

Estimación y Predicción en Series Temporales

Práctico 2: Estimadores MVU

Departamento de Procesamiento de Señales

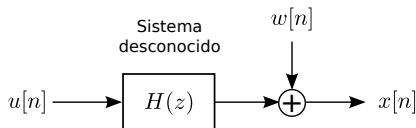
Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería

2022

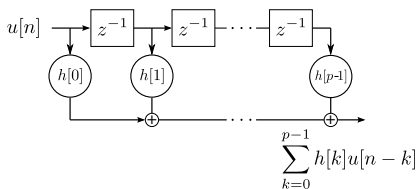
Problema 1: identificación de un sistema [?]

- El problema consiste en identificar un sistema.
- Una estrategia es inyectar al sistema una entrada $u[n]$ conocida y observar la salida $x[n]$. A partir de estos datos, se intenta deducir los coeficientes del filtro.
- Se asume que la salida se observa contaminada con ruido blanco gaussiano $w[n]$, $w[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
- Se asume como modelo que el sistema es un filtro FIR de orden p . Hay que identificar los coeficientes $h[i]$ con $i = 0, 1, \dots, p-1$.

Modelo del problema



Modelo de $H(z)$: FIR



Problema 1: identificación de un sistema

Problema

Asumiendo que

- La entrada $u[n]$ está activa en $n = 0, 1, \dots, N - 1$.
- La salida se observa en $n = 0, 1, \dots, N + p - 2$.

Se pide:

- 1 Plantear el problema como un modelo lineal,

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w},$$

especificando la matriz \mathbf{H} y el vector $\boldsymbol{\theta}$.

- 2 Escribir el estimador óptimo $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y la matriz de covarianza del estimador $\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ en función de los parámetros del problema.
- 3 Calcular y dar una interpretación a $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ y a $\mathbf{H}^T \mathbf{x}$.
- 4 Expresar el estimador óptimo y la matriz de covarianza en función de los resultados del punto anterior.
- 5 La varianza del estimador es función de la entrada de

Problema 1: identificación de un sistema

1. Planteo del problema como un modelo lineal

- La salida del sistema es,

$$x[n] = \sum_{k=0}^{p-1} h[k]u[n-k] + w[n] \quad n = 0, 1, \dots, N + p - 2$$

- En notación matricial queda

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[p-2] \\ x[p-1] \\ \vdots \\ x[N-2] \\ x[N-1] \\ x[N] \\ x[N+1] \\ \vdots \\ x[N+p-2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u[0] & 0 & \cdots & 0 \\ u[1] & u[0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u[p-2] & u[p-3] & \cdots & 0 \\ u[p-1] & u[p-2] & \cdots & u[0] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u[N-2] & u[N-3] & \cdots & u[N-p-1] \\ u[N-1] & u[N-2] & \cdots & u[N-p] \\ 0 & u[N-1] & \cdots & u[N-p+1] \\ 0 & 0 & \cdots & u[N-p+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u[N-1] \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ h[2] \\ \vdots \\ h[p-1] \end{bmatrix}}_{\theta} + \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ \vdots \\ w[p-2] \\ w[p-1] \\ \vdots \\ w[N-2] \\ w[N-1] \\ w[N] \\ w[N+1] \\ \vdots \\ w[N+p-2] \end{bmatrix}$$

Problema 1: identificación de un sistema

2. Estimador óptimo y matriz de covarianza

Como el modelo es lineal en WGN, el estimador es MVU y eficiente.

El estimador MVU es

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{x}$$

La matriz de covarianza del estimador es

$$\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \sigma^2 (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$$

3. Cálculo de $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ y $\mathbf{H}^T \mathbf{x}$

- Se expresa la matriz \mathbf{H} en columnas como

$$\mathbf{H} = [\mathbf{u}[n] \ \mathbf{u}[n-1] \ \dots \ \mathbf{u}[n-p+1]]$$

donde

$$\mathbf{u}[n-i] = [\underbrace{0 \ \dots \ 0}_i \ u[0] \ \dots \ u[N-1] \ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{(n-1)-i}]^T \quad 0 \leq i \leq p-1$$

Problema 1: identificación de un sistema

3. Cálculo de $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ y $\mathbf{H}^T \mathbf{x}$ (cont)

- El elemento (i, j) de $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ es

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}^T \mathbf{H}]_{ij} &= \mathbf{u}^T [n - i] \mathbf{u} [n - j] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1-|i-j|} u[n] u[n + |i - j|] \\ &= N r_u[|i - j|], \end{aligned}$$

donde

$$r_u[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} u[n] u[n + k]$$

es la autocorrelación muestral de $u[n]$.

- Notar que

$$[\mathbf{H}^T \mathbf{H}]_{ii} = [\mathbf{H}^T \mathbf{H}]_{ii}$$

Es simétrica

Problema 1: identificación de un sistema

3. Cálculo de $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ y $\mathbf{H}^T \mathbf{x}$ (cont)

- Finalmente, $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ queda

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = N \begin{bmatrix} r_u[0] & r_u[1] & r_u[2] & \cdots & r_u[p-1] \\ r_u[1] & r_u[0] & r_u[1] & \cdots & r_u[p-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_u[p-2] & r_u[p-3] & \cdots & r_u[0] & r_u[1] \\ r_u[p-1] & r_u[p-2] & \cdots & r_u[1] & r_u[0] \end{bmatrix} = N \mathbf{R}_u$$

\mathbf{R}_u se llama **matriz de autocorrelación de $u[n]$ de orden p** .

- Por otro lado, el elemento i -ésimo de $\mathbf{H}^T \mathbf{x}$ es

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}^T \mathbf{x}]_i &= \mathbf{u}^T[n-i] \mathbf{x} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} u[n] x[n+i] \end{aligned}$$

$$r_{ux}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u[n] x[n+k]$$

es la **correlación cruzada**

Problema 1: identificación de un sistema

3. Cálculo de $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ y $\mathbf{H}^T \mathbf{x}$ (cont)

- Finalmente, $\mathbf{H}^T \mathbf{x}$ queda

$$\mathbf{H}^T \mathbf{x} = N \begin{bmatrix} r_{ux}[0] \\ r_{ux}[1] \\ \vdots \\ r_{ux}[p-1] \end{bmatrix} = N \mathbf{r}_{ux}.$$

\mathbf{r}_{ux} es vector de correlación cruzada entre $u[n]$ y $x[n]$.

4. Estimador óptimo y matriz de covarianza

El estimador MVU es

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{x} \implies$$

$$\hat{h} = \mathbf{R}_u^{-1} \mathbf{r}_{ux}$$

La matriz de covarianza es

$$\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \sigma^2 (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \implies$$

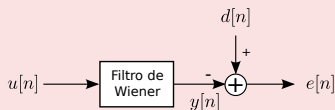
$$\mathbf{C}_{\hat{h}} = \frac{\sigma^2}{N} \mathbf{R}_u^{-1}$$

Problema 1: identificación de un sistema

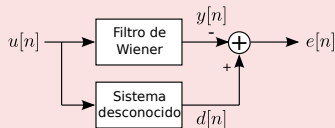
4. Estimador óptimo y matriz de covarianza

Analogía con el filtro de Wiener

Filtro de Wiener



Identificación de sistema



- Diseñar un filtro cuya salida $y[n]$ sea un estimador de una señal deseada $d[n]$.
- La entrada al filtro es una señal $u[n]$ correlacionada con $d[n]$.
- El criterio de optimización es la minimización de

$$J(\mathbf{w}) = E(e[n]e^*[n]) \text{ con } \mathbf{w} = [w_0, \dots, w_{M-1}]^T \text{ coefs. del filtro}$$

- El mínimo de $J(\mathbf{w})$ se obtiene cuando

Problema 1: identificación de un sistema

5. Entrada que minimiza la varianza del estimador.

- La matriz de covarianza del estimador es

$$\mathbf{C}_{\hat{h}} = \frac{\sigma^2}{N} \mathbf{R}_u^{-1}$$

- La covarianza del estimador depende de la señal de entrada $u[n]$ a través de \mathbf{R}_u .
- Se quiere encontrar $u[n]$ que minimize la varianza de los coeficientes $\hat{\mathbf{h}}$ del filtro.

- La varianza del coeficiente i -ésimo $\hat{h}[i]$ es

$$\text{var}(\hat{h}[i]) = \mathbf{C}_{\hat{h}ii} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{C}_{\hat{h}} \mathbf{e}_i \quad \mathbf{e}_i = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \underbrace{1}_{\text{posición } i} \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

- Como $\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1}$ es simétrica y definida positiva, puede descomponerse como (descomposición de Cholesky),

$$\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1} = \mathbf{D}^T \mathbf{D} \quad \text{con } \mathbf{D} \text{ matriz } p \times p \text{ invertible}$$

Problema 1: identificación de un sistema

5. Entrada que minimiza la varianza del estimador.

- Notando que

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{I} \mathbf{e}_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_i^T \mathbf{D}^T \mathbf{D}^{T-1} \mathbf{e}_i = 1 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{e}_i^T \mathbf{D}^T \mathbf{D}^{T-1} \mathbf{e}_i)^2 = 1$$

y definiendo

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \mathbf{D} \mathbf{e}_i \\ \xi_2 &= \mathbf{D}^{T-1} \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(\mathbf{e}_i^T \mathbf{D}^T)}_{\xi_1^T} \underbrace{\mathbf{D}^{T-1} \mathbf{e}_i}_{\xi_2} = (\xi_1^T \xi_2) = 1$$

- La desigualdad de Cauchy-Schwarz indica que para cualquier par de vectores ξ_1 y ξ_2 en un espacio con producto escalar se cumple que

$$|\langle \xi_1, \xi_2 \rangle|^2 \leq \langle \xi_1, \xi_1 \rangle \cdot \langle \xi_2, \xi_2 \rangle,$$

y la igualdad se da si $\xi_1 = c \xi_2$ (ξ_1 y ξ_2 colineales). Si el

Problema 1: identificación de un sistema

5. Entrada que minimiza la varianza del estimador.

- Se tiene que

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \mathbf{D}\mathbf{e}_i \\ \xi_2 &= \mathbf{D}^{T-1}\mathbf{e}_i\end{aligned}\quad (\xi_1^T \xi_1)(\xi_2^T \xi_2) \geq (\xi_1^T \xi_2)^2 = 1.$$

- Sustituyendo

$$\begin{aligned}(\xi_1^T \xi_1)(\xi_2^T \xi_2) &= (\mathbf{e}_i^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i^T \mathbf{D}^{T-1T} \mathbf{D}^{T-1} \mathbf{e}_i) \\ &= (\mathbf{e}_i^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D}^{T-1} \mathbf{e}_i) \\ &= (\mathbf{e}_i^T \mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1} \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i^T \mathbf{C}_{\hat{h}} \mathbf{e}_i) \\ &\geq 1\end{aligned}$$

- Finalmente

Para minimizar la varianza, la desigualdad de

$$\sigma^T \mathbf{C}_{\hat{h}} \sigma = \text{var}(h[i]) \geq 1$$

Problema 1: identificación de un sistema

5. Entrada que minimiza la varianza del estimador.

- Imponiendo la condición de que ξ_1 y ξ_2 sean colineales,

$$\xi_1 = c_i \xi_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} \mathbf{e}_i = c_i \mathbf{D}^{T-1} \mathbf{e}_i \quad \text{con } c_i \text{ una constante.}$$

o equivalentemente, la condición para minimizar la varianza de todos los coeficientes es

$$\mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{e}_i = c_i \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

- Teniendo en cuenta que $\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1}$, la condición queda

$$\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1} \mathbf{e}_i = c_i \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

o en palabras, la columna i -ésima de $\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1}$ tiene solo un elemento no nulo c_i en la posición i .

La matriz de covarianza inversa $\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1}$ tiene que ser diagonal

Problema 1: identificación de un sistema

5. Entrada que minimiza la varianza del estimador.

- Como

$$\mathbf{C}_{\hat{h}}^{-1} = \frac{N}{\sigma^2} \mathbf{R}_u,$$

la matriz de autocorrelación de la entrada debe ser diagonal,

$$r_u[k] = 0 \quad \forall k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad u[n] \text{ ruido no correlacionado}$$

- En esas condiciones, el estimador y su varianza son

Estimador MVU

Varianza

$$\hat{h}[i] = \frac{r_{ux}[i]}{r_u[0]}$$

$$\text{var}(\hat{h}[i]) = \frac{\sigma^2}{Nr_u[0]}$$

Los estimadores de los coeficientes son independientes.

Problema 1: identificación de un sistema

6. Interpretación en el dominio de la frecuencia [?]

La salida del filtro es

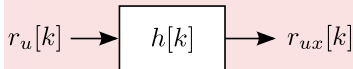
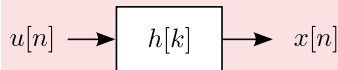
$$x[n] = (h * u)[n] = \sum_{l=0}^{p-1} h[l]u[n-l] \quad (1)$$

La correlación
cruzada entre la
entrada y la salida es

$$r_{ux}[k] = E(u[n]x[n+k]) \quad (2)$$

Sustituyendo 1 en 2
se ve que

$$r_{ux}[k] = E \left(u[n] \sum_{l=0}^{p-1} h[l]u[n+k-l] \right)$$



$$= \sum_{l=0}^{p-1} h[l]E(u[n]u[n+k-l])$$

$$= \sum_{l=0}^{p-1} h[l]r_u[k-l]$$

$$= (h * r_u)[k]$$

Problema 1: identificación de un sistema

6. Interpretación en el dominio de la frecuencia

- Aplicando al transformada de Fourier, se obtiene la densidad espectral de potencia cruzada entre la entrada y la salida,

$$r_{ux}[k] = (h * r_u)[k] \quad \Rightarrow \quad P_{ux}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})P_u(e^{j\omega})$$

- Si la entrada es ruido blanco, $r_u[k] = \sigma_u^2 \delta[k]$,

$$P_{ux}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\sigma_u^2,$$

por lo que un estimador de la respuesta en frecuencia del filtro es

$$\hat{h}(e^{j\omega}) = \frac{P_{ux}(e^{j\omega})}{\sigma_u^2} = \frac{P_{ux}(e^{j\omega})}{r_u[0]}$$

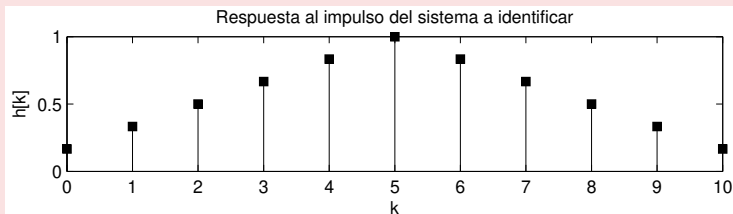
- En el dominio del tiempo, esta relación es

$$\hat{\mathbf{r}}_{ux}$$

Problema 1: identificación de un sistema

7. Simulación

- La respuesta al impulso del sistema es triangular.

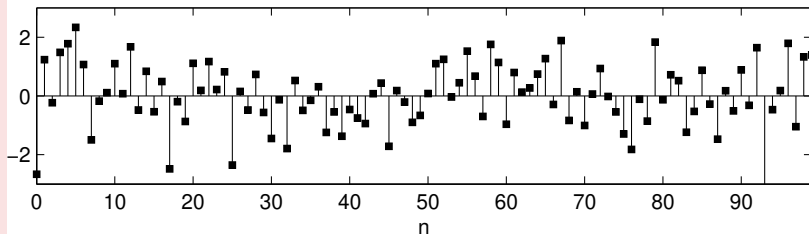


- Se usan dos señales $u[n]$ de prueba
 - Ruido blanco gaussiano
 - Diente de sierra
- La potencia $r_u[0]$ de las señales de prueba es unitaria.
- La potencia σ^2 del ruido $w[n]$ en las señales observadas $x[n]$ es también unitaria (SNR = 0 dB).
- El largo de las señales de prueba es $N = 1000$ muestras.

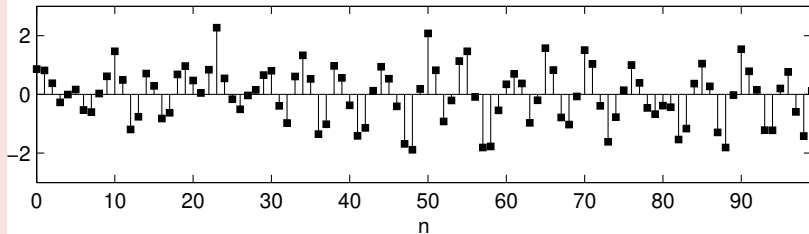
Problema 1: identificación de un sistema

7. Simulación

Entrada de prueba $u_1[n]$: WGN

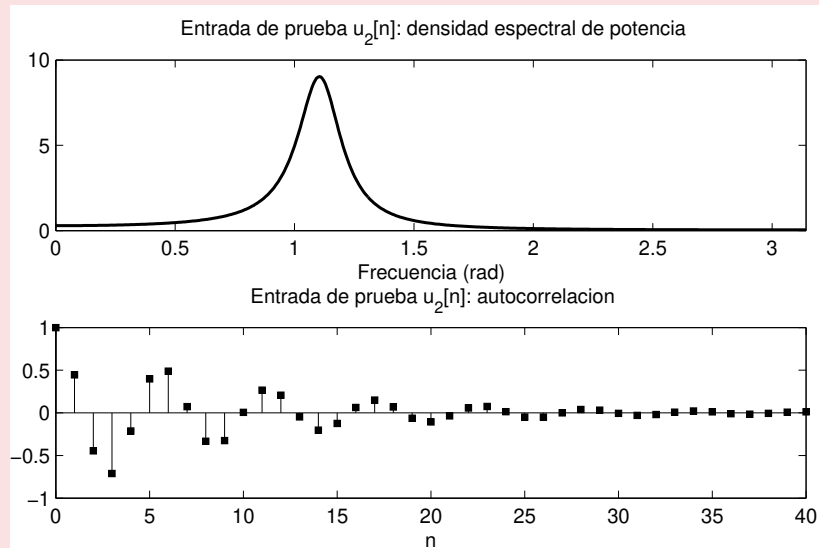


Entrada de prueba $u_2[n]$: ruido coloreado



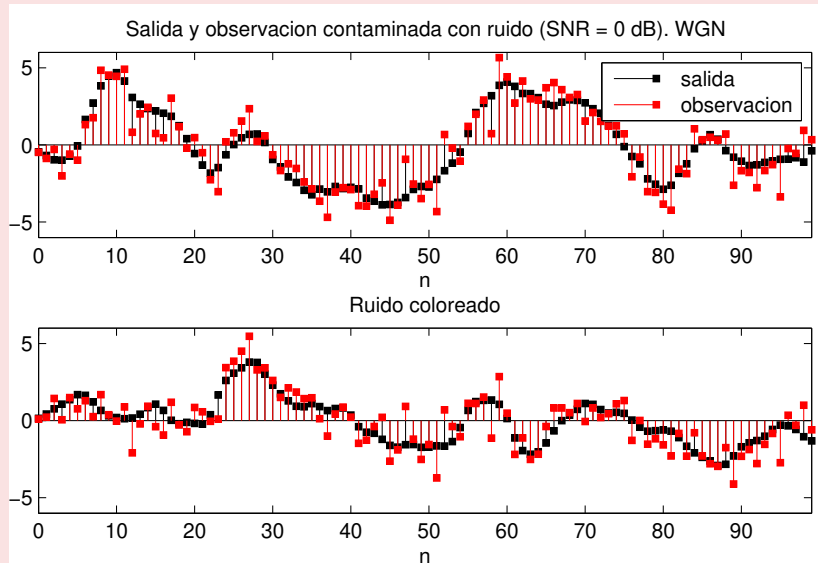
Problema 1: identificación de un sistema

7. Simulación



Problema 1: identificación de un sistema

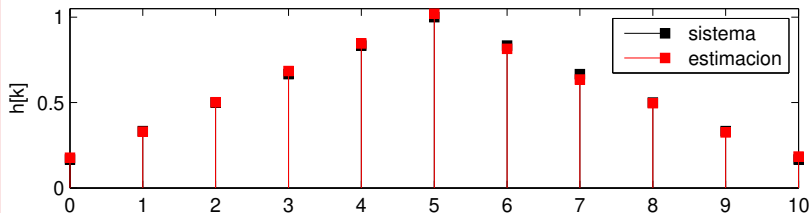
7. Simulación



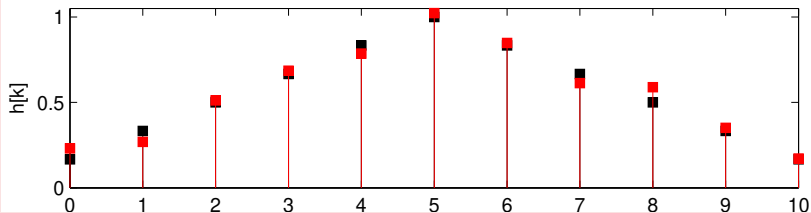
Problema 1: identificación de un sistema

7. Simulación

Estimacion del sistema: ruido gaussiano



Estimacion del sistema: ruido coloreado



Problema 1: identificación de un sistema

7. Simulación

