

Estimación y Predicción en Series Temporales

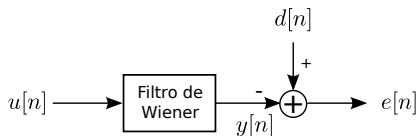
Práctico 5: Filtros de Wiener

Departamento de Procesamiento de Señales

Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería

2022

Filtro de Wiener



- $d[n]$ señal deseada
- $u[n]$ señal observable conjuntamente estacionaria con $d[n]$

- : Diseñar un filtro discreto cuya salida $y[n]$ provea un estimador de una señal deseada $d[n]$ a partir de una señal de entrada correlacionada $u[n]$.
- El diseño del filtro se basa en minimizar el error de estimación

$$e[n] = d[n] - y[n].$$

- El criterio de optimización es la minimización del error cuadrático medio de la estimación

$$J = E(|e[n]|^2)$$

- Hay que encontrar los coeficientes $w[i]$ del filtro de forma que J sea mínimo

Filtro de Wiener

- : El filtro Wiener es FIR con M coeficientes.

- $J(\mathbf{w}) = \sigma_d^2 - \mathbf{p}^H \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}$
 \mathbf{p} es la correlación cruzada entre la entrada y la señal deseada,

$$\mathbf{p} = E(\mathbf{u}[n]d^*[n])$$

con

$$\mathbf{u}[n] = [u[n] \ u[n-1] \ \dots \ u[n-M+1]]^T$$

Es decir,

$$\mathbf{p} = [p[0] \ p[-1] \ \dots \ p[-M+1]]^T$$

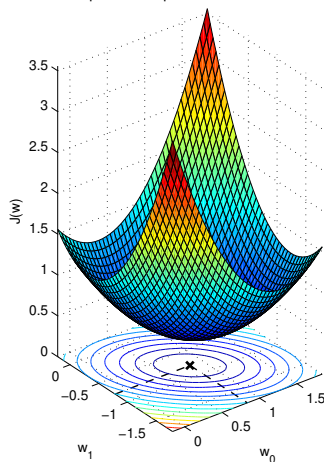
donde

$$p[-k] = E(u[n-k]d^*[n]).$$

- \mathbf{R} es la matriz de autocorrelación de la entrada:
 $\mathbf{R} = E(\mathbf{u}[n]\mathbf{u}^H[n])$

- $J(\mathbf{w})$ es una forma cuadrática convexa. Tiene mínimo.

Superficie de performance del error



- Los coeficientes del filtro óptimo que minimizan el error cuadrático medio cumplen que

$$\nabla_{\mathbf{w}} J = 0,$$

- lo que conduce al sistema $M \times M$ denominado

$$\mathbf{R}\mathbf{w}_0 = \mathbf{p} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w}_0 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$$

- Con el filtro funcionando en condiciones óptimas, el error mínimo es

$$\begin{aligned} J_{min} &= \sigma_d^2 - \sigma_y^2 \\ &= \sigma_d^2 - \mathbf{w}_0^H \mathbf{R} \mathbf{w}_0 \\ &= \sigma_d^2 - \mathbf{p}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E(y[n]y^*[n]) \\ &= E(\mathbf{w}^H \mathbf{u}[n] \mathbf{u}^H[n] \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{w}_0^H \mathbf{R} \mathbf{w}_0 \end{aligned}$$

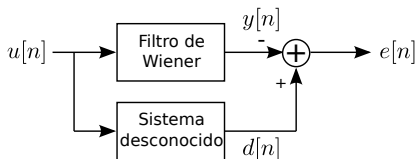
Observaciones

- Se necesita conocer la función de autocorrelación de la entrada y la correlación cruzada entre la entrada y la señal deseada.
- El filtro de Wiener solo puede aplicarse en condiciones de estacionariedad. Los procesos $u[n]$ y $d[n]$ tienen que ser conjuntamente estacionarios.
- Se necesita invertir la matriz de autocorrelación, que es Topelitz y simétrica.
 - Puede ser costoso computacionalmente.
 - Mala estimación si la matriz está mal condicionada.

Bibliografía

- Filtro de Wiener: [?]
- Ejemplos: [?]

Identificación de sistema



- La salida del sistema desconocido es la señal deseada $d[n]$.
- La estimación de $d[n]$ es la salida del filtro Wiener con la misma entrada que el sistema desconocido.

Ejemplos

- El sistema desconocido es
 - (i) IIR con
$$H_1(z) = \frac{1}{1 + az^{-1}}$$
 - (ii) FIR con
$$H_2(z) = 1 - az^{-1}$$
- Se diseña un filtro de Wiener de orden 1.
- La señal de entrada es ruido blanco de media nula y potencia σ_u^2 .

Ecuaciones de Wiener-Hopf

- Como el filtro Wiener es de primer orden, $M = 2$. Hay que resolver las ecuaciones de Wiener-Hopf de tamaño 2×2 .

Identificación de sistema

- La entrada $u[n]$ es ruido blanco. Por lo tanto,
 $r_u[k] = \delta[k]\sigma_u^2$.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_u[0] & r_u[1] \\ r_u[1] & r_u[0] \end{bmatrix} = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_u^2 \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{p} = E(\mathbf{u}[n]d^*[n]), \quad p[-k] = E(u[n-k]d^*[n]) \text{ con } k = 0, 1$$

- Como el sistema desconocido es causal, la salida $d[n]$ del sistema es independiente de muestras futuras de la entrada $u[n]$,

$$p[-k] = E(u[n-k]d[n]) = E(u[n-k])E(d[n]) = 0 \quad \text{si } k < 0$$

IIR con

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + az^{-1}} = \frac{D(z)}{U(z)} \Rightarrow d[n] = -ad[n-1] + u[n]$$

Identificación de sistema

- La correlación cruzada es

$$p[-k] = \begin{cases} -ap[-k+1] + \delta[k]\sigma_u^2 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

- Evalutando en $k = 0, 1$ se tiene que,

$$\begin{aligned} p[0] &= -ap[1] + \sigma_u^2 & p[0] &= \sigma_u^2 \\ p[-1] &= -ap[0] & p[-1] &= -a\sigma_u^2 \end{aligned} \quad p[-k] = \begin{cases} (-a)^k \sigma_u^2 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

- y resolviendo las ecuaciones de Wiener-Hopf se llega a que

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} = \frac{1}{\sigma_u^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_u^2} \mathbf{p}$$

- La función de transferencia del filtro de Wiener es

$$H_w(z) = 1 - az^{-1}.$$

- En el caso en que el filtro Wiener sea de orden M arbitrario

Identificación de sistema

- El filtro Wiener obtenido es la mejor aproximación posible del filtro IIR mediante un filtro FIR,

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + az^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-az^{-1})^k = 1 - az^{-1} + a^2z^{-2} - a^3z^{-3} + \dots$$

- Calculando σ_d^2 y σ_y^2 se obtiene el error mínimo J_{min} ,

$$\begin{aligned}\sigma_d^2 &= \mathbf{h}^T \mathbf{R} \mathbf{h} \\ &= \sigma_u^2 \mathbf{h}^T \mathbf{h} \\ &= \sigma_u^2 \sum_{k=0}^{\infty} h^2[k] \\ &= \sigma_u^2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k} \\ &= \sigma_u^2 \frac{1}{1 - a^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= \mathbf{w}_0^T \mathbf{R} \mathbf{w}_0 \\ &= \sigma_u^2 \mathbf{w}_0^T \mathbf{w}_0 \\ &= \sigma_u^2 \sum_{k=0}^M w_0^2[k] \\ &= \sigma_u^2 \sum_{k=0}^M a^{2k} \\ &= \sigma_u^2 \frac{1 - a^{2(M+1)}}{1 - a^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_{min} &= \sigma_d^2 - \sigma_y^2 \\ &= \sigma_u^2 \frac{a^{2(M+1)}}{1 - a^2} \\ &> 0\end{aligned}$$

Identificación de sistema

FIR con $H_2(z) = 1 - az^{-1} = \frac{D(z)}{U(z)} \Rightarrow d[n] = u[n] - au[n-1]$

- Para $k \geq 0$ la correlación cruzada cumple que

$$\begin{aligned} p[-k] &= E\{u[n-k](u[n] - au[n-1])\} \\ &= E\{u[n-k]u[n]\} - aE\{u[n-k]u[n-1]\} \\ &= r_u[-k] - ar_u[-k+1] \\ &= \delta[k]\sigma_u^2 - \delta[k-1]a\sigma_u^2 \end{aligned} \quad \mathbf{p} = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- y resolviendo las ecuaciones de Wiener-Hopf se llega a que

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} = [1, -a, 0, \dots, 0]^T$$

- La función de transferencia del filtro de Wiener es

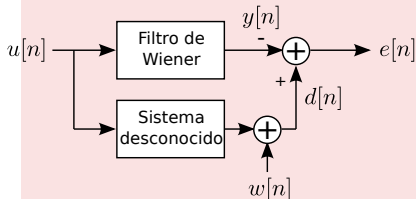
$$H_w(z) = 1 - az^{-1}$$

coincidiendo con el sistema desconocido.

- El error mínimo J_{\min} es nulo en este caso

Identificación de sistema

Observaciones



- La salida del sistema desconocido se observa contaminada con ruido blanco $w[n]$ de media nula no correlacionado con la entrada.
- Como $w[n]$ no está correlacionado con la entrada $u[n]$, la correlación cruzada entre la entrada y la señal deseada no cambia. Por lo tanto, los coeficientes del filtro Wiener no cambian.
- El error cuadrático medio del error es en este caso $J_{min} = \sigma_w^2$.

Identificación de sistema

Observaciones

- Teniendo en cuenta que la salida del sistema desconocido es,

$$d[n] = \sum_{k=0}^M h[k]u[n-k] + w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N + M - 1$$

es posible plantear los datos como un modelo lineal,

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w},$$

$$\begin{bmatrix} d[0] \\ d[1] \\ \vdots \\ d[p-2] \\ d[p-1] \\ \vdots \\ d[N-2] \\ d[N-1] \\ d[N] \\ d[N+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u[0] & 0 & \cdots & 0 \\ u[1] & u[0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u[M-1] & u[M-2] & \cdots & 0 \\ u[M] & u[M-1] & \cdots & u[0] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u[N-2] & u[N-3] & \cdots & u[N-M-2] \\ u[N-1] & u[N-2] & \cdots & u[N-M-1] \\ 0 & u[N-1] & \cdots & u[N-M] \\ 0 & 0 & \cdots & u[N-M+1] \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ \vdots \\ h[M] \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}} + \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[p-2] \\ w[p-1] \\ \vdots \\ w[N-2] \\ w[N-1] \\ w[N] \\ w[N+1] \end{bmatrix}$$

- Como se vio previamente, el estimador MVU es [?]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{d}.$$

- Como además,

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{R} \qquad \mathbf{H}^T \mathbf{d} = \mathbf{p}$$

- el estimador MVU de los coeficientes del sistema es,

$$\hat{h}_{\text{MVU}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p},$$

coincidiendo con los coeficientes del filtro de Wiener.

Predicción lineal



- La señal deseada $d[n]$ es cierta señal $x[n]$ que se quiere predecir.
- La entrada al filtro Wiener es la señal retardada L muestras $u[n] = x[n-L]$.

Ejemplo

- La señal a predecir es un modelo AR(1):
$$x[n] = -ax[n-1] + v[n]$$
- Se diseña un filtro de Wiener de primer orden ($M = 2$)

Ecuaciones de Wiener-Hopf

- Como el filtro Wiener es de primer orden, hay que resolver las ecuaciones de Wiener-Hopf de tamaño 2×2 .

$$\mathbf{R}_u \mathbf{w} = \mathbf{p}$$
$$\begin{bmatrix} r_u[0] & r_u[1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p[0] \end{bmatrix}$$

- Como la entrada al filtro de Wiener es un proceso AR, se cumplen las ecuaciones de Yule-Walker,

$$r_u[k] = -ar_u[k-1] \quad \text{si } k > 0$$

$$r_u[0] = -ar_u[1] + \sigma_v^2$$

(El retardo no
cambia la
autocorrelación,
 $r_u[n] = r_x[n]$)

- Evaluando la primera ecuación en $k = 1$ se obtiene el sistema

$$\begin{cases} r_u[1] = -ar_u[0] \\ r_u[0] = -ar_u[1] + \sigma_v^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} r_u[0] &= \frac{\sigma_v^2}{1-a^2} \\ r_u[1] &= \frac{-a\sigma_v^2}{1-a^2} \end{aligned}$$

$$r_u[k] = \frac{(-a)^{|k|}\sigma_v^2}{1-a^2}$$

- La matriz de autocorrelación es

$$\mathbf{R} = \frac{\sigma_v^2}{1-a^2} \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

Predicción lineal

- Como $d[n] = x[n]$ y $u[n] = x[n - L]$, la correlación cruzada es

$$\begin{aligned} p[-k] &= E\{u[n - k]d[n]\} \\ &= E\{x[n - L - k]x[n]\} \\ &= r_x[k + L] \\ &= r_u[k + L] \end{aligned}$$

- y el vector de correlación cruzada es

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p[0] \\ p[-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_u[L] \\ r_u[L + 1] \end{bmatrix} = \frac{\sigma_v^2}{1 - a^2} \begin{bmatrix} (-a)^L \\ (-a)^{L+1} \end{bmatrix}$$

- Teniendo en cuenta que \mathbf{R}^{-1} es

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sigma_v^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Predicción lineal

- los coeficientes del filtro quedan

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_0 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} &= \frac{1}{\sigma_v^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \frac{\sigma_v^2}{1-a^2} \begin{bmatrix} (-a)^L \\ (-a)^{L+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1-a^2} \begin{bmatrix} (-a)^L + a(-a)^{L+1} \\ a(-a)^L + (-a)^{L+1} \end{bmatrix} & \mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} (-a)^L \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1-a^2} \begin{bmatrix} (1-a^2)(-a)^L \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Finalmente, el predictor queda $\hat{x}[n] = (-a)^L x[n-L]$
- :

$$\begin{aligned}x[n] &= -ax[n-1] + v[n] \\ &= (-a)^2 x[n-2] - av[n-1] + v[n]\end{aligned}$$

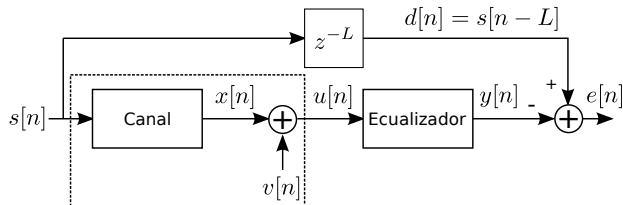
\vdots

$$= (-a)^L x[n-L] + \sum_{k=0}^{L-1} (-a)^k v[n-k]$$

- Conociendo $x[n - L]$, el valor esperado de $x[n]$ es

$$\begin{aligned} E(x[n]) &= E \left((-a)^L x[n - L] + \sum_{k=0}^{L-1} (-a)^k v[n - k] \right) \\ &= (-a)^L x[n - L] + \sum_{k=0}^{L-1} (-a)^k E(v[n - k]) \\ &= (-a)^L x[n - L] \\ &= \hat{x}[n] \end{aligned}$$

Ecuación de canal



- $s[n]$ ruido blanco de media nula y potencia σ_s^2 .
- $v[n]$ ruido blanco introducido por el canal de media nula y potencia σ_v^2 independiente de $s[n]$.

Ejemplo

- El canal se modela como un AR(1):
$$x[n] = -ax[n-1] + s[n]$$
- Se diseña un filtro de Wiener de primer orden ($M = 2$)

1. Matriz de autocorrelación de la entrada

- Como la entrada al filtro es $u[n]$, la matriz de autocorrelación cumple que

Ecualización de canal

- La matriz de autocorrelación queda finalmente,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_s^2}{1-a^2} + \sigma_v^2 & \frac{-a\sigma_s^2}{1-a^2} \\ \frac{-a\sigma_s^2}{1-a^2} & \frac{\sigma_s^2}{1-a^2} + \sigma_v^2 \end{bmatrix}$$

- La correlación cruzada es

$$\begin{aligned} p[-k] &= E \{u[n-k]d[n]\} \\ &= E \{(x[n-k] + v[n-k])s[n]\} \\ &\stackrel{(a)}{=} E \{x[n-k]s[n]\} \\ &\stackrel{(b)}{=} 0 \quad \text{si } k > 0 \end{aligned}$$

- (a) $v[n]$ y $s[n]$ no correlacionados.
- (b) Por causalidad, la salida $x[n]$ del canal no depende de muestras futuras de la entrada $s[n]$.

- y evaluando en $k = 0$ queda

$$p[0] = E \{x[n]s[n]\} = E \{(-ax[n-1] + s[n])s[n]\}$$

$$\stackrel{(b)}{=} E \{s^2[n]\}$$

$$\mathbf{p} = \sigma_s^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecualización de canal

- Los coeficientes del filtro se obtienen como $\mathbf{w}_0 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$, con

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{\sigma_s^2}{1-a^2} + \sigma_v^2\right)^2 - \left(\frac{a\sigma_s^2}{1-a^2}\right)^2} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_s^2}{1-a^2} + \sigma_v^2 & \frac{a\sigma_s^2}{1-a^2} \\ \frac{a\sigma_s^2}{1-a^2} & \frac{\sigma_s^2}{1-a^2} + \sigma_v^2 \end{bmatrix}.$$

- En el caso en que el canal no introduce ruido aditivo,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x \quad \text{y} \quad \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\sigma_s^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

- y los coeficientes del filtro de Wiener son

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} = \frac{1}{\sigma_s^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \sigma_s^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

Transferencia del
canal

Transferencia del
filtro Wiener

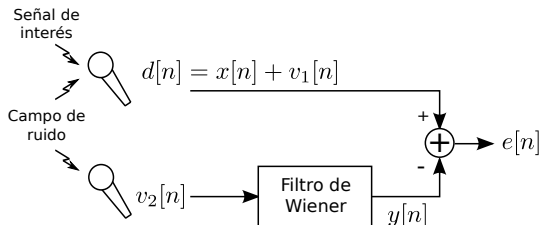
Transferencia de la
cascada

$$H_c(z) = \frac{1}{1 + az^{-1}}$$

$$H_w(z) = 1 + az^{-1}$$

$$H_c(z)H_w(z) = 1$$

Cancelación de ruido



- El objetivo es estimar la señal $x[n]$ a partir de observaciones contaminadas con ruido.
- Se cuenta con otro sensor ubicado en el campo de ruido de donde se obtienen observaciones del ruido $v_2[n]$ correlacionadas con el ruido contaminante $v_1[n]$.
- $v_1[n]$ y $v_2[n]$ no están correlacionados con la señal $x[n]$.

Ejercicio

- 1 Definiendo la correlación cruzada entre $u[n]$ y $d[n]$ como

$$p_{ud}[-k] = E(u[n-k]d^*[n])$$

Indicar cual de las siguientes propiedades se cumplen:

$$(i) \quad p_{ud}[-k] = p_{ud}^*[k] \qquad (ii) \quad p_{ud}[-k] = p_{du}^*[k]$$

- 2 Si $v_1[n]$ y $v_2[n]$ son procesos AR(1) dados por

$$v_1[n] = av_1[n-1] + g[n] \qquad v_2[n] = bv_2[n-1] + g[n]$$

donde $g[n]$ es ruido blanco de media nula y potencia σ_g^2 .

Calcular $p_{v_2v_1}[-k]$ para todo k .

- 3 Calcular $p_{v_2d}[-k]$ para todo k teniendo en cuenta que $x[n]$ no está correlacionado con $g[n]$. Explicar porque el esquema de la figura funciona como cancelador de ruido.

Cancelación de ruido

- $v_1[n]$ y $v_2[n]$ son procesos AR(1) dados por

$$v_1[n] = av_1[n-1] + g[n] \qquad v_2[n] = bv_2[n-1] + g[n]$$

- La correlación cruzada entre $v_2[n]$ y $v_1[n]$ es

$$\begin{aligned} p_{v_2v_1}[-k] &= E(v_2[n-k]v_1[n]) \\ &= E\{v_2[n-k](av_1[n-1] + g[n])\} \\ &= aE\{v_2[n-k]v_1[n-1]\} + E\{v_2[n-k]g[n]\} \\ &= ap_{v_2v_1}[-k+1] + \delta[k]\sigma_g^2 \quad \text{para } k \geq 0 \end{aligned}$$

- Realizando los mismos pasos se puede ver que

$$p_{v_1v_2}[-k] = bp_{v_1v_2}[-k+1] + \delta[k]\sigma_g^2 \quad \text{para } k \geq 0$$

- Como $p_{v_1v_2}[-k] = p_{v_2v_1}[k]$, la ecuación anterior queda

$$p_{v_2v_1}[k] = bp_{v_2v_1}[k-1] + \delta[k]\sigma_g^2 \quad \text{para } k \geq 0$$

o equivalentemente

$$p_{v_2v_1}[-k] = bp_{v_2v_1}[-k-1] + \delta[k]\sigma_g^2 \quad \text{para } k \leq 0$$

Cancelación de ruido

- Se tiene entonces que

$$p_{v_2v_1}[-k] = \begin{cases} ap_{v_2v_1}[-k+1] + \delta[k]\sigma_g^2 & k \geq 0 \\ bp_{v_2v_1}[-k-1] + \delta[k]\sigma_g^2 & k \leq 0 \end{cases}$$

- Evaluando la primer ecuación en $k = 0$ y la segunda en $k = -1$,

$$\begin{aligned} p_{v_2v_1}[0] &= ap_{v_2v_1}[1] + \sigma_g^2 \\ p_{v_2v_1}[1] &= ap_{v_2v_1}[0] \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad p_{v_2v_1}[0] = \frac{\sigma_g^2}{1-ab}$$

- Usando la condición inicial $p_{v_2v_1}[0]$ se pueden resolver las ecuaciones en recurrencia,

$$p_{v_2v_1}[-k] = \begin{cases} \frac{\sigma_g^2 a^k}{1-ab} & k \geq 0 \\ \frac{\sigma_g^2 b^{-k}}{1-ab} & k \leq 0 \end{cases}$$

