puntos iniciales elegidos según el criterio de observabilidad que corresponda.

Definición 4.4.8. Atracción estadística. Esta significa, por definición, que los promedios de Birkhoff de las funciones continuas convergen (o por lo menos, en un contexto más general, tienen subsucesiones convergentes) al valor esperado respecto a alguna medida invariante μ soportada en el atractor

K, desde los puntos iniciales elegidos según el criterio de observabilidad que corresponda. En un contexto más general, μ no es necesariamente ergódica. Lo usual es que cuando se estudia la atracción estadística, el criterio de selección de puntos iniciales sea el de observabilidad medible Lebesgue c.t.p.

En los próximos ejemplos veremos casos particulares de existencia y de no existencia de atractor ergódico.

Ejemplo 4.4.9. En el tent map del intervalo, todo el intervalo es un atractor topológico y ergódico a la vez, cuya medida ergódica SRB (o física) es la medida de Lebesgue (ver por ejemplo [16]).

Ejemplo 4.4.10. En el flujo Polo Norte-Polo Sur, el Polo Sur es atractor ergódico y topológico a la vez, cuya media ergódica SRB (o física) es la delta de Dirac soportada en el Polo Sur.

Ejemplo 4.4.11. .
Contraejemplo: Rotación irracional de la esfera.
En este ejemplo no existen atractores ergódicos. Sea $f : S^2 \mapsto S^2$ continua, definida en la superficie esférica S^2 por la siguiente parametrización en coordenadas "esféricas":
$S^2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \quad y = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \quad z = \cos\theta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi\}$
f está definida por las siguientes ecuaciones en coordenadas esféricas:
$f(\varphi, \theta) = (\widehat{\varphi}, \widehat{\theta})$ donde:

$$\begin{aligned} \widehat{\theta} &= \theta \\ \widehat{\varphi} &= \varphi + a \end{aligned}$$

siendo $a \in (0, 2\pi)$ una constante tal que $a/2\pi$ es irracional.
Es inmediato chequear que los polos $C_0 = \{\theta = 0\}$ y $C_\pi = \{\theta = \pi\}$ son puntos fijos por f, y que cada circunferencia C_θ, con θ constante diferente de 0 y de π, es invariante por f. Además, $f|_{C_\theta}$ es una rotación irracional si $\theta \neq 0, \pi$. Por lo tanto toda órbita por f es densa en la sección C_θ donde está contenida. Deducimos que no hay órbitas densas en S^2. Luego, $f : S^2 \mapsto S^2$ no es transitivo.
Sea m la medida de Lebesgue bidimensional en la esfera S^2 (normalizada para que sea una probabilidad, es decir, dividimos la medida de Lebesgue en la esfera, entre el área de toda la esfera, para que $m(S^2) = 1$). Esta medida es invariante con f, pues el Jacobiano $|\det df|$ es idénticamente igual a 1. Sin embargo m no es ergódica, pues m es positiva sobre abiertos pero f no es transitivo.

Afirmación: *No existen atractores ergódicos para la rotación irracional f en la esfera S^2.*

Demostración. Por absurdo, supongamos que existe un atractor ergódico K y llamemos V a su cuenca local de atracción. Entonces K es compacto no vacío e invariante por f y V es abierto que contiene a K. Sea $p \in V$. Vimos que $\omega(p) = C_{\theta_p}$ donde C_{θ_p} es la sección horizontal de la esfera que contiene al punto p. De la igualdad (4.4) deducimos $\omega(p) \subset K$ para Lebesgue c.t.p. $p \in V$. Entonces $C_{\theta_p} \subset K$, y como $p \in C_{\theta_p}$ deducimos que $p \in K$. Hemos probado que, bajo la hipótesis de absurdo, Lebesgue c.t.p. $p \in V$ está contenido en K. Como K es compacto, tenemos $V \subset K$. Pero por definición de atractor ergódico $K \subset V$. Entonces $K = V$ es compacto y abierto a la vez, y es no vacío. Como S^2 es conexo concluimos que, si existiera un atractor ergódico K, éste sería toda la esfera $K = S^2$.
Por (4.5), el promedio temporal asintótico $\widetilde{\psi}(p)$ debería ser constante para m-c.t.p. $p \in V = S^2$, para cualquier función continua $\psi : S^2 \mapsto \mathbb{R}$. Como en este ejemplo m es invariante, entonces m sería una medida ergódica, contradiciendo que m es positiva sobre abiertos y f no es transitivo. □

Nota: En este ejemplo 4.4.11 toda la esfera es un atractor topológico (en realidad es el único atractor topológico). Luego, este ejemplo prueba que no todo atractor topológico es un atractor ergódico.

Ejemplo 4.4.12. Sea $f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{\text{mód}(1,1)}$ en el toro $\mathbb{T}^2$. Es ergódico respecto a la medida de Lebesgue m. Todo el toro $\mathbb{T}^2$ es un atractor ergódico y m es la medida ergódica SRB o física.

4.5. Atracción estadística y medidas SRB o físicas

Independientemente de si existe o no un atractor ergódico, dada un medida de probabilidad μ (no necesariamente ergódica ni invariante) definimos el siguiente conjunto $B(\mu)$ en el espacio X donde actúa f:

Definición 4.5.1. Cuenca de atracción estadística
Sea $f : X \mapsto X$ una transformación continua en un espacio métrico compacto.
Sea $\mu \in \mathcal{M}$ una probabilidad.
Se llama *cuenca de atracción estadística* de μ al siguiente conjunto:

$$B(\mu) := \{x \in X : \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{+\infty} \psi(f^j(x)) = \int \psi \, d\mu \ \ \forall \ \psi \in C^0(X, \mathbb{R})\}.$$

Usando la caracterización de la topología débil* en el espacio $\mathcal{M}$ obtenemos:

$$B(\mu) = \{x \in X : \ \lim_{n \to +\infty} \sigma_{n,x} = \mu\}, \quad \text{dónde} \tag{4.6}$$

$$\sigma_{n,x} := \tfrac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)}. \tag{4.7}$$

Observación: La cuenca de atracción estadística de cualquier medida de probabilidad μ es un conjunto medible. En efecto, tomando una familia numerable $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de funciones reales continuas $\psi : X \mapsto [0,1]$ que sea denso en el espacio $C^0(X,[0,1])$, la igualdad dentro de la definición de la cuenca $B(\mu)$, se verifica para toda $\psi \in C^0(X,\mathbb{R})$ si y solo si se verifica para ψ_i para todo $i \in \mathbb{N}$. Para cada i fijo, la igualdad se satisface para un conjunto medible, pues el límite puntual de una sucesión de funciones continuas es medible. Luego, $B(\mu)$ es la intersección numerable de conjuntos medibles; es decir, es medible.

Definición 4.5.2. Probabilidades empíricas
Se observa que $\sigma_{n,x}$, definida por la igualdad (4.7), es una medida de probabilidad, para todo $n \geq 1$ y para todo $x \in X$ (en general $\sigma_{n,x}$ no es f invariante). Es la probabilidad promedio concentrada en los puntos de tramos finitos de la órbita futura por x.
Las probabilidades $\sigma_{n,x}$ (para cualquier $n \geq 1$, con $x \in X$ fijo) se llaman *probabilidades empíricas* de la órbita futura por x. Este nombre proviene de que un experimentador no puede observar los promedios temporales asintóticos (en tiempo infinito), sino que observa los promedios hasta tiempo n finito. Estos promedios se pueden calcular como el valor esperado integrando respecto a las probabilidades empíricas. Más precisamente, debido a la igualdad (4.7) tenemos:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\psi(f^j(x)) = \int \psi\, d\sigma_{n,x} \quad \forall \;\; \psi \in C^0(X,\mathbb{R}).$$

Observación 4.5.3. Si μ es una probabilidad tal que su cuenca de atracción estadística $B(\mu)$ es no vacía, entonces μ es invariante con T (Ejercicio 4.5.5 a)). Se puede caracterizar a una medida ergódica por la siguiente afirmación (Ejercicio 4.5.5 b)):

$$\mu \text{ es invariante y ergódica si y solo si } \mu(B(\mu)) = 1.$$

Para cualquier medida de probabilidad μ no invariante, y para cualquier medida de probabilidad invariante no ergódica, se cumple $\mu(B(\mu)) = 0$ (Ejercicio 4.5.5 c)), aunque $B(\mu)$ puede ser no vacío.

Observación 4.5.4. *La cuenca de atracción estadística $B(\mu)$ de una medida invariante μ no ergódica, puede ser no vacía, y además puede cubrir Lebesgue c.t.p.*
En efecto, un ejemplo de homeomorfismo no diferenciable en un disco bidimensional compacto D (que es adaptación de un difeomorfismo en el disco compacto, atribuido a Bowen) exhibe una medida invariante y *no ergódica* μ tal que $B(\mu) \neq \emptyset$ (ver [20, Example 7.2, case B]). Más aún, en este ejemplo,

$B(\mu)$ contiene Lebesgue casi todo punto $x \in D$ a pesar que $\mu(B(\mu)) = 0$, es decir, el soporte de μ tiene medida de Lebesgue nula. Luego, en este ejemplo, existe una medida SRB μ no ergódica, la medida de Lebesgue m no es invariante, existe un atractor topológico no ergódico cuya cuenca de atracción topológica es abierta y cubre Lebesgue casi todo punto, y no existen atractores ergódicos.
En la versión C^1 del ejemplo atribuido a Bowen (ver [30]), se cumple $m(B(\mu)) = 0$ para toda medida de probabilidad μ invariante soportada en el atractor topológico. Luego, no existen medidas SRB. Además en este ejemplo, toda medida invariante es hiperbólica (tiene exponentes de Lyapunov no nulos) y tiene exponentes de Lyapunov positivos. Como no existen medidas SRB, no existen atractores ergódicos. Sin embargo, existe un atractor topológico cuya cuenca es abierta y cubre Lebesgue casi todo punto.

Ejercicio 4.5.5. Sea $f : X \mapsto X$ continua en un espacio métrico X. Denotamos $\mathcal{M}$ el espacio de todas las probabilidades de Borel (no necesariamente f-invariantes), dotado de la topología débil*. Sea $\mu \in \mathcal{M}$.
a) Probar que si la cuenca de atracción estadística $B(\mu)$ es no vacía, entonces μ es f-invariante.
b) Probar que μ es invariante y ergódica si y solo si $\mu(B(\mu)) = 1$.
c) Probar que si μ no es invariante, o si μ es invariante pero no ergódica, entonces

$$\mu(B(\mu)) = 0.$$

(Sugerencias: $B(\mu)$ es siempre un conjunto f-invariante. En el caso μ invariante, aplicar el teorema de descomposición ergódica).

De la parte c) del Ejercicio 4.5.5 deducimos:

Una medida de probabilidad μ es f-invariante y ergódica si y solo si

$$\mu(B(\mu)) = 1,$$

donde $B(\mu)$ denota la cuenca de atracción estadística de μ.

Definición 4.5.6. Medidas SRB o físicas (Sinai [86]- Ruelle [82]-Bowen [12, 15])
Sea $f : M \mapsto M$ continua en una variedad compacta y riemanniana M. Sea m la medida de Lebesgue en M, normalizada para que sea una probabilidad: $m(M) = 1$. (En general, m no es necesariamente f-invariante.) Sea $\mu \in \mathcal{M}$.
Decimos que la medida de probabilidad μ es *SRB (Sinai-Ruelle-Bowen)* o, indistintamente, que es *física,* si

$$m(B(\mu)) > 0,$$

donde $B(\mu)$ es la cuenca de atracción estadística de μ, definida en 4.5.1.

Nota: Si μ es SRB, entonces $B(\mu) \neq \emptyset$, y por lo observado en la parte (a) del Ejercicio 4.5.5, $\mu \in \mathcal{M}_f$ (es decir las medidas SRB son invariantes con f).
De acuerdo a la Definición 4.5.6, una medida SRB puede no ser ergódica. En efecto, en el ejemplo mencionado en 4.5.4, que es adaptación C^0 de un ejemplo atribuido a Bowen, existe medida SRB no ergódica.

Sobre la nomenclatura "SRB" y "física". La Definición 4.5.6 de medida SRB no es adoptada por todos los autores. En general se utiliza esta definición que solo requiere $m(B(\mu)) > 0$, solo para llamar *física* a la medida μ. Pero, para una parte importante de matemáticos (por ejemplo [16], [99]), medida SRB no es sinónimo de medida física. Llaman física a cualquier probabilidad μ cuya cuenca de atracción estadística $B(\mu)$ tenga medida de Lebesgue positiva. Pero para llamar SRB a μ, requieren que la probabilidad μ sea ergódica, tenga exponentes de Lyapunov positivos, y tenga medidas condicionales inestables absolutamente continuas (veremos más adelante qué significa esta propiedad adicional, al introducir las medidas de Gibbs, mediante las Definiciones 5.1.9, 5.2.1 y 5.2.3). Esto es debido a que, entre otros motivos, en el contexto restringido de los difeomorfismos de clase $C^{1+\alpha}$ uniformemente hiperbólicos, ambas definiciones son equivalentes (ver Teorema 5.3.4).
Nosotros adoptamos la definición de, por ejemplo, [11, Definition 1.9] o [37, Definition 22]. Aquí, en la Definición 4.5.6, *no estamos asumiendo ninguna condición adicional a la fisicalidad de la medida para llamarla SRB o física (ni la ergodicidad, ni la positividad de exponentes de Lyapunov, ni la continuidad absoluta condicionada inestable). En resumen, usamos ambas palabras "SRB "ó "física", como sinónimos.*

Capítulo 5

Teoría de Pesin

5.1. Desintegración en medidas condicionales

En esta sección asumimos que X es un espacio métrico compacto, provisto de la sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}$, y que μ es una medida de probabilidad en $(X, \mathcal{B})$. Expondremos el enunciado de un resultado de la teoría de la medida (el Teorema de Rohlin), válido aunque no exista una dinámica definida en el espacio X. En la sección siguiente veremos el uso del Teorema de Rohlin, junto con la Teoría de Pesin, en sistemas dinámicos de clase C^1-más Hölder (cuando X tiene además, una estructura de variedad).

Definición 5.1.1. Partición medible
Se llama *partición* en X a una colección (puede ser finita, infinita numerable o infinita no numerable)

$$\mathcal{P} := \{W(x)\}_{x \in X}$$

de subconjuntos $W(x) \subset X$ (pueden ser medibles o no medibles) tales que:
(a) $x \in W(x)$ para todo $x \in X$ (esto implica que $\bigcup_{x \in X} W(x) = X$)
(b) Los conjuntos $W(x)$ son dos a dos disjuntos; es decir, para toda pareja de puntos $x \neq y$ en X, ó bien $W(x) = W(y)$ ó bien $W_x \cap W_y = \emptyset$.

La partición $\mathcal{P}$ se dice *medible,* si sus piezas $W(x)$ son todas medibles y $\mathcal{P}$ está generada por una colección numerable de particiones finitas con piezas medibles. Esto es:
(c) Existe una colección numerable $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$ donde:

$$\textbf{(c1)} \quad \mathcal{P}_n := \{E_{n,j}\}_{1 \leq j \leq k_n}$$

es una partición finita de X para todo $n \geq 1$, con exactamente k_n piezas $E_{n,j} \subset X$ medibles (disjuntas dos a dos al cambiar j con n fijo, y cuya unión en j es X para todo n fijo).

$$(\mathbf{c2})\ \ \mathcal{P}_{n+1} \prec \mathcal{P}_n \ \ \forall\, n \geq 1.$$

Esto significa que cada pieza de la partición $\mathcal{P}_{n+1}$ está contenida en alguna pieza de la partición $\mathcal{P}_n$ (Se dice que $\mathcal{P}_{n+1}$ es *más fina* que $\mathcal{P}_n$ y se denota $\mathcal{P}_{n+1} \prec \mathcal{P}_n$).

$$(\mathbf{c3})\ \ \forall\, x \in X: \quad W(x) = \bigcap_{n \geq 1} E_{n, j_n(x)} \in \mathcal{P}$$

donde $1 \leq j_n(x) \leq k_n$ es el único índice, para cada n fijo, tal que $x \in E_{n,j_n(x)}$ $\forall\, n \geq 1$. Observar que esta última condición implica que para todo $x \in X$ y para todos $n \geq 1$ y $1 \leq j \leq k_n$, o bien $x \notin E_{n,j}$, o bien $W(x) \subset E_{n,j}$. En otras palabras, cada conjunto medible $E_{n,j}$ están formado por piezas enteras de la partición $\mathcal{P}$. Dicho de otra forma: $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}_n$ para todo $n \geq 1$.
La condición (3) establece una condición más fuerte que $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}_n$ para todo $n \geq 1$: La "intersección" decreciente de las particiones $\mathcal{P}_n$ es $\mathcal{P}$. Esto se denota como

$$\mathcal{P} = \bigvee_{n=1}^{+\infty} \mathcal{P}_n,$$

donde para cualquier pareja $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ de particiones finitas se define

$$\mathcal{R} \vee \mathcal{S} := \{R \cap S : \ R \in \mathcal{R},\ S \in \mathcal{S}\}.$$

La condición (c3) (junto con la propiedad de medibilidad de las piezas de cada partición $\mathcal{P}_n$) implica, en particular, la medibilidad de las piezas de $\mathcal{P}$. Sin embargo el recíproco es falso, como veremos en el ejemplo del Ejercicio 5.1.5: existen particiones $\mathcal{P}$ cuyas piezas son todas medibles y que no cumplen la condición (c). Estas particiones, no son particiones medibles, de acuerdo a esta definición, a pesar que sus piezas son todas medibles, porque no está generada por ninguna colección numerable de particiones con piezas medibles.

Ejercicio 5.1.2. Probar que si $\mathcal{P}$ es una partición con piezas medibles, y si $\mathcal{P}$ es finita o infinita numerable, entonces $\mathcal{P}$ es una partición medible.

En los siguientes ejercicios veremos ejemplos de particiones medibles y no medibles, con una cantidad no numerable de piezas:

Ejercicio 5.1.3. Sea $X = [0,1]^2$. Para cada $(x_0, y_0) \in X$ se denota $S(x_0, y_0) := \{(x, y) \in X : x = x_0\}$ al segmento vertical de X que se obtiene seccionando X con la recta $x = x_0$ constante.
(a) Probar que la foliación $\mathcal{F} := \{S(x,y)\}_{(x,y) \in X}$ es una partición medible de X. (Sugerencia: considerar la colección numerable $\{E_{n,i}\}_{n \geq 1, 1 \leq i \leq n}$ de borelianos $E_{n,i} := [(i-1)/n, i/n) \times [0,1]$ si $i < n$, $E_{n,n} := [(n-1)/n, 1] \times [0,1]$.)

(b) En el intervalo $[0,1]$ sea $K = \cap_{n=0}^{+\infty} K_n$ el conjunto de Cantor de los "tercios mitad", i.e. $K_0 = [0,1]$ y K_{n+1} se obtiene de K_n retirando de cada intervalo cerrado I que forma a K_n el subintervalo abierto con punto medio en el punto medio de I y con longitud (1/3)long(I). Sea en X, la partición $\{\mathcal{P}\} = \{P(x,y)\}_{(x,y)\in X}$ definida por $P(x_0,y_0) = S(x_0,y_0)$ si $x_0 \in K$, y $P(x_0,y_0) := \{(x,y) \in X : \ x \notin K\}$ si $x_0 \notin K$. Probar que $\mathcal{P}$ es una partición medible en X.
(c) Sea $\xi : X \mapsto Y$ un homeomorfismo. Sea en Y la foliación $\mathcal{G} := \{\xi(S(\xi^{-1}(x,y)))\}_{(x,y)\in Y}$. (Se dice que ξ^{-1} es una trivialización C^0 de la foliación $\mathcal{G}$). Probar que $\mathcal{G}$ es una partición medible.
(d) Sean X e Y espacios métricos compactos, y sea en $X \times Y$ la partición $\mathcal{F} = \{S(x,y)\}_{(x,y)\in X\times Y}$ por secciones verticales $S(x_0,y_0) := \{(x,y) \in X \times Y : x = x_0\}$. Probar que $\mathcal{F}$ es una partición medible.

Ejercicio 5.1.4. Sean $(X,\mathcal{A})$ e $(Y,\mathcal{B})$ dos espacios medibles. Sea $\xi : X \mapsto Y$ una transformación bimedible. Sea en X una partición
$\mathcal{P} = \{P(x)\}_{x\in X}$ cualquiera (no necesariamente medible). Sea en Y la partición $\mathcal{Q} := \{\xi(S(\xi^{-1}(y)))\}_{y\in Y}$. Probar que $\mathcal{P}$ es partición medible si y solo si $\mathcal{Q}$ lo es.

Ejercicio 5.1.5. Sea f : Diff $^\infty(\mathbb{T}^2)$ en el toro $\mathbb{T}^2$ el autormorfismo lineal $f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$(mód. $\mathbb{Z}^2$). Sea $W^u(p)$ la variedad inestable (global) por cada punto $p \in \mathbb{T}^2$, i.e.:

$$W^u(p) = \{q \in \mathbb{T}^2 : \lim_{n\to+\infty} \text{dist}(f^{-n}(p), f^{-n}(q)) = 0\}.$$

(a) Probar que $W^u(p)$ es un conjunto medible para todo $p \in \mathbb{T}^2$.
(b) Probar que la partición $\mathcal{P} := \{W^u(p)\}_{p\in\mathbb{T}^2}$ no es medible.
Sugerencia: Considerar la medida de Lebesgue m en el toro. Chequear que $m(W^u(p)) = 0$ para todo p. Sea $E \subset \mathbb{T}^2$ medible con $m(E) > 0$ y tal que si $p \in E$ entonces $W(p) \subset E$. Probar que $m(E) = 1$ (Recordar que $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Tomar un levantado $\widehat{E}$ a $\mathbb{R}^2$ del conjunto E: si $\widehat{p} \in \widehat{E}$ entonces toda la recta con dirección inestable en $\mathbb{R}^2$ que pasa por $\widehat{p}$ está contenida en $\widehat{E}$. Mirar la intersección de $\widehat{E}$ con cada recta horizontal de altura entera en $\mathbb{R}^2$. Proyectar todas esas intersecciones, siguiendo las verticales en $\mathbb{R}^2$, sobre una sola recta horizontal. Observar que esa proyección (mód. 1) en $[0,1] = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, es invariante con la rotación irracional y tiene medida de Lebesgue positiva en el intervalo.) De la propiedad $m(E) = 0$ ó $m(E) = 1$, deducir que para m-c.t.p. $p \in \mathbb{T}^2$ no se puede verificar la condición (c3) de la Definición 5.1.1) de partición medible.

Ejercicio 5.1.6. (a) Probar que si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son dos particiones medibles, entonces $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ es una partición medible. (Sugerencia, construir $\mathcal{P}_n \vee \mathcal{Q}_n$ donde $\mathcal{P}_n$ y $\mathcal{Q}_n$ son las particiones finitas que satisfacen, para $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ respectivamente, la condición (c) de la Definición 5.1.1.)

(b) Probar que si $\mathcal{Q}$ es medible, entonces $\mathcal{P}$ es medible si y solo si $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ es medible.

Espacio cociente por una partición medible.
Dada una partición medible $\mathcal{P} = \{W(x)\}_{x \in X}$ de $(X, \mathcal{B})$ consideramos el conjunto cociente $X/\sim$ por la relación de equivalencia $x \sim y$ si y solo si $W(x) = W(y)$. Denotando $[x]$ a la clase de equivalencia que contiene a x, tenemos

$$X/\sim = \{[x]\}_{x \in X} \quad \text{donde} \quad [x] = W(x)$$

Dotamos el conjunto $X/\sim$ de la estructura medible cociente, definiendo la sigma-álgebra:

$$(X/\sim, \mathcal{A}/\sim): \quad \widehat{A} \in \mathcal{A}/\sim \qquad \text{si y solo si}$$

$$A := \{x \in X : W(x) \in \widehat{A}\} \in \mathcal{A}.$$

Para cada $W(x) \in X/\sim$, es decir, en cada pieza $W(x)$ de la partición medible $\mathcal{P}$, definimos la sigma-álgebra $\mathcal{A}_{W(x)}$ que resulta de restringir la sigma-álgebra $\mathcal{A}$ a $W(x)$. Esto es:

$$(W(x), \mathcal{A}_{W(x)}): \ \forall \ A \subset W(x), \quad A \in \mathcal{A}_{W(x)} \text{ si y solo si } A \in \mathcal{A}.$$

Teorema 5.1.7. Desintegración Medible (Teorema de Rohlin)
Sea X un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{A}$ la sigma-álgebra de Borel. Sea $\{W(x)\}_{x \in X}$ una partición medible. Sea μ una medida de probabilidad en $(X, \mathcal{A})$. Entonces:
(i) *Existe una medida de probabilidad $\widehat{\mu}$ en el espacio medible cociente $X/\sim$, tal que para $\widehat{\mu}$-c.t.p. $W(x) \in X/\sim$, existe una medida de probabilidad $\mu^{W(x)}$ en el espacio medible $(W(x), \mathcal{A}_{W(x)})$, tal que:*
• *Para todo $A \in \mathcal{A}$:*

$$\int_X \chi_A \, d\mu = \int_{[x] \in X/\sim} \Big(\int_{y \in [x] = W(x)} \chi_A(y) \, d\mu^{W(x)} \Big) \, d\widehat{\mu}. \tag{5.1}$$

• *Más en general, para toda $\psi \in L^1(\mu)$:*

$$\int_X \psi \, d\mu = \int_{[x] \in X/\sim} d\widehat{\mu} \, \Big(\int_{y \in [x] = W(x)} \psi(y) \, d\mu^{W(x)} \Big). \tag{5.2}$$

(ii) *La medida de probabilidad $\widehat{\mu}$, y para $\widehat{\mu}$-casi todas las piezas $W(x) \in X/\sim$, las medidas de probabilidad $\mu^{W^u(x)}$ que verifican las igualdades* (5.1) *y* (5.2)*, son únicas.*

La prueba original del Teorema de Rohlin se encuentra en [79], o también en [78]. La demostración se encuentra reformulada también, por ejemplo, en [48] o en [96].
El teorema de Rohlin generaliza a un contexto medible, y para cualquier medida de probabilidad, el teorema de Fubini que vale para la medida de Lebesgue en un rectángulo de $\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b$. En efecto, por el Teorema de Fubini en un rectángulo, la integral con respecto a la medida de Lebesgue se obtiene como la integral doble en una sección "horizontal" del rectángulo, de las integrales sobre las secciones "verticales," con respecto a las medidas de Lebesgue a lo largo de dichas secciones, respectivamente.

Definición 5.1.8. Medidas condicionales
En las hipótesis y conclusiones del Teorema 5.1.7 de Rohlin, las medidas μ^W se llaman *medidas condicionales de* μ *a lo largo de las piezas* W *de la partición* $\mathcal{P}$.
También las llamamos, en breve *medidas* $\mathcal{P}$*-condicionales de* μ*,* o si la partición está clara en el contexto, simplemente *medidas condicionales* de μ.
Observar que cada medida condicionada μ^W está soportada en una pieza W, es una probabilidad (es decir $\mu^W(W) = 1$). Además, μ^W está definida para $\widehat{\mu}$-casi todas las piezas W de la partición $\mathcal{P}$, y no necesariamente para todas las piezas.

Continuidad absoluta de las medidas condicionales.
Cuando el espacio métrico X tiene una estructura de variedad compacta y riemanniana M (es decir $X = M$), y si las piezas W de la partición medible $\mathcal{P}$ son subvariedades de M, se considera, como medida privilegiada a lo largo de cada una de estas subvariedades, la medida de Lebesgue en W, que denotamos m^W.
En un contexto general, las medidas condicionales μ^W de μ a lo largo de las piezas W de la partición $\mathcal{P}$, podrían no tener relación con las medidas de Lebesgue m^W a lo largo de estas piezas. Sin embargo, dentro de la Teoría de Pesin que veremos en la próxima sección, tienen especial importancia las medidas μ que cumplen la siguiente definición:

Definición 5.1.9. Se dice que μ *tiene medidas* $\mathcal{P}$*-condicionales absolutamente continuas* cuando para $\widehat{\mu}$- casi toda pieza W de la partición $\mathcal{P}$, se cumple:

$$\mu^W \ll m^W, \quad \text{i.e. } \mu^W(A) = 0 \text{ si } m^W(A) = 0,$$

donde $A \subset W$ es medible, W es una subvariedad u-dimensional de M, y m^W es la medida de Lebesgue u-dimensional a lo largo de la subvariedad W.

5.2. Medidas de Gibbs

Definición 5.2.1.
Medidas condicionales inestables
Sea M una variedad compacta y riemanniana y sea $f :\in \text{Diff}^{\,1}(M)$ tal que el siguiente conjunto

$$W^u(x) := \{y \in M : \lim_{n\to+\infty} \text{dist}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\} \tag{5.3}$$

es, por hipótesis, una subvariedad C^1 inmersa en M para μ-casi todo punto $x \in M$, para cierta medida de probabilidad μ invariante con f. Bajo esta hipótesis $W^u(x)$ se llama *subvariedad inestable global* por el punto x. Debido a la continuidad de f, es inmediato chequear que $f^{-1}(W^u(x)) = W^u(f^{-1}(x))$ para todo $x \in M$.
Sea B_δ una bola (compacta) de radio suficientemente pequeño con $\mu(B_\delta) > 0$, y sea en ella la partición $\mathcal{F}^u_\delta = \{W^u_\delta(x)\}_{x\in M}$ definida como sigue:
• $W^u_\delta(x) = c.c._x(W^u(x) \cap B_\delta(x))$ es la componente conexa que contiene al punto x de la intersección $W^u(x)\cap B_\delta(x)$, para todo punto x tal que $W^u(x)$ es una subvariedad C^1-inmersa en M (es decir para μ-c.t.p $x \in M$). Por hipótesis, esta subvariedad $W^u_\delta(x)$ está C^1-encajada en M para μ-c.t.p. $x \in B_\delta$. Se llama *subvariedad inestable local* por el punto x.
• Abusando de la notación, para los restantes puntos $x \in B_\delta$, denotamos $W^u_\delta(x) := \{y \in B_\delta\colon$ no existe subvariedad inestable por el punto $y\}$. Por construcción, esta única pieza de la partición $\mathcal{F}^u$ (que no es necesariamente una variedad) tiene μ-medida cero.
Rescalando μ para que $\mu(B_\delta) = 1$, tenemos lo siguiente:

Si la partición $\mathcal{F}^u = \{W^u_\delta(p)\}_{p\in B_\delta}$ de subvariedades inestables locales así construida, fuera una partición μ-medible, llamamos *medidas condicionales inestables* de μ, a las medidas condicionales $\mu^{W^u_\delta(p)}$ de μ a lo largo de las piezas $W^u_\delta(p)$ de esa partición, es decir a lo largo de las variedades inestables locales. Por simplicidad en la notación escribiremos $\mu^u = \mu^{W^u_\delta}$ a las medidas condicionales inestables, y $m^u = m^{W^u_\delta}$ a las medidas de Lebesgue a lo largo de las subvariedades inestables W^u_δ.

Definición 5.2.2. Medidas condicionales inestables absolutamente continuas. En el contexto de la Definición 5.2.1, una medida μ se dice que tiene *medidas condicionales inestables absolutamente continuas* cuando

$$\mu^u \ll m^u$$

para $\widehat{\mu}$- casi toda variedad inestable local W^u_δ de la partición $\mathcal{F}^u$, donde $\widehat{\mu}$ y μ^u son las medidas del Teorema 5.1.7 de desintegración de Rohlin en la partición de variedades inestables locales.

Se recuerda que, por definición, dadas dos medidas ν_1 y ν_2, se dice que ν_1 *es absolutamente con respecto de* ν_2, y se denota $\nu_1 \ll \nu_2$ cuando para todo boreliano A se cumple

$$\nu_2(A) = 0 \;\Rightarrow\; \nu_1(A) = 0.$$

Dos medidas finitas ν_1 y ν_2 cumplen $\nu_1 \ll \nu_2$ si y solo si existe una función $h \in L^1(\nu_2)$, llamada *derivada de Radon-Nikodym* de ν_1 con respecto de ν_2, tal que para todo conjunto medible A se cumple

$$\nu_1(A) = \int_A h\, d\nu_2.$$

(Ver por ejemplo [26, page 85] o [80, page 113].)
Luego, si μ tiene medidas condicionales inestables absolutamente continuas, entonces para μ-c.t.p. $x \in M$ existe una función $h_x \in L^1(m^u_x)$, donde m^u_x es la medida de Lebesgue a lo largo de la variedad inestable local $W^u_\delta(x)$, tal que la medida condicional inestable μ^u_x a lo largo de $W^u_\delta(x)$ cumple:

$$\mu^u_x\big(A \cap W^u_\delta(x)\big) = \int_{y \in W^u_\delta(x)} \chi_A(y)\, h_x(y)\, dm^u_x(y)$$

para todo boreliano $A \subset M$.

Definición 5.2.3. Medidas de Gibbs
Sea M una variedad compacta y riemanniana y sea $f \in \text{Diff}^{\,1}(M)$. Una medida de probabilidad μ f-invariante se dice que es *medida de Gibbs* cuando cumple:
(i) Para μ-c.t.p. $x \in M$ el conjunto definido por la igualdad (5.3) es una subvariedad C^1-inmersa en M (subvariedad inestable global por el punto x).
(ii) Para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, si $B_\delta \subset M$ es una bola compacta de radio radio δ tal que $\mu(B_\delta) > 0$, entonces la siguiente familia de variedades inestables locales, es una partición μ-medible

$$\mathcal{F}^u := \{W^u_\delta(x)\}_{x \in B_\delta}, \quad \text{donde } \; W^u_\delta(x) := c.c._x(W^u(x) \cap B_\delta).$$

($c.c._x$ denota la componente conexa que contiene al punto x).
(iii) μ tiene medidas condicionales inestables absolutamente continuas, de acuerdo a la definición dada en el último párrafo de 5.2.1

Veamos ahora que la propiedad de tener medidas condicionales absolutamente continuas a lo largo de las piezas de una partición, se transmite de una medida invariante μ a sus componentes ergódicas, y recíprocamente. Por lo tanto una medida invariante μ es de Gibbs, si y solo si sus componentes ergódicas son medidas de Gibbs.

Corolario 5.2.4. del Teorema de Rohlin
Sea $f\colon X \mapsto X$ *continua en el espacio métrico compacto, sea* μ *una medida de probabilidad* f*-invariante y sea* $\mathcal{P} = \{W(x)\}_{x\in X}$ *una partición medible y* f*-invariante* (i.e. $f^{-1}(W(x)) = W(f^{-1}(x))$ para todo $x \in X$).
Entonces:
(a) *Las medidas condicionales* μ^W *de* μ *a lo largo de las piezas* W *de* $\mathcal{P}$*, y la medida inducida* $\widehat{\mu}$ *por* μ *en el espacio cociente* $X/\sim$ *de la partición, son medidas invariantes con* f*.*
(b) $\mu_x^{W(x)} = \mu^{W(x)}$ *para* $\mu -$ *c.t.p.* $x \in M$*, donde* $W(x)$ *denota la pieza de la partición* $\mathcal{P}$ *que contiene al punto* x*, y* μ_x *denota la componente ergódica de la medida* μ *a la que pertenece el punto* x *según el Teorema* 2.6.2 (es decir, $\lim_{n\to+\infty}(1/n)\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)} = \mu_x$ en la topología débil estrella).
(c) Si además $X = M$ es una variedad compacta y riemanniana, $f \in \mathit{Diff}^{\,1}(M)$, y $\mathcal{P} = \{W_\delta(x)\}_{x\in M}$ es una partición medible de la bola $B_\delta(x)$ formada por subvariedades $W_\delta(x)$ C^1 inmersas en M para μ-c.t.p. $x \in X$, entonces:
- Las medidas condicionales μ^W de μ son absolutamente continuas a lo largo de las subvariedades $W \in \mathcal{P}$ si y solo si para μ-c.t.p. $x \in X$ las medidas condicionales μ_x^W de las componentes ergódicas μ_x de μ, son absolutamente continuas.
- μ es una medida de Gibbs si y solo si las componentes ergódicas μ_x de μ son medidas de Gibbs para μ-c.t.p. $x \in M$.

Demostración. **(a)** Por el Teorema 5.1.7 de Rohlin y la f-invariancia de μ tenemos, para todo conjunto medible A:

$$\mu(A) = \int_{[x]\in X/\sim} d\widehat{\mu} \int_{x\in[x]} \chi_A(x)\, d\mu^{W(x)} =$$

$$= \int_{[x]\in X/\sim} \Big(\mu^{W(x)}(W(x)\cap A\Big)\, d\widehat{\mu} =$$

$$= \mu(f^{-1}(A)) = \int_{[x]\in X/\sim} d\widehat{\mu} \int_{x\in[x]} \chi_{f^{-1}(A)}(x)\, d\mu^{W(x)} =$$

$$= \int_{[x]\in X/\sim} \Big(\mu^{W(x)}(W(x)\cap f^{-1}(A))\Big)\, d\widehat{\mu}. \tag{5.4}$$

Las medidas de probabilidad $\mu^{W(x)}$ están definidas para $\widehat{\mu}$-casi toda pieza de la partición $\mathcal{P}$. Para las otras piezas tomamos por convención cualquier medida de probabilidad soportada en ellas. De esta forma tenemos definidas $\mu^{W(x)}$ para todo $x \in M$.
Debido a la f-invariancia de las piezas $W \in \mathcal{P}$, se cumple:

$$W(x) \cap f^{-1}(A) = f^{-1}(W(f(x)) \cap A)$$

Definimos la siguiente medida $(\mu^{W(y)})^*$ a lo largo de la pieza $W(y)$ para todo $y \in M$:

$$(\mu^{W(y)})^*(B) := \mu^{W(f^{-1}(y))}(f^{-1}(B)) \ \ \forall\ B \in \mathcal{A},$$

donde $\mathcal{A}$ denota la sigma-álgebra de Borel en X. Entonces:

$$\mu^{W(x)}(W(x) \cap f^{-1}(A)) = (\mu^{W(f(x))})^*(W(f(x)) \cap A),$$

y sustituyendo en (5.4) obtenemos

$$\mu(A) = \int_{[x]\in X/\sim} \Big((\mu^{W(f(x))})^*(W(f(x)) \cap A)\Big)\, d\widehat{\mu} =$$

$$= \int_{[y]\in X/\sim} \Big((\mu^{W(y)})^*(W(y) \cap A)\Big)\, d(\widehat{\mu})^*, \tag{5.5}$$

donde $(\widehat{\mu})^*$ es la medida de probabilidad en $X/\sim$ definida por

$$\int \varphi\, d\widehat{\mu}^* := \int \varphi \circ f\, d\widehat{\mu} \ \ \forall \ \ \varphi \in L^1(\widehat{\mu}).$$

(En la última igualdad $f : X \sim \mapsto X \sim$ denota la aplicación que lleva la pieza $W \in \mathcal{P}$ en la pieza $f^{-1}(W)$). De (5.5) deducimos

$$\mu(A) = \int_{[y]\in X/\sim} \Big((\mu^{W(y)})^*(W(y) \cap A)\Big)\, d(\widehat{\mu})^* =$$

$$= \int_{[y]\in X/\sim} d\widehat{\mu}^* \int_{y\in[y]} \chi_A(y)\, d(\mu^{W(y)})^* \ \ \forall\ A \in \mathcal{A}.$$

Luego hemos encontrado otra desintegración de Rohlin de la medida μ con respecto a la partición $\mathcal{P}$. Por la unicidad de las medidas de probabilidad $\widehat{\mu}$ y μ^W de la desintegración de Rohlin, se cumple

$$(\widehat{\mu})^* = \widehat{\mu}, \quad \mu^{W(x)} = (\mu^{W(f(x))})^*,$$

demostrando la f-invariancia de $\widehat{\mu}$ y de μ^W.

(b) Para todo conjunto $A \in \mathcal{A}$, por el Teorema de Descomposición Ergódica (Teorema 2.6.2) tenemos:

$$\mu(A) = \int \mu_x(A)\, d\mu.$$

Por el Teorema de Descomposición de Rohlin, aplicado a cada medida ergódica μ_x, se cumple:

$$\mu(A) = \int \mu_x(A)\, d\mu = \int_{x\in X} d\mu \int_{[y]\in X/\sim} d\widehat{\mu}_x \int_{y\in[y]} \chi_A\, d\mu_x^{W(y)} =$$

$$= \int_{[y]\in X/\sim} d\widehat{\nu} \int_{y\in[y]} \chi_A \, d\mu_x^{W(y)}, \tag{5.6}$$

donde la medida de probabilidad $\widehat{\nu}$ en el espacio cociente $X/\sim, \mathcal{A}$ está definida por:

$$\int_{X/\sim} \varphi \, d\widehat{\nu} := \int_{x\in X} \Big(\int_{[y]\in X/\sim} \varphi([y]) \, d\widehat{\mu}_x \Big) \; d\mu \quad \forall \;\; \varphi \in L^1(\widehat{\mu}).$$

Luego, la igualdad (5.6) es una descomposición de Rohlin de la medida μ con respecto a la partición $\mathcal{P}$. Por la unicidad de las probabilidades de la descomposición de Rohlin, concluimos que $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$ y $\mu_x^W = \mu^W$.
(c) Como consecuencia de la parte (b) $\mu^W \ll m^W$ si y solo si $\mu_x^W \ll m^W$. En el caso particular en que la partición medible $\mathcal{P}$ es la partición de una bola $B \subset M$ en variedades inestables locales, obtenemos que μ es medida de Gibbs si y solo si μ_x lo es para μ-c.t.p. $x \in M$. □

5.3. Relación entre medidas de Gibbs y SRB

En esta sección asumimos que M es una variedad compacta y riemanniana y que $f \in \text{Diff}^{\,1+\alpha}(M)$. Algunos de los teoremas que veremos en esta sección se obtienen de resultados de la Teoría de Pesin, bajo la hipótesis de que f es de clase $C^{1+\alpha}$. Pero son falsos si f es solo de clase C^1. En particular las condiciones de continuidad absoluta de las medidas condicionales inestables (existencia de medida ergódica de Gibbs que es también SRB) no rige para todo $f \in \text{Diff}^{\,1}(M)$.
Más adelante, en las secciones posteriores de este capítulo, veremos algunas formas de reformular los resultados de esta sección, generalizando algunas definiciones (mediante la introducción de las medidas SRB-like) y modificando adecuadamente los enunciados, para que sean aplicables a todo difeomorfismo de clase C^1 en la variedad M (y más aún, algunos de ellos son aplicables también a transformaciones continuas $f : M \mapsto M$).

Teorema 5.3.1. de Gibbs implica SRB o física
Sea $f \in \text{Diff}^{\,1+\alpha}(M)$ y sea μ una medida invariante hiperbólica.
Si μ es una medida de Gibbs, entonces las componentes ergódicas de μ son medidas SRB o físicas.

En el párrafo 5.5.3 veremos la demostración de este Teorema, reduciéndola a resultados de la Teoría de Pesin. También se puede encontrar la demostración del teorema 5.3.1 en [69] o en [11, Proposition 11.24].
Es cierto también el recíproco del Teorema 5.3.1, bajo hipótesis de $C^{1+\alpha}$-hiperbolicidad uniforme: si las componentes ergódicas de una medida invariante

μ son medidas SRB o físicas, entonces μ es una medida de Gibbs. Más precisamente:

Teorema 5.3.2. SRB ergódica implica de Gibbs
Sea $f \in$ Diff $^{1+\alpha}(M)$, sea $\Lambda \subset M$ un atractor ergódico uniformemente hiperbólico, y sea μ la medida ergódica SRB o física soportada en Λ (de acuerdo a la Definición 4.4.2 de atractor ergódico).
Entonces μ es medida de Gibbs.

El Teorema 5.3.2 es consecuencia del siguiente Teorema de Pesin-Sinai, que demuestra la existencia de medida SRB ergódica, bajo hipótesis de hiperbolicidad uniforme en el contexto $C^{1+\alpha}$

Teorema 5.3.3. [Pesin-Sinai, [67]]
Sea $f \in$ Diff $^{1+\alpha}(M)$. Sea Λ un atractor topológico uniformemente hiperbólico. Entonces:
Existen medidas SRB-ergódicas soportadas en Λ. Toda medida SRB ergódica soportada en Λ es de Gibbs. Recíprocamente, toda medida ergódica de Gibbs soportada en Λ es SRB. (cf. Teorema 5.3.1).

En el caso particular que f sea Anosov, demostraremos este resultado más adelante en esta sección (Teorema 5.3.4).

Generalización del Teorema 5.3.3 para difeomorfismos $C^{1+\alpha}$ no uniformemente hiperbólicos
La implicación SRB-ergódica $\Rightarrow$ Gibbs, como en el Teorema 5.3.3 de Pesin-Sinai, rige aún en hipótesis más generales que la hiperbolicidad uniforme que nosotros enunciamos en ese Teorema, asumiendo siempre que $f \in$ Diff $^{1+\alpha}(M)$. En efecto, el atractor topológico Λ puede no ser hiperbólico, sino que alcanza que sea *parcialmente hiperbólico* (ver Definición, por ejemplo en [11, Definition B.3, page 289]). Puede ser no uniformemente hiperbólico con singularidades, como el atractor de Lorenz [66], por ejemplo.
Para los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, las medidas invariantes no son necesariamente hiperbólicas, sino que puede existir un subespacio de Oseledets con exponente de Lyapunov igual a cero. Sin embargo, puede existir una separación acotada uniformemente lejos de cero, entre los exponentes de Lyapunov positivos y los no positivos.
La demostración de Pesin-Sinai del Teorema 5.3.3 se encuentra en [67] para difeomorfismos $C^{1+\alpha}$-parcialmente hiperbólicos; en particular para los que son uniformemente hiperbólicos ó Anosov. También puede encontrarse la demostración general para difeomorfismos $C^{1+\alpha}$ parcialmente hiperbólicos, en [11, Theorem 11.16].
Observemos que la hiperbolicidad parcial no implica que la medidas invariantes sean hiperbólicas, y por lo tanto, aunque existan medidas de Gibbs ergódicas, no

podremos aplicar el Teorema 5.3.1 para deducir que estas son SRB. En general, el problema de existencia de medidas SRB para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos, está esencialmente abierto. Recientemente, en [97] se demuestra que los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos con dimensión central 1 (1 es la dimensión del subespacio de Oseledets con exponente de Lyapunov igual a cero), $C^{1+\alpha}$-genéricamente existe una, y a lo sumo una cantidad finita, de medidas ergódicas SRB cuyas cuencas de atracción estadística cubren Lebesgue c.t.p.

Los difeomorfismos hiperbólicos son un caso particular de los llamados difeomorfismos con *splitting dominado.* La definición, los enunciados y las demostraciones de propiedades dinámicas topológicas de los difeomorfismos con splitting dominado se encuentran en [71]. El problema de existencia de medidas SRB para los difeomorfismos con splitting dominado, salvo en casos particulares, está esencialmente abierto.

Otro caso en el que la existencia de medidas SRB se ha estudiado, es el de los llamados difeomorfismos *derivados de Anosov.* La demostración de la misma tesis del Teorema 5.3.3 para difeomorfismos derivados de Anosov transitivos con exponente de Lyapunov positivo y de clase $C^{1+\alpha}$, y además la unicidad de su medida SRB, fueron dadas por M.F. Carvalho en [19] (o también, más detalladamente explicadas, en [18]).

También existen otras generalizaciones del Teorema 5.3.3 para ciertas clases de difeomorfismos no uniformemente ni parcialmente hiperbólicos ni derivados de Anosov y que no tienen splitting dominado (por ejemplo en [31], [25] y [22]). Estas clases de difeomorfismos tienen C^r regularidad para valores de $r \geq 2$ suficientemente grande y se componen de ciertos difeomorfismos f_1 llamados *casi-Anosov,* que están en el borde de los de Anosov en el espacio $\text{Diff}^{\,r}(M)$ para cierto $r > 1$ suficientemente grande. Por definición, un difeomorfismo f_1 es casi Anosov, o *almost Anosov,* si f_1 se obtiene por medio de una isotopía (es decir, por medio de una deformación continua $f_t \in \text{Diff}^{\,r}(M)$ para $t \in [0,1] \subset \mathbb{R}$), tal que f_t es de Anosov transitivo para todo $0 \leq t < 1$. La isotopía en un casi-Anosov debe cumplir la siguiente condición: el splitting $T_xM = S^t_x \oplus U^t_x$ es un splitting uniformemente hiperbólico de f_t para todo $t \in [0,1)$ fijo, y para todo $x \in M$. Además, por hipótesis, existe una órbita $o(x_0)$ tal que para todo $x \notin \overline{o(x_0)}$ existe un splitting $S^1_x \oplus U^1_x$ invariante por f_1, obtenido como el límite cuando $t \to 1$ del splitting hiperbólico de $S^t_x \oplus U^t_x$. Finalmente, el difeomorfismo f_1, o bien posee también un splitting (no hiperbólico) definido como $S^1 \oplus U^1$, donde $S^1 = \text{lím}_{t\to 1^-} S^1$, $U^1 = \text{lím}_{t \to 1^-} U^t$ (cuando existen dichos límites en la órbita de x_0 y son mutualmente transversales); o bien existen dichos límites pero son tangentes; o bien no existen.

La existencia de una única medida de Gibbs ergódica que es SRB, en ejemplos del primer caso de difeomorfismos C^2 casi-Anosov, es demostrada en [19], donde x_0 es un punto fijo por f_t para todo $0 \leq t \leq 1$, y los exponentes de Lyapunov en $U^1_{x_0}$ (para $t = 1$) son estrictamente positivos. En cambio, en el ejemplo de casi-Anosov también del primer caso, estudiado en [35], se prueba que no existe ninguna medida de probabilidad de Gibbs, si se toma como foliación inestable, la formada por las C^1-subvariedades que son tangentes a E^1_x en todo punto $x \in M$. En este ejemplo, el difeomorfismo f_1, de clase C^2 casi-Anosov, se construye tomando x_0 en un punto fijo, pero tal que los exponentes de Lyapunov en $U^1_{x_0}$ son nulos. Sin embargo, aún en este ejemplo, en [35] se demuestra que existe una única medida SRB ergódica y que su cuenca de atracción estadística cubre Lebesgue casi todo punto.

En el segundo caso de difeomorfismos casi-Anosov, en el toro $\mathbb{T}^2$, [25] prueba la existencia de la medida de Gibbs ergódica que es SRB, cuando $o(x_0)$ es una órbita no periódica (más precisamente una órbita de tangencia heteroclínica). También en el segundo caso (cuando $S^1_{x_0}$ y $U^1_{x_0}$ son tangentes) y en $\mathbb{T}^2$, la existencia y unicidad de una medida SRB ergódica con cuenca de atracción que cubre Lebesgue-c.t.p., es demostrada en [22], cuando x_0 es un punto fijo (no hiperbólico) para f_1 de clase C^3, y además una de las derivadas segundas parciales de f_1 en x_0 se anula. Este caso incluye los ejemplos de difeomorfismos casi-Anosov en el toro bidimensional introducidos por Lewowicz en [50], en los que las direcciones estable e inestable en un punto fijo x_0 para $t < 1$, se hacen tangentes cuando el parámetro t de la isotopía alcanza el valor 1 (sin saber a priori si los exponentes de Lyapunov en casi todo punto diferente de x_0, son o no son, diferentes de cero).

El tercer caso de difeomorfismos casi-Anosov, en que los límites $S^1_{x_0}$ y $U^1_{x_0}$ no existen, es estudiado en [31] cuando x_0 es un punto fijo, f es de clase C^r para $r \geq 2$ suficientemente grande, y se cumplen ciertas hipótesis sobre las derivadas de orden mayor que 1 en x_0.

Estos resultados parciales, fueron obtenidos en subclases muy particulares de difeomorfismos casi-Anosov. La dificultad grande para demostrar la existencia de medidas SRB, cuando no se tienen a priori hipótesis de existencia de una constante uniforme que separe los exponentes de Lyapunov positivos de los no positivos, provoca que el problema general de existencia de medidas SRB para los casi-Anosov, permanezca aún mayormente abierto.

Ahora re-enunciamos el Teorema 5.3.3 en el caso particular de $f \in \text{Diff}^{\,1+\alpha}(M)$ difeomorfismo de Anosov. Más precisamente:

Teorema 5.3.4. .
(Sinai-Pesin para difeomorfismos de Anosov de clase $C^{1+\alpha}$)
Sea $f \in \mathit{Diff}^{\,1+\alpha}(M)$ un difeomorfismo de Anosov. Entonces:
(a) *Existen medidas ergódicas SRB (o físicas).*
(b) *Toda medida SRB (o física) es de Gibbs ergódica, y recíprocamente*
(c) *La unión de las cuencas de atracción estadística de las medidas SRB cubren Lebesgue c.t.p. $x \in M$.*

(d) *Si además f es topológicamente transitivo, entonces existe una única medida SRB, es ergódica y de Gibbs, y su cuenca de atracción estadística cubre Lebesgue c.t.p. $x \in M$.*

Demostraremos el Teorema 5.3.4 más adelante en esta sección, en el párrafo 5.7.2.

Corolario 5.3.5. *Sea $f \in \mathit{Diff}^{\,1+\alpha}(M)$ de Anosov transitivo que preserva la medida de Lebesgue m. Entonces, m es ergódica, es la única medida SRB de f y es de Gibbs.*

Demostración. Por la parte (d) del Teorema 5.3.4, Lebesgue c.t.p. $x \in M$ cumple

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = \mu,$$

donde μ es la única medida SRB de f, es ergódica y de Gibbs.
Por el Teorema 2.6.2, como la medida de Lebesgue m es invariante, entonces para m-c.t.p. $x \in M$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = m_x,$$

donde m_x es la componente ergódica de m a la que pertenece f.
Cuando existe, el límite de una sucesión de medidas de probabilidad en la topología débil estrella, es único (esta es una propiedad de todo espacio métrico). Concluimos que $m_x = \mu$ para m-c.t.p. $x \in M$. Dicho de otra forma, la descomposición ergódica de m tiene una única componente ergódica que es μ. Entonces $m = \mu$, como queríamos demostrar. $\square$

Observación 5.3.6. En la demostración del Teorema 5.3.4, probaremos además los siguientes resultados:
Las medidas condicionales inestables μ_x^u de cualquier medida μ que sea SRB (para un difeomorfismos de Anosov de clase $C^{1+\alpha}$) *no solo son absolutamente continuas respecto a las medidas de Lebesgue inestables m_x^u* (a lo largo de las respectivas variedades inestables locales $W_\delta^u(x)$ para μ-c.t.p. $x \in M$), *sino que son además equivalentes a estas; es decir:*

$$\mu_x^u \ll m_x^u, \quad \mu_x^u \ll m_x^u \quad \mu - \text{c.t.p. } x \in M.$$

Además, la derivada de Radon-Nikodym $d\mu_x^u/dm_x^u$ (es decir la densidad de las medidas condicionales inestables) es una función continua $h_x(y)$ y positiva, y está definida por:

$$\frac{d\mu_x^u}{dm_x^u}(y) = h_x(y) := \prod_{j=0}^{+\infty} \frac{J^u(f^j(x))}{J^u(f^j(y))} \in C_0(M, \mathbb{R}^+) \quad \mu - \text{c.t.p. } x \in M,$$

donde $J^u(x) := \left|\det(df_x|_{E^u_x}\right|$ se llama *Jacobiano inestable de f en el punto x.*

Cuando intentamos generalizar el Corolario 5.3.5 a difeomorfismos no uniformemente hiperbólicos que preservan la medida de Lebesgue, el método de demostración que usamos para los Anosov transitivos no funciona si uno no sabe a priori, o demuestra primero, la existencia de una medida SRB:

Conjetura 5.3.7. (Viana [94]) *Sea f un difeomorfismo que preserva la medida de Lebesgue m. Si m es una medida hiperbólica* (cf. Definición 3.10.3) *entonces existe alguna medida SRB.*

La demostración de la conjetura de Viana, o el hallazgo de un contraejemplo, es un problema abierto.

5.4. Sobre la Fórmula de Pesin para la entropía

Como consecuencia de los teoremas 5.3.1 y 5.3.2, la búsqueda de medidas SRB o físicas en el caso de difeomorfismos de clase C^1 más Hölder, se centra en la búsqueda de medidas de Gibbs, o sea, de medidas invariantes cuyas medidas condicionales inestables sean absolutamente continuas (ver Definiciones 5.2.1 y 5.2.3). Por ese motivo, la caracterización de las medidas invariantes que son medidas de Gibbs, adquiere en el contexto $C^{1+\alpha}$ especial relevancia. Una tal caracterización está dada por la igualdad del siguiente Teorema 5.4.1, llamada *Fórmula de Pesin para la entropía.*

Entropía métrica Para poder enunciar la Fórmula de Pesin, introducimos brevemente el concepto de *entropía métrica* $h_\mu(f)$ de una transformación continua $f : M \mapsto M$ con respecto a una medida de probabilidad μ invariante con f. La definición de entropía métrica, y el estudio de las primeras propiedades que dan su forma de cálculo para difeomorfismos de Anosov, son debidos a Kolmogorov [46] y a Sinai [85]. La definición precisa y sus propiedades, puede encontrarse además, por ejemplo en [98, §4.4], [54, Capítulo 4], [40, pag. 168-170], [88], [87, pag. 55-76], [37, §4.1-4.2], [41, Chapter 3], o [42], entre muchos otros textos que tratan matemáticamente el concepto de la entropía métrica para los sistemas dinámicos.
Para comprender los enunciados siguientes, admítase que tenemos definido un número real no negativo $h_\mu(f) \geq 0$, llamado *entropía métrica de f* con respecto de la medida de probabilidad f-invariante μ, que depende solo de f y de μ y tal que $h_\mu(f)$ es invariante por isomorfismos de espacios de medida. El número $h_\mu(f)$, por la forma en que se define, mide con respecto a la probabilidad μ, la tasa exponencial maximal en que *los iterados futuros de f desordenan los pedazos de cualquier partición finita $\mathcal{P}$ del espacio M,* ponderados con la probabilidad μ.

Más precisamente, consideremos la partición $\mathcal{P}_n := \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathcal{P})$, definida por la siguiente condición: $x, y \in A \in \mathcal{P}_n$ si y solo si para todo $0 \leq j \leq n-1$ existe $P_j \in \mathcal{P}$ tal que $x, y \in P_j$. Cada pedazo diferente de esta partición $\mathcal{P}_n$, es el conjunto de puntos x que mutuamente se acompañan dentro de un mismo pedazo de $\mathcal{P}$, al ser iterados hacia el futuro. Cuando mayor es la cantidad de pedazos diferentes de la partición $\mathcal{P}_n$ al crecer n, más desordena el iterado f^n a las órbitas en el espacio, en relación a la partición inicial $\mathcal{P}$.
Se define

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{A \in \mathcal{P}_n} \mu(A) \log \mu(A).$$

$\sum_{A \in \mathcal{P}_n} \mu(A) \log \mu(A)$ es un promedio ponderado de logaritmos. Luego, se interpreta como un exponente (ponderado). Entonces, al dividirlo entre n, da una *tasa o coeficiente de crecimiento* exponencial con n. Por este motivo, ese cociente se interpreta como la tasa o velocidad de crecimiento exponencial con n (hasta el instante n), del "desorden espacial" que producen los iterados de f, ponderado con la medida de probabilidad μ. Por lo tanto, intuitivamente hablando, $h_\mu(f, \mathcal{P})$ es la tasa exponencial, μ-ponderada y asintótica, en que los iterados de f (mejor dicho μ-casi toda órbita de f) desordenan a la partición inicial $\mathcal{P}$ con la que mirábamos, como referencia, la distribución de puntos iniciales.
Finalmente, se define la entropía métrica

$$h_\mu(f) := \sup_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} h_\mu(f, \mathcal{P}),$$

donde $\mathbb{P}$ denota el conjunto de todas las particiones finitas de M en piezas medibles.
Luego $h_\mu(f) \geq 0$ puede interpretarse como la tasa exponencial asintótica maximal de crecimiento del desorden espacial de f^n al hacer $n \to +\infty$, ponderada con la probabilidad μ. Si $h_\mu(f) > 0$, el sistema restringido al soporte de μ se llama *caótico* en sentido medible. Cuanto mayor es $h_\mu(f)$, más rápidamente se desordena el espacio al iterar f.
Luego, al observador que quiera cuantificar el caos, interesan, si existen, aquellas medidas de probabilidad invariantes μ que maximicen la entropía métrica $h_\mu(f)$ en relación al valor esperado de cierta función real, llamada *potencial* (el cual, gruesamente hablando, cuantifica el significado de "optimizar la observación del caos"). Estas medidas que maximizan la diferencia entre la entropía métrica y el valor esperado de una función potencial, se llaman *estados de equilibrio.* Su estudio se constituye en la sub-teoría, dentro de la teoría ergódica de los sistemas dinámicos, llamada *formalismo termodinámico* (ver por ejemplo [41, Chapter 4]).

Teorema 5.4.1. [Pesin] Fórmula de Pesin para la entropía
Sea $f \in \mathit{Diff}^{\,1+\alpha}(M)$ que preserva una medida μ hiperbólica y de Gibbs. Entonces
$$h_\mu(f) = \int \sum_{i=1}^{\dim(M)} \chi_i^+(x)\, d\mu, \tag{5.7}$$
donde $h_\mu(f)$ es la entropía métrica de f con respecto de μ, y
$$\chi_i^+(x) := \text{máx}\{0, \chi_i(x)\},$$
siendo $\{\chi_i\}_{1\leq i\leq \dim(M)}$ los exponentes de Lyapunov de f en el punto x, repetido cada uno de ellos tantas veces como la dimensión del espacio de Oseledets E_x^i correspondiente.

Se recuerda que, por el Teorema de Oseledets, μ-c.t.p. es regular. Por lo tanto existe la función real no negativa $\sum_{i=1}^{\dim(M)} \chi_i^+(x)$ y es medible. Si ninguno de los exponentes de Lyapunov $\chi_i(x)$ positivo, resulta $\sum_{i=1}^{\dim(M)} \chi_i^+(x) = 0$.

La demostración de la Fórmula de Pesin se encuentra en [65]. Una prueba diferente que prescinde de la propiedad de continuidad absoluta de la foliación estable se encuentra en [56]. La demostración también se encuentra, por ejemplo, en [8, Theorem 5.4.5]. Finalmente, en [93] se generaliza el Teorema 5.4.1 para difeomorfismos C^1-genéricos.

Si una medida μ satisface la fórmula de Pesin, entonces ella mide óptimamente el caos medible del sistema en relación al valor esperado de la suma de los exponentes de Lyapunov positivos. En efecto, la igualdad (5.7) da el máximo posible de la entropía métrica $h_\mu(f)$ en relación a ese valor esperado, ya que para toda aplicación de clase C^1 rige la siguiente cota superior de $h_\mu(f)$:

Teorema 5.4.2. Desigualdad de Margulis-Ruelle [57], [83]
Sea $f : M \mapsto M$ de clase C^1. Sea μ una medida de probabilidad invariante por f. Entonces
$$h_\mu(f) \leq \int \sum_{i=1}^{\dim(M)} \chi_i^+(x)\, d\mu, \tag{5.8}$$
donde $h_\mu(f)$ es la entropía métrica de f con respecto de μ, y
$$\chi_i^+(x) := \text{máx}\{0, \chi_i(x)\},$$
donde $\{\chi_i\}_{1\leq i\leq \dim(M)}$ son los exponentes de Lyapunov de f en el punto x, repetido cada uno de ellos tantas veces como la dimensión del espacio de Oseledets E_x^i correspondiente.

La demostración de la Desigualdad (5.8) de Margulis-Ruelle se puede encontrar en [83], o también en [8, Theorem 5.4.1].

La fórmula de Pesin, caracteriza a las medidas de Gibbs, debido al siguiente recíproco del Teorema 5.4.1:

Teorema 5.4.3. [Ledrappier-Young, [49]]
Sea $f \in \mathit{Diff}^{\,2}(M)$ y sea μ una medida invariante tal que

$$\sum_{i=1}^{\dim(M)} \chi_i^+(x) > 0 \quad \mu - \text{c.t.p. } x \in M.$$

Si se verifica la Fórmula de Pesin (5.7) *de la entropía métrica $h_\mu(f)$, entonces la medida μ es de Gibbs, es decir, μ tiene medidas condicionales inestables absolutamente continuas.*

La demostración del Teorema 5.4.3 se encuentra en [49], y también en [48] con la hipótesis adicional de μ hiperbólica.

Corolario 5.4.4. *Sea Λ un atractor topológico uniformemente hiperbólico de $f \in \mathit{Diff}^{\,2}(M)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) *μ es una medida ergódica SRB (o física).*
(ii) *μ es una medida ergódica de Gibbs.*
(iii) *μ es una medida ergódica que satisface la Fórmula* (5.7) *de Pesin para la entropía.*

Demostración. Se obtiene inmediatamente de reunir los Teoremas 5.3.3, 5.4.1 y 5.4.3. □

5.5. Demostración del Teorema 5.3.1

Para poder demostrar los Teoremas 5.3.1 y 5.3.4, necesitamos introducir algunos resultados relevantes de la llamada *Teoría de Pesin:* Esta teoría estudia el comportamiento de μ-casi toda órbita, para $f \in \text{Diff}^{\,1+\alpha}(M)$ donde μ es una medida de probabilidad f-invariante e *hiperbólica.* Es decir, la región de Pesin Σ (i.e. el conjunto de los puntos regulares cuyos exponentes de Lyapunov son todos diferentes de cero) tiene μ-probabilidad igual a 1.

Definición 5.5.1. Holonomía
Sea μ una medida de probabilidad invariante hiperbólica de $f \in \text{Diff}^{\,1+\alpha}(M)$. Es decir, la región de Pesin Σ cumple $\mu(\Sigma) = 1$. Tomemos $x_0 \in \Sigma$ tal que para todo $\delta > 0$ la bola $B_\delta(x_0) \subset M$ de centro x_0 y radio $\delta > 0$ cumple $\mu(B_\delta(x_0)) > 0$. Por el Teorema 3.11.1, existen para μ-c.t.p. $x \in B_\delta(x_0)$ las variedades estables e inestables locales por el punto x, que denotamos $W^s_\delta(x),\ W^u_\delta(x) \subset B_\delta(x_0)$ (Si fuera necesario tomamos la componente conexa que contiene al punto x de la intersección de la variedad estable o inestable local por el punto x con la bola $B_\delta(x_0)$).

Definimos la holonomía

$$h_s : B^*_\delta(x_0) \mapsto W^u_\delta(x_0),$$

donde

$$B^*_\delta(x_0) = \{y \in B_\delta(x_0) \cap \Sigma : \ \#(W^s_\delta(y) \cap W^u_\delta(x_0)) = 1$$

como la transformación que a cada punto $y \in B^*\delta(x_0)$ hace corresponder el único punto $h_s(y) \in W^s_\delta(y) \cap W^u_\delta(x_0)$. Debido al Teorema 3.11.1, si $\delta > 0$ es suficientemente pequeño, entonces h_s existe, pues el conjunto $B^*_\delta(x_0)$ contiene por lo menos a la variedad estable local $W^s_\delta(x_0)$ que interseca transversalmente a $W^u_\delta(x_0)$ en el punto x_0.

La transformación h_s se llama *holonomía a lo largo de las variedades estables locales* en la bola $B_\delta(x_0)$ sobre la variedad inestable local del punto x_0, o en breve, *holonomía local estable.*

Decimos que *la holonomía estable* h_s *es absolutamente continua* si para μ-c.t.p. $x_0 \in \Sigma$ y para todo boreliano $A \subset B_\delta(x_0)$ se cumple:

$$m(h_s^{-1}(A) = 0 \ \Leftrightarrow \ m^u(A \cap W^u_\delta(x_0)) = 0, \tag{5.9}$$

donde m es la medida de Lebesgue en la variedad M y m^u es la medida de Lebesgue a lo largo de la subvariedad inestable local $W^u_\delta(x_0)$.

Análogamente se define *holonomía inestable* y *continuidad absoluta de la holonomía inestable,* intercambiando entre sí los roles de las variedades estables e inestables locales en la definición anterior.

Teorema 5.5.2. [Pesin] [64]
(Teorema fundamental de la Teoría de Pesin)
Sea $f \in \text{Diff}^{\,1+\alpha}(M)$ y sea μ una medida ergódica e hiperbólica. Entonces existe $\delta > 0$ suficientemente pequeño, tal que la holonomía estable y la holonomía inestable en las bolas $B_\delta(x_0)$ para μ-c.t.p. $x_0 \in M$ son absolutamente continuas.

La prueba del Teorema 5.5.2 se encuentra en [64], y también, por ejemplo, en [Theorem 4.3.1][8].

Observamos que el Teorema 5.5.2 es falso en la topología C^1. En efecto, en [13] y [77] (y también en [90] para endomorfismos) se construyen ejemplos de atractores hiperbólicos para los cuales la holonomía a lo largo de las variedades estables locales no es absolutamente continua.

Por ese motivo la demostración del Teorema 5.3.1 no funciona para difeomorfismos de clase C^1 que no sean $C^{1+\alpha}$. En particular, la demostración que daremos del Teorema 5.3.4 no funciona para difeomorfismos de clase C^1 que no sean de clase $C^{1+\alpha}$. Más adelante expondremos algunos resultados utilizando las medidas “SRB-like”(ver Definición 6.6.4), que no son necesariamente medidas de Gibbs, pero que existen para difeomorfismos y endomorfismos sin más regularidad que C^1 manteniendo propiedades de atracción estadística similares a las medidas SRB.

Ahora, veremos que la demostración del Teorema 5.3.1, que relaciona para difeomorfismos de clase $C^{1+\alpha}$ las medidas de Gibbs hiperbólicas y ergódicas con las medidas SRB o físicas, se reduce al Teorema fundamental de la Teoría de Pesin que establece la continuidad absoluta de la holonomía estable local.

5.5.3. Demostración del Teorema 5.3.1

Demostración. Por la parte (c) del Corolario 5.2.4 si μ es medida de Gibbs, entonces μ-casi toda componente ergódica μ_x de μ es medida de Gibbs. Además como μ es hiperbólica por hipótesis, entonces $\mu(\Sigma) = 1$, donde Σ es la región de Pesin. Luego, por el Teorema 2.6.2 de descomposición ergódica μ-casi toda componente ergódica μ_x de μ cumple $\mu_x(\Sigma) = 1$; es decir μ_x es hiperbólica y de Gibbs, además de ser ergódica. Tomemos una tal μ_x y renombremosla como μ.

Para probar el Teorema 5.3.1, aplicando la Definición 4.5.6 de medida SRB o física, debemos probar que la cuenca B de atracción estadística de μ, definida por:

$$B = \{x \in M : \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = \mu\}$$

tiene medida de Lebesgue $m(B)$ positiva.

Como μ es ergódica, $\mu(B) = 1$. Por el Teorema 5.1.7 de Descomposición de Rohlin en una bola $B_\delta(x_0)$ con μ-medida positiva, se cumple:

$$\mu^u(B \cap W^u_\delta(x_0)) = 1$$

para μ-c.t.p. x_0, donde μ^u es la medida condicionada inestable de μ. Como μ es medida de Gibbs, por la Definición 5.2.3, se cumple $\mu^u \ll m^u$, para μ-c.t.p. x_0, donde m^u es la medida de Lebesgue a lo largo de la variedad $W^u_\delta(x_0)$. Luego deducimos

$$m^u(B \cap W^u_\delta(x_0)) > 0$$

Aplicando el Teorema 5.5.2 de la Teoría de Pesin, obtenemos:

$$m(h_s^{-1}(B \cap W^u_\delta(x_0)) > 0.$$

Entonces, para terminar de demostrar que μ es una medida SRB, es decir para terminar de probar que $m(B) > 0$, basta demostrar ahora que $h_s^{-1}(B \cap W^u_\delta(x_0)) \subset B$. En efecto, sea $y \in h_s^{-1}(B \cap W^u_\delta(x_0))$. Probemos que $y \in B$. Por definición de la holonomía estable h_s, se cumple $y \in B^*_\delta$ tal que $h_s(y) = z := W^s_\delta(y) \cap W^u_\delta(x_0) \in B$. Entonces, como $z \in B \cap W^s_\delta(y)$, obtenemos

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(f^n(z), f^n(y)) = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(z)} = \mu.$$

Aplicando el resultado probado en el Ejercicio 2.1.12, resulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f_j(y)} = \mu,$$

es decir $y \in B$, como queríamos probar. □

5.6. Lema de Distorsión Acotada

Al final de este capítulo probaremos el Teorema 5.3.4 que establece, en el contexto $C^{1+\alpha}$-Anosov, la equivalencia entre las medidas SRB ergódicas y las medidas de Gibbs ergódicas, y la existencia de estas.
La demostración del Teorema 5.3.4 está fuertemente basada en el siguiente Lema 5.6.1 de Distorsión Acotada. La prueba de este lema se basa en la hipótesis $f \in \text{Diff}^{\,1+\alpha}(M)$.

Lema 5.6.1. Lema de Distorsión Acotada *Sea $f \in Diff^{\,1+\alpha}(M)$ de Anosov. Sea $TM = E^u \oplus E^s$ el splitting uniformemente hiperbólico del fibrado tangente, y sea $W^u_\delta(x)$ la variedad inestable local por el punto x para $\delta > 0$ constante, suficientemente pequeño. Denotamos con*

$$J^u(x) = \left| \det\, df_x|_{E^u_x} \right| > 0$$

al Jacobiano inestable en el punto x. Sean $x, y \in M$ dos puntos tales que $y \in W^u_\delta(x)$ y sean, para todo $n \geq 1$, las funciones

$$h_n(x,y) := \frac{\prod_{j=1}^{n} J^u(f^{-j}(x))}{\prod_{j=1}^{n} J^u(f^{-j}(y))} \in (0, +\infty)$$

$$h(x,y) =:= \frac{\prod_{j=1}^{+\infty} J^u(f^{-j}(x))}{\prod_{j=1}^{+\infty} J^u(f^{-j}(y))} \in [0, +\infty],$$

definidas solo para las parejas (x,y) de puntos en el conjunto:

$$H_\delta := \{(x,y) \in M \text{ tales que } y \in W^u_\delta(x)\}.$$

Entonces:
(i) *Existe una constante real $K > 0$ tal que*

$$\frac{1}{K} < h(x,y) < K \quad \forall\ (x,y) \in H_\delta$$

(ii) *La función $h : H_\delta \to \mathbb{R}^+$ es continua.*

(iii) *Para todo $\epsilon > 0$ existe $N \geq 1$* (independiente de la pareja de puntos $(x,y) \in H_\delta$) *tal que:*

$$e^{-\epsilon} < \frac{h_n(x,y)}{h(x,y)} < e^{\epsilon} \quad \forall\ (x,y) \in H_\delta, \quad \forall\ n \geq N.$$

Demostración. **(i)** Definamos $\log : [0,+\infty] \mapsto [-\infty,+\infty]$ acordando que $\log 0 = -\infty$ y $\log(+\infty) = +\infty$. Para demostrar la afirmación (i) basta probar que existe una constante real $c > 0$ tal que $|\log h(x,y)| \leq c$. Por construcción de la función $h : H_\delta \mapsto [0,+\infty]$ tenemos:

$$|\log h(x,y)| = \Big|\sum_{j=1}^{+\infty} \big(\log J^u(f^{-j}(x)) - \log J^u(f^{-j}(y))\big)\Big| \leq$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \big|\log J^u(f^{-j}(x)) - \log J^u(f^{-j}(y))\big|. \tag{5.10}$$

$J^u : M \mapsto \mathbb{R}^+$ es continuo (porque df_x es continuo pues f es de clase C^1 y E^u_x depende continuamente de x). Entonces la función J^u está uniformemente acotada superiormente e inferiormente por constantes reales positivas. Luego, por el Teorema del valor medio del cálculo diferencial aplicado a la función real $\log t$ de variable real positiva t, existe una constante $c_1 > 0$ tal que

$$|\log J^u(z_1) - \log J^u(z_2)| \leq c_1 |J^u(z_1) - J^u(z_2)|$$

para toda pareja (z_1, z_2) de puntos en la variedad M. Sustituyendo en (5.10) resulta:

$$|\log h(x,y)| \leq c_1 \sum_{j=1}^{+\infty} \big|J^u(f^{-j}(x)) - J^u(f^{-j}(y))\big|. \tag{5.11}$$

Siendo f de clase $C^{1+\alpha}$, las variedades inestables son de clase $C^{1+\alpha}$ (cf. la última parte del enunciado del Teorema 3.5.1). Entonces el subespacio tangente $T_y W^u_\delta(x) = E^u_y$ depende α-Hölder continuamente del punto y cuando y varía a lo largo de la subvariedad $W^u_\delta(x)$. Es decir, para cada x existe una constante $c_2(x) > 0$ tal que

$$\text{dist}(E^u_y, E^u_z) \leq c_2(x)\text{dist}(y,z)^\alpha \quad \forall \;\; y, z \in W^u_\delta(x). \tag{5.12}$$

Afirmamos que para $\delta > 0$ fijo suficientemente pequeño, existe una constante c_2 uniforme tal que

$$c_2(x) \leq c_2 \quad \forall\ x \in M.$$

En efecto, fijando $x_1 \in M$ y una constante $C(x_1) > c_2(x_1)$, la desigualdad (5.12) se satisface para cualquier punto $\widehat{x}$ en un entorno suficientemente

pequeño de x_1, sustituyendo $c_2(x)$ por $C(x_1)$. Luego, cubriendo la variedad compacta M con una cantidad finita de tales entornos, centrados en puntos $x_1, \ldots, x_m$ respectivamente, y tomando $c_2 = \max_{i=1}^m C(x_i)$, deducimos que se satisface la desigualdad (5.12) para todo $x \in M$, con la constante c_2 en lugar de $c_2(x)$.
Por otra parte, como f es de clase $C^{1+\alpha}$, su derivada df_x depende α-Hölder continuamente del punto x. Es decir, existe una constante $c_3 > 0$ tal que

$$\|df_y - df_z\| \leq c_3 \mathrm{dist}(y,z)^\alpha \quad \forall\ y, z \in M.$$

Por otra parte existe una constante $c_4 > 0$ tal que

$$|\det A| \leq c_4 \|A\|$$

para toda aplicación lineal A de un espacio vectorial de dimensión igual a $\dim(E^u)$ en otro de la misma dimensión. Reuniendo las cuatro últimas desigualdades que involucran las constantes $c_2(x), c_2, c_3$ y c_4, obtenemos

$$|J^u(y) - J^u(z)| = \Big| \,|\det(df_y|_{E^u_y}| - |\det(df_z|_{E^u_z}| \,\Big| \leq$$

$$\Big| \,|\det(df_y|_{E^u_y}| - |\det(df_z|_{E^u_y}| \,\Big| + \Big| \,|\det(df_z|_{E^u_y}| - |\det(df_z|_{E^u_z}| \leq$$

$$\Big| \leq c_4 \|df_y - df_z\| + c_4 (\max_{z \in M} \|df_z\|) \mathrm{dist}(E^u_y, E^u_z) \leq$$

$$\big(c_4 c_3 + c_4 (\max_{z \in M} \|df_z\|) c_2\big) \cdot \mathrm{dist}(y,z)^\alpha \quad \forall\ (y,z) \in W^u_\delta(x), \quad \forall\ x \in M.$$

Sustituyendo en la desigualdad (5.11), obtenemos una constante $c_5 > 0$ tal que

$$|\log h(x,y)| \leq c_5 \sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{dist}(f^{-j}(x), f^{-j}(y))^\alpha \quad \forall\ (x,y) \in H_\delta \tag{5.13}$$

Nota: Para obtener la desigualdad (5.13) observamos que no necesariamente se cumple $f^{-j} W^u_\delta(x) \subset W^u_\delta(f^j(x))$, y por lo tanto, aunque $(x,y) \in H_\delta$ no necesariamente son aplicables directamente todas las desigualdades anteriores para la pareja de puntos $(f^{-j}(x), f^{-j}(y))$ para cualquier $j \geq 1$. Sin embargo, fijado $\delta > 0$ suficientemente pequeño, aplicamos la parte B) del Teorema 3.5.1, y observamos que hay convergencia uniforme a cero de las distancias a lo largo de las variedades inestables locales al iterar hacia el pasado, pues los vectores tangentes $u \in E^u_x$ se contraen uniformemente hacia el pasado según la Definición 3.2.1 de difeomorfismo de Anosov. Luego, existe $N \geq 1$ uniforme tal que $f^{-n} W^u_\delta(x) \subset W^u_\delta(f^{-n}(x))$ para todo $n \geq N$ para todo $x \in M$. Entonces, basta elegir $0 < \delta' < \delta$ tal que $f^{-j} W^u_{\delta'}(x) \subset W^u_\delta(f^{-j}(x))$ para $j \in \{0, \ldots, N-1\}$, para que esa misma inclusión valga también para todo $j \geq 0$. Finalmente renombramos δ' como δ para deducir la desigualdad (5.13).

Por la Definición 3.2.1 tenemos:

$$\mathrm{dist}^u(f^{-j}(x), f^{-j}(y)) \leq C\sigma^{-j}\mathrm{dist}^u(x,y), \tag{5.14}$$

donde $C > 0$ y $\sigma > 1$ son las constantes dadas en la Definición 3.2.1, y $\mathrm{dist}^u(x,y)$ es la distancia entre los puntos x e y a lo largo de la variedad inestable local $W^u_\delta(x)$. Además la distancia dist en la variedad ambiente M entre dos puntos que están en la misma variedad inestable local, es siempre el mínimo de las longitudes de curvas que unen esos puntos (con la métrica riemanniana dada en M). Por lo tanto es menor o igual que la distancia dist^u a lo largo de la variedad inestable local. Sustituyendo en la desigualdad (5.13) resulta:

$$|\log h(x,y)| \leq c_5\, C^\alpha \sum_{j=1}^{+\infty} \sigma^{-\alpha j}\,(\mathrm{dist}^u(x,y))^\alpha \leq c_6(\mathrm{dist}^u(x,y))^\alpha$$

$$\forall\ (x,y) \in H_\delta, \tag{5.15}$$

donde $c_6 = c_5\, C^\alpha\, 1/(1-\sigma^{-\alpha})$ (observar que $0 < \sigma^{-\alpha} < 1$ porque $\sigma > 1$ y $\alpha > 0$).

Como $W^u_\delta(x)$ es una variedad C_1-encajada en M que depende continuamente de x, existe

$$\mathrm{Diam}(W^u_\delta(x)) := \sup_{y \in W^u_\delta(x)} \mathrm{dist}^u(x,y) \in \mathbb{R}^+$$

y es una función continua real de $x \in M$. Luego, está acotada superiormente por una constante uniforme $c_7 > 0$. Sustituyendo en (5.15), concluimos:

$$|\log h(x,y)| \leq c_6\,(\mathrm{dist}^u(x,y))^\alpha \leq c_6\, c_7^\alpha = c \quad \forall\ (x,y) \in H_\delta, \tag{5.16}$$

terminando la demostración de la parte (i) del Lema 5.6.1.

(iii) Fijemos $n \geq 1$. Por la definición de las funciones h y h_n tenemos

$$\frac{h_n(x,y)}{h(x,y)} =:= \frac{\prod_{j=n+1}^{+\infty} J^u(f^{-j}(y))}{\prod_{j=n+1}^{+\infty} J^u(f^{-j}(x))}$$

Luego, aplicando la fórmula (5.15) a los puntos $f^{-n-1}(x)$ y $f^{-n-1}(y)$, en lugar de x e y respectivamente, obtenemos

$$\Big|\log\Big(\frac{h_n(x,y)}{h(x,y)}\Big)\Big| \leq c_6\Big(\mathrm{dist}^u(f^{-n-1}(x), f^{-n-1}(y))\Big)^\alpha.$$

Usando ahora la desigualdad (5.14), deducimos:

$$\Big|\log\Big(\frac{h_n(x,y)}{h(x,y)}\Big)\Big| =\leq c_6 C^\alpha \sigma^{-(n+1)\alpha}\Big(\mathrm{dist}^u(x,y)\Big)^\alpha \leq c_6\, C\, c_7^\alpha\, \sigma^{-(n+1)\alpha}.$$

Como $\sigma > 1$ y $\alpha > 0$, el término de la derecha tiende a cero cuando $n \to +\infty$. Luego, existe $N \geq 1$, independiente de (x, y) tal que

$$\left| \log \frac{h_n(x,y)}{h(x,y)} \right| < \epsilon \ \ \forall\, n \geq N,$$

terminando de probar la afirmación (iii) del Lema 5.6.1.

(ii) Debido a la afirmación (ii), la sucesión de funciones $h_n(x, y)$ converge uniformemente a $h(x, y)$ para todo $(x, y) \in H_\delta$. Además $h_n(x, y)$ es continua en H_δ, porque el Jacobiano inestable $J^u(x) = \left| \det df^n_x|_{E^u_x} \right|$ es una función continua de x, pues df_x es continuo y E^u_x también. El límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es continuo. Concluimos que h es una función continua, finalizando la prueba del Lema 5.6.1. □

5.7. Demostración del Teorema 5.3.4

En la demostración del Teorema 5.3.4, usaremos, además del Lema de Distorsión Acotada, el siguiente resultado, válido para cualquier difeomorfismo de Anosov (no necesariamente de clase $C^{1+\alpha}$), y generalizable también (reformulando adecuadamente el enunciado) para los entornos locales de atractores topológicos uniformemente hiperbólicos.

Teorema 5.7.1. Estructura de producto local *Sea $f \in \text{Diff}^{\,1}(M)$ Anosov. Existen constantes $0 < \delta' < \delta$ suficientemente pequeñas, tales que f tiene estructura de producto local en entornos de radio δ'.*
La estructura de producto local significa, por definición, que para toda pareja de puntos (x, y) tales que $\text{dist}(x, y) < \delta'$, existen, son únicos y dependen continuamente de (x, y) los puntos $[x, y]$ y $[y, x]$ definidos por:

$$[x, y] = W^u_\delta(x) \cap W^s_\delta(y), \quad [y, x] = W^u_\delta(y) \cap W^s_\delta(x),$$

donde $W^{u,s}_\delta(x)$ denota la componente conexa de $W^{u,s}(x) \cap B_\delta(x)$ que contiene al punto x.

Una prueba del Teorema 5.7.1 puede encontrarse en [14, Theorem 3.12] o en [40, Proposition 6.4.21]. El Teorema 5.7.1 es consecuencia del llamado “shadowing lemma”(lema de sombreado).

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema 5.3.4 que establece la existencia, y mutua equivalencia, de las medidas ergódicas de Gibbs y de las medidas SRB, para los difeomorfismos de Anosov de clase $C^{1+\alpha}$.

5.7.2. Demostración del Teorema 5.3.4

Esta prueba consta de tres partes:

Afirmación I: *Existen medidas de probabilidad μ de Gibbs tales que:*
• *Las probabilidades condicionales inestables μ^u son equivalentes a las medidas de Lebesgue m^u a lo largo de las respectivas variedades inestables locales $W^u_\delta(x)$ para μ-c.t.p. $x \in M$.* (Nota: La equivalencia entre μ^u y m^u se define como $\mu^u \ll m^u$ y $m^u \ll \mu^u$).
• *La derivada de Radon-Nikodym $d\mu^u/dm^u$* (la densidad de las medidas condicionales inestables μ^u) *es una función real continua y estrictamente positiva.*

Una vez probada la Afirmación I, como consecuencia, debido al Teorema 2.6.2 de Descomposición en componentes ergódicas, y por las partes (b) y (c) del Corolario 5.2.4 del Teorema de Rohlin, concluimos que existen medidas de probabilidad ergódicas de Gibbs μ tales que μ^u es equivalente a m^u para μ-c.t.p. Aplicando entonces el Teorema 5.3.1 ya demostrado, toda medida de probabilidad ergódica y de Gibbs, es SRB. Deducimos que existen medidas SRB ergódicas, es decir, concluimos la parte (a) del Teorema 5.3.4. Además la Afirmación I implica que existen medidas SRB ergódicas, que son de Gibbs, cuyas probabilidades condicionales inestables son equivalentes a la medida de Lebesgue a lo largo de las variedades inestables respectivas para μ-c.t.p., y cuyas densidades son funciones reales continuas y estrictamente positivas.

Afirmación II: *Sea μ una medida de Gibbs ergódica μ tal que la derivada de Radon-Nikodym* (densidad $d\mu^u/dm^u$ de las medidas condicionales inestables μ^u) *es una función continua* (no necesariamente estrictamente positiva). *Entonces la cuenca de atracción estadística de μ cubre Lebesgue c.t.p. de un entorno abierto de su soporte.*

De esta propiedad, una vez demostrada, deducimos que dos medidas de Gibbs ergódicas diferentes cuyas densidades inestables sean continuas (en particular dos medidas de Gibbs ergódicas que satisfagan la Afirmación I), deben tener soportes disjuntos a distancia positiva. En efecto, por la Definición 4.5.1, las cuencas de atracción estadística de medidas diferentes deben ser disjuntas. Debido a la Afirmación II los soportes de esas dos medidas están mutuamente aislados. De aquí deducimos (usando que M es un espacio métrico compacto y por lo tanto existe base numerable de abiertos) que las medidas de Gibbs ergódicas que satisfacen la Afirmación I (y por lo tanto también la II) son a lo sumo una cantidad numerable.

Afirmación III: *Lebesgue casi todo punto de la variedad M pertenece a la unión de las cuencas de atracción estadística de las medidas de Gibbs ergódicas cuyas medidas condicionales inestables cumplen las dos propiedades de la*

Afirmación I.

Supongamos probada la afirmación III. Tomando en particular una medida SRB o física cualquiera ν, con cuenca de atracción estadística A, deducimos que A está contenido en la unión de las cuencas de atracción estadística (que son disjuntas dos a dos) de una colección finita o infinita numerable de medidas de Gibbs ergódicas que satisfacen la Afirmación I. Como las cuencas de atracción estadística de medidas diferentes son disjuntas, deducimos que toda medida SRB o física es de Gibbs ergódica y satisface la Afirmación I, y por lo tanto también la II. Esto, junto con el Teorema 5.3.1, prueba la parte (b) del Teorema 5.3.4.

Además, la afirmación III implica inmediatamente la parte (c) del Teorema 5.3.4, y más aún, toda medida SRB no solo es de Gibbs ergódica, sino que además satisface las afirmaciones I y II.

Supongamos ahora además que f es topológicamente transitivo. Si hubiera dos medidas SRB (ergódicas) diferentes μ y ν, entonces sus cuencas de atracción estadística $B(\mu)$ y $B(\nu)$ serían disjuntas. Como μ y ν satisfacen la Afirmación II, existen abiertos disjuntos U y V tales que Lebesgue c.t.p. de U pertenece a $B(\mu)$ y Lebesgue c.t.p. de V pertenece a $B(\nu)$. Como $B(\mu)$ es f-invariante, entonces $m(f^n(U) \setminus B(\mu)) = 0$ para todo $n \geq 1$. Como f es topológicamente transitivo existe $n \geq 1$ tal que el abierto $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Todo abierto (en particular $f^n(U) \cap V$) tiene medida de Lebesgue positiva, y Lebesgue c.t.p. de $f^n(U) \cap V$ pertenece a $B(\mu)$ (por pertenecer a $f^n(U)$), y pertenece también a $B(\nu)$ (por pertenecer a V). Luego las cuencas de atracción estadística $B(\mu)$ y $B(\nu)$ no son disjuntas, de donde $\mu = \nu$. Esto prueba la unicidad de la medida SRB, es decir, la parte (d) del Teorema 5.3.4.

En resumen, para demostrar completamente el Teorema 5.3.4, basta probar las Afirmaciones I, II y III.

Primera parte de la demostración del Teorema 5.3.4
(Prueba de la Afirmación I de §5.7.2)

Demostración. .

Paso 1: Construcción de candidata a medida de Gibbs
Elijamos una variedad inestable local cualquiera W_0 y consideremos la medida m_0^u de Lebesgue a lo largo de W_0. Tenemos $m_0^u(W_0) > 0$. Definimos la siguiente medida de probabilidad μ_0 en la variedad ambiente M:

$$\mu_0(A) := \frac{m^u(A \cap W_0)}{m^u(W_0)} \quad \forall\ A \in \mathcal{A},$$

donde $\mathcal{A}$ es la sigma-álgebra de Borel. Para todo $n \geq 1$ definimos las siguientes medidas de probabilidad ν_n y μ_n:

$$\nu_n(A) := \mu_0(f^{-n}(A)), \quad \mu_n(A) := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\nu_j(A) \quad \forall\ A \in \mathcal{A}. \tag{5.17}$$

Finalmente tomamos una subsucesión $\{\mu_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a μ en el espacio $\mathcal{M}$ de las medidas de probabilidad en $(M, \mathcal{A})$ con la topología débil*. Probaremos que la medida μ satisface la Afirmación I.

Paso 2: Descomposición de Rohlin de las medidas ν_n.
Consideremos un punto x_0 en el soporte de μ tal que existe una bola $B = B_\delta(x_0) \subset M$ de radio $\delta > 0$ suficientemente pequeño, tal que $\mu(B) > 0$. Entonces, por la definición de la topología débil estrella (tomando por ejemplo una función continua no negativa que vale 1 en x_0 y está soportada en B), existe $N \geq 1$ tal que $\mu_N(B) > 0$, de donde deducimos que, para todo $n \geq N$ existe $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que $\nu_j(B) > 0$, y por lo tanto

$$\mu_n(B) > 0 \ \ \forall\ n \geq N. \tag{5.18}$$

Esto implica, por la definición de la medida ν_j que $f^j(W_0) \cap B \neq \emptyset$. Fijemos $n \geq 1$ tal que

$$f^n(W_0) \cap B \neq \emptyset.$$

Por construcción, para todo boreliano $A \subset M$, se cumple:

$$\nu_n(A \cap B) = \frac{1}{m_0^u(W_0)} \int \chi_{f^{-n}(A)}(y)\chi_{W_0\cap f^{-n}(B)}(y)\, dm_0^u(y).$$

Haciendo el cambio de variable $x = f^n(y)$ y denotando $J^u(y)$ al Jacobiano inestable en el punto y definido por

$$J^u(y) := \big|\det df_y|_{E^u(y)}\big|,$$

donde $E_y^u = T_y W^u(y)$, obtenemos:

$$\nu_n(A \cap B) = \frac{1}{m_0^u(W_0)} \int \chi_A(x)\chi_{f^n(W_0)\cap B}\,(x)\,\big|\det d(f^{-n})|_{E_x^u}(x)\big|\ dm^u(x)$$

donde $m^u(x)$ denota la medida de Lebesgue a lo largo de la variedad inestable local $W_\delta^u(x)$ por el punto x. Tenemos

$$\big|\det d(f^{-n})|_{E_x^u}(x)\big| = \frac{1}{\big|\det d(f^n)|_{E_y^u}(y)\big|} = \frac{1}{\prod_{i=0}^n J^u(f^i(y))} =$$

$$= \frac{1}{\prod_{h=1}^n J^u(f^{-h}(x))},$$

de donde:

$$\nu_n(A\cap B)=\frac{1}{m_0^u(W_0)}\int \chi_A(x)\chi_{f^n(W_0)\cap B}(x)\,\frac{1}{\prod_{h=1}^n J^u(f^{-h}(x))}\,dm^u(x).$$

Denotamos k_n el número de componentes conexas de $f^n(W_0)\cap B$ (por convención, $k_n=0$ si el conjunto es vacío y $\sum_{i=1}^0 \cdot =0$). Para cada $n\geq 1$ fijo, si $k_n\geq 1$ denotamos $\{W_{i,n}\}_{1\leq i\leq k_n}$ al conjunto de componentes conexas de $f^n(W_0)\cap B$. Observamos que para todo $x\in W_{i,n}$ la medida $m^u(x)$ es la de Lebesgue a lo largo de la subvariedad $W_{i,n}$. Entonces:

$$\nu_n(A\cap B)=\frac{1}{m_0^u(W_0)}\sum_{i=1}^{k_n}\int_{W_{i,n}}\chi_A(x)\,\frac{1}{\prod_{h=1}^n J^u(f^{-h}(x))}\,dm^u(x). \tag{5.19}$$

Fijamos $n\geq 1$ tal que $k_n\geq 1$, es decir $f^n(W_0)\cap B\neq\emptyset$. Luego, por construcción de la medida ν_n mediante la igualdad (5.17), tenemos $\nu_n(B)>0$. Tomemos una subvariedad cualquiera V, encajada en B_δ, de dimensión complementaria a la inestable, que interseque en un solo punto cada una, a todas las variedades estables locales inestables $W^u\delta(z)$ (para todo $z\in B$). Por el Teorema 5.7.1 de estructura de producto local, tal variedad topológicamente transversal V existe, ya que puede tomarse igual a una variedad estable local.
Para cada $i\in\{1,\dots,k_n\}$ consideremos el punto $x_{i,n}=W_{i,n}\cap V$. Construimos, para cada $x\in\bigcup_{i=1}^{k_n}W_{i,n}$, el siguiente valor real *positivo* $h_n(x)$ de la que llamaremos función h_n:

$$h_n(x):=\frac{\prod_{h=1}^n J^u(f^{-h}(x_{i,n}))}{\prod_{h=1}^n J^u(f^{-h}(x))}, \tag{5.20}$$

donde $i\in\{1,\dots,n\}$ es el único índice tal que $x\in W_{i,n}$.
Consideramos la partición $\mathcal{P}_n$ de la bola B cuyas piezas son $\{W_{i,n}\}_{1\leq i\leq k_n}$ y además el complemento en B de $\cup_{i=1}^{k_n}W_{i,n}$. Denotamos con ρ_n la siguiente medida (finita) en el espacio medible cociente formado por las piezas de la partición $\mathcal{P}_n$:

$$\rho_n=\frac{1}{m_0^u(W_0)}\sum_{i=1}^{k_n}\frac{\int_{W_{i,n}}h_n\,dm^u}{\prod_{h=1}^n J^u\circ f^{-h}(x_{i,n})}\,\delta_{x_{i,n}}, \tag{5.21}$$

donde $\delta_{x_{i,n}}$ denota la Delta de Dirac soportada en la pieza $W_{i,n}$ (representada por el punto $x_{i,n}$). Sustituyendo (5.20) y (5.21) en la igualdad (5.19), obtenemos para todo boreliano A la siguiente descomposición de la medida de probabilidad ν_n restringida a la bola B:

$$\frac{\nu_n(A\cap B)}{\nu_n(B)}=\frac{1}{\nu_n(B)}\int d\rho_n\int_{W_{i,n}}\chi_A(x)\,\frac{h_n(x)}{\int_{W_{i,n}}h_n\,dm^u}\,dm^u(x). \tag{5.22}$$

La igualdad anterior da la descomposición de Rohlin con respecto de la partición $\mathcal{P}_n$, de la medida de probabilidad $\nu_n/\nu_n(B)$ en la bola B. En efecto, la medida de probabilidad ν_n^u condicionada a lo largo de las piezas de la partición (i.e. a lo largo de las variedades inestables locales $W_{i,n}$) está dada por la integral de la derecha en la igualdad (5.22). Esta medida condicionada ν_n^u cumple

$$d\nu_n^u = \frac{h_n}{\int_{W_{i,n}} h_n \, dm^u} \, dm^u,$$

y por lo tanto

$$\nu_n^u \ll m^u.$$

Decimos entonces que las medidas condicionales inestables de ν_n son absolutamente continuas (aún cuando ν_n no es necesariamente invariante con f). La integral de la izquierda en (5.22) da la medida de probabilidad $\widehat{\nu}_n$ en el espacio cociente de la bola B con respecto a la partición $\mathcal{P}_n$. Esta medida cociente $\widehat{\nu}_n$ es

$$\widehat{\nu}_n = \frac{1}{\nu_n(B)} \, \rho_n.$$

El objetivo en los siguientes pasos de la demostración es usar la descomposición de Rohlin de las medidas ν_j dada por la igualdad (5.22) para todo $j \in \{0, \dots, n-1\}$, para encontrar la descomposición de Rohlin de la medida $\mu_n = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_n$. Luego, pasando al límite para una subsucesión $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, encontraremos la descomposición de Rohlin de la medida μ construida en el Paso 1, para demostrar que es medida de Gibbs y satisface la Afirmación I. El punto difícil en este argumento es justificar rigurosamente el pasaje al límite de los promedios de las medidas $\widehat{\nu}_n$ y de las medidas condicionales ν_n^u. Para ello, necesitamos ϵ-aproximar la descomposición de Rohlin dada por la igualdad (5.22), para todo $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, y para n suficientemente grande.

Paso 3: ϵ- aproximación de la descomposición de Rohlin de ν_n
Fijemos, como en el paso 2, $n \geq 1$ tal que $f^n(W_0) \cap B \neq \emptyset$. Recordamos que $\{W_{i,n}\}_{1 \leq i \leq k_n}$ denota a las componentes conexas de $f^n(W_0) \cap B$, que son por lo tanto, variedades inestables locales contenidas en la bola B. Recordemos que para obtener la descomposición de Rohlin de ν_n dada por la igualdad (5.22), hemos elegido y dejado fijo un punto y uno solo $x_{i,n} \in W_{i,n}$. Definimos ahora, para todo $x \in \bigcup_{i=1}^{k_n} W_{i,n}$ el siguiente valor $h(x) \in [0, +\infty]$ de la que llamaremos función h restringida a $\bigcup_{i=1}^{k_n} W_{i,n}$:

$$h(x) := \frac{\prod_{h=1}^{+\infty} J^u(f^{-h}(x_{i,n}))}{\prod_{h=1}^{+\infty} J^u(f^{-h}(x))}, \tag{5.23}$$

donde i es el único índice en $\{1, \dots, k_n\}$ tal que $x \in W_{i,n}$ Ahora aplicamos el Lema 5.6.1 de Distorsión Acotada que establece que: Existe una constante real $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{K} < h(x) < \frac{1}{K} \quad \forall\ x \in H := \bigcup_{n \geq 1}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} W_{i,n} \tag{5.24}$$

$$h : H \to \mathbb{R}^+ \text{ es continua} \tag{5.25}$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $N \geq 1$ (independiente de $x \in H$) tal que:

$$e^{-\epsilon} < \frac{h_n(x)}{h(x)} < e^{\epsilon} \quad \forall\ x \in \bigcup_{i=1}^{k_n} W_{i,n} \quad \forall\ n \geq N. \tag{5.26}$$

Aplicando la afirmación (5.24) del Lema de Distorsión Acotada, construimos, para cada $n \geq 1$ fijo tal que $f^n(W_0) \cap B \neq \emptyset$, la siguiente medida finita I_n:

$$I_n(A) := \int d\rho_n \int_{W_{i,n}} \chi_A(x) \, \frac{h(x)}{\int_{W_{i,n}} h \, dm^u} \, dm^u(x), \quad \forall\ A \in \mathcal{A} \tag{5.27}$$

donde ρ_n es la medida definida en la igualdad (5.21). Comparando las igualdades (5.22) y (5.27), obtenemos, para todo boreliano A la siguiente igualdad:

$$\nu_n(A \cap B) = \int d\rho_n \int_{W_{i,n}} \chi_A \, \frac{h_n}{\int_{W_{i,n}} h_n \, dm^u} \, dm^u =$$

$$= \int d\rho_n \int_{W_{i,n}} \chi_A \, \frac{h_n}{h} \frac{h}{\int_{W_{i,n}} h(h_n/h) \, dm^u} \, dm^u$$

Usando la propiedad (5.26) del Lema de Distorsión Acotada, deducimos, para todo $n \geq N$ tal que $f^n(W_0) \cap B \neq \emptyset$ y para todo Boreliano A:

$$e^{-2\epsilon} I_n(A) \leq \nu_n(A \cap B) \leq e^{2\epsilon} I_n(A)$$

En conclusión:

$$e^{-2\epsilon} \int d\rho_n \int_{W_{i,n}} \chi_A(x) \, \frac{h(x)}{\int_{W_{i,n}} h \, dm^u} \, dm^u(x) \leq \nu_n(A \cap B) \leq$$

$$e^{2\epsilon} \int d\rho_n \int_{W_{i,n}} \chi_A(x) \, \frac{h(x)}{\int_{W_{i,n}} h \, dm^u} \, dm^u(x) \quad \forall\ A \in \mathcal{A} \tag{5.28}$$

Paso 4: Descomposición de Rohlin de la medida μ

Sea la medida de probabilidad μ construida en el Paso 1:

$$\mu = \lim_{i\to+\infty} \mu_{n_i}, \tag{5.29}$$

donde el límite es en la topología débil estrella, y μ_n está definida para todo $n \geq 1$ por la igualdad (5.17), como el promedio aritmético de las medidas ν_j para $j \in \{0,\dots,n-1\}$. Consideremos $n \geq N$ fijo y la partición medible $\mathcal{Q}$ de la bola B formada por las variedades inestables locales. Denotemos $B/\sim$ el espacio medible cociente de B con respecto a esa partición. Usando las desigualdades (5.28) obtenemos, para todo boreliano $A \subset M$ la siguiente ϵ-aproximación de $\mu_n(A)$

$$e^{-2\epsilon} \int_{B/\sim} d\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho_j\Big) \int_W \chi_A \frac{h}{\int_W h\, dm^u}\, dm^u(x) \leq \mu_n(A\cap B) \leq$$

$$e^{2\epsilon} \int d\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=0}^{n-1}\rho_j\Big) \int_W \chi_A \frac{h}{\int_W h\, dm^u}\, dm^u(x) \;\; \forall\, A \in \mathcal{A}, \quad \forall\, n \geq N. \tag{5.30}$$

donde, por convención, ρ_j está definida por la igualdad (5.21) si $f^j(W_0)\cap B \neq \emptyset$, y $\rho_j := 0$ en caso contrario.
Denotamos

$$\rho_n^* := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho_j. \tag{5.31}$$

Por construcción ρ_n^* es una medida finita en el espacio cociente $B/\sim$ de la bola B con respecto a la partición $\mathcal{Q}$ en subvariedades locales inestables. Por la igualdad (5.18) $\mu_n(B) > 0$ para todo n suficientemente grande (digamos $n \geq N$). Entonces, debido a las desigualdades (5.30), ρ_n^* es una medida no nula para todo $n \geq N$. Probemos que la sucesión de medidas $\{\rho_n^*\}_{n\geq N}$ está uniformemente acotada superiormente por e^{ϵ}. En efecto, por un lado la medida μ_n construida por la igualdad (5.17) es una medida de probabilidad en toda la variedad M, y por otro lado, de la desigualdad a la izquierda en (5.30), obtenemos

$$1 \geq \mu(B) \geq e^{-2\epsilon}\int_{B/\sim} d\rho_n^* = \rho^*(B/\sim).$$

El espacio de todas las medidas finitas en el espacio medible $B/\sim$ que están uniformemente acotadas por $e^{2\epsilon}$, provisto de la topología débil estrella, de secuencialmente compacto. Luego, existe una subsucesión $\{n_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (que por simplicidad seguimos denotando como n_i), tal que $\{\rho_{n_i}^*\}_i$ es convergente a una medida finita ρ^*. En resumen, hemos demostrado la existencia de una medida finita ρ^* en el espacio medible cociente $B/\sim$, tal que:

$$\rho^* = \lim_{i\to+\infty}\rho_{n_i}^* = \lim_{u\to+\infty}\frac{1}{n_i}\sum_{j=0}^{n_i-1}\rho_j, \tag{5.32}$$

donde el límite de medidas es en la topología débil estrella.
Consideremos una función real continua no negativa $\psi : M \mapsto [0,1]$. Las desigualdades (5.30) y la igualdad (5.31) implican

$$e^{-2\epsilon} \int_{B/\sim} d\rho^*_{n_i} \int_W \psi \frac{h}{\int_W h\, dm^u}\, dm^u \leq \int_B \psi\, d\mu_{n_i} \leq$$

$$e^{2\epsilon} \int_{B/\sim} d\rho^*_{n_i} \int_W \psi \frac{h}{\int_W h\, dm^u}\, dm^u \quad \forall\ n_i \geq N. \tag{5.33}$$

Aplicando la propiedad (5.25) del Lema de Distorsión Acotada, deducimos que el producto $\psi \cdot h$ es una función continua en B. Luego, como también $m^u(W^u_\delta(x))$ depende continuamente de x (porque el subespacio tangente E^u_x depende continuamente de x), deducimos que la integral a la derecha en (5.33) es un número real positivo que depende continuamente de la variedad inestable $W \in B/\sim$. Entonces, por la igualdad (5.32) y por la definición de la topología débil estrella, deducimos que:

$$\lim_{i \to +\infty} \int_{B/\sim} d\rho^*_{n_i} \int_W \psi \frac{h}{\int_W h\, dm^u}\, dm^u =$$

$$= \int_{B/\sim} d\rho^* \int_W \psi \frac{h}{\int_W h\, dm^u}\, dm^u.$$

Tomando límite en las desigualdades (5.33) y recordando (5.29), obtenemos:

$$e^{-2\epsilon} \int_{B/\sim} d\rho^* \int_W \psi \frac{h}{\int_W h\, dm^u}\, dm^u \leq \int_B \psi\, d\mu \leq$$

$$e^{2\epsilon} \int_{B/\sim} d\rho^* \int_W \psi \frac{h}{\int_W h\, dm^u}\, dm^u \tag{5.34}$$

Por linealidad, la integral de la derecha en (5.34) define un funcional lineal acotado y positivo en el espacio $C^0(M, \mathbb{R})$ de todas las funciones continuas $\psi : M \mapsto \mathbb{R}$. Luego, por el Teorema de Representación de Riesz, define una medida finita $\widetilde{\mu}$. Como las desigualdades (5.34) valen para toda $\psi \in C^0(M, [0,1]$, y la función característica χ_A de cualquier boreliano A puede aproximarse en $L^1(\mu)$ y en $L^1(\widetilde{\mu})$ por una función continua $\psi \in C^0(M, [0,1])$, obtenemos, para todo boreliano A las siguientes desigualdades:

$$e^{-2\epsilon} \int_{B/\sim} d\rho^* \int_W \chi_A \frac{h}{\int_W h\, dm^u}\, dm^u \leq \mu(A \cap B) \leq$$

$$\int_{B/\sim} d\rho^* \int_W \chi_A \frac{h}{\int_W h\, dm^u}\, dm^u. \tag{5.35}$$

Por construcción, las medidas involucradas en las desigualdades (5.35) son independientes del número $\epsilon > 0$, pero valen para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Luego, haciendo $\epsilon \to 0^+$, deducimos:

$$\mu(A \cap B) = \int_{B/\sim} d\rho^* \int_W \chi_A \frac{h}{\int_W h\, dm^u}\, dm^u \quad \forall\ A \in \mathcal{A}. \tag{5.36}$$

Dividiendo la igualdad (5.36) entre $\mu(B) > 0$, hemos encontrado la descomposición de Rohlin de la medida de probabilidad μ restringida a la bola B, con respecto a la partición $\mathcal{Q}$ de B en subvariedades inestables locales. En efecto, la medida $\widehat{\mu}$ en el espacio cociente $B/\sim$ con respecto a esa partición es $\rho^*/\mu(B)$ (es inmediato chequear que esta es una medida de probabilidad en $B/\sim$); y las medidas condicionales inestables μ^u de μ están definidas por las integrales de la derecha en la igualdad (5.36). Luego,

$$\mu^u \ll m^u$$

para $\widehat{\mu}$-casi toda variedad inestable $W \in B/\sim$. Además, la derivada de Radon-Nikodym de μ^u con respecto a m^u (la densidad) es:

$$\frac{d\mu^u}{dm^u}(x) = h.$$

Usando las propiedades (5.24) del Lema de Distorsión Acotada, $1/h$ es una función continua y acotada superiormente. Entonces

$$\frac{dm^u}{d\mu^u}(x) = \frac{1}{h},$$

lo cual implica que

$$m^u \ll \mu^u,$$

terminando de demostrar que μ es una medida de Gibbs, que sus medidas condicionales inestables μ^u son equivalentes a las medidas de Lebesgue m^u a lo largo de las variedades inestables, para μ-c.t.p., y que su función densidad inestable h es continua y estrictamente positiva. Esto completa la prueba de la Afirmación I del parágrafo §5.7.2. $\square$

Nota: Además, usando la igualdad (5.23) hemos probado que la densidad de las medidas condicionales inestables de μ a lo largo de la variedad inestable local $W^u_\delta(x_i)$, es

$$h(x) = \frac{\prod_{h=0}^{+\infty} J^u(x_i)}{\prod_{h=0}^{+\infty} J^u(x)},$$

demostrando también lo afirmado en la Observación 5.3.6.

Segunda parte de la demostración del Teorema 5.3.4
(Prueba de la Afirmación II de §5.7.2)

Ejercicio 5.7.3. Probar la Afirmación II de §5.7.2.
Sugerencia: Sea dada μ, una medida de probabilidad de Gibbs ergódica con densidad inestable continua. Hay que probar que existe un conjunto medible con μ-medida 1 y un abierto que lo contiene, tal que Lebesgue c.t.p. de ese abierto está en la cuenca de atracción estadística B de μ. Para μ-c.t.p. $x_0 \in M$, toda bola $B_\delta(x_0)$ tiene μ-medida positiva. Probemos que Lebesgue casi todo punto de $B_\delta(x_0)$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño que depende de x_0, pertenece a la cuenca B. Consideremos la densidad $h(x_0)$ de $\mu^u_{x_0}$ respecto la medida de Lebesgue inestable $m^u_{x_0}$. Cualquier función densidad es no negativa. Por definición de la función densidad inestable $h = d\mu^u/dm^u$, y por el teorema de descomposición de Rohlin, $h_{x_0} > 0$ para μ-c.t.p. $x_0 \in M$. Como por hipótesis h es continua, entonces $h_x > 0$ para todo $x \in W^u_\delta(x_0)$, si tomamos $\delta > 0$ suficientemente pequeño (dependiendo del punto x_0). Ahora podemos aplicar los mismos argumentos de la demostración del Teorema 5.3.1, usando la condición (5.9) de continuidad absoluta de la holonomía h_s a lo largo de la foliación estable, establecida en el Teorema 5.5.2 de la Teoría de Pesin. En extenso, por la construcción sugerida antes, la medida condicionada inestable μ^u a lo largo de la variedad $W^u_\delta(x_0)$ tiene densidad estrictamente positiva. Entonces es equivalente a la medida de Lebesgue m^u en esa variedad inestable local. Usar esta propiedad, y la ergodicidad de μ para probar que m^u c.t.p. de $W^u_\delta(x_0)$ pertenece a B (i.e. μ-c.t.p. pertenece a la cuenca B, lo cual implica que μ^u c.t.p. de $W^u_\delta(x_0)$ pertenece a B debido al Teorema 5.1.7). Usar (5.9) en ambas direcciones, para deducir que la medida de Lebesgue m de $h_s{-}1(W^u_\delta(x_0) \setminus B) \subset M$ es cero. Finalmente aplicar el Teorema 5.7.1 de estructura de producto local del difeomorfismo de Anosov f, para deducir que $h_s^{-1}(W^u_\delta(x_0)) = B_\delta(x_0)$, y el mismo argumento que en la prueba del Teorema 5.3.1 para demostrar que $h_s^{-1}(B \cap W^u_\delta(x_0)) \subset B$ y concluir que m-c.t.p. de $B_\delta(x_0)$ pertenece a B. Concluimos que para μ-c.t.p. $x_0 \in M$ existe $\delta > 0$ (que puede depender de x_0) tal que m-c.t.p. de $B_\delta(x_0)$ pertenece a la cuenca de atracción estadística B de la medida de Gibbs ergódica μ. Tomando la unión de esas bolas abiertas, se obtiene un abierto que contiene al soporte de μ y tal que m-c.t.p. de ese abierto está contenido en la cuenca B.

Tercera y última parte de la demostración del Teorema 5.3.4
(Prueba de la Afirmación III de §5.7.2)

Demostración. Debido a la Afirmación I ya probada, existen medidas de Gibbs μ cuyas medidas condicionales inestables μ^u satisfacen las dos propiedades en dicha afirmación. Aplicando el Teorema 5.3.1, la parte (b) del Corolario 5.2.4, y la Definición 4.5.6, deducimos que la cuenca de atracción estadística de las componentes ergódicas de μ tienen medida de Lebesgue positiva, y estas componentes ergódicas son medidas de Gibbs ergódicas cuyas condicionales inestables satisfacen las dos propiedades de la Afirmación I. Por lo tanto, el conjunto B formado por todos los puntos que pertenecen a las cuencas de atracción estadística de medidas de Gibbs ergódicas que satisfacen esas dos propiedades, cumple

$$m(B) > 0.$$

Nota: B es medible: En efecto, , las medidas de Gibbs ergódicas son a lo sumo, una cantidad numerable, porque por el Teorema 5.3.1 y la Definición 4.5.6, sus cuencas de atracción estadística son disjuntas dos a dos y tienen medida de Lebesgue positiva. La cuenca de atracción estadística de cualquier medida de probabilidad, por su construcción dada en la Definición 4.5.1, es un conjunto medible. Luego, la unión numerable B de conjuntos medibles, es medible.
Queremos probar que $m(B) = 1$, es decir $m(C) = 0$ donde

$$C = M \setminus B.$$

Como la cuenca de atracción estadística de cualquier medida de probabilidad es invariante con f, tenemos:

$$f(B) = B, \qquad f(C) = C.$$

Tomemos $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Como $m(B) > 0$, deducimos que:

Existe una bola $B_\delta(x_0)$ tal que $m(B \cap B_\delta(x_0)) > 0$.

Afirmamos que

$$\text{A probar:} \quad \forall\, x_0 \in M, \quad m(B \cap B_\delta(x_0)) > 0 \;\Rightarrow\; m(C \cap B_\delta(x_0) = 0. \tag{5.37}$$

Primero veamos que una vez probada la afirmación (5.37), se deduce la afirmación (III). En efecto, si la variedad M fuera conexa, entonces la afirmación (III) implica que las bolas abiertas de radio δ se clasifican en dos clases disjuntas: la de aquellas bolas tales que Lebesgue-c.t.p. de ella pertenece a B, y la de aquellas bolas tales que Lebesgue c.t.p. pertenece al complemento de B, o sea a C. Como la variedad es conexa, una de las dos clases es vacía. Como existe un bola $B_\delta(x_0)$ en la primera clase, entonces la segunda clase es vacía. Esto prueba que para toda bola de radio δ, $m(C \cap B_\delta) = 0$. Luego $0 = m(C) = m(M \setminus B)$, de donde deducimos que $m(B) = 0$, concluyendo la Afirmación III, cuando la variedad M es conexa. Y si la variedad M no es conexa, como es compacta por hipótesis, tiene una cantidad finita $k \geq 2$ de componentes conexas $M_1, \ldots, M_k$. Siendo f un difeomorfismo de clase $C^{1+\alpha}$, en particular, es continuo. Entonces existe un $p \geq 1$ tal que $f^p : M_i \mapsto M_i$ para todo $1 \leq i \leq k$, y $f^p|_{M_i} \in \text{Diff}^{1+\alpha}(M_i)$. Como f es Anosov, $f^p|_{M_i}$ es Anosov, donde M_i es una variedad compacta y conexa. Por lo probado antes $m(C \cap M_i) = 0$ para todo

$1 \leq i \leq k$. Luego $m(C) = 0$, terminando de probar la Afirmación III de §5.7.2, a partir de (5.37).
Ahora solo resta demostrar (5.37). Supongamos por absurdo que

$$m(B \cap B_\delta(x_0)) > 0, \quad m(C \cap B_\delta(x_0)) > 0.$$

Denotemos

$$W_0 = W^u_\delta(x_0)$$

a la variedad inestable local por x_0 en la bola $B_\delta(x_0)$ (es decir, $W^u_\delta(x_0)$ es la componente conexa que contiene al punto x_0 de la intersección $W^u(x_0) \cap B_\delta(x_0)$).
Debido a la propiedad (5.9), establecida en el Teorema 5.5.2 de continuidad absoluta de la holonomía estable, tenemos

$$m^u(W_0 \cap B) > 0, \quad m^u(W_0 \cap C) > 0$$

donde m^u es la medida de Lebesgue inestable a lo largo de la variedad inestable local W_0. Construyamos, como en el paso 1 de la demostración de la Afirmación I en §5.7.2, las siguientes medidas de probabilidad en M. Para cualquier boreliano $A \subset M$, definimos:

$$\mu_0(A) := \frac{m^u(W_0 \cap A)}{m^u(W_0)} = \lambda \mu_{0,B}(A) + (1-\lambda)\mu_{0,C}(A),$$

donde

$$\lambda := \frac{m^u(B \cap W_0)}{m^u(W_0)}, \quad 1-\lambda := \frac{m^u(C \cap W_0)}{m^u(W_0)},$$

$$\mu_{0,B}(A) := \frac{m^u(W_0 \cap A \cap B)}{m^u(W_0 \cap B)}, \quad \frac{m^u(W_0 \cap A \cap C)}{m^u(W_0 \cap C)}.$$

$$\nu_n(A) := \mu_0(f^{-n}(A)) = \lambda \nu_{n,B}(A) + (1-\lambda)\nu_{n,C}(A),$$

donde

$$\nu_{n,B}(A) := \mu_{0,B}(f^{-n}(A)), \quad \nu_{n,C}(A) := \mu_{0,C}(f^{-n}(A)),$$

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \nu_j = \lambda \mu_{n,B} + (1-\lambda)\mu_{n,C},$$

donde

$$\mu_{n,B} := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \nu_{j,B}, \quad \mu_{n,C} := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \nu_{j,C}.$$

Tomamos una subsucesión $\{n_i\}_{i\geq 1}$ tal que las sucesiones de medidas de probabilidad $\{\mu_{n_i}\}_{i\geq 1}$, $\{\mu_{n_i,B}\}_{i\geq 1}$ y $\{\mu_{n_i,C}\}_{i\geq 1}$ son convergentes en la topología débil estrella. Es decir, existen medidas de probabilidad μ, μ_B y μ_C tales que:

$$\mu = \lim_{i\to+\infty} \mu_{n_i}, \quad \mu_B = \lim_{i\to+\infty} \mu_{n_i,B}, \quad \mu_C = \lim_{i\to+\infty} \mu_{n_i,C}.$$

Entonces:

$$\mu = \lim_{i\to+\infty} \mu_{n_i} = \lim_{i\to+\infty} \lambda\mu_{n_i,B} + (1-\lambda)\mu_{n_i,C} =$$

$$= \lambda \lim_{i\to+\infty} \mu_{n_i,B} + (1-\lambda) \lim_{i\to+\infty} \mu_{n_i,C} = \lambda\mu_B + (1-\lambda)\mu_C.$$

Luego

$$\mu_C \ll \mu.$$

Por el teorema de Descomposición Ergódica, como $\mu_C \ll \mu$, deducimos que:
Las componentes ergódicas $\mu_{C\,x}$ *de* μ_C *coinciden con las componentes ergódicas* μ_x *de* μ*, para* μ_C*-c.t.p.* $x \in M$*.*
Por lo demostrado en la Afirmación I de §5.7.2, la medida de probabilidad μ es de Gibbs y sus medidas condicionales inestables satisfacen las dos propiedades de la Afirmación I. Luego, usando las partes (b) y (d) del Corolario 5.2.4, obtenemos:
Las componentes ergódicas μ_x *de* μ *son medidas ergódicas de Gibbs y sus medidas condicionales inestables* μ^u_x *satisfacen las dos propiedades de la Afirmación* I*, para* μ*-c.t.p.* $x \in M$*.*
De las dos enunciados probados arriba, concluimos que:
Las componentes ergódicas de μ_C *con medidas ergódicas de Gibbs cuyas condicionales inestables satisfacen las dos propiedades de la Afirmación* I*, para* μ_C*-c.t.p.* $x \in M$*.*
Ahora aplicamos la Afirmación II ya probada, para deducir el siguiente resultado:
Enunciado (a) ya probado: *Lebesgue c.t.p. de un abierto* V *que contiene al soporte de* μ_C*, pertenece al conjunto* $B = M \setminus C$*.*
Pero, por construcción de la medida $\mu_C = \lim_i \mu_{n_i,C}$, si tomamos una función real continua no negativa $\psi : M \mapsto [0,1]$ soportada en V y tal que $\psi_V > 0$, se cumple:

$$0 < \int \chi_V \psi \, d\mu_C = \int \psi \, d\mu_C = \lim_{i\to+\infty} \int \psi \, d\mu_{n_i,C} =$$

$$= \lim_{i\to+\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \int \psi \, d\nu_{j,C}.$$

Entonces, existe $j \geq 1$ tal que

$$0 < \int \psi \, d\nu_{j,C} = \int \psi \circ f^{-j} \, d\mu_{0,C} = \int (\chi_V \cdot \psi) \circ f^{-j} \, d\mu_{0,C}.$$

(La última igualdad proviene de que ψ está soportada en V, es decir $\chi_V \cdot \psi = \psi$).
Por la construcción de $\mu_{0,C}$, y debido a la positividad establecida en la última desigualdad, deducimos que

$$m^u(f^{-j}(V) \cap C \cap W_0) > 0.$$

Como f es un difeomorfismo y $f^j(C) = C$, deducimos

$$m^u(V \cap C \cap f^j(W_0)) > 0. \tag{5.38}$$

Ahora tomamos una bola abierta $B_\delta(x_1) \subset V$, de radio $\delta > 0$ suficientemente pequeño, centrada en un punto $x_1 \in V \cap C \cap f^j(W_0))$ tal que

$$m^u(C \cap W^u_\delta(x_1)) > 0, \tag{5.39}$$

donde $W^u_\delta(x_1)$ es la componente conexa que contiene a x_1 de la intersección $B_\delta(x_1) \cap f^j(W^u(x_0))$, quien a su vez contiene a la componente conexa por el punto x_1 de $B_\delta(x_1) \cap f^j(W_0)$, cuya intersección con C, debido a (5.38), tiene medida de Lebesgue m^u positiva.
Aplicamos la propiedad (5.9) de continuidad absoluta de la holonomía estable $h_s : B_\delta(x_1) \mapsto W^u_\delta(x_1)$, establecida en el Teorema 5.5.2. De (5.39) deducimos

$$m(h_s^{-1}(C \cap W^u_\delta(x_1))) > 0.$$

Como $h_s^{-1}(C) \subset C$ y $h_s^{-1}(W^u_\delta(x_1)) \subset B_\delta(x_1) \subset V$, deducimos que $m(C \cap V) > 0$, lo cual contradice el enunciado (a) probado antes. Esta contradicción termina de demostrar (5.37) por absurdo, y por lo tanto, con ella termina la prueba de la Afirmación III de §5.7.2 y del Teorema 5.3.4. $\square$

Capítulo 6

Atractores estadísticos y medidas SRB-like

A lo largo de este capítulo $f : M \mapsto M$ es una transformación continua en una variedad compacta riemanniana M de dimensión finita. Denotamos con m a la medida de Lebesgue en M, re-escalada para que sea una medida de probabilidad: $m(M) = 1$ (i.e. si $0 < m(M) \neq 1$, sustituimos m por la probabilidad $m/m(M)$).
Definiremos primero atractor de Milnor. Este no es en general un atractor estadístico. Sin embargo, la demostración de su existencia es prácticamente la misma que la demostración de existencia de atractores estadísticos, que veremos en la sección siguiente.

6.1. Atractores de Milnor

Definición 6.1.1. Atractor de Milnor [**58**] Se llama *atractor de Milnor* a un conjunto compacto no vacío $K \subset M$, invariante por f (i.e. $f^{-1}(K) = K$), tal que

$$m(E_K) = 1,$$

donde el conjunto $E_K \subset M$, llamado *cuenca de atracción (topológica)* de K, está definido por

$$E_K := \{x \in M : \lim_{n \to +\infty} \operatorname{dist}(f^n(x), K) = 0\}. \tag{6.1}$$

Ejercicio 6.1.2. Probar que para cualquier conjunto compacto K no vacío, el conjunto E_K definido por la igualdad (6.1) es medible. Sugerencia: La función

$d : M \mapsto \mathbb{R}$ definida por $d(x) = \text{dist}(x, K)$ es medible, y $f : M \mapsto M$ es medible porque es continua. El límite superior de una sucesión de funciones medibles es medible.

Ejercicio 6.1.3. Sean $K \subset K'$ dos atractores de Milnor. Probar que $E_K \subset E_{K'}$.

En la Definición 6.1.1 observamos que para un atractor de Milnor, el criterio de observabilidad de su cuenca es el criterio Lebesgue-medible (cf. Observación 4.4.6), mientras que el tipo de atracción es topológica (cf. Definiciones 4.4.7 y 4.4.8).
Es inmediato chequear que todo atractor topológico es de Milnor. Sin embargo, no todo atractor de Milnor es topológico, como veremos en los Ejemplos 6.1.7 y 6.1.9.
También es inmediato chequear que todo atractor ergódico es de Milnor. Pero no todo atractor de Milnor es ergódico, como muestra el Ejemplo 4.4.11, en que toda la esfera S^2 es un atractor topológico, y por lo tanto un atractor de Milnor, pero no existen atractores ergódicos.

Definición 6.1.4. α-obs. minimalidad de un atractor de Milnor [20] Sea dado un número real $0 < \alpha \leq 1$. Un atractor de Milnor K se dice *α-observable* (escribimos "*K es α-obs*".) si su cuenca E_K de atracción (topológica) cumple

$$m(E_K) \geq \alpha.$$

Un atractor K de Milnor α-obs. se dice *α-obs. minimal* si no contiene subconjuntos compactos propios no vacíos que sean atractores de Milnor α-obs. para el mismo valor de α.
En particular, cuando $\alpha = 1$, tenemos definidos los atractores de Milnor 1-observables y 1-observables minimales.
Se observa que todo atractor de Milnor 1-observable es α-observable para cualquier $0 < \alpha \leq 1$. Pero un atractor de Milnor 1-obs. minimal no tiene por qué ser α-obs. minimal para todo $0 < \alpha < 1$ (ver Ejemplos 6.1.7 y 6.1.9).

Teorema 6.1.5. Existencia de atractores de Milnor
Sea $f : M \mapsto M$ continua en una variedad compacta y riemanniana M, de dimensión finita. Sea $0 < \alpha \leq 1$ dado. Entonces existen atractores de Milnor α-obs. minimales para f. Además, si $\alpha = 1$, el atractor de Milnor 1-obs. minimal es único.

La prueba del Teorema 6.1.5, en una versión más restringida que enuncia solo la existencia y unicidad del atractor de Milnor 1-observable minimal, fue dada primeramente en ([58]). En el apéndice de [20] se define α-obs. minimalidad de atractores de Milnor para $0 < \alpha \leq 1$, y se observa que la demostración de existencia de atractor de Milnor dada en ([58]) puede aplicarse, con una inmediata adaptación, para probar la existencia de atractores de Milnor α-obs. minimales, para cualquier $0 < \alpha \leq 1$.

Demostración. del Teorema 6.1.5: Sea $\aleph_\alpha$ la familia de los atractores de Milnor α-obs. (no necesariamente minimales). Esta familia no es vacía pues, trivialmente, M es un atractor de Milnor 1-obs. En $\aleph_\alpha$ consideramos la relación de orden parcial $K_1 \subset K_2$. Entonces, las cuencas de atracción topológica E_{K_1} y E_{K_2} cumplen

$$E_{K_1} \subset E_{K_2}, \quad \alpha \leq m(E_{K_1}) \leq m(E_{K_2}).$$

Sea en $\aleph_\alpha$ una cadena $\{K_i\}_{i\in I}$ (no necesariamente numerable). Es decir, $\{K_i\}_{i\in I}$ es un subconjunto totalmente ordenado de $\aleph_\alpha$, con la relación de orden $\subset$.
Probemos que:
Afirmación (i) (A probar) *Existe en* $\aleph_\alpha$ *un elemento* K *minimal de la cadena* $\{K_i\}_{i\in I}$. Es decir, probemos que existe $K \in \aleph_\alpha,\ K \subset K_i$ para todo $i \in I$.
En efecto, el conjunto $K = \bigcap_{i\in I} K_i$ es compacto no vacío, porque cualquier subcolección finita $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_l$ de la cadena dada $\{K_i\}_{i\in I}$, tiene intersección K_1 que es un compacto no vacío. Para probar que $K \in \aleph_\alpha$, debemos probar ahora que $m(E_K) \geq \alpha$. Sea $j \in \mathbb{N}^+$ y sea $V_j \supset K$ el abierto formado por todos los puntos de M que distan de K menos que $1/j$. Afirmamos que existe

$$K_{i_j} \subset V_j \text{ para algún } i_j \in I. \tag{6.2}$$

Por absurdo, supongamos que para cierto $j \in \mathbb{N}^+$ fijo, para todo $i \in I$, el compacto $K_i \setminus V_j)$ es no vacío. Luego, como $\{K_i\}_{i\in\aleph}$ es totalmente ordenado con la relación de orden $\subset$, obtenemos que la familia de compactos $\{K_i \setminus V_j\}_{i\in I}$ es totalmente ordenada. Argumentando como hicimos más arriba, pero con esta nueva familia totalmente ordenada de compactos, en vez de con la familia $\{K_i\}_{i\in I}$, deducimos que el siguiente compacto es no vacío

$$\bigcap_{i\in I}(K_i \setminus V_j) = \Big(\bigcap_{i\in I} K_i\Big) \setminus V_j = K \setminus V_j,$$

contradiciendo que $K \subset V_j$. Hemos probado la afirmación (6.2).
Como todo punto $x \in E_{K_{i_j}}$ cumple $\lim_n \operatorname{dist}(f^n(x), K_{i_j}) = 0$, entonces $f^n(x) \in V_j$ para todo n suficientemente grande (que depende del punto x). Este argumento vale para cualquier $j \in \mathbb{N}^+$. Concluimos que todo punto en $\bigcap_{j\in\mathbb{N}^+} E_{K_{i_j}}$ pertenece a E_K. Recíprocamente, todo punto de E_K, por definición de la cuenca de atracción topológica, está contenido en E_{K_i} para todo $i \in I$ (porque $K \subset K_i$). En particular, esta afirmación se satisface para i_j, para todo $j \in \mathbb{N}^+$.
Luego:

$$E_K := \bigcap_{j\in\mathcal{N}^+} E_{K_{i_j}}.$$

Como la colección numerable $E_{K_{i_j}}$ está totalmente ordenada, obtenemos

$$m(E_K) = m(\bigcap_{j\in\mathbb{N}^+} E_{K_{i_j}}) = \lim_{j\to+\infty} m(E_{K_{i_j}}) \geq \alpha,$$

terminando de demostrar la afirmación (i).
De la afirmación (i) se deduce que para toda cadena en $\aleph_\alpha$ existe algún elemento $K \in \aleph_\alpha$ minimal de la cadena. Aplicando el Lema de Zorn, existen en $\aleph_\alpha$ elementos minimales de $\aleph_\alpha$. Es decir, existe $K \in \aleph_\alpha$ que no contiene subconjuntos propios que pertenezcan a $\aleph_\alpha$. Esto es, existe K atractor de Milnor α-obs. minimal.
Ahora probemos la unicidad del atractor de Milnor 1-obs. minimal. Si existieran dos atractores de Milnor K_1 y K_2 que fueran 1-obs. minimales, entonces la intersección E de sus cuencas de atracción topológica $E := E_{K_1} \cap E_{K_2}$ cumple

$$m(E) = 1,$$

porque $m(E_{K_1}) = m(E_{K_2}) = 1$. Todo punto $x \in E$ verifica, por la definición de la cuenca E_{K_1} y E_{K_2}, la siguiente propiedad:
Para todo $\epsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que

$$\text{dist}(f^n(x), K_1), \;\; \text{dist}(f_n(x), K_2) < \epsilon \;\; \forall\; n \geq N$$

Luego $\text{dist}(K_1, K_2) < 2\epsilon \;\; \forall\; \epsilon > 0$, de donde $K := K_1 \bigcap K_2 \neq \emptyset$. Es estándar chequear que, siendo K_1 y K_2 compactos no vacíos con intersección no vacía, si un punto x cumple

$$\lim_{n\to+\infty} \text{dist}(f^n(x), K_1) = \lim_{n\to+\infty} \text{dist}(f^n(x), K_1) = 0,$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \text{dist}(f^n(x), K_1 \cap K_2) = 0.$$

(Chequear esta última afirmación en la parte (a) del Ejercicio 6.1.6.) Luego

$$E = E_{K_1} \bigcap E_{K_2} \subset E_{K_1 \cap K_2}$$

y como $m(E) = 1$, deducimos que $m(E_{K_1\cap K_2}) = 1$. Entonces $K_1 \cap K_2$ es un atractor de Milnor 1-obs. Como K_1 y K_2 eran atractores de Milnor 1-obs. minimales, concluimos que $K_1 \cap K_2 = K_1 = K_2$, terminando de demostrar la unicidad del atractor de Milnor 1-obs. minimal, y el Teorema 6.1.5. □

Ejercicio 6.1.6. **(a)** Demostrar que si K_1 y K_2 son compactos no vacíos, y si existe una sucesión de puntos $x_n \in M$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \text{dist}(x_n, K_1) = \lim_{n\to+\infty} \text{dist}(x_n, K_2) = 0,$$

entonces $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ y

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{dist}(x_n, K_1 \cap K_2) = 0.$$

(b) Demostrar que si K_1 y K_2 son dos atractores de Milnor tales $m(E_{K_1} \cap E_{K_2}) > 0$, entonces $K_1 \cap K_2$ es no vacío, y es un atractor de Milnor cuya cuenca de atracción topológica es

$$E_{K_1 \cap K_2} = E_{K_1} \cap E_{K_2}.$$

Ejemplo 6.1.7. Sea $X = [0, 4\pi] \times [0, 1]$ el rectángulo compacto de ancho 4π y altura 1, con un vértice en el origen, cuyo interior está contenido en el primer cuadrante y tiene lados paralelos a los ejes. Sea en el intervalo $[0, 4\pi]$ la transformación

$$f_1(x) = 1 + x - \cos x \quad \forall\ x \in [0, 4\pi]$$

y sea en X la transformación

$$f(x, y) = (f_1(x), y/2) \quad \forall\ (x, y) \in [0, 4\pi] \times [0, 1].$$

Sea m la medida de Lebesgue en X, re-escalada para que

$$m(X) = 1.$$

Es estándar chequear (ver Ejercicio 6.1.8), que

$$K_1 := \{(2\pi, 0)\}$$

es un atractor de Milnor con cuenca de atracción topológica

$$E_{K_1} = (0, 2\pi] \times [0, 1],$$

y por lo tanto K_1 es 1/2-obs. minimal como atractor de Milnor.

$$K_2 := \{(4\pi, 0)\}$$

es otro atractor de Milnor con cuenca de atracción topológica

$$E_{K_2} = (2\pi, 4\pi] \times [0, 1],$$

y por lo tanto K_2 es también 1/2-obs. minimal como atractor de Milnor.
K_1 no es atractor topológico, porque todo entorno de K_1 contiene puntos de la cuenca de atracción topológica de K_2.
K_2 es atractor topológico.
$K_1 \cup K_2$ es el único atractor de Milnor 1-obs. minimal, y también es el único atractor α-obs, si $1/2 < \alpha \leq 1$.
K_1 y K_2 son los únicos atractores de Milnor α-obs. si $0 < \alpha \leq 1/2$ (y como contienen un solo punto cada uno, son α-obs. minimales).
$K_1 \cup K_2$ es atractor topológico, pero no es minimal como atractor topológico, pues contiene a K_2 que también es atractor topológico.

Ejercicio 6.1.8. Probar todas las afirmaciones del Ejemplo 6.1.7.

Ejemplo 6.1.9. Sea en el cuadrado $X = [0,1]^2$ la transformación

$$f(x,y) = (x, (1/2)y) \ \ \forall\ (x,y) \in [0,1]^2.$$

Es inmediato chequear que todos los puntos del segmento $[0,1]\times\{0\}$ son puntos fijos y que $\lim_{n\to+\infty} f^n(x,y) = (x,0) \ \ \forall\ (x,y) \in [0,1]^2$. Entonces, para todo $0 < \alpha \leq 1$, cualquier segmento compacto $I\times\{0\}$ tal que la longitud del intervalo compacto $I \subset [0,1]$ sea exactamente α, es un atractor de Milnor α-observable minimal. Sea $K = (I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k) \times \{0\}$ donde $I_k \subset [0,1]$ es un intervalo compacto con interior no vacío, la colección de los intervalos I_k es disjunta dos a dos y tal que la suma de las longitudes de los I_k es exactamente α. Entonces, K también es un atractor de Milnor α-obs. minimal. Además, si $0 < \alpha < 1$ y si $I \subset [0,1]$ es un conjunto de Cantor con medida de Lebesgue igual a α (tales conjuntos de Cantor siempre existen), entonces $I \times \{0\}$ es también un atractor de Milnor α-obs. minimal. Ninguno de los atractores α-obs. minimales construidos anteriormente, si $0 < \alpha < 1$, es atractor topológico, pues las cuencas de atracción topológica no contienen ningún entorno del atractor. El único atractor 1-observable minimal es el intervalo $[0,1] \times \{0\}$, que sí es atractor topológico.

6.2. Atractores estadísticos o de Ilyashenko

En esta sección, al igual que en la anterior, $f : M \mapsto M$ es una transformación continua en una variedad compacta riemanniana M de dimensión finita. Denotamos con m a la medida de Lebesgue en M, re-escalada para que sea una medida de probabilidad: $m(M) = 1$, i.e. si $0 < m(M) \neq 1$, sustituimos m por la probabilidad $m/m(M)$.

Definición 6.2.1. Atractor estadístico o de Ilyashenko [36], [32] Se llama *atractor estadístico o de Ilyashenko* a un conjunto compacto no vacío $K \subset M$, invariante por f (i.e. $f^{-1}(K) = K$), tal que

$$m(A_K) = 1,$$

donde el conjunto $A_K \subset M$, llamado *cuenca de atracción estadística* de K, está definido por

$$A_K := \{x \in M : \ \ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{j} \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{dist}(f^j(x), K) = 0\}. \tag{6.3}$$

Ejercicio 6.2.2. Probar que para cualquier conjunto compacto K no vacío, el conjunto A_K definido por la igualdad (6.1) es medible. Sugerencia: La misma que para el Ejercicio 6.1.2.

Ejercicio 6.2.3. Sean $K \subset K'$ dos atractores estadísticos. Probar que $A_K \subset A_{K'}$.

Es estándar chequear que todo atractor de Milnor (y en particular todo atractor topológico y todo atractor ergódico) es estadístico o de Ilyashenko (Ejercicio 6.2.4). Sin embargo, no todo atractor estadístico es de Milnor, como veremos en el Ejemplo 6.5.3. Además, no todo atractor estadístico es ergódico, como muestran los Ejemplos 4.4.11 y 6.1.9.

Ejercicio 6.2.4. (a) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales que converge a $a \in \mathbb{R}$. Probar que la sucesión de promedios $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j$ converge a a.
(b) Probar que todo atractor de Milnor K es atractor estadístico o de Ilyashenko. Sugerencia: probar, usando la parte (a), que la cuenca de atracción topológica de K está contenida en la cuenca de atracción estadística de K.
(c) Probar que en los Ejemplos 4.4.11 y 6.1.9, los atractores de Milnor K (que por la Parte (b) son también atractores estadísticos) no son atractores ergódicos. Sugerencia: el único atractor de Milnor K que cumple la condición (4.4) de la Definición 4.4.2 de atractor ergódico, no cumple la condición (4.5) de esa definición.
(d) Probar que en el Ejemplo 6.1.7, los atractores de Milnor K (que por la parte (b) también son atractores estadísticos) no son atractores ergódicos, aunque para dos de ellos se cumple la condición (4.5) de la Definición 4.4.2 de atractor ergódico.

6.3. Atracción estadística de un compacto

En la Definición 6.2.1 observamos que para un atractor estadístico, el criterio de observabilidad de su cuenca es el criterio Lebesgue-medible (cf. Observación 4.4.6), mientras que la atracción es estadística (cf. Definiciones 4.4.7 y 4.4.8). En efecto:

Proposición 6.3.1. Caracterización de la atracción estadística
Sea K un atractor estadístico o de Ilyashenko, y sea A_K su cuenca de atracción estadística. Entonces, para todo $x \in M$ se cumple $x \in A_K$ si y solo si toda medida de probabilidad μ que sea límite de alguna subsucesión convergente en la topología débil estrella de las probabilidades empíricas $\sigma_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)}$ (cf. Definición 4.5.2), *cumple*

$$\mu(K) = 1.$$

Demostración. Demostración del "solo si": Sea $x \in A_K$ y sea

$$\mu = \lim_{i\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f_j(x)},$$

para una cierta subsucesión $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de los naturales tal que ese límite μ existe en la topología débil estrella del espacio de probabilidades. Debemos probar que $\mu(K) = 1$.
Por la definición de la topología débil estrella, para toda función continua $\psi : M \mapsto \mathbb{R}$ se cumple

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \psi \circ f^j(x) = \int \psi \, d\mu.$$

En particular, la igualdad anterior se cumple para la función continua

$$\psi(x) := \operatorname{dist}(x, K).$$

Por la Definición 6.2.1, como $x \in A_K$, existe $n \geq 0$ tal que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{dist}(f^j(x), K) < \epsilon$$

En particular, para $n = n_i$ para todo i suficientemente grande, tenemos:

$$\frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \psi(f^j(x)) \geq \epsilon$$

De las igualdades anteriores, deducimos que $\int \psi \, d\mu = 0$, es decir

$$\int \operatorname{dist}(x, K) \, d\mu = 0$$

y como $\operatorname{dist}(\cdot, K)$ es una función no negativa, deducimos que $\operatorname{dist}(x, K) = 0$ para μ-c.t.p. $x \in M$. Como K es compacto, deducimos que $x \in K$ para μ-c.t.p. $x \in M$, luego

$$\mu(K) = \int \chi_K(x) \, d\mu = \int 1 \, d\mu = 1,$$

como queríamos probar.
Demostración del "si": Sea dado $x \in M$ tal que toda medida μ de probabilidad que sea el límite débil estrella de una subsucesión convergente de las probabilidades empíricas $\sigma_n(x)$, está soportada en K. Tenemos que probar que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{dist}(f^j(x), K) = 0$. Sea una subsucesión n_i tal que existe el límite

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} \operatorname{dist}(f^j(x), K) = a.$$

No es restrictivo suponer que la subsucesión $\sigma_{n_i}(x)$ es convergente (en caso contrario, reemplazamos $\{n_i\}$ por una subsucesión adecuada de ella). Entonces, llamando μ al límite de σ_{n_i}, e integrando la función continua $\psi = \text{dist}(\cdot, K)$ obtenemos:

$$a = \lim_{i \to +\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i - 1} \text{dist}(f^j(x), K) = \lim_{i \to +\infty} \int \psi(y)\, d(\sigma_{n_i}(x))(y) =$$

$$= \int \psi\, d\mu = \int \text{dist}(y, K)\, d\mu(y). \tag{6.4}$$

Pero la última integral en (6.4) es igual a cero, pues de la hipótesis $\mu(K) = 1$ deducimos que $y \in K$ para μ-c.t.p. Luego $\text{dist}(y, K) = 0$ para μ-c.t.p. $y \in M$. Entonces, la igualdad (6.4) implica que
$\lim_n \frac{1}{n} \text{dist} \sum_{j=0}^{n-1} (f^j(x), K) = 0$ (pues el límite de cualquier subsucesión convergente es $a = 0$). Entonces $x \in A_K$, terminando de demostrar la Proposición 6.3.1. $\square$

Definición 6.3.2. Sea μ una medida de probabilidad en los borelianos de M. Se llama *soporte compacto de* μ al mínimo compacto $K \subset M$ tal que $\mu(K) = 1$. El soporte compacto existe, debido al Lema de Zorn y a la propiedad de que cualquier familia de compactos tiene intersección no vacía si las intersecciones de todas las subfamilias finitas son no vacías. El soporte compacto de μ es único, pues si existieran dos diferentes K_1 y K_2, entonces $\mu(K_1 \cap K_2) = 1$ y ni K_1 ni K_2 tendrían la propiedad de minimalidad.

Proposición 6.3.3. Medidas SRB y atractores estadísticos
Sea $f : M \mapsto M$ continua en la variedad compacta M. Si existe una medida μ que es SRB para f (cf. Definición 4.5.6), *entonces el soporte compacto K de μ es un atractor estadístico o de Ilyashenko.*

Observación 6.3.4. El recíproco de la Proposición 6.3.3 es falso. En efecto, las medidas SRB no siempre existen (cf. Ejemplos 4.4.11 y 6.1.9), pero los atractores de Ilyashenko siempre existen, como demostraremos en el Teorema 6.4.3.
A pesar de que el recíproco de la Proposición 6.3.3 es falso, se puede generalizar el enunciado de esta Proposición de forma que su recíproco es verdadero. Más precisamente, un compacto K no vacío e invariante es atractor estadístico o de Ilyashenko, si y solo sí, es el mínimo soporte compacto de una colección adecuada de medidas invariantes, que llamamos SRB-like, y que describen en forma óptima la estadística de las órbitas de un conjunto de medida de Lebesgue positivo. En efecto, en la próxima sección definiremos las medidas de probabilidad "SRB-like" o "pseudo-físicas", que incluyen a las medidas SRB o físicas (cuando éstas existen), pero también pueden incluir a otras medidas de probabilidad invariantes que no son necesariamente SRB. El nuevo enunciado generalizado de la Proposición 6.3.3 utilizando las medidas SRB-like, en

lugar de las medidas SRB, y su recíproco, será establecido y demostrado en el Teorema 6.7.2.

Demostración. de la Proposición 6.3.3
Para probar que K es atractor estadístico, por la Definición 6.2.1, hay que probar que $m(A_K) > 0$, donde m denota la medida de Lebesgue y A_K denota la cuenca de atracción estadística de K definida en (6.3). Como μ es medida SRB, por la Definición 4.5.6, la cuenca de atracción estadística $B(\mu)$ de μ, dada en la Definición (4.5.1), cumple $m(B(\mu)) > 0$. Luego, basta probar que $B(\mu) \subset A_K$. Sea $x \in B(\mu)$. Entonces, por la Definición 4.5.1, para cualquier función continua $\psi : M \mapsto \mathbb{R}$ se cumple:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j(x) = \int \psi \, d\mu.$$

En particular si tomamos $\psi(x) = \mathrm{dist}(x, K)$ tenemos:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{dist}(f^j(x), K) = \int \mathrm{dist}(y, K) \, d\mu$$

Para concluir que $x \in A_K$ basta probar que la integral en la igualdad anterior es cero, y para ello basta chequear que $\mathrm{dist}(y, K) = 0$ para μ-c.t.p. $y \in M$. En efecto, μ-c.t.p. $y \in M$ pertenece a K porque $\mu(K) = 1$. Luego, hemos probado que $x \in A_K$ para todo $x \in B(\mu)$, y por lo tanto $m(A_K) \geq m(B(\mu)) > 0$, y K es un atractor de Ilyashenko. □

Definición 6.3.5. Tiempo medio de estadía Sea $V \subset M$ un conjunto medible no vacío. Sea $x \in M$ cualquiera. Llamamos *frecuencia de visitas a* V de la órbita por x hasta tiempo n, al siguiente número $\sigma_{n,x}(V)$ (cf. (4.7) en la Definición 4.5.2 de las probabilidades empíricas $\sigma_{n,x}$):

$$\sigma_{n,x}(V) := \int \chi_V \, d\sigma_{n,x} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_V(f^j(x)) =$$

$$= \frac{\#\{0 \leq j \leq n-1 \colon f^j(x) \in V\}}{n}, \tag{6.5}$$

donde χ_V denota la función característica de V y $\#A$ denota cantidad de elementos de un conjunto finito A.
El último término de la igualdad (6.5) indica que el tiempo medio de estadía en V de la órbita por x hasta tiempo n es la cantidad relativa de iterados del punto x que caen dentro del conjunto V. Por el teorema ergódico de Birkhoff, si μ es una medida invariante, entonces para μ-c.t.p. $x \in M$ el tiempo medio

de estadía en V de la órbita por x hasta tiempo n, converge cuando $n \to +\infty$, a $\widetilde{\chi}_V$, cuyo valor esperado $\int \widetilde{\chi}_V \, d\mu$ es igual a $\mu(V)$. Además si la medida μ es ergódica, el tiempo medio de estadía en V tiende a $\mu(V)$ para μ-c.t.p. $x \in M$. Sin embargo, el enunciado del Teorema de Birkhoff y las propiedades de las medidas invariantes ergódicas, no nos serán útiles a los propósitos en esta sección. Nos interesa considerar el tiempo medio de estadía en V para Lebesgue c.t.p., aunque la medida de Lebesgue no sea invariante con f, y aunque los puntos considerados x no pertenezcan al soporte de ninguna medida invariante μ.

Proposición 6.3.6. *.*
Caracterización de atracción estadística por el tiempo medio de estadía en un entorno
Sea K un compacto no vacío invariante con f. Para todo $\epsilon > 0$ denotamos con $V(\epsilon)$ al conjunto de puntos en la variedad M que distan de K menos que ϵ.
Entonces, la cuenca de atracción estadística A_K del conjunto K(definida en la igualdad (6.3) de la definición 6.2.1) *está caracterizada por la siguiente igualdad:*

$$A_K = \bigcap_{\epsilon > 0} \{x \in M : \lim_{n \to +\infty} \sigma_{n,x}(V(\epsilon)) \ = \ 1\}. \tag{6.6}$$

Notas: La igualdad (6.6) implica que $x \in A_K$ si y solo si, cuando n es suficientemente grande, la probabilidad (la frecuencia relativa) del suceso de encontrar al iterado $f^j(x)$, para algún $0 \leq j \leq n-1$, en un entorno $V(\epsilon)$ dado fijo arbitrariamente pequeño del atractor de Ilyashenko K, es 1. Sin embargo, la atracción de la órbita por x al conjunto K, no es necesariamente atracción topológica. Para ser atracción topológica, debe cumplirse con total certeza (no solo con probabilidad cercana a 1, ni tampoco solo con probabilidad 1) el suceso de encontrar al iterado $f^j(x)$ en el entorno $V(\epsilon)$, para todo j suficientemente grande.
La igualdad (6.6) da por lo tanto, la siguiente interpretación intuitiva del significado de la atracción estadística a un atractor de Ilyashenko K. Las órbitas en su cuenca de atracción estadística A_K se acercan al conjunto K tanto como se desee cuando el iterado n tiende a infinito, pero se admite que existan iterados excepcionales, con una frecuencia relativa despreciable para n arbitrariamente grande, en que la órbita "se toma una excursión relativamente muy breve (de vacaciones)" alejándose del atractor K durante la excursión (ver Ejemplo 6.5.3).

Demostración. de la Proposición 6.3.6: **(i)** Probemos que si $x \in A_K$ entonces $\lim_{n \to +\infty} \sigma_{n,x}(V(\epsilon))$ para todo $\epsilon > 0$. Fijemos $\epsilon > 0$. Por simplicidad, escribimos V en lugar de $V(\epsilon)$, ya que ϵ está fijo. Tenemos:

$$\epsilon \cdot \chi_{M \setminus V}(y) \leq \operatorname{dist}(y, K) \ \ \forall \ y \in M,$$

pues, cuando $y \in V$ el término de la izquierda es cero, y cuando $y \notin V$, el término de la izquierda es $\epsilon \leq \text{dist}(y, K)$. Entonces:

$$0 \leq \epsilon \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \chi_V(f^j(x)) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \text{dist}(f^j(x), K).$$

Como $x \in A_K$ por hipótesis, el límite cuando $n \to +\infty$ del término a la derecha en la desigualdad anterior, es cero. Concluimos que

$$0 = \epsilon \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \chi_V(f^j(x)) = \epsilon \cdot \lim_{n\to+\infty} \Big(1 - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_V(f^j(x))\Big) =$$

$$= \epsilon \cdot \lim_{n\to+\infty} \sigma_{n,x}(V).$$

Como $\epsilon > 0$, concluimos que $\lim_{n\to+\infty} \sigma_{n,x}(V) = 0$, como queríamos demostrar.
(ii) Probemos que si $\lim_{n\to+\infty} \sigma_{n,x}(V(\epsilon))$ para todo $\epsilon > 0$ entonces $x \in A_K$. Fijemos $\epsilon > 0$ y por simplicidad denotemos $V = V(\epsilon)$. Sea

$$D := \text{diam}(M) = \max\{\text{dist}(x, y) \colon x, y \in M\} > 0.$$

Luego:

$$\text{dist}(y, K) \leq D \cdot \chi_{M\setminus V}(y) \quad \forall\, y \notin V,$$
$$\text{dist}(y, K) < \epsilon \cdot \chi_V(y) \quad \forall\, y \in V.$$

Entonces

$$\text{dist}(y, K) \leq \epsilon \cdot \chi_V(y) + D \cdot \chi_{M\setminus V}(y) \quad \forall\, y \in M.$$

Consideramos x que satisface las hipótesis. De la última desigualdad obtenemos:

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \text{dist}(f^j(x), K) \leq \epsilon \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_V(f^j(x)) + D \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{M\setminus V}(f^j(x)) =$$

$$= \epsilon \cdot \sigma_{n,x}(V) + D \cdot (1 - \sigma_{n,x}(V)).$$

Por hipótesis $\lim_{n\to+\infty} \sigma_{n,x}(V) = 1$. Como los números reales positivos ϵ y D están fijos (son independientes de n), deducimos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \text{dist}(f^j(x), K) = 0,$$

La última igualdad significa, debido a la condición (6.3) de la Definición 6.2.1, que $x \in A_K$ como queríamos demostrar. $\square$

6.4. Existencia de atractores de Ilyashenko

Definición 6.4.1. .
α-obs. minimalidad de un atractor estadístico [20]
Sea dado un número real $0 < \alpha \leq 1$. Un atractor estadístico o de Ilyashenko K se dice *α-observable* (escribimos "*K es α-obs*".) si su cuenca A_K de atracción estadística cumple

$$m(A_K) \geq \alpha.$$

Un atractor K estadístico o de Ilyashenko α-obs. se dice *α-obs. minimal* si no contiene subconjuntos compactos propios no vacíos que sean atractores estadísticos o de Ilyashenko α-obs. para el mismo valor de α.
En particular, cuando $\alpha = 1$, tenemos definidos los atractores estadísticos o de Ilyashenko 1-observables y 1-observables minimales.
Se observa que todo atractor estadístico o de Ilyashenko 1-observable es α-observable para cualquier $0 < \alpha \leq 1$. Pero un atractor estadístico o de Ilyashenko 1-obs. minimal no tiene por qué ser α-obs. minimal para todo $0 < \alpha < 1$.

Observación 6.4.2. Sobre conjuntos minimales
Recordemos la caracterización de los conjuntos minimales desde el punto de vista topológico, dada en la Definición 2.3.3: un conjunto K compacto, no vacío y f-invariante es minimal para f, desde el punto de vista topológico, si no contiene subconjuntos propios compactos no vacíos que sean invariantes por f hacia el futuro.
Observamos que no todo compacto K minimal para f desde el punto de vista topológico es un atractor de Ilyshenko α-obs. minimal para algún $0 \leq \alpha \leq 1$ (ver Ejemplo 6.5.3 o también [44]).
Recíprocamente, no todo atractor de Ilyshenko α-obs. minimal es necesariamente un compacto minimal para f desde el punto de vista topológico (ver Ejemplo 6.5.1).
En [32] y [44] se estudian relaciones entre minimalidad para f desde el punto de vista topológico y los atractores estadísticos o de Ilyashenko de f.

Teorema 6.4.3. Existencia de atractores de Ilyashenko
Sea $f : M \mapsto M$ continua en una variedad compacta y riemanniana M, de dimensión finita. Sea $0 < \alpha \leq 1$ dado. Entonces existen atractores estadísticos o de Ilyashenko α-obs. minimales para f. Además, si $\alpha = 1$, el atractor de Ilyashenko 1-obs. minimal es único.

La prueba del Teorema 6.4.3 sigue los mismos argumentos de la prueba del Teorema 6.1.5 de existencia de atractores de Milnor, con leves adaptaciones.

Demostración. Sea $\aleph_\alpha$ la familia de los atractores de Ilyashenko α-obs. (no necesariamente minimales). Esta familia no es vacía pues, trivialmente, M es un atractor de Ilyashenko 1-obs, y por lo tanto es α-obs. para cualquier $0 < \alpha \leq 1$.

En $\aleph_\alpha$ consideramos la relación de orden parcial $K_1 \subset K_2$. De la condición (6.3), teniendo en cuenta que $\text{dist}(y, K_2) \leq \text{dist}(y, K_1)$ para todo $y \in M$, las cuencas de atracción estadística A_{K_1} y A_{K_2} cumplen

$$A_{K_1} \subset A_{K_2}, \quad \alpha \leq m(A_{K_1}) \leq m(A_{K_2}).$$

Sea en $\aleph_\alpha$ una cadena $\{K_i\}_{i\in I}$ (no necesariamente numerable). Es decir, $\{K_i\}_{i\in I}$ es un subconjunto totalmente ordenado de $\aleph_\alpha$, con la relación de orden $\subset$.
Probemos que:
Afirmación (i) (A probar) *Existe en $\aleph_\alpha$ un elemento K minimal de la cadena* $\{K_i\}_{i\in I}$. Es decir, probemos que existe $K \in \aleph_\alpha,\ K \subset K_i$ para todo $i \in I$.
En efecto, el conjunto $K = \bigcap_{i\in I} K_i$ es compacto no vacío, porque cualquier subcolección finita $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_l$ de la cadena dada $\{K_i\}_{i\in I}$, tiene intersección K_1 que es un compacto no vacío. Para probar que $K \in \aleph_\alpha$, debemos probar ahora que $m(A_K) \geq \alpha$. Sea $j \in \mathbb{N}^+$ y sea $V_j \supset K$ el abierto formado por todos los puntos de M que distan de K menos que $1/j$. En la prueba del Teorema 6.1.5 demostramos la afirmación (6.2):

$$K_{i_j} \subset V_j \text{ para algún } i_j \in I.$$

Como todo punto $x \in A_{K_{i_j}}$ se cumple $\text{lím}_n\, \sigma_{n,x}(V_j) = 0$ (cf. Proposición 6.3.6), y este argumento vale para todo $j \in \mathbb{N}^+$, entonces todo punto en $\bigcap_{j\in\mathbb{N}^+} A_{K_{i_j}}$ pertenece a A_K. Recíprocamente, todo punto de A_K está contenido en A_{K_i} para todo $i \in I$ (porque $K \subset K_i$). En particular esta afirmación se satisface para i_j, para todo $j \in \mathbb{N}^+$. Luego:

$$A_K := \bigcap_{j\in\mathcal{N}^+} A_{K_{i_j}}.$$

Como la colección numerable $A_{K_{i_j}}$ está totalmente ordenada, obtenemos

$$m(A_K) = m\Big(\bigcap_{j\in\mathbb{N}^+} A_{K_{i_j}}\Big) = \lim_{j\to+\infty} m(A_{K_{i_j}}) \geq \alpha,$$

terminando de demostrar la afirmación (i).
De la afirmación (i) se deduce que para toda cadena en $\aleph_\alpha$ existe algún elemento $K \in \aleph_\alpha$ minimal de la cadena. Debido al Lema de Zorn, existen en $\aleph_\alpha$ elementos minimales de $\aleph_\alpha$. Es decir, existe $K \in \aleph_\alpha$ que no contiene subconjuntos propios que pertenezcan a $\aleph_\alpha$. Esto es, existe K atractor de Ilyashenko α-obs. minimal.
Ahora probemos la unicidad del atractor de Ilyashenko 1-obs. minimal. Si existieran dos atractores de Ilyashenko K_1 y K_2 que fueran 1-obs. minimales, entonces la intersección A de sus cuencas de atracción estadística $A := A_{K_1} \cap A_{K_2}$ cumple

$$m(A) = 1,$$

porque $m(A_{K_1}) = m(A_{K_2}) = 1$. Todo punto $x \in A$ verifica, por la Proposición 6.3.6 que caracteriza las cuencas A_{K_1} y A_{K_2}, la siguiente propiedad:
Para todo $0 < \epsilon < 1/2$ *existe* $N \geq 1$ *tal que*

$$\sigma_{n,x}(V_\epsilon(K_1)), \quad \sigma_{n,x}(V_\epsilon(K_1)) > 1 - (\epsilon/2) \ \ \forall\, n \geq N,$$

donde $V_\epsilon(K_i)$ denota el conjunto de puntos de la variedad M que distan del compacto K_i menos que ϵ, y $\sigma_{n,x}$ denota la probabilidad empírica definida en la igualdad (4.7), Definición 4.5.2.
Luego existen más de $N := n \cdot (1 - (\epsilon/2)) \geq (3/4)n$ iterados $f^j(x)$ con tiempos $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tales que $f^j(x) \in V_\epsilon(K_1)$. En efecto, si la cantidad de iterados $f^j(x)$ con tiempos $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ fuera menor o igual que N, entonces tendríamos $\sigma_{n,x}(V_\epsilon(K_1) \leq N/n = 1 - (\epsilon/2)$. Análogamente, existen más de N iterados $f^h(x)$ con tiempos $h \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tales que $f^h(x) \in V_\epsilon(K_1)$. Como la cantidad de iterados posibles con tiempos en $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ es a lo sumo n, y como $2N \geq (3/2)n > n$, deben existir algunos iterados comunes $f^j(x) = f^h(x) \in V_\epsilon(K_1) \cap V_\epsilon(K_2)$. Tomemos alguno de esos iterados comunes $f^j(x)$. Tenemos

$$\operatorname{dist}(K_1, K_2) \leq \operatorname{dist}(f^j(x), K_1) + \operatorname{dist}(f^j(x), K_2) < 2\epsilon.$$

Entonces $\operatorname{dist}(K_1, K_2) < 2\epsilon \ \ \forall\, 0 < \epsilon < 1/2$, de donde

$$K := K_1 \bigcap K_2 \neq \emptyset.$$

Aunque no es inmediato, es estándar chequear que, siendo K_1 y K_2 compactos no vacíos con intersección no vacía, si un punto x cumple

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_{n,x} V_\epsilon(K_1) = \lim_{n \to +\infty} \sigma_{n,x} V_\epsilon(K_2) = 0 \quad \forall\, \epsilon > 0,$$

entonces

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_{n,x} V_\epsilon(K_1 \cap K_2) = 0 \ \ \forall\, \epsilon > 0.$$

(Chequear esta última afirmación en la parte (a) del Ejercicio 6.4.4.) Luego

$$A := A_{K_1} \bigcap A_{K_2} \subset A_{K_1 \cap K_2}$$

y como $m(A) = 1$, deducimos que $m(A_{K_1 \cap K_2}) = 1$. Entonces $K_1 \cap K_2$ es un atractor de Ilyashenko 1-obs. Como K_1 y K_2 eran atractores de Ilyashenko 1-obs. minimales, concluimos que $K_1 \cap K_2 = K_1 = K_2$, terminando de demostrar la unicidad del atractor de Ilyashenko 1-obs. minimal, y el Teorema 6.4.3. □

Ejercicio 6.4.4. Para un conjunto compacto no vacío $K \subset M$, y para $\epsilon > 0$, denotamos $V_\epsilon(K)$ al conjunto de puntos de M que distan de K menos que ϵ.

Denotamos $\sigma_{n,x}$ las probabilidades empíricas de la órbita con estado inicial x hasta tiempo n, según la igualdad (4.7), dada por la Definición 4.5.2.
(a) Demostrar que si K_1 y K_2 son compactos no vacíos, y si existe un punto $x \in M$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_{n,x}(V_\epsilon(K_1)) = \lim_{n\to+\infty} \sigma_{n,x}(V_\epsilon(K_1)) = 0 \ \ \forall\, \epsilon > 0$$

entonces $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ y

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_{n,x}(V_\epsilon(K_1 \cap K_2)) = 0 \ \ \forall\, \epsilon > 0$$

(b) Demostrar que si K_1 y K_2 son dos atractores de Ilyashenko tales $m(A_{K_1} \cap A_{K_2}) > 0$, entonces $K_1 \cap K_2$ es no vacío, y es un atractor de Ilyashenko cuya cuenca de atracción estadística es

$$A_{K_1 \cap K_2} = A_{K_1} \cap A_{K_2}.$$

6.5. Ejemplos de atractores estadísticos

Ejemplo 6.5.1. Sea $f_0 \in \text{Diff}^{\,\infty}(\mathbb{T}^2)$ el mapa "Arnold's cat " en el toro bidimensional dado en el ejemplo de la Sección 3.1, como el automorfismo lineal hiperbólico con matriz asociada

$$\left.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right|_{\text{mód.}(1,1)}.$$

Recordando lo expuesto en la Sección 3.1: f_0 es un difeomorfismo de Anosov lineal, tiene a $(0,0)$ como punto fijo y preserva la medida de Lebesgue m (re-escalada para que $m(\mathbb{T}^2) = 1$).
Probemos que el único atractor estadístico (en particular el único atractor estadístico α-obs. minimal para cualquier $0 < \alpha \leq 1$), es $K = \mathbb{T}^2$. En efecto, en el Corolario 5.3.5 probamos que m es ergódica para f. Entonces, m-c.t.p. $x \in M$ está en la cuenca de atracción estadística $B(m)$ de m. (Recordar que una medida de probabilidad invariante μ es ergódica si y solo si $\mu(B(\mu)) = 1$).
Sea K un atractor estadístico. Por definición, su cuenca de atracción estadística A_K tiene medida de Lebesgue positiva. Luego

$$x \in B(m) \ \text{ para } m - \text{c.t.p. } x \in A_K.$$

Tomemos y dejemos fijo $x \in B(m) \cap A_K$. Como $x \in B(m)$ tenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = m,$$

en la topología débil* del espacio $\mathcal{M}$ de las probabilidades. Entonces para toda función continua ψ se cumple

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi\circ f^j(x) = \int \psi\, dm.$$

En particular si elegimos la función continua ψ definida por

$$\psi(x) = \text{dist}(x, K) \quad \forall\ x \in M,$$

se cumple

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \text{dist}(f^j(x), K) = \int \psi\, dm$$

Como $x \in A_K$, por la Definición 6.2.1, el límite de la izquierda es cero. Entonces deducimos que

$$\int \psi\, dm = 0.$$

Pero $\psi \geq 0$. Entonces su integral da cero si y solo si $\psi = 0$ para m-c.t.p. Una función continua que es cero para Lebesgue casi todo punto, es idénticamente nula. Deducimos que

$$0 = \psi(x) = \text{dist}(x, K) \quad \forall\ x \in \mathbb{T}^2.$$

Como K es compacto, $\text{dist}(x, K) = 0$ si y solo si $x \in K$. Concluimos que $x \in K$ para todo $x \in \mathbb{T}^2$, es decir $K = \mathbb{T}^2$, probando que el único atractor de Ilyashenko en este ejemplo es todo el toro.
Entonces el conjunto $K_0 := \{(0, 0)\}$ no es atractor de Ilyashenko. Pero K_0 es minimal para f desde el punto de vista topológico porque $(0, 0)$ es un punto fijo por f (i.e. K_0 es compacto no vacío, f-invariante, y no contiene subconjuntos propios con esas tres propiedades). Luego, en este ejemplo, hay un minimal (desde el punto de vista topológico) que no es atractor de Ilyashenko. Más aún, ningún minimal desde el punto de vista topológico puede ser atractor de Ilyashenko. En efecto, más arriba probamos que el único atractor estadístico es todo el toro. Pero todo el toro no es minimal desde el punto de vista topológico, pues contiene propiamente a $\{(0, 0)\}$ que es f-invariante.

Observación 6.5.2. La demostración que hicimos en el Ejemplo 6.5.1 de existencia de atractores de Ilyashenko α-obs. minimales que no son minimales desde el punto de vista topológico, se basó en el uso del Corolario 5.3.5, que a su vez se obtiene de la Teoría de Pesin y de la Teoría de medidas SRB para difeomorfismos de clase $C^{1+\alpha}$. Más precisamente, el argumento que utilizamos en el

Ejemplo 6.5.1, pasó por deducir la convergencia de la sucesión de probabilidades empíricas

$$\sigma_{n,x} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)}$$

para m-c.t.p. x en la cuenca de atracción estadística A_K del atractor de Ilyashenko K. Sin embargo, en general (cuando no sean aplicables los argumentos de la Teoría de Pesin), *no es necesario que la sucesión* $\{\sigma_{n,x}\}_{n\geq 1}$ *sea convergente,* para un conjunto de medida de Lebesgue positiva contenido en la cuenca A_K de atracción estadística de K (ver por ejemplo [30]).

En la próxima sección, tendremos en cuenta la posible no convergencia de la sucesión de probabilidades empíricas para definir las medidas SRB-like (Definición 6.6.4) Finalmente, caracterizaremos a los atractores de Ilyashenko 1-obs. minimales, estudiando las medidas SRB-like. Otras relaciones entre la eventual convergencia o no convergencia de la sucesión de probabilidades empíricas, y los atractores estadísticos o de Ilyashenko se encuentran por ejemplo en [38].

Ejemplo 6.5.3. Hu-Young [35]

Sea $f_0 \in \text{Diff}^{\,\infty}(\mathbb{T}^2)$ el Anosov lineal en el toro bidimensional dado en el ejemplo de la Sección 3.1, con matriz asociada

$$\left.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right|_{\text{mód.}(1,1)}.$$

En [35] se construye una isotopía $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ de difeomorfismos $f_t \in \text{Diff}^{\,2}(\mathbb{T}^2)$ que transforma continuamente en el espacio $\text{Diff}^{\,2}(\mathbb{T}^2)$ el difeomorfismo de Anosov lineal f_0 en f_1 de modo que:

• f_t es un difeomorfismo de Anosov para todo $0 \leq t < 1$.

• $f_t(0,0) = (0,0)$ para todo $0 \leq t \leq 1$.

• f_t es conjugado a f_0 para todo $0 \leq t \leq 1$, es decir existe un homeomorfismo $h_t : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{T}^2$ tal que

$$f_t \circ h_t = h_t \circ f_0.$$

• Para $t = 1$ la derivada $df_1(0,0)$ en el punto fijo $(0,0)$ tiene matriz asociada diagonalizable, con un valor propio igual a 1, y el otro positivo, pero menor estrictamente que 1. Esto implica que el punto fijo $(0,0)$ no es hiperbólico para f_1 (para el parámetro $t = 1$). Pierde hiperbolicidad en la dirección que era expansora para valores del parámetro $t < 1$, pero no la pierde en la dirección contractiva.

Además, en la construcción de [35] se imponen otras condiciones a f_1 que permiten deducir la llamada quasi-hiperbolicidad en $\mathbb{T}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

En este ejemplo construido en [35], los autores muestran que la medida $\delta_{(0,0)}$ concentrada en el origen (que es f_1-invariante porque el $(0,0)$ es punto fijo) es SRB o física para f_1 (de acuerdo a nuestra Definición 4.5.6, pero no de acuerdo con lo que los autores en [35] llaman medida SRB). Además muestran que la cuenca de atracción estadística $B(\delta_{(0,0)})$ cubre Lebesgue c.t.p. del toro $\mathbb{T}^2$. Entonces, $\delta_{(0,0)}$ es la única medida SRB o física, ya que ninguna otra medida puede tener cuenca de atracción estadística con medida de Lebesgue positiva (recordar que las cuencas de atracción estadística de medidas diferentes, por la Definición 4.5.1, son disjuntas).

Aplicando la Proposición 6.3.3, deducimos que $\{(0,0)\}$ *es el único atractor de Ilyashenko de* f_1. Por lo tanto $\{(0,0)\}$ es el único atractor de Ilyashenko α-obs. minimal para cualquier $0 < \alpha \leq 1$.

Como f_1 es conjugado a f_0 y f_0 es transitivo, entonces f_1 es transitivo. Aplicando lo probado en el Ejercicio 4.1.5, el único atractor topológico para f_1 es $\mathbb{T}^2$. Luego $\{(0,0)\}$ es un atractor estadístico o de Ilyashenko, que *no es atractor topológico.*

Por la Proposición 6.3.6, la frecuencia de visita a un entorno arbitrariamente pequeño del origen, para Lebesgue-casi toda órbita, tiende a 1, cuando el número n de iterados tiende a infinito. Sin embargo, el origen no es un atractor topológico. Es decir, no es un pozo. Por el contrario, la dinámica en un entorno del origen es localmente conjugado a la de un punto fijo hiperbólico tipo silla, pues el origen es una silla hiperbólica para $t = 0$ y f_1 es conjugado con f_0. Entonces a pesar de que la frecuencia de estadía en un entorno del origen, para Lebesgue casi toda órbita, tiende a 1, todo punto que no esté en la variedad estable local del origen, termina saliendo de ese entorno, para hacer excursiones breves alejado de él.

Concluimos: Si el experimentador de la dinámica tiene como objetivo observar la estadística de Lebesgue casi toda órbita (es decir los promedios temporales de las distancias al atractor), entonces observará que el sistema dinámico por iterados de f_1 se comporta con un punto fijo atractor, que atrae Lebesgue casi toda órbita, como si fuera un pozo.

En cambio si el experimentador de la dinámica tiene como objetivo observar la topología dinámica de Lebesgue casi toda órbita (es decir los conjuntos ω-límite a donde estas órbitas tienden al iterar hacia el futuro), entonces observará que el sistema dinámico por iterados de f_1 se comporta como el automorfismo lineal hiperbólico en el toro, en que todo el toro es el único atractor transitivo de Lebesegue casi toda órbita.

En el primer caso, el experimentador estadístico, no calificará este sistema f_1 como caótico, pues es altamente previsible, desde el punto de vista estadístico (i.e. de los promedios temporales) para Lebesgue-casi toda órbita. En el segundo caso, el experimentador topológico, lo calificará como caótico, pues le resultará imposible predecir en qué abierto del espacio estará el iterado n-ésimo para Lebesgue-casi toda órbita.

6.6. Medidas SRB-like o pseudo-físicas

En esta sección, como en las dos anteriores, M es una variedad compacta y riemanniana, de dimensión finita, y $f : M \mapsto M$ es continua (no necesariamente invertible).

Definición 6.6.1. El conjunto $p\omega$ límite de probabilidades
Sea $x \in M$, sea $\mathcal{M}$ el espacio de medidas de probabilidad de Borel en M con la topología débil estrella, y sea $\{\sigma_{n,x}\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ la sucesión de probabilidades empíricas de la órbita futura de x hasta tiempo n, definida en (4.7) y Definición 4.5.2. Como $\mathcal{M}$ es secuencialmente compacto, existen subsucesiones convergentes de $\{\sigma_{n,x}\}_{n\geq 1}$.
Llamamos *p-omega-límite* de la órbita de x, u *omega-límite en el espacio de probabilidades* de la órbita de x al conjunto $p\omega(x)$ formado por los límites de todas las subsucesiones convergentes de $\{\sigma_{n,x}\}_{n\geq 1}$. Es decir

$$p\omega(x) := \{\mu \in \mathcal{M} : \quad \exists n_i \to +\infty \text{ tal que } \lim_{i\to+\infty} \sigma_{n_i,x} = \mu\}, \tag{6.7}$$

donde el límite a la derecha es en la topología débil* del espacio $\mathcal{M}$ de probabilidades.
Es estándar chequear que, para todo $x \in M$, $p\omega(x) \subset \mathcal{M}$ es un conjunto no vacío y débil*-cerrado (y por lo tanto débil*-compacto, pues $\mathcal{M}$ es débil*-compacto)

Ejercicio 6.6.2. Probar las dos últimas afirmaciones de la Definición 6.6.1.

Recordemos la Definición 4.5.1 de cuenca de atracción estadística $B(\mu)$ de una medida de probabilidad μ, y la Definición 4.5.6 de medida SRB o física. Ahora generalizaremos esas dos definiciones, agregando una ϵ- aproximación. Para ello elegimos y dejamos fija una métrica dist^* en el espacio $\mathcal{M}$ de probabilidades, que induzca la topología débil* (cf. Teorema 1.2.6).

Definición 6.6.3. Cuenca de atracción estadística ϵ-débil
Dada una medida de probabilidad μ y dado $\epsilon > 0$, llamamos *cuenca de atracción estadística ϵ-débil* al conjunto $A_\epsilon(\mu)$ definido por:

$$A_\epsilon(\mu) := \{x \in M : \text{ dist}(p\omega(x), \mu) < \epsilon\}. \tag{6.8}$$

Comparemos esta Definición 6.6.3 con la Definición 4.5.1 de la cuenca de atracción estadística (fuerte) B_μ de una medida μ. En efecto, combinando las igualdades (6.7) y (4.6), obtenemos:

$$B(\mu) := \big\{x \in M : \quad p\omega(x) = \{\mu\}\big\}.$$

Luego

$$B(\mu) \subset A_\epsilon(\mu) \quad \forall \;\; \epsilon \geq 0. \tag{6.9}$$

En el segundo término de la Igualdad (6.8), observamos que la distancia entre el conjunto compacto $p\omega(x)$ y el punto $\mu \in \mathcal{M}$ es menor que ϵ. Pero esto no implica que todo el conjunto $p\omega(x)$ (cuando contiene más de un punto) deba estar contenido en la bola de centro μ y radio ϵ. Por lo tanto, aunque $\bigcap_{\epsilon>0} A_\epsilon(\mu)$ pueda ser no vacío, este conjunto contiene a, *pero no necesariamente coincide con* $B(\mu)$, quien aún, puede ser vacío.

Definición 6.6.4. Medida SRB-like o pseudo-física
Llamaremos a una medida de probabilidad μ *SRB-like o física* si **para todo** $\epsilon > 0$ su cuenca de atracción estadística ϵ-débil $A_\epsilon(\mu)$ tiene medida de Lebesgue positiva. En breve:

$$m(A_\epsilon(\mu)) > 0 \quad \forall\ \epsilon > 0,$$

donde m denota la medida de Lebesgue en la variedad M.

Comparando la Definición 6.6.4 con la Definición 4.5.6 de medida SRB, observamos que debido a la inclusión (6.9):

Toda medida SRB es SRB-like.

Sin embargo el recíproco es falso. En efecto, toda f continua tiene medidas SRB-like (cf. Teorema 6.6.6 que demostraremos más adelante en esta sección). Sin embargo existen ejemplos para los que no existen medidas SRB (cf. Ejemplos 4.4.11 y 6.1.9, y en el caso hiperbólico, el mapa C^1 en un disco, atribuido a Bowen y estudiado en [30]).

Ejercicio 6.6.5. .
(a) Probar que toda medida SRB-like es invariante por f.
(b) Probar que la definición de medida SRB-like no depende de la métrica elegida en el espacio $\mathcal{M}$ de probabilidades con la topología débil*.

Notación: Denotamos con $\mathcal{O}_f$ al conjunto de todas las medidas SRB-like para f. Esta notación proviene de [23], que introduce la definición de medidas SRB-like, llamándolas también *medidas observables.*

Observaciones: $\mathcal{O}_f$ está contenido en el conjunto $\mathcal{M}_f$ de medidas de probabilidad f-invariantes, pero usualmente difiere mucho de $\mathcal{M}_f$, como veremos en el Ejemplo 6.8.1 C^1 genérico. Sin embargo, en el caso C^0, y para los que llamamos *endomorfismos expansores de Misiurewicz en el círculo* S^1 (para los que no existen medidas SRB), el conjunto de medidas SRB-like coincide con el conjunto $\mathcal{M}_f$ de todas las medidas invariantes (ver [59], o también el Corolario 6.6.11 y el Ejemplo 6.8.2 más adelante en esta sección).

Algunas propiedades que distinguen a las medidas SRB-like son:
• Existen medidas SRB-like, sin necesidad de agregar hipótesis adicionales a la continuidad de f (Teorema 6.6.6).

• El conjunto de medidas SRB-like describen en forma óptima (con un mínimo posible de medidas invariantes) la estadística en el futuro de Lebesgue casi toda órbita (Teorema 6.6.7).
• El mínimo soporte compacto común de medidas SRB-like (cf. Definiciones 6.3.2 y 6.7.1) caracteriza a los atractores estadísticos o de Ilyashenko α-obs. minimales. (Teorema 6.7.2).
• Bajo hipótesis adicionales de C^1 hiperbolicidad, las medidas SRB-like, satisfacen la Fórmula (5.7) de Pesin de la Entropía (cf. Ejemplos 6.8.1 y 6.8.3), aunque en el contexto general de regularidad C^1 no necesariamente tienen propiedades de continuidad absoluta respecto a Lebesgue.

Teorema 6.6.6. Existencia de medidas SRB-like [23]
Sea $f : M \mapsto M$ continua. Entonces:
(a) *Existen medidas de probabilidad SRB-like para f.*
(b) *El conjunto $\mathcal{O}_f$ de las medidas SRB-like es débil*-compacto en el espacio de las probabilidades invariantes por f.*

Extraemos la prueba de [23]:

Demostración. **(a)** Supongamos por absurdo que $\mathcal{O}_f$ es vacío. Entonces toda probabilidad μ es no SRB-like. Es decir, μ no satisface la Definición 6.6.4. Recordamos la Definición 6.6.1 del conjunto $p\omega(x)$ (p-omega-límite de la órbita por cada punto $x \in M$). Luego, toda $\mu \in \mathcal{M}$ está contenida en un entorno abierto $B(\mu) \subset \mathcal{M}$ (con la topología débil* del espacio de probabilidades $\mathcal{M}$) tal que

$$m\Big(\{x \in M\colon\ p\omega(x) \cap B(\mu) \neq \emptyset\}\Big) = 0$$

Como $\mathcal{M}$ es débil* compacto, existe un subcubrimento finito de M

$$\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$$

tal que $B_i = B(\mu_i)$ para alguna medida de probabilidad μ_i. Luego:

$$m\Big(\{x \in M\colon\ p\omega(x) \bigcap \big(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\big) \neq \emptyset\}\Big) =$$

$$= m\Big(\bigcup_{i=1}^{k}\{x \in M\colon\ p\omega(x) \cap B_i \neq \emptyset\}\Big) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} m\Big(\{x \in M\colon\ p\omega(x) \cap B_i \neq \emptyset\}\Big) = 0.$$

Como $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \mathcal{M}$, deducimos que

$$m\Big(\{x \in M\colon\ p\omega(x) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset\}\Big) = 0.$$

Como $p\omega(x) \subset \mathcal{M}$ para todo $x \in M$, deducimos que para Lebesgue c.t.p. $x \in M$, $p\omega(x) = \emptyset$, lo cual es una contradicción porque toda sucesión de probabilidades tiene alguna subsucesión convergente.
(b) Para probar que $\mathcal{O}_f$ es débil* compacto, basta probar que es débil* cerrado (pues $\mathcal{O}_f \subset \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ es un espacio metrizable débil* compacto). Sea $\mu_n \in \mathcal{O}_f$ convergente a μ. Debemos probar que $\mu \in \mathcal{O}_f$.
Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Sea $B_\epsilon(\mu)$ la bola de centro μ y radio ϵ. Sea n tal que $\mu_n \in B_\epsilon(\mu)$ y sea $\epsilon_n > 0$ tal que la bola $B_{\epsilon_n}(\mu_n)$ de centro μ_n y radio ϵ_n satisface

$$B_{\epsilon_n}(\mu_n) \subset B_\epsilon(\mu).$$

Como $\mu_n \in \mathcal{O}_f$, por la Definición 6.6.4 de medida SRB-like, se cumple

$$m\Big(\{x \in M: \ p\omega(x) \cap B_{\epsilon_n}(\mu_n) \neq \emptyset\}\Big) > 0.$$

Como

$$\{x \in M: \ p\omega(x) \cap B_{\epsilon_n}(\mu_n) \neq \emptyset\} \ \subset \ \{x \in M: \ p\omega(x) \cap B_\epsilon(\mu) \neq \emptyset\},$$

deducimos que

$$m\Big(\{x \in M: \ p\omega(x) \cap B_\epsilon(\mu) \neq \emptyset\}\Big) > 0.$$

Siendo $\epsilon > 0$, esto prueba que μ es SRB-like, como queríamos demostrar. □

Para enunciar el siguiente teorema, recordamos la Definición 6.6.1 del conjunto $p\omega(x)$ (p-omega-límite de la órbita por el punto x). De la igualdad (6.7), observamos que $p\omega(x)$ es el mínimo conjunto de probabilidades que describen completamente la estadística (es decir los promedios temporales asintóticos) de la órbita por el punto x.

Teorema 6.6.7. .
Optimalidad estadística del conjunto de medidas SRB-like [23]
Para toda $f: M \mapsto M$ continua el conjunto $\mathcal{O}_f$ de las medidas SRB-like para f es el mínimo conjunto débil-compacto $\mathcal{K}$ del espacio de probabilidades tal que*

$$p\omega(x) \subset \mathcal{K} \ \text{ para Lebesgue-c.t.p. } x \in M.$$

Demostración. Por la parte (b) del Teorema 6.6.6, el conjunto $\mathcal{O}_f$ de todas las medidas SRB-like para f es no vacío y débil*-compacto.
Primero probemos que $p\omega(x) \subset \mathcal{O}_f$ para Lebesgue c.t.p. $x \in M$. Para $\epsilon > 0$ arbitrario, denotamos con $B_\epsilon(\mathcal{O}_f)$ al conjunto abierto de todas las probabilidades ν que distan del compacto no vacío $\mathcal{O}_f$ menos que ϵ. Consideremos el complemento

$$\mathcal{C} := \mathcal{M} \setminus B_\epsilon(\mathcal{O}_f).$$

El conjunto $\mathcal{C}$ es compacto porque es el complemento del abierto $B_\epsilon(\mathcal{O}_f)$ en el espacio compacto $\mathcal{M}$. Por construcción $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_f = \emptyset$. Luego, toda $\nu \in \mathcal{C}$ es no SRB-like. Entonces existe un entorno abierto $B(\nu)$ de ν tal que:

$$m\Big(\{x \in M : \ p\omega(x) \cap B(\nu) \neq \emptyset\}\Big) = 0.$$

Al igual que al final de la demostración de la parte (a) del Teorema 6.6.6, pero escribiendo $\mathcal{C}$ en el rol de $\mathcal{M}$, deducimos que existe un cubrimiento finito $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ de $\mathcal{C}$ tal que

$$m\Big(\{x \in M : \ p\omega(x) \bigcap (\bigcup_{i=1}^{k} B_i) \neq \emptyset\}\Big) = 0$$

Como $\bigcup_{i=1}^k B_i \supset \mathcal{C}$, deducimos

$$m\Big(\{x \in M : \ p\omega(x) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset\}\Big) = 0.$$

Dicho de otra forma, para Lebesgue-casi todo punto $x \in M$, el conjunto $p\omega(x)$ está contenido en $\mathcal{M} \setminus \mathcal{C} = B_\epsilon(\mathcal{O}_f)$. Luego, tomando $\epsilon = 1/h$ para $h \in \mathbb{N}^+$, hemos probado que

$$\forall \ h \in \mathbb{N}^+ : \ p\omega(x) \subset B_{1/h}(\mathcal{O}_f) \ \ m - \text{c.t.p. } x \in M.$$

Como la unión numerable de conjuntos con medida de Lebesgue nula, tiene medida de Lebesgue nula, la intersección numerable de conjuntos con medida de Lebesgue total, tiene medida de Lebesgue total. Concluimos que:

$$p\omega(x) \subset \bigcap_{h=1}^{+\infty} B_{1/h}(\mathcal{O}_f) = \mathcal{O}_f \ \ m - \text{c.t.p. } x \in M,$$

como queríamos demostrar.
Segundo, probemos que $\mathcal{O}_f$ es minimal en el conjunto de compactos no vacíos $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ que tienen la propiedad $p\omega(x) \subset \mathcal{K}$ para Lebesgue-casi todo punto $x \in M$. Tomemos cualquier compacto no vacío $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_f$, tal que $\mathcal{K} \neq \mathcal{O}_f$. Probemos que tal $\mathcal{K}$ no tiene la propiedad mencionada. Es decir, probemos que $m\Big(p\omega(x) \cap (\mathcal{M} \setminus \mathcal{K})\Big) > 0$.
En efecto, como $\mathcal{K} \subset\neq \mathcal{O}_f$, existe una medida $\mu \in \mathcal{O}_f \setminus \mathcal{K}$. Sea $\epsilon > 0$ tal que la bola $B_\epsilon(\mu)$ es disjunta con el compacto $\mathcal{K}$. Como μ es SRB-like, por las Definiciones 6.6.4 y 6.6.3, se cumple:

$$m\Big(\{x \in M : \ p\omega(x) \cap B_\epsilon(\mu) \neq \emptyset\}\Big) > 0. \tag{6.10}$$

Siendo $B_\epsilon(\mu) \cap \mathcal{K} = \emptyset$, deducimos que $B_\epsilon(\mu) \subset (\mathcal{M} \setminus \mathcal{K})$. Entonces, sustituyendo en (6.10) concluimos:

$$m\Big(\{x \in M : \ p\omega(x) \cap (\mathcal{M} \setminus \mathcal{K}) \neq \emptyset\}\Big) > 0,$$

como queríamos demostrar. □

Corolario 6.6.8. *Sea $f : M \mapsto M$ continua.*
(a) *Si la medida SRB-like μ es única, entonces μ es SRB y su cuenca de atracción estadística (fuerte) $B(\mu)$ cubre M Lebesgue c.t.p.*
(b) *Recíprocamente, si existe una medida SRB μ cuya cuenca de atracción estadística (fuerte) $B(\mu)$ cubre M Lebesgue c.t.p., entonces μ es la única medida SRB-like.*
(c) *Si el conjunto de medidas SRB-like es finito, entonces todas las medidas SRB-like son SRB y la unión de las cuencas de atracción estadística de las medidas SRB cubre M Lebesgue c.t.p.*
(d) *Recíprocamente, si existe una cantidad finita de medidas SRB tales que la unión de sus cuencas de atracción estadística cubre M Lebesgue c.t.p., entonces estas son las únicas medidas SRB-like, y por lo tanto el conjunto de medidas SRB-like es finito.*

Ejercicio 6.6.9. Probar el Corolario 6.6.8. Sugerencia: Basta probar (c) y (d), pues estas implican (a) y (b). Probar primero que una medida SRB-like es aislada en el conjunto de las medidas SRB-like si y solo si es SRB. Combinar las Definiciones 4.5.6 y 6.6.4 de medidas SRB y SRB-like respectivamente, junto con las Definiciones 4.5.1 y 6.6.3 de las cuencas de atracción estadística fuerte y ϵ-débil, respectivamente.

Conjetura 6.6.10. Palis [63] *Para $r \geq 1$ suficientemente grande C^r-genéricamente en Diff $^r(M)$ existe una cantidad finita de medidas SRB tales que la unión de sus cuencas de atracción estadística cubre M Lebesgue c.t.p.*

Del Corolario 6.6.8 deducimos el siguiente enunciado equivalente de la Conjetura de Palis:

C^r-genéricamente para $f \in$ Diff $^r(M)$ el conjunto débil no vacío $\mathcal{O}_f$ de medidas de probabalidad SRB-like para f, carece de puntos de acumulación.*

Corolario 6.6.11. (del Teorema 6.6.7)
Sea $f : M \mapsto M$ continua, no únicamente ergódica. Si para Lebesgue c.t.p. $x \in M$ el conjunto de probabilidades $p\omega(x)$ (cf. Definición 6.6.1) *coincide con el conjunto de todas las medidas invariantes, entonces no existen medidas SRB y el conjunto de las medidas SRB-like coincide con el conjunto de todas las medidas invariantes.*

Nota: Existen transformaciones f que cumplen las hipótesis del Corolario 6.6.11. En efecto, el mapa C^0 expansor en el círculo construido por Misiurevicz en [59], y los mapas C^0-expansores genéricos encontrados recientemente por Abdenur y Andersson en [1], satisfacen las hipótesis de este Corolario. Ver también el Ejemplo 6.8.2 más adelante en esta sección.

Demostración. del Corolario 6.6.11:
Por hipótesis, el mínimo conjunto compacto $\mathcal{K}$ de medidas de probabilidad tal que $p\omega(x) \subset \mathcal{K}$ es el conjunto $\mathcal{M}_f$ de todas las medidas f-invariantes. Por el Teorema 6.6.7, $\mathcal{K}$ es el conjunto $\mathcal{O}_f$ de las medidas SRB-like. Luego $\mathcal{O}_f = \mathcal{M}_f$ como queríamos demostrar. □

6.7. Relación entre atractor estadístico y medidas SRB-like

Definición 6.7.1. Sea $\mathcal{K}$ un conjunto no vacío de medidas de probabilidad. Se llama *soporte compacto de* $\mathcal{K}$ al mínimo compacto $K \subset M$ tal que

$$\mu(K) = 1 \ \ \forall \ \mu \in \mathcal{K}.$$

El mínimo soporte compacto existe como resultado de aplicar el lema de Zorn a la familia de compactos no vacíos con μ-medida igual a 1 para toda $\mu \in \mathcal{K}$, y de usar también la propiedad de que es no vacía la intersección de una familia de compactos tal que toda subfamilia finita tiene intersección no vacío. El soporte compacto de $\mathcal{K}$ es único, debido a su propiedad de minimalidad y a que la intersección de dos compactos con μ-medida igual a 1 es un compacto con μ-medida igual a 1.

Teorema 6.7.2. .
Medidas SRB-like y atractores de Ilyashenko
Para toda $f\colon M \mapsto M$ continua, el atractor 1*-obs. minimal de Ilyashenko K* (cf. Theorem 6.4.3) *es el soporte compacto del conjunto $\mathcal{O}_f$ de medidas SRB-like para f.*

Nota: El Teorema 6.7.2 puede generalizarse, adaptando el enunciado adecuadamente para caracterizar todo atractor de Ilyashenko α-obs. minimal (para cualquier $0 < \alpha \leq 1$) como el soporte compacto de un subconjunto adecuado de medidas SRB-like para f (ver [20]).

Demostración. del Teorema 6.7.2: Sea K_1 el atractor de Ilyashenko 1-obs. minimal. Por el Teorema 6.4.3, el compacto $K_1 \neq \emptyset$ existe y es único. Sea K_2 el soporte compacto del conjunto $\mathcal{O}_f$ de medidas SRB-like para f, según la Definición 6.7.1. De acuerdo a lo observado al final de dicha definición, el compacto $K_2 \neq \emptyset$ existe y es único.

Demostración de $K_1 \subset K_2$: Como K_1 es 1-obs. minimal, por la Definición 6.4.1 basta probar que

$$\text{A probar:} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \operatorname{dist}(f^j(x), K_2) = 0 \text{ para } m - \text{c.t.p. } x \in M. \tag{6.11}$$

Para todo $x \in M$ consideremos la sucesión $\{\sigma_{n,x}\}_{n\geq 1}$ de probabilidades empíricas de la órbita por x, según la Definición 4.5.2. Aplicando el Teorema 6.6.7, tenemos para m-c.t.p. $x \in M$ la siguiente propiedad:

$$\lim_{i\to+\infty} \sigma_{n_i,x} \in \mathcal{O}_f \tag{6.12}$$

para toda subsucesión $n_i \to +\infty$ tal que existe ese límite (donde dicho límite se toma en la topología débil* del espacio de probabilidades).
Consideremos la función continua ψ definida por

$$\psi(x) := \operatorname{dist}(x, K_2) \ \ \forall\, x \in M. \tag{6.13}$$

Integrando ψ en la inclusión (6.12), y teniendo en cuenta la definición de la topología débil*, deducimos que para m-c.t.p. $x \in M$, y para toda subsucesión convergente $\{\sigma_{n_i,x}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de probabilidades empíricas, existe $\mu \in \mathcal{O}_f$ tal que

$$\int \psi\, d\mu = \lim_{i\to+\infty} \int \psi\, d(\sigma_{n_i,x}) = \lim_{i\to+\infty} \frac{1}{n_i}\sum_{j=0}^{n_i-1} \operatorname{dist}(f^j(x), K_2). \tag{6.14}$$

Pero $\mu(K_2) = 1$, porque por hipótesis, K_2 es soporte compacto común de todas las medidas de probabilidad en $\mathcal{O}_f$. Luego $\psi(y) = \operatorname{dist}(y, K_2) = 0$ para μ-c.t.p. $y \in M$, de donde $\int \psi\, d\mu = 0$. Sustituyendo en la igualdad (6.14) obtenemos

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{1}{n_i}\sum_{j=0}^{n_i-1} \operatorname{dist}(f^j(x), K_2) = 0 \tag{6.15}$$

para m-c.t.p. $x \in M$, para toda subsucesión $n_i \to +\infty$ tal que $\{\sigma_{n_i,x}\}_{i\in\mathbb{N}}$ sea convergente.
Fijado un tal punto x, sea dada una sucesión cualquiera $n_i \to +\infty$ tal que la subsucesión $\{d_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de promedios de distancias a K_2, dada por

$$d_{n_i} := \frac{1}{n_i}\sum_{j=0}^{n_i-1} \operatorname{dist}(f^j(x), K_2),$$

es convergente. Por la compacidad del espacio de probabilidades, siempre existe una subsucesión de esta subsucesión $\{d_{n_i}\}_i$ (para índices $i = i_h$) tal que

$\{\sigma_{n_{i_h},x}\}_h$ es también convergente. Entonces, la igualdad (6.15) aplicada a n_{i_h} en lugar de n_i, implica (para la subsucesión de índices $\{n_i\}_i$), que el límite del promedio d_{n_i} de las distancias a K_2 es cero. Concluimos que toda subsucesión convergente de $\{d_n\}_{n\geq 1}$ converge a cero. Luego, la afirmación (6.11) está probada.

Demostración de $K_2 \subset K_1$: Por hipótesis K_2 es el mínimo compacto tal que $\mu(K_2) = 1$ para toda $\mu \in \mathcal{O}_f$. Luego, basta demostrar que

$$\text{A probar: } \mu(K_1) = 1 \;\; \forall\, \mu \in \mathcal{O}_f. \tag{6.16}$$

Sean dados $\mu \in \mathcal{O}_f$ y $\epsilon > 0$ arbitrario. Sea φ la función continua no negativa definida por

$$\varphi(y) := \text{dist}(y, K_1). \tag{6.17}$$

Por la definición de la topología débil*, con la métrica dist* que se haya elegido en el espacio $\mathcal{M}$ de las probabilidades, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{dist}^*(\nu, \mu) < \delta \;\Rightarrow\; \Big|\int \varphi\, d\mu - \int \varphi\, d\nu\Big| < \epsilon. \tag{6.18}$$

Por la Definición 6.6.4 de medida SRB-like, la medida de Lebesgue m de la cuenca $A_\delta(\mu)$ de atracción estadística δ-débil de μ, es positiva. Como K_1 es un atractor de Ilyashenko 1-obs., su cuenca de atracción estadística $A(K_1)$ tiene medida de Lebesgue total. Luego deducimos que

$$m\big(A(K_1) \cap A_\delta(\mu)\big) > 0.$$

Tomemos un punto $x \in A(K_1) \cap A_\delta(\mu)$. Por la igualdad (6.3) que define $A(K_1)$ tenemos:

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \text{dist}(f^j(x), K_1) = \lim_{n\to+\infty} \int \varphi\, d(\sigma_{n,x}), \tag{6.19}$$

donde $\sigma_{n,x}$ es la probabilidad empírica dada definida por (4.7). Por la Definición 6.6.3 de $A_\delta(\mu)$, existe una subsucesión $n_i \to +\infty$ tal que $\{\sigma_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a una medida $\nu \in p\omega(x)$ tal que $\text{dist}^*(\mu, \nu) < \delta$. Luego, combinando la afirmación (6.18) con la igualdad (6.19), deducimos:

$$0 = \lim_{i\to+\infty} \int \varphi\, d\sigma_{n_i,x} = \int \varphi\, d\nu, \quad \text{dist}^*(\nu, \mu) < \delta, \;\Rightarrow$$

$$\int \varphi\, d\nu = 0, \quad \Big|\int \varphi\, d\mu - \int \varphi\, d\nu\Big| < \epsilon \quad \Rightarrow$$

$$\Big|\int \varphi\, d\mu\Big| < \epsilon.$$

Como esta desigualdad vale para todo $\epsilon > 0$, deducimos que $0 = \int \varphi \, d\mu$. Siendo $\varphi \geq 0$, concluimos que $\varphi(y) = \mathrm{dist}(y, K_1) = 0$ para μ-c.t.p. $y \in M$. Como K_1 es compacto, la distancia de un punto y a K_1 es cero si y solo si $y \in K_1$. Hemos probado que $y \in K_1$ para μ-c.t.p. $y \in M$, o dicho de otra forma, $\mu(K_1) = 1$ como queríamos demostrar. □

6.8. Ejemplos de medidas SRB-like

Ejemplo 6.8.1. Endormofirsmos C^1-expansores en S^1
Sea $f : S^1 \mapsto S^1$ en el círculo S^1 un endomorfismo de clase C^1 expansor, esto es, existe una constante $\sigma > 1$ tal que $|f'(z)| \geq \sigma > 1 \ \ \forall \ z \in S^1$. Por ejemplo en el círculo

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$$

la transformación $f(z) = z^2$ es expansora. Un resultado clásico de dinámica topológica (ver por ejemplo [40, Theorem 2.4.6]), establece que todo endormofismo expansor en el círculo es sobreyectivo, el número de preimágenes de cualquier punto $x \in S^1$ es constante igual a $k \geq 2$ (llamado *grado* de f) y f es topológicamente conjugado a g_k definido por $g_k(z) = z^k$ para todo $z \in S^1 = \{|z| = 1\}$.
El endomorfismo expansor, puede mirarse como un endomorfismo (no invertible) uniformemente hiperbólico (cf. Definition 3.2.1), en que el subespacio inestable U_x es todo el espacio tangente $T_x S^1$, y el subespacio estable $E_x = \{0\}$. La variedad inestable $W^u(x_0)$ por un punto cualquiera $x_0 \in S^1$ se define por

$$W^u(x_0) := \Big\{ \ y_0 \in S^1 : \ \ \exists \ x_{-n}, \ y_{-n} \in S^1 \text{ tales que}$$

$$f(x_{-n}) = x_{-n+1}, \ f(y_{-n}) = y_{-n+1} \ \forall \ n \geq 0,$$

$$\lim_{-n \to -\infty} \mathrm{dist}(y_{-n}, x_{-n}) = 0 \ \Big\}.$$

La variedad inestable de cualquier punto coincide con todo S^1:

$$W^u(x_0) = S^1 \ \ \forall \ x_0 \in S^1.$$

Por esta razón, para los endomorfismos expansores en el círculo, la medida condicional inestable de μ (cf. Definición 5.2.2) es la misma μ. Entonces, definimos:

Definición (medida de Gibbs): Si f es un endomorfismo C^1 expansor en el círculo S^1, decimos que una medida f-invariante μ *es de Gibbs* si $\mu \ll m$, donde m es la medida de Lebesgue en S^1.

Si f es de clase $C^{1+\alpha}$, se tiene el siguiente resultado clásico, que da una versión del Teorema 5.3.4 aplicable a los endomorfismos expansores del círculo (en vez de a los difeomorfismos de Anosov en variedades de dimensión mayor que 1).

Teorema (Ruelle):
Sea $f : S^1 \mapsto S^1$ de clase $C^{1+\alpha}$ expansor en el círculo S^1. Entonces:
(a) *Existe una única medida de Gibbs μ* (i.e. μ absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue) *y esta medida μ es ergódica.*
(b) *Toda medida SRB es de Gibbs y recíprocamente.* (Por lo tanto existe una única medida SRB y es ergódica).
(c) *La medida de Gibbs μ es equivalente a la medida de Lebesgue m* (i.e. $\mu \ll m$ y $m \ll \mu$).
(d) *La cuenca de atracción estadística de μ cubre Lebesgue c.t.p. $z \in S^1$.*

La prueba de este Teorema de Ruelle para mapas $C^{1+\alpha}$ expansores en S^1, puede encontrarse por ejemplo en [40, Theorem 5.1.16].
Nota: Un resultado más general, que establece la existencia de medidas de Gibbs para mapas C^1 a trozos en el círculo, que sean expansores en cada trozo, y que cumplan hipótesis de variación acotada, fue demostrado recientemente por Liverani en [52].

Como consecuencia de la parte (d) del Teorema de Ruelle, en el caso $C^{1+\alpha}$ expansor, no existen otras medidas SRB-like que no sean la medida SRB. En efecto, otra medida $\nu \neq \mu$ tendría una cuenca de atracción estadística ϵ-débil $A_\epsilon(\nu)$ que debe ser disjunta con la cuenca de atracción estadística (fuerte) $B(\mu)$ de μ (porque $\nu \neq \mu$). Pero como $m(M \setminus B(\mu)) = 0$, entonces $m(A_\epsilon(\nu)) = 0$ y ν no puede ser SRB-like.
Ahora veremos que la relación entre medidas de Gibbs y la Fórmula (5.7) de Pesin para la entropía (que vale para difeomorfismos de clase $C^{1+\alpha}$ según vimos en el Teorema 5.4.1 de la sección anterior), también se generaliza para endormorfismos expansores de clase $C^{1+\alpha}$ en el círculo.

Teorema
Fórmula de Pesin para la Entropía. Endomorfismos expansores *Sea $f : S^1 \mapsto S^1$ expansor de clase C^2. Entonces, la única medida SRB μ para f* (que por el teorema de Ruelle es de Gibbs y equivalente a la medida de Lebesgue), *satisface la Fórmula* (5.7) *de Pesin para la Entropía, y es la única medida que satisface tal fórmula.*

Una prueba de este Teorema, fue dada en [65] por Pesin. Una versión para endomorfismos de clase C^2 se encuentra en [72] o en [70]. Más aún, en [72] se prueba la versión del Teorema de Ledrappier-Young [49] para endomorfismos, que establece la equivalencia, para todo endomorfismo de clase C^2, entre las medidas de Gibbs y las medidas que satisfacen la Fórmula de Pesin para la Entropía (cf. Teorema 5.4.3).

En el caso que el endormorfismo f sea de clase C^1 pero no $C^{1+\alpha}$, las afirmaciones del Teorema de Ruelle fallan. En efecto, en [5] se prueba que los endormor-

fismos expansores C^1-genéricos no poseen medidas invariantes absolutamente continuas respecto de m (no poseen medidas de Gibbs). Más en general, en [90] se prueba (con un ejemplo explícito) que, aunque f sea discontinua, si f es C^1 expansora a trozos, entonces la existencia de medidas invariantes absolutamente continuas respecto de m no es necesaria.
Sin embargo, en [17] Campbell y Quas probaron que C^1-genéricamente, un endomorfismo expansor en el círculo (que es C^1 pero no $C^{1+\alpha}$), posee una única medida SRB μ y que esta medida es ergódica, satisface la Fórmula de Pesin para la Entropía (5.7) y tiene cuenca de atracción estadística que cubre Lebesgue c.t.p. Pero en vez de ser μ absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue m, se cumple todo lo contrario:

$$\mu \perp m,$$

es decir, μ es mutuamente singular respecto a la medida de Lebesgue m.
Del resultado de Campbell y Quas deducimos que C^1-genéricamente para los endomorfismos expansores en el círculo, existe una única medida SRB-like que es la medida SRB μ encontrada por Campbell y Quas. En efecto, argumentamos igual que antes, como lo hicimos a partir del Teorema de Ruelle para los expansores de clase $C^{1+\alpha}$. Como la cuenca de atracción estadística $B(\mu)$ de la medida SRB μ cubre Lebesgue c.t.p., entonces ninguna otra medida $\nu \neq \mu$ puede ser SRB-like.

Sin necesidad de asumir hipótesis de C^1-genericidad, todo endormorfismo expansor de clase C^1 en el círculo tiene medidas SRB-like, todas sus medidas SRB-like satisfacen la Fórmula de Pesin para la Entropía (5.7), y la unión de sus cuencas de atracción estadística ϵ-débil cubre Lebesgue c.t.p. para todo $\epsilon > 0$. Estos resultados fueron probados en [24]. Sin embargo, la unicidad de la medida SRB-like (que es cierta para los expansores de clase $C^{1+\alpha}$ debido al Teorema de Ruelle), es falsa en general para los expansores de clase C^1 que no son $C^{1+\alpha}$ ni son C^1-genéricos. En efecto, en [74] Quas construyó un expansor de clase C^1 que exhibe más de una medida SRB-like.

Ejemplo 6.8.2. Endormofirsmos C^0-expansores en S^1

Un mapa continuo $f : S^1 \mapsto S^1$ en el círculo S^1 se llama *endomorfismo C^0-expansor* (cf. [40, Definition 2.4.1]), si existen constantes $\delta > 0$ y $\sigma > 1$ tales que

$$\text{dist}(f(x), f(y)) \geq \sigma \text{dist}(x, y) \;\; \forall\, x, y \in S^1 \text{ tales que } \text{dist}(x, y) < \delta.$$

En [59], Misiurewicz construyó un endormofismo C^0-expansor f en S^1, que satisface las hipótesis del Corolario 6.6.11. Por lo tanto, en ese ejemplo no existen medidas SRB y toda medida f-invariante es SRB-like. Existe entonces una cantidad infinita no numerable de medidas SRB-like. Llamaremos a los endomorfismos que tienen esta propiedad *endomorfismos de Misiurewicz.* En [1] se prueba que los endomorfismos de Misiurewicz son C^0-genéricos en el espacio de los endomorfismos C^0-expansores del círculo S^1.

Ejemplo 6.8.3. Anosov C^1
Sea f un difeomorfismo de Anosov transitivo en una variedad compacta y Riemanniana M (cf. Definition 3.2.1).
Primero repasemos el caso en que f es además de clase $C^{1+\alpha}$ o en particular si es de clase C^2:
En el Teorema 5.3.4 de Sinai [86], vimos que si f es un difeomorfismo de Anosov de clase $C^{1+\alpha}$, entonces existe una única medida de probabilidad SRB μ, es de Gibbs ergódica, y su cuenca de atracción estadística cubre Lebesgue c.t.p. Deducimos que tal medida μ es la única medida SRB-like, argumentando de igual forma que en el ejemplo 6.8.1.

Además, debido al Teorema 5.3.1, la única medida SRB-like de un difeomorfismo de Anosov transitivo de clase $C^{1+\alpha}$, satisface la Fórmula (5.7) de Pesin para la Entropía.

Si el difeomorfismo f de Anosov transitivo es de clase C^2, entonces su única medida SRB μ, es también la única medida de probabilidad que satisface la Fórmula de Pesin para la Entropía. En efecto, por el Teorema 5.4.3 de Ledrappier-Young [49], toda medida ν que satisfaga la Fórmula de Pesin para la Entropía es de Gibbs. Y por el Teorema 5.3.1 las componentes ergódicas ν_x de toda medida de Gibbs es SRB, y por lo tanto es SRB-like. Luego, como existe una única medida SRB-like μ, ν tiene una única componente ergódica que es μ, y por lo tanto ν es ergódica y coincide con μ.

Ahora pasemos al caso de difeomorfismo de Anosov transitivo f de clase C^1 pero no $C^{1+\alpha}$. En este caso las demostraciones conocidas de los teoremas mencionados en el repaso anterior, no son aplicables, porque utilizan la Teoría de Pesin. Por ejemplo, las pruebas utilizan el Teorema 5.5.2 que establece la continuidad absoluta de la holonomía de la foliación estable. Este resultado sería falso si f no fuera de clase $C^{1+\alpha}$ (ver [77], o también [13]).
Sin embargo, en los últimos años se han obtenido algunos resultados parciales, aplicables a los difeomorfismos de Anosov de clase C^1, que generalizan el Teorema 5.3.4:
En [73] Qiu y Zhu demostraron que C^1-genéricamente los difeomorfismos de Anosov transitivos tienen una única medida SRB, esta medida es ergódica, satisface la Fórmula de Pesin para la Entropía, es la única medida que satisface tal fórmula, y su cuenca de atracción estadística cubre Lebesgue c.t.p. de la variedad. Por lo tanto μ es la única medida SRB-like. La prueba de Qiu y Zhu no pasa (a diferencia de la prueba del Teorema 5.3.4) por la construcción de medidas de Gibbs. Más aún (tanto como la autora de este libro conoce) no se

sabe si la única medida SRB μ de un difeomorfismo de Anosov transitivo y C^1-genérico, es medida de Gibbs. Pero se sabe que tal μ no es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue m en toda la variedad, pues Ávila y Bochi [4] probaron que C^1 genéricamente no existen medidas invariantes absolutamente continuas respecto de m.

Cuando la medida SRB-like μ es única deducimos, como consecuencia del Teorema 6.6.7, que μ es SRB y que su cuenca de atracción estadística $B(\mu)$ cubre Lebesgue c.t.p. En este caso, por ejemplo para los difeomorfismos de Anosov transitivos C^1-genéricos del Teorema de Qiu y Zhu [73], es válido un teoremas ergódico, probado recientemente por Kleptsyn y Ryzhov en [45], que estima la velocidad de convergencia de las probabilidades empíricas $\sigma_{n,x}$ (en la topología débil*) a la medida SRB-μ, para Lebesgue c.t.p. $x \in M$.

En el caso de difeomorfismo de Anosov C^1 no genérico y no $C^{1+\alpha}$, cuando f preserva una medida invariante μ absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, Sun y Tian probaron en [92] que esta medida μ satisface la Fórmula de Pesin para la entropía. Esto implica que, bajo las hipótesis adicional de existencia de medida invariante μ equivalente a la medida de Lebesgue m, toda medida SRB-like satisface tal fórmula. En efecto, por el Teorema 2.6.2 de Descomposición Ergódica, μ-c.t.p. x pertenece a la cuenca de atracción estadística $B(\mu_x)$ de una componente ergódica μ_x de μ. Como μ es equivalente a la medida de Lebesgue, deducimos que Lebesgue c.t.p. x pertenece a $B(\mu_x)$. Luego, por el Teorema 6.6.7, estas componentes ergódicas μ_x son las medidas SRB-like. Como μ satisface la Fórmula de Pesin para la entropía, entonces toda componente ergódica μ_x de μ también satisface tal fórmula (cf. [41]). Luego, del resultado de Sun y Tian concluimos que toda medida SRB-like para f, satisface la Fórmula de Pesin para la Entropía, si f es un difeomorfismo de Anosov de clase C^1 que preserve una medida equivalente a la medida de Lebesgue.

Más en general, sin necesidad de asumir hipótesis de C^1-genericidad ni de existencia de medida invariante absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, en [21] se prueba que para todo f de Anosov de clase C^1, toda medida SRB-like μ satisface la Fórmula de Pesin para la Entropía. Pero no sabemos si es necesario que además μ sea medida de Gibbs, ni que sea ergódica.

Bibliografía

[1] Abdenur F., Andersson M.: *Ergodic theory of generic continuous maps* Preprint ArXiv:1201.0632[math.DS], 2012

[2] Anosov D.V.: *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature* Proc. Steklov Inst. **90** (1967) pp. 1–235

[3] Arnold V.I., Avez A.: *Problèmes ergodiques de la mécanique classique* Gauthier-Villars, Paris, 1967

[4] Ávila A., Bochi J.: *A generic C^1 map has no absolutely continuous invariant probability measure* Nonlinearity **19** (2006) pp. 2717–2725

[5] ——, ——: *Generic Expanding maps without absolutely continuous invariant σ-finite measure* Math. Research Letters **14** (2007), pp. 721–730

[6] ——, ——: *On the Subadditive Ergodic Theorem* Teaching Notes of PUC-Rio www.mat.puc-rio.br/ jairo/kingbirk.pdf (Last retrieved May 11th., 2012)

[7] Bachurin P.S.: *The connection between time averages and minimal attractors* Russ. Math. Surv. **54** (1999) pp. 1233–1235

[8] Barreira L., Pesin Y.: *Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory* University Lectures Series Vol. 23, ISBN 978-08218-2921-1, Amer. Math. Soc., Providence 2001

[9] Birkhoff G.D.: *Proof of the Ergodic Theorem* Proc. Nat. Acad. of Sciences **17** (12) (1931) pp 656–660

[10] Bogliubov N., Krylov N.: *La théorie genérale de la mesure dans son application a l'étude de systemes dynamiques de la mécanique non-linéaire* Annals Math. **38** (1937) pp. 65–113

[11] ——, Diaz L., Viana M.: *Dynamics beyond uniform hyperbol- icity. A global geometric and probabilistic perspective* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **102** Editors: J. Fröhlich, S.P. Novikov, D. Ruelle. Springer, Berlin- Heidelberg-New York, 2005

[12] Bowen R.: *Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms* Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971) pp. 377–397

[13] ——: *A horseshoe with positive measure* Invent. Math. **29** (3) (1975) pp. 203–204

[14] ——: *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms* Lect. Notes in Math. **470** ISBN: 3-450-07187-3, Springer-Verlag, New York, 1975

[15] ——, Ruelle D.: *The ergodic theory of Axiom A flows* Invent. Math. **29** (1975) pp. 181–202

[16] Buzzi J.: *Chaos and Ergodic Theory* In the book: Mathematics of Complexity and Dynamical Systems, R. A. Meyers (Ed.), ISBN: 978-1-4614-1806-1, pp. 63–87, Springer, New York, 2011

[17] Campbell J., Quas A.: *A generic C1 expanding map has a singular S-R-B measure* Commun. Math. Phys. **221** (2001) pp. 335–349

[18] Carvalho M.: *Medidas de Bowen-Ruelle-Sinai para derivados de Anosov n-dimensionales* PhD Thesis, IMPA, Informes de Matemática Série F, 044/91, Rio de Janeiro, 1991.

[19] ——: *Sinai-Ruelle-Bowen measures for N-dimensional derived from Anosov diffeomorphisms* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **13** (1992), pp. 21–44

[20] Catsigeras E.: *On Ilyashenko's Statistical Attractors* (Submitted) Preprint arXiv:1106.4072v3 [math.DS] (2012)

[21] ——-, Cerminara M., Enrich H.: *Pesin's Entropy Formula for C1 Diffeomorphisms with Dominated Splitting* (Submitted) Preprint arXiv:1209.5784v1 [math.DS] (2012)

[22] ——-, Enrich H.: *SRB measures of certain almost hyperbolic diffeomorphisms with a tangency* Discr. & Cont. Dynam. Sys. **7** (2001) pp. 177–202

[23] ——-, ——: *SRB-like measures for C^0 dynamics* Bull. Polish Acad. Sci. - Math. **59** (2011) pp. 151–164

[24] ——-, ——: *Equilibrium States and SRB-like measures of C^1 expanding maps of the circle* Portug. Math. **69** (2012), pp. 193–21

[25] Enrich, H.: *A heteroclinic bifurcation of Anosov diffeomorphisms* PhD Thesis IMPA, Informes de Matemática Série F-079/95, Rio de Janeiro, 1995 and Ergod. Th. & Dynam. Sys. **18** (1998) pp. 567–608

[26] Folland G. B.: *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications.* ISBN 0-471-80958-6. Wiley-Interscience, U.S.A, 1984.

[27] Franks J.: *Anosov diffeomorphisms on tori* Trans. of the Amer. Math. Soc. **145** (1969) pp. 117–124.

[28] Frantzikinakis N., McCutcheon R. *Ergodic Theory: Recurrence* In the book: Mathematics of Complexity and Dynamical Systems, R. A. Meyers (Ed.), ISBN: 978-1-4614-1806-1, pp. 357–368 Springer, New York, 2011

[29] Furstenberg H.: *Strict ergodicity and transformations of the torus* Amer. Journ. of Math. **83** (1961) pp.573-601

[30] Golenishcheva-Kutuzova T., Kleptsyn V.: *Convergence of the Krylov-Bogolyubov procedure in Bowan's example* Mat. Zametki **82** (5) (2007) pp. 678–689; English Translation in Math. Notes **82** (5-6) (2007) pp. 608–618

[31] Hu H.: *Conditions for the existence of SRB measures for almost Anosov diffeomorphisms* Trans. Amer. Math. Soc **352** (2000) pp. 2331–2367

[32] Gorodetski A., Ilyashenko Yu.S.: *Minimal and strange attractors* Int. Journ. of Bif. and Chaos **6** (1996) pp. 1177–1183

[33] Hammerlindl A.: *Partial hyperbolity on 3-dimensional nilmanifolds* Discr. & Cont. Dynam. Sys. **33** (8) (2013) pp. 3641–3669

[34] Hirsch M, Pugh C., Shub M.: *Invariant manifolds* Lect. Notes in Math **587**, Springer-Verlag, Berlin, 1977

[35] Hu H., Young L.S.: *Nonexistence of SRB measures for some diffeomorphisms that are almost Anosov* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **15** (1995) pp. 67–76

[36] Ilyashenko, Yu.S.: *Minimal attractors* In Proceedings of EQUADIFF 2003, International Conference on Differential Equations in Husselt, Belgium, pp. 421–428, ISBN: 978-981-256-169-5, World Scientific Publishing, Singapore, 2005

[37] Jost J.: *Dynamical Systems* ISBN 978-3-540-22908-7, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2005.

[38] Karabacak O., Ashwin P.: *On statistical attractors and the convergence of time averages* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **150** (2011) pp. 353–365.

[39] Karlsson A., Margulis G.A.: *A multiplicative ergodic theorem and nonpositively curved spaces* Comm. Math. Phys. **208**(1)(1999) pp. 107–123

[40] Katok A., Hasselblatt B.: *Introduction to the modern theory of dynamical systems* ISBN 0-521-57557-5, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[41] Keller, G:: *Equilibrium States in Ergodic Theory* London Math. Soc. Student Texts, Vol. 42, ISBN 978-052159534-6, Cambridge University Press, Cambridge, 1998

[42] King J.L.F.: *Entropy in Ergodic Theory* In the book: Mathematics of Complexity and Dynamical Systems, R. A. Meyers (Ed.), ISBN: 978-1-4614-1806-1, pp. 205–224 Springer, New York, 2011

[43] Kingmann J.F.C. *Subadditive ergodic theory* Ann. Prob. **1** (1973) pp. 889–909

[44] Kleptsyn V.: *An example of non-coincidence of minimal and statistical attractors* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **26** (2006) 759–768.

[45] ——, Ryzhov D., Minkov S.: *Special ergodic theorems and dynamical large deviations* Nonlinearity **25** (11) (2012) pp. 3189–3196

[46] Kolmogorov, A.N.: *New metric invariants of trnasitive dynamical systems and autormorphisms of Lebesgue spaces* Dokl. Akad. Nauk. SSSR **119**(5) (1958) pp. 861–864

[47] Kuznetsov S.P., Pikovsky A.: *Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors* Physica D, **232** (2007) (2) pp.87–102

[48] Ledrappier F.: *Proproétés Ergodiques des Mesures de Sinai* Publ. Math. I.H.E.S **59** (1984) pp.163–188

[49] ——, Young L-S: *The metric entropy of diffeomorphisms. Part I: Characterization of measures satisfying Pesin's formula. Part II: Relations between entropy, exponents and dimensions* Ann. Math. **122** (1985) pp 509–539, pp. 540–574

[50] Lewowicz J: *Lyapunov functions and topological stability* Journ. of Diff. Eq. **38** (1980) pp. 192–209

[51] ——: *Expansive homeomorphisms of surfaces* Bol. Soc. Bras. Mat. **20** (1989), pp. 113–133

[52] Liverani C.: *Multidimensional expanding maps with singularities: a pedestrian approach* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **33** (1) (2013) pp. 168–182

[53] Manning A.: *There are no new Anosov diffeomorphisms on tori* Amer. J. Math.**96** (1974) pp. 422–429

[54] Mañé R.: *Introdução a Teoria Ergódica*, Projeto Euclides, I.M.P.A., Rio de Janeiro, 1983.

[55] ——: *Ergodic theory and differentiable dynamics* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Vol. 3, ISBN 978- 0387152783, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1987

[56] ——: *A proof of Pesin's formula* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **1** (1985) pp. 95–102 and *Errata to "A proof of Pesin's formula"* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **3** (1983) pp. 159–160

[57] Margulis G.A.: Unpublished proof, 1966, cited in Hasselblatt B, Pesin Ya.B: *Pesin entropy formula* Scholarpedia **3** (3) (2008): 3733

[58] Milnor J.: *On the concept of attractor* Comm. Math. Phys. **99** (1985) pp. 177–195, *On the concept of attractor: Correction and remarks* Comm. Math. Phys. **103** (1985) pp. 517-519

[59] Misiurewicz, M.: *Ergodic natural measures* in Contemporary Mathematics **385** Algebraic and topological dynamics. Edts: Kolyada S., Manin Y., Ward T., 978-0-8218-3751-1, pp. 1–6, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2005.

[60] Nicol M., Petersen K.: *Ergodic Theory: Basic Examples and Constructions* In the book: Mathematics of Complexity and Dynamical Systems, R. A. Meyers (Ed.), ISBN: 978-1-4614-1806-1, pp. 264–287 Springer, New York, 2011

[61] Oseledets V.I.: *On spectra of ergodic automorphisms* Dokl. Acad. Sci. ISSR **168** (5) (1966) pp. 1009–1011

[62] ——: *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems* Trans. Moscow Math. Soc. **19** (1968) pp. 197–231

[63] Palis J.: *A global view of Dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors.* Astérisque **261** (1999) pp. 339–351

[64] Pesin Ya.B.: *Families of invariant manifolds corresponding to nonzero characteristic exponents* Math. USSR- Izv. Vol. **40** (1976), No. 6, pp. 1261–1305

[65] ——: *Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory* Russian Math. Surveys **32** (1977) pp. 55–114

[66] ——: *Dynamical Systems with generalized hyperbolic attractors: hyperbolic, ergodic and topological properties* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **12** (part I) (1992) pp. 123–152

[67] ——, Sinai, Ya.G.: *Gibbs measures for partially hyperbolic attractors* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **2** (1982), pp. 417–438

[68] Pugh C.: *The $C^{1+\alpha}$ hypothesis in Pesin theory* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. Vol **59** (1984), pp. 143–161

[69] ——, Shub M.: *Ergodic attractors* Trans. Amer. Math. Soc.**312** (1989) pp. 1–54

[70] Qian M., Xie J-S., Zhu S. *Smooth Ergodic Theory for Endomorphisms* Lect. Notes in Math. **1978** ISBN: 978-3-642-01953-1, Springer-Verlag, Berlin, 2009

[71] Pujals E., Sambarino M.: *On the dynamics of dominated splitting* Annals of Math. **169** (2009) pp. 675–740

[72] Qian M., Zhu S.: *SRB measures and Pesin's entropy formula for endomorphisms* Trans. Amer. Math. Soc. **354** (4) (2002) pp. 1453–1471

[73] Qiu H.: *Existence and uniqueness of SRB measure on C1 generic hyperbolic attractors* Commun. Math. Phys. **302** (2011) pp. 345–357

[74] Quas A.N.: *Non-ergodicity for C1 expanding maps and g-measures* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **16** (1996) pp. 531–543

[75] ——: *Ergodicity and Mixing Properties* In the book: Mathematics of Complexity and Dynamical Systems, R. A. Meyers (Ed.), ISBN: 978-1-4614-1806-1, pp. 225–240 Springer, New York, 2011

[76] Raghunathan M.S.: *A proof of Oseledecs multiplicative ergodic theorem* Isr. J. Math. **32** (1979) pp. 356–362

[77] Robinson C., Young L.S.: *Nonabsolutey Continuous Foliations for an Anosov Diffeomorphism* Inventiones Math. **61** (1980) pp. 159–176

[78] Rohlin V.: *On the fundamental ideas of measure theory* Amer. Math. Soc. Transl. **1** (1962) pp. 1–52

[79] ——: *Selected topics in metric theory of dynamical systems* Uspekhi Mat. Nauk. **4** (1949) pp.57–128 English translation in Amer. Math. Soc. Transl. (Ser. 2) **49** (1966), pp. 171–240

[80] Rudin W.: *Análisis Real y Complejo* Spanish translation of *Real and Complex Analysis* ISBN 84-205-0651-6, Editorial Alhambra, Madrid, 1979

[81] ——: *Análisis Funcional* Spanish translation of *Functional Analysis* ISBN 82-291-5115-X, Editorial Reverté, Barcelona, 1979

[82] Ruelle D.: *A measure associated with axiom A attractors.* Amer. Journ. of Math. **98** (1976) pp. 619–654

[83] ——: *An inequality for the entropy of differentiable maps.* Bol. Soc. Bras. Mat. **9** (1978) pp. 83–87

[84] Sarig O.: *Bernoulli Equilibrium States for Surface Diffeomorphisms* J. Modern Dynam. **5** (3) (2011) pp 593–608

[85] Sinai Ya.G.: *On the Notion of Entropy of a Dynamical System* Dokl. Acad. Sci. ISSR **124** (4) (1959) pp. 768–771

[86] ——: *Gibbs measure in ergodic theory* Russ. Math. Surveys **27**(4) (1972) pp. 21–69

[87] ——: *Topics in Ergodic Theory* ISBN 0-691-03277-7, Princeton University Press, 1994

[88] ——: *Metric Entropy of Dynamical System* Preprint Princeton, 2007 http://web.math.princeton.edu/facultypapers/

Sinai/MetricEntropy2.pdf (last retrieved April 16th., 2013)

[89] Smale S.: *Differentiable dynamical systems* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967) pp. 747–817

[90] Schmitt B., Gora P.: *Un exemple de transformation dilatante et C^1 par morceaux de l'intervalle, sans probabilité absolument continue invariante* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **9** (1) (1989) pp. 101–113

[91] Stein E.M, Shakarchi R.: *Real Analysis - Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces* ISBN 978-0-691-11386-9, Princeton University Press, Princeton-Oxford, 2005

[92] Sun W., Tian X.: *Dominated splitting and Pesin's entropy formula* Discr. & Cont. Dyn. Sys. **32** (4) (2012) pp. 1421–1434

[93] Tahzibi A: *C^1-generic Pesin's entropy formula* Compt. Rend. Acad. Sci. Paris (Ser. I) **335** (2002) pp. 1057–1062

[94] Viana M: *Dynamics: a probabilistic and geometric perspective.* In Proceedings of the International Congress of Mathematicians at Berlin. Documenta Mathematica. Extra Vol. I (1998) pp. 395–416

[95] ——: *A proof of Oseledets' theorem* Teaching notes of IMPA www.impa.br/ viana/out/oseledets.pdf (Last retrieved August 22th., 2012)

[96] ——: *Disintegration into conditional measures: Rokhlin's theorem* Teaching notes of IMPA www.impa.br/ viana/out/rokhlin.pdf (Last retrieved August 22th., 2012)

[97] ——, Yang J.: *Physical measures and absolute continuity for one-dimensional center direction* Ann. de l'I.H.P.-Analyse non linéaire (in press) (2013) doi: 10.1016/j.anihpc.2012.11.002

[98] Walters P.: *An Introduction to Ergodic Theory*, ISBN 0387951529, Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 2000

[99] L.S. Young: *What are SRB measures, and which dynamical systems have them?* Journ. Stat. Physics **108** (2002) pp. 733–754

Índice alfabético

La Asociación Matemática Venezolana fue fundada en 1990 como una organización civil sin fines de lucro cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de las matemáticas en Venezuela.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
`http://amv.ivic.gob.ve`