

Estimación y Predicción en Series Temporales

Práctico 4: Procesos Autoregresivos

Departamento de Procesamiento de Señales

Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería

2022

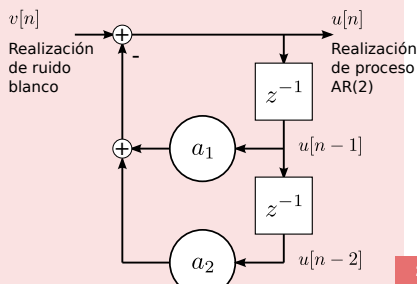
Análisis de un proceso AR(2)

Problema [?]

Se considera el proceso AR(2) real gobernado por la siguiente ecuación en diferencias

$$u[n] + a_1 u[n-1] + a_2 u[n-2] = v[n]$$

- 1 Dada la función de autocorrelación del proceso, calcular los coeficientes del modelo.
- 2 Dado el modelo, calcular la función de autocorrelación del proceso.
- 3 Determinar las condiciones que tienen que cumplir los coeficientes para que el



Análisis de un proceso AR(2)

1. Cálculo de los coeficientes del modelo

- Las ecuaciones de Yule-Walker vinculan los coeficientes del modelo con la función de autocorrelación del proceso.
- La autocorrelación cumple la misma ecuación en diferencias que el proceso,

$$r[m] + a_1 r[m-1] + a_2 r[m-2] = 0, \quad m > 0 \quad (1)$$

o equivalentemente, definiendo $w_k = -a_k$,

$$r[m] = w_1 r[m-1] + w_2 r[m-2], \quad m > 0.$$

- Considerando que el proceso es real y evaluando en $m = 1, 2$,

$$\begin{pmatrix} r[0] & r[1] \\ r[1] & r[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r[1] \\ r[2] \end{pmatrix}$$

- Resolviendo el sistema 2×2 se llega a que,

2. Función de autocorrelación

- La autocorrelación cumple que,

$$r[m] + a_1 r[m-1] + a_2 r[m-2] = 0, \quad m > 0$$

- Para que quede completamente determinada, hay que especificar $r[0]$ y $r[1]$.
- Nuevamente, evaluando la ecuación 1 en $m = 1, 2$,

$$a_1 r[0] + (1 + a_2) r[1] = 0$$

$$a_2 r[0] + a_1 r[1] + r[2] = 0$$

- Evaluando en $m = 0$, la autocorrelación cumple que

$$r[0] + a_1 r[1] + a_2 r[2] = \sigma_v^2$$

- Las 3 ecuaciones conducen a un sistema lineal 3×3 ,

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & 1 + a_2 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r[0] \\ r[1] \\ r[2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_v^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Función de autocorrelación

- Despejando $r[1]$ de la segunda ecuación, $r[1] = \frac{-a_1}{1 + a_2} r[0]$
- Despejando $r[2]$ de la tercer ecuación
 $r[2] = -a_1 r[1] - a_2 r[0]$
- y sustituyendo $r[1]$ queda
 $r[2] = \left(\frac{a_1^2}{1 + a_2} - a_2 \right) r[0]$
- Se tiene $r[1]$ y $r[2]$ en función de $r[0]$. Sustituyendo en la primer ecuación se tiene

$$r[0] - \frac{a_1^2}{1 + a_2} r[0] + a_2 \left(\frac{a_1^2}{1 + a_2} - a_2 \right) r[0] = \sigma_v^2$$

- Operando y considerando que $r[0] = \sigma_u^2$ se llega a que,

$$r[0] = \sigma_u^2 = \frac{1 + a_2}{(1 - a_2) [(1 + a_2)^2 - a_1^2]} \sigma_v^2.$$

3. Condición de estacionaridad asintótica

- La condición de estacionaridad asintótica es que el filtro generador sea estable.
- La función de transferencia del filtro generador es,

$$H(z) = \frac{U(z)}{V(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

- Los polos p_1, p_2 del sistema son

$$1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1, p_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

- Para estabilidad los polos deben estar dentro del círculo unidad

$$|p_1|, |p_2| < 1.$$

Análisis de un proceso AR(2)

3. Condición de estacionaridad asintótica

Encontrar las condiciones sobre a_1 , a_2 tal que

$$\left| \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \right| < 1$$

(a) Raíces reales: $a_1^2 - 4a_2 \geq 0 \Rightarrow a_2 \leq \frac{a_1^2}{4}$

(1) Caso $a_1 \geq 0$. La raíz de módulo mayor es negativa: raíz dominante negativa

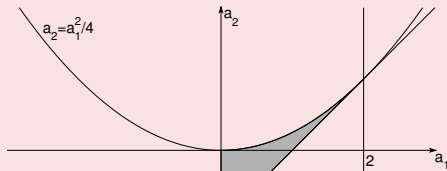
$$\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \geq -1 \Rightarrow 2 - a_1 \geq \sqrt{a_1^2 - 4a_2}$$

(i) $2 - a_1 \geq 0 \Rightarrow a_1 \leq 2$

(ii) $(2 - a_1)^2 \geq a_1^2 - 4a_2$

$$\Rightarrow a_2 \geq a_1 - 1$$

Por lo tanto, las condiciones



Análisis de un proceso AR(2)

3. Condición de estacionaridad asintótica

Encontrar las condiciones sobre a_1 , a_2 tal que

$$\left| \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \right| < 1$$

(a) Raíces reales: $a_1^2 - 4a_2 \geq 0 \Rightarrow a_2 \leq \frac{a_1^2}{4}$

(2) Caso $a_1 < 0$. La raíz de módulo mayor es positiva: raíz dominante positiva

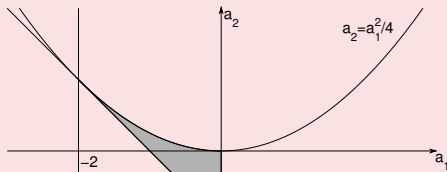
$$\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \leq 1 \Rightarrow 2 + a_1 \geq \sqrt{a_1^2 - 4a_2}$$

(i) $2 + a_1 \geq 0 \Rightarrow a_1 \geq -2$

(ii) $(2 + a_1)^2 \geq a_1^2 - 4a_2$

$$\Rightarrow a_2 \geq -a_1 - 1$$

Por lo tanto, las condiciones



Análisis de un proceso AR(2)

3. Condición de estacionaridad asintótica

(b) Raíces complejas: $a_1^2 - 4a_2 < 0 \Rightarrow a_2 > \frac{a_1^2}{4}$

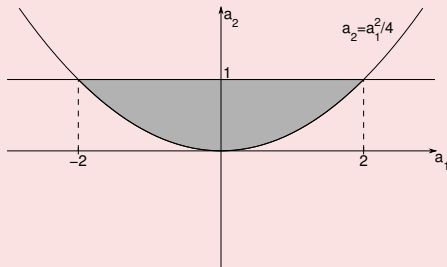
- Las raíces son $p_1, p_2 = \frac{-a_1 \pm j\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$
- con módulo $|p_1|^2 = |p_2|^2 = \frac{a_1^2}{4} + \frac{4a_2 - a_1^2}{4}$

Imponiendo la condición,

$$\frac{a_1^2}{4} + \frac{4a_2 - a_1^2}{4} \leq 1$$
$$\Rightarrow a_2 \leq 1$$

Finalmente, las condiciones son

$$a_2 > \frac{a_1^2}{4}$$



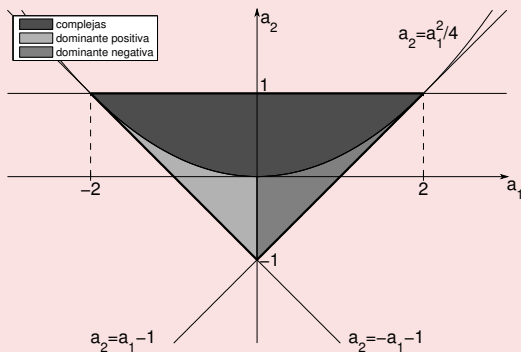
3. Condición de estacionaridad asintótica

Condiciones de estacionaridad asintótica:

$$a_2 \leq 1$$

$$a_2 \geq a_1 - 1$$

$$a_2 \geq -a_1 - 1$$

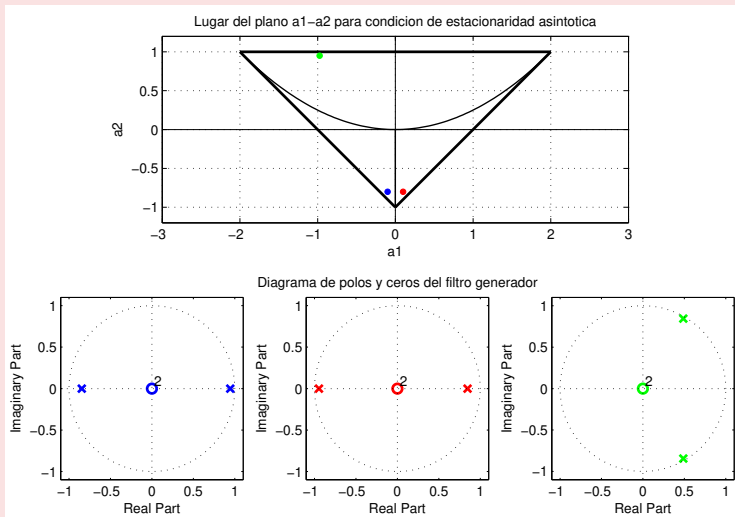


- Raíz dominante positiva: La autocorrelación es siempre positiva.
- Raíz dominante negativa: Las muestras impares son negativas y las muestras pares positivas.

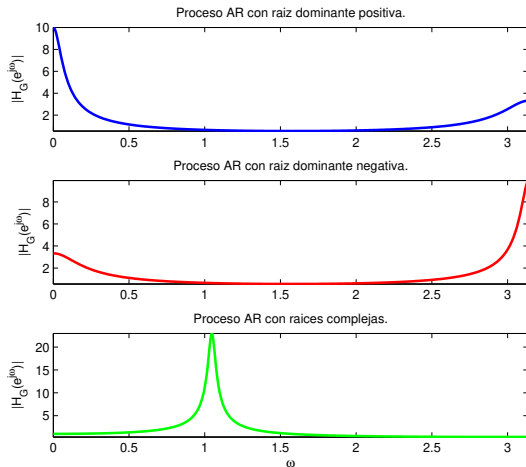
$$r[m] = Ap_1^m + Bp_2^m$$

Análisis de un proceso AR(2)

4. Simulación: parámetros del modelo



4. Simulación: transferencia del filtro generador



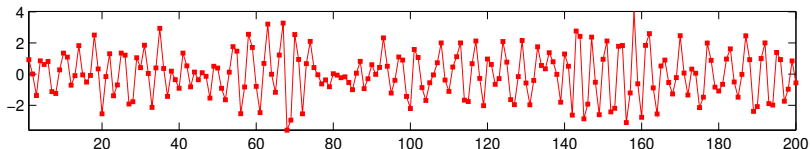
$$H_G(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$H_G(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-2j\omega}}$$

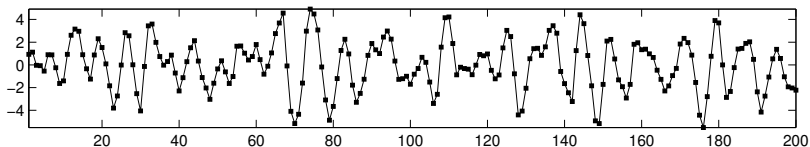
Análisis de un proceso AR(2)

4. Simulación: realizaciones

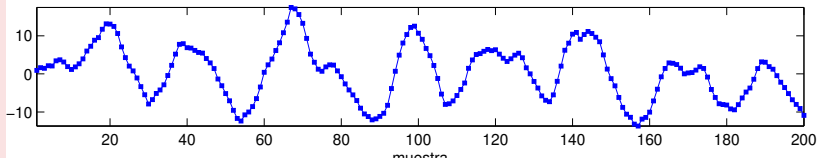
Proceso AR(2) con $a_1 = 0$, $a_2 = 0.8$



Proceso AR(2) con $a_1 = -1.2$, $a_2 = 0.8$

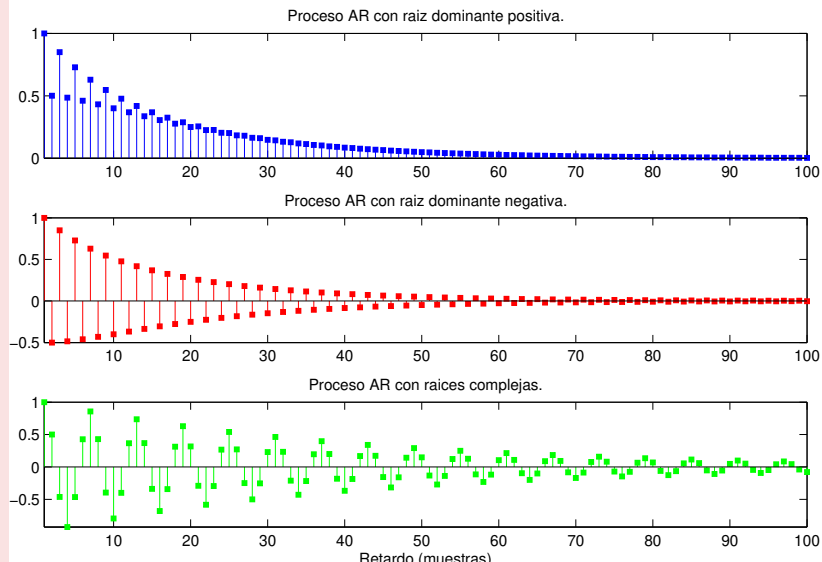


Proceso AR(2) con $a_1 = -1.75$, $a_2 = 0.8$

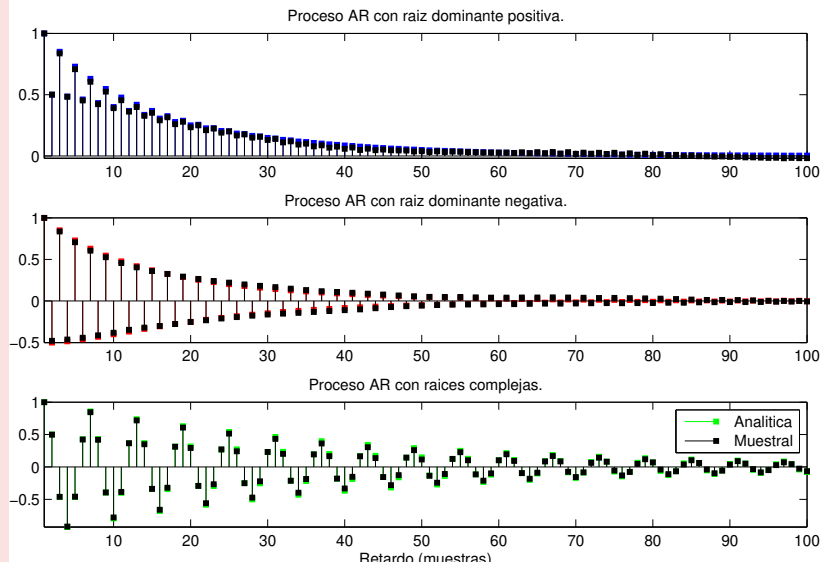


Análisis de un proceso AR(2)

4. Simulación: autocorrelación



4. Simulación: autocorrelación muestral



Problema [?]

- Sea $x[n]$ un proceso WSS con función de autocorrelación $r_x[k]$.
- Si $x[n]$ es filtrado con un filtro LTI estable con respuesta al impulso $h[n]$, la salida es

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]x[n-l]$$

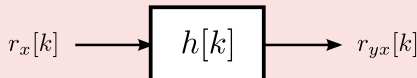
Se pide

- 1 Calcular $r_{yx}[n+k, n] = E(y[n+k]x^*[n])$
- 2 Calcular $r_y[n+k, n] = E(y[n+k]y^*[n])$
- 3 Calcular la densidad espectral de potencia $P_y(e^{j\omega})$
- 4 Calcular $P_y(z)$

1. Correlación cruzada entre la entrada y la salida

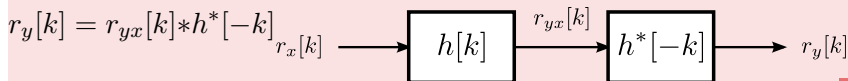
$$\begin{aligned}r_{yx}[n+k, n] &= E(y[n+k]x^*[n]) \\&= E\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]x[n+k-l]x^*[n]\right) \\&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]E(x[n+k-l]x^*[n]) \\&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]r_x[n+k-l, n] \\&\stackrel{x[n] \text{ WSS}}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]r_x[k-l]\end{aligned}$$

$$r_{yx}[k] = r_x[k] * h[k]$$



2. Autocorrelación de la salida

$$\begin{aligned} r_y[n+k, n] &= E(y[n+k]y^*[n]) = E\left(y[n+k] \sum_{l=-\infty}^{\infty} x^*[l]h^*[n-l]\right) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h^*[n-l]E(y[n+k]x^*[l]) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h^*[n-l]r_{yx}[n+k-l] \\ &\stackrel{m=n+k-l}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*[m-k]r_{yx}[m] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*[-(k-m)]r_{yx}[m] \end{aligned}$$



2. Autocorrelación de la salida

Sustituyendo la autocorrelación cruzada se llega a

$$r_y[k] = r_x[k] * h[k] * h^*[-k] \quad (2)$$

3. Densidad espectral de potencia (PSD)

Teniendo en cuenta que,

$$h[k] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} H(e^{j\omega}) \quad \implies \quad h^*[-k] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} H^*(e^{j\omega})$$

si se aplica la DTFT a la ecuación 2 se llega a que

$$\begin{aligned} P_y(e^{j\omega}) &= P_x(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega}) \\ &= P_x(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2. \end{aligned}$$

4. PSD en el dominio z

Teniendo en cuenta que,

$$h[k] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} H(z) \quad \Longrightarrow \quad h^*[-k] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} H^*(1/z^*)$$

si se aplica la transformada z a la ecuación 2 se llega a que

$$P_y(z) = P_x(z)H(z)H^*(1/z^*).$$

