

Estimación y Predicción en Series Temporales

Práctico 7: Filtro de Kalman

Departamento de Procesamiento de Señales

Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería

2022

Formulación básica y notación

- Dado un proceso expresado en un modelo de variables de estado,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (\text{ecuación del proceso})$$

- El proceso se observa a partir de las mediciones

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (\text{ecuación de observación})$$

donde

- \mathbf{x}_k vector $n \times 1$ de estados del proceso.
- Φ_k matriz $n \times n$ de transición de estados. Relaciona \mathbf{x}_k a \mathbf{x}_{k+1} en ausencia de una fuerza o entrada exterior.
- \mathbf{w}_k vector $n \times 1$ de ruido blanco. Representa el error en el modelo.
- \mathbf{y}_k vector $m \times 1$ de observaciones o medidas.
- \mathbf{C}_k matriz $m \times n$ de observación. Relaciona los estados (o estados) con las observaciones.

Formulación básica y notación

- Se supone además que las matrices de covarianza del ruido del modelo y del ruido de observación son conocidas y cumplen que,

$$E(\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T) = \begin{cases} \mathbf{Q}_i & i = j \\ \mathbf{0} & i \neq j \end{cases} \quad E(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T) = \begin{cases} \mathbf{R}_i & i = j \\ \mathbf{0} & i \neq j \end{cases}$$

$$E(\mathbf{w}_i \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{0} \quad \forall i, j$$

- El objetivo del filtro de Kalman es encontrar un estimador del estado del sistema $\hat{\mathbf{x}}_k$ para cada $k \geq 0$ dadas las observaciones \mathbf{y}_k hasta el tiempo k inclusive.
- El estimador obtenido con el filtro de Kalman es óptimo en el sentido de que minimiza el error cuadrático medio del error de estimación del estado para cada k ,

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \arg \min_{\mathbf{x}} \text{tr}(\mathbf{P}_k(\mathbf{x})) \quad \text{donde } \mathbf{P}_k(\mathbf{x}) = E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k)^T]$$

Algoritmo

- Condiciones iniciales: estimación a priori del estado y la matriz de covarianza del error de estimación en $k = 0$,

$$\mathbf{x}_0^- \quad \mathbf{P}_0^- = E \left[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^-) (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^-)^T \right]$$

- Para $k = 0, 1, 2, \dots$, se calcula
 - La ganancia de Kalman:
$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$
 - Actualización de la estimación con la observación k -ésima,

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$$

- Actualización de la covarianza del error de estimación,

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^-$$

- Proyecciones del estado y la matriz de covarianza del error del paso $k + 1$ a partir de los datos actuales,

Observaciones

- Si las condiciones iniciales se eligen como

$$\mathbf{x}_0^- = E(\mathbf{x}_0) \qquad \mathbf{P}_0^- = E \left[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^-) (\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^-)^T \right],$$

el estimador $\hat{\mathbf{x}}_k$ es insesgado para todo k .

- La ganancia de Kalman \mathbf{K}_k y la matriz de covarianza del error de estimación \mathbf{P}_k no dependen de las observaciones \mathbf{y}_k , y por lo tanto pueden ser calculadas previamente antes de realizar la operación de filtrado.

Ejemplo: estimación de una constante

Se quiere estimar el nivel de DC a partir de observaciones contaminadas con ruido blanco gaussiano de potencia σ_v^2 no correlacionado.

- El modelo en variables de estado del problema se expresa como

$$x_{k+1} = x_k$$

$$y_k = x_k + v_k$$

- Los parámetros del filtro de Kalman son

$$\Phi_k = 1, \quad \mathbf{C}_k = 1, \quad \mathbf{Q}_k = 0, \quad \mathbf{R}_k = \sigma_v^2$$

Cálculo de la ganancia de Kalman y la covarianza del error

- La proyección de la covarianza del error es en este caso,

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \Phi_k \mathbf{P}_k \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k \Rightarrow P_{k+1}^- = P_k$$

Ejemplo: estimación de una constante

- La actualización de la covarianza del error es

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^- \\ P_k &= (1 - K_k) P_{k-1} \\ &= \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_{k-1} + \sigma_v^2}\right) P_{k-1} \\ &= \frac{P_{k-1} \sigma_v^2}{P_{k-1} + \sigma_v^2} \end{aligned}$$

- Teniendo en cuenta la condición inicial de la covarianza del error, la ecuación en diferencias puede resolverse recursivamente,

$$P_0 = P_1^-$$

$$P_1 = \frac{P_0 \sigma_v^2}{P_0 + \sigma_v^2}$$

$$P_2 = \frac{P_1 \sigma_v^2}{P_1 + \sigma_v^2} = \frac{P_0 \sigma_v^2}{2P_0 + \sigma_v^2}$$

y generalizando queda

$$P_k = \frac{P_0 \sigma_v^2}{kP_0 + \sigma_v^2}$$

Ejemplo: estimación de una constante

- Sustituyendo la covarianza del error en la ganancia de Kalman, se tiene que

$$K_k = \frac{P_{k-1}}{P_{k-1} + \sigma_v^2} \quad \Rightarrow \quad K_k = \frac{P_0}{kP_0 + \sigma_v^2}$$

Cálculo de la estimación del estado

- La predicción del estado a partir del estado anterior es

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k \quad \Rightarrow \quad \hat{x}_{k+1}^- = \hat{x}_k$$

- La actualización de la estimación del estado es

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad \Rightarrow \quad \hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + \frac{P_0}{kP_0 + \sigma_v^2} (y_k - \hat{x}_{k-1})$$

Ejemplo: estimación de una constante

Observaciones

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + \frac{P_0}{kP_0 + \sigma_v^2} (y_k - \hat{x}_{k-1}) \qquad P_k = \frac{P_0 \sigma_v^2}{kP_0 + \sigma_v^2}$$

- Si $\sigma_v^2 \rightarrow \infty$, es decir, las observaciones son completamente erróneas, para todo k se cumple que

$$K_k = 0 \qquad \hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} \qquad P_k = P_0$$

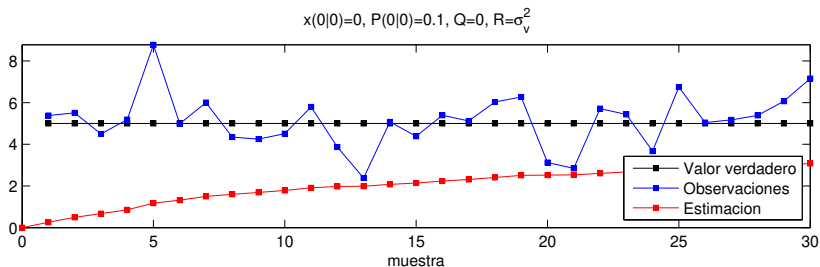
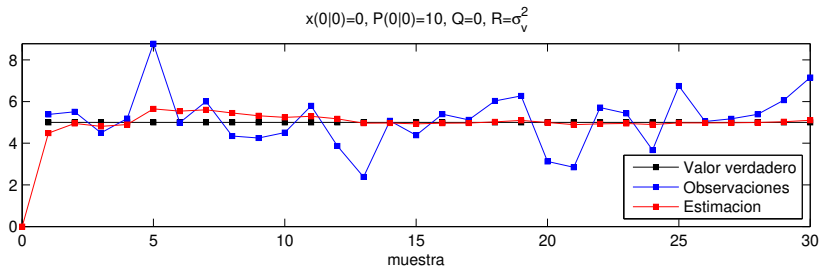
Las observaciones son ignoradas y el estimador es el estado inicial $\hat{x}_k = \hat{x}_0$ con varianza P_0 .

- Si $P_0 \rightarrow \infty$, significa que no hay conocimiento a priori sobre el proceso x . En ese caso se cumple que

$$K_k = \frac{1}{k} \qquad \hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + \frac{1}{k} (y_k - \hat{x}_{k-1})$$

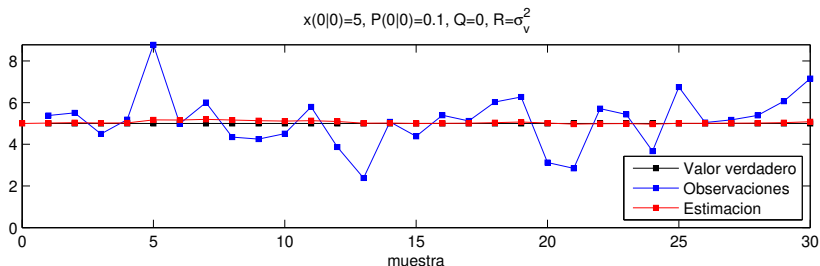
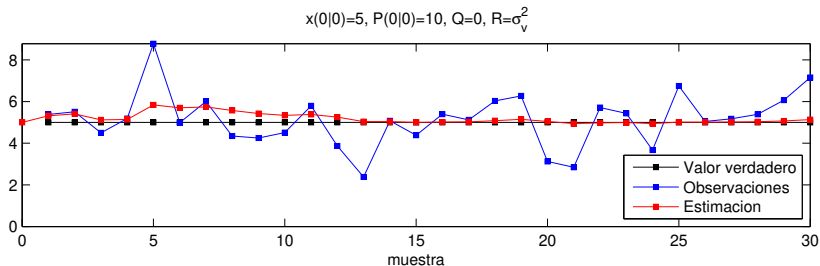
Ejemplo: estimación de una constante

Comparación al variar la matriz de covarianza inicial cuando la estimación inicial del estado es incorrecta.



Ejemplo: estimación de una constante

Comparación al variar la matriz de covarianza inicial cuando la estimación inicial del estado es correcta.

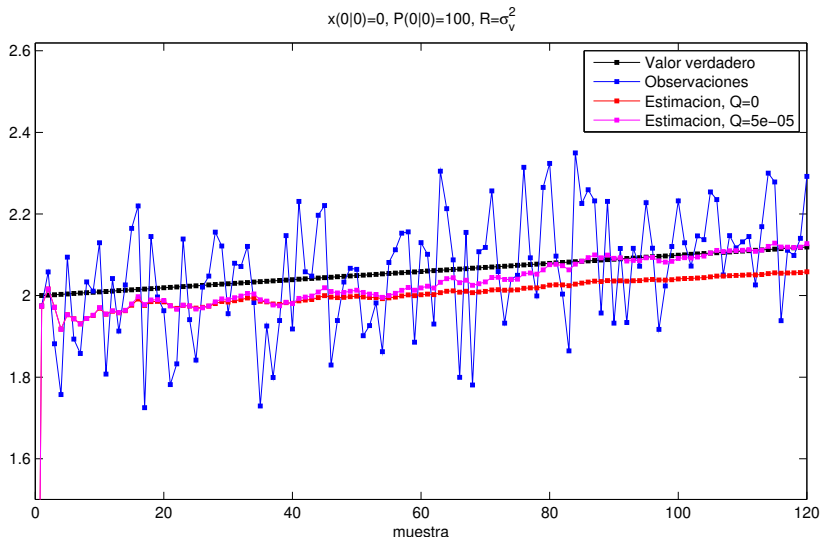


Análisis cualitativo

- El modelo es una buena representación del proceso real: en general, el estado estimado será cercano al valor verdadero, incluso si las observaciones son muy ruidosas.
 - No hay conocimiento a priori del estado: se elige el estado inicial arbitrario y matriz covarianza grande. En ese caso la estimación estará fuertemente guiada por el modelo y las observaciones.
 - Si se conoce a priori la estadística del proceso y la varianza del error de estimación inicial es pequeña, la estimación está guiada principalmente por el modelo y el estado inicial.
- El modelo no representa fielmente el proceso real
 - La matriz de covarianza del ruido del modelo puede ser usada para representar la confianza en el modelo.

Ejemplo: estimación de una constante

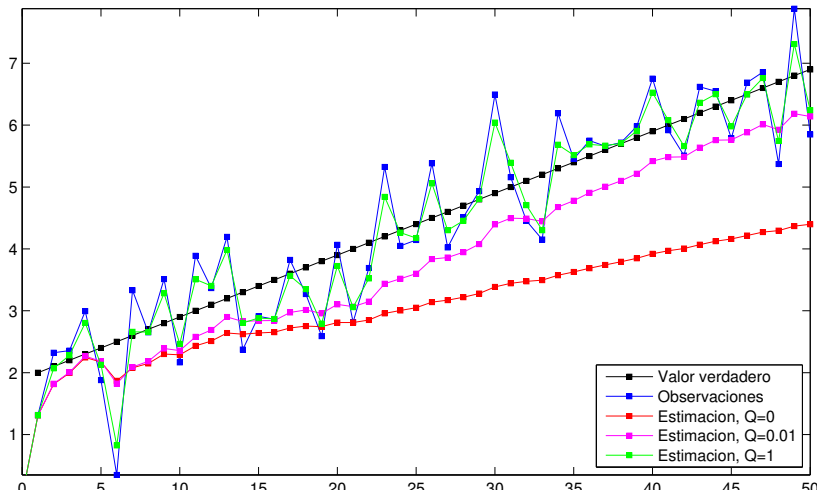
El proceso no es constante pero varía lentamente. Relajación del modelo mediante la introducción de ruido en el modelo.



Ejemplo: estimación de una constante

Error en el modelo. La relajación del modelo mediante la introducción de ruido no es suficiente para una buena estimación.

$$x(0|0)=0, P(0|0)=100, R=\sigma_v^2$$



Error en el modelado

- Si el modelo no es correcto, la varianza del error de estimación puede ser mayor que la varianza del error de las observaciones.
 - Esto ocurre si el ruido del modelo es pequeño, porque implica confianza en el modelo.
 - Relajar demasiado el modelo tiende a hacer que la estimación no difiera demasiado con las observaciones.

Ejemplo: estimación de una recta

- El modelo de una recta se puede expresar como

Ecuación del proceso

Ecuación de observaciones

$$\begin{cases} r_{k+1} &= r_k + p_k \\ p_{k+1} &= p_k \end{cases} \qquad y_k = r_k + v_k$$

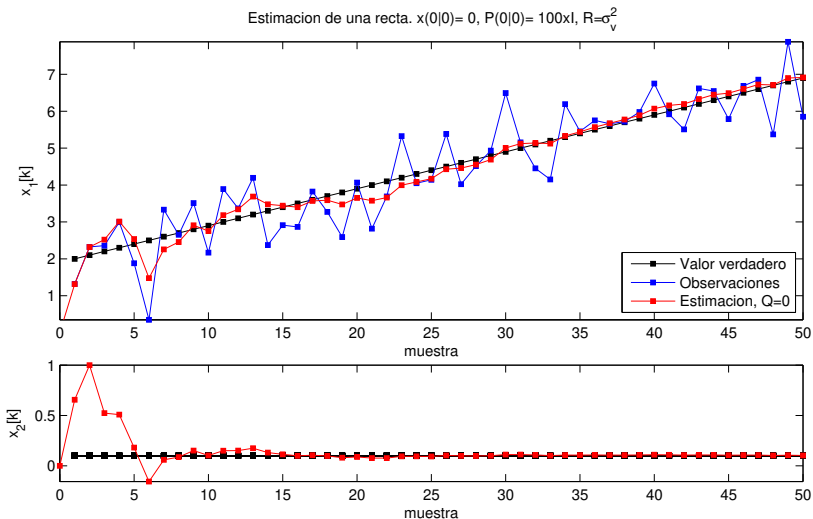
- En notación vectorial queda

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + v_k$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_k = \sigma_v^2$$

Ejemplo: estimación de una recta

Evolución de los estados en el problema de estimación de una recta.



Ejemplo: estimación de parámetros de senoide

Se quiere estimar la amplitud A y la fase φ de una senoide a partir de observaciones contaminadas con ruido blanco gaussiano de potencia σ_v^2 no correlacionado. La frecuencia ω se asume conocida.

- El modelo se puede expresar como

Ecuación del proceso

$$\begin{cases} A_{k+1} &= A_k \\ \varphi_{k+1} &= \varphi_k \end{cases}$$

Ecuación de observaciones

$$y_k = A_k \cos(\omega k + \varphi_k) + v_k$$

- En este caso el modelo no es lineal. Una alternativa es usar un

Ejemplo: estimación de parámetros de senoide

Filtro de Kalman Extendido (EKF)

- Se considera el modelo en variables de estado no lineal de la forma

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k) \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{c}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \end{cases}$$

- El filtro de Kalman extendido se basa en una aproximación de primer orden del modelo,

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}_k(\hat{\mathbf{x}}_k, 0) + \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{c}_k(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0) + \mathbf{C}_k(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \mathbf{U}_k \mathbf{v}_k \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{F}_k = \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_k, 0)$$

$$\mathbf{G}_k = \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{w}}(\hat{\mathbf{x}}_k, 0)$$

$$\mathbf{C}_k = \frac{\partial \mathbf{c}_k}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0)$$

$$\mathbf{U}_k = \frac{\partial \mathbf{c}_k}{\partial \mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0)$$

- Se aplica el algoritmo de Kalman sobre el modelo

Ejemplo: estimación de parámetros de senoide

- En el problema de la estimación de los parámetros de una senoide solo la ecuación de las observaciones es no lineal.
- Las únicas alteraciones respecto al algoritmo de Kalman básico son
 - La matriz \mathbf{C}_k , que cambia en cada iteración, y vale

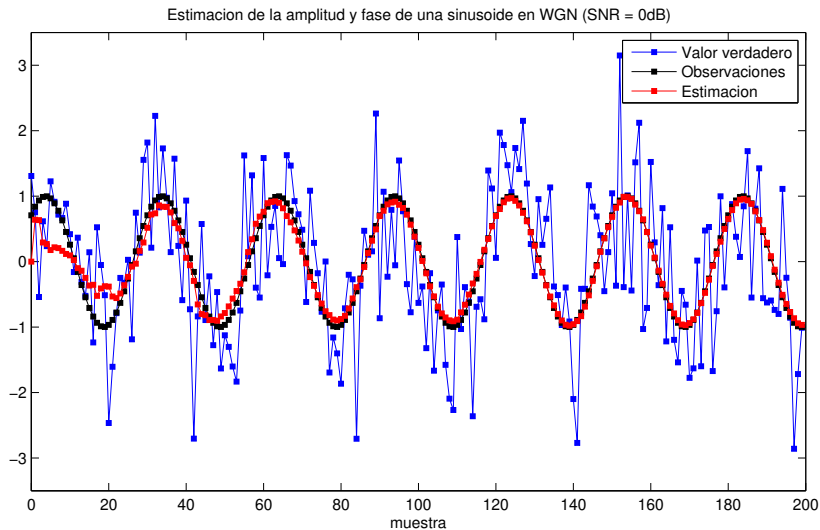
$$\begin{aligned}\mathbf{C}_k &= \frac{\partial \mathbf{c}_k}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, 0) \\ &= \left[\frac{\partial A_k \cos(\omega k + \varphi_k)}{\partial A_k} \quad \frac{\partial A_k \cos(\omega k + \varphi_k)}{\partial \varphi_k} \right] \bigg|_{\hat{A}_k^-, \hat{\varphi}_k^-} \\ &= \left[\cos(\omega k + \hat{\varphi}_k^-) \quad -\hat{A}_k^- \sin(\omega k + \hat{\varphi}_k^-) \right]\end{aligned}$$

- La actualización de la estimación con la observación k -ésima,

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k \left(y_k - \hat{A}_k^- \cos(\omega k + \hat{\varphi}_k^-) \right)$$

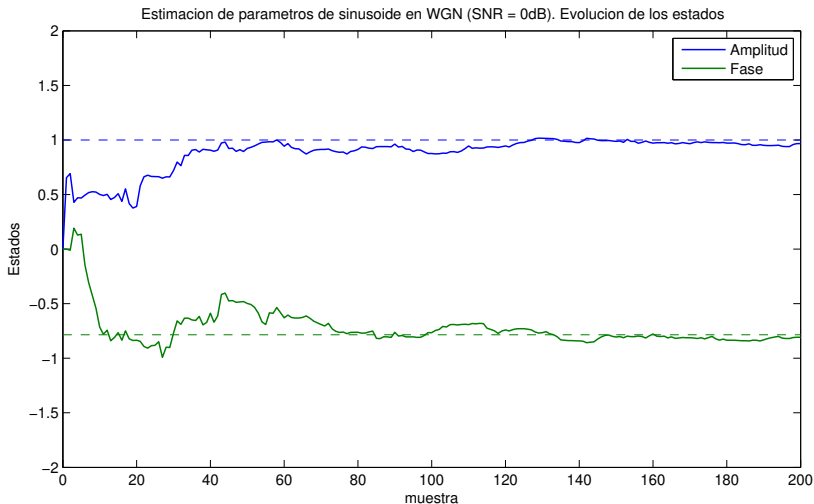
Ejemplo: estimación de parámetros de senoide

Estimación de la amplitud y la fase de una senoide.



Ejemplo: estimación de parámetros de senoide

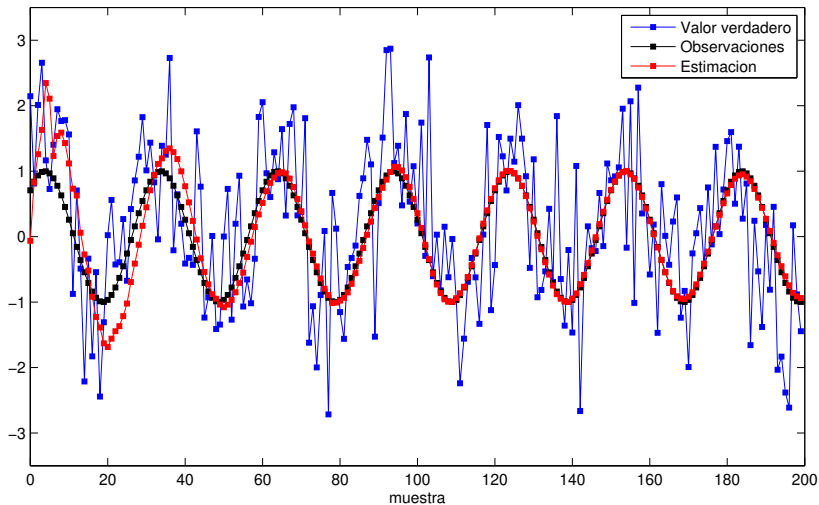
Estimación de la amplitud y la fase. Evolución de los estados.



Ejemplo: estimación de parámetros de senoide

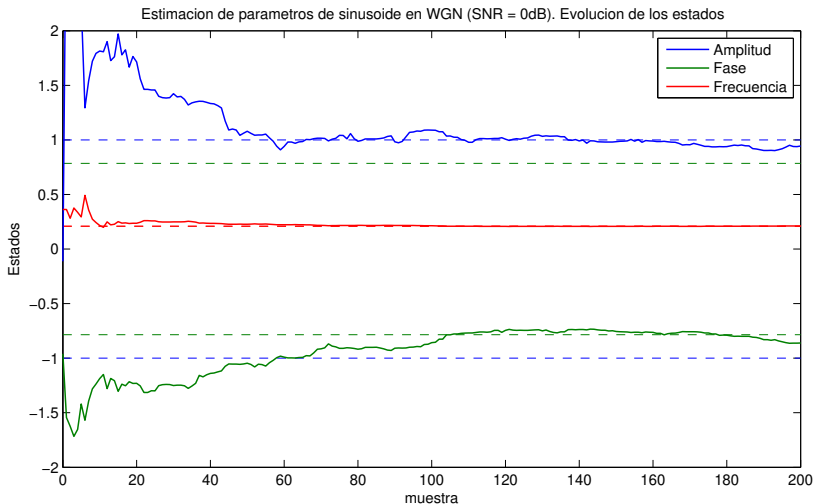
Estimación de la amplitud, fase y frecuencia de una senoide.

Estimacion de la amplitud, fase y frecuencia de una senoide en WGN (SNR = 0dB)

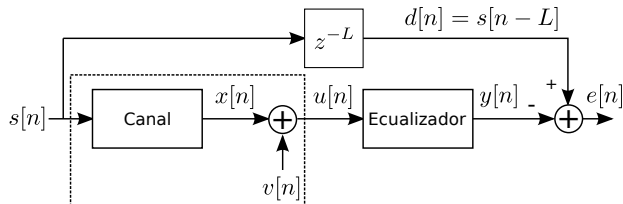


Ejemplo: estimación de parámetros de senoide

Estimación de la amplitud, fase y frecuencia. Evolución de los estados.



Ejemplo: ecualización de canal



- $s[n]$ señal a transmitir (IID).
- $v[n]$ ruido blanco introducido por el canal de media nula y potencia σ_v^2 independiente de $s[n]$.

Ejemplo

- El canal se modela como un filtro FIR de N coeficientes.
- $s[n]$ es un proceso Bernoulli que toma el valor 1 con probabilidad p y el valor 0 con probabilidad $1 - p$.

$$\mu_s = 0(1 - p) + 1p = p$$

$$E(s^2[n]) = 0^2(1 - p) + 1^2p = p$$

$$\sigma_s^2 = E(s^2[n]) - \mu_s^2 = p(1 - p)$$

Ejemplo: ecualización de canal

Filtro de Wiener

1. Matriz de autocorrelación de la entrada

- La entrada al filtro es $u[n] = x[n] + v[n]$, con $x[n]$ y $v[n]$ procesos independientes. Por lo tanto,

$$r_u[k] = r_x[k] + r_v[k].$$

- $v[n]$ es ruido blanco de potencia σ_v^2 , así que $r_v[k] = \sigma_v^2 \delta[k]$.
- Teniendo en cuenta que $x[n]$ es un proceso filtrado, se cumple que,

$$r_x[k] = r_s[k] * h[k] * h[-k],$$

- Considerando que $s[n]$ tiene media μ_s y potencia σ_s^2 , la función de autocorrelación es

$$r_s[k] = E(s[n]s[n-k]) = \begin{cases} E(s^2[n]) & = \sigma_s^2 + \mu_s^2 \\ E(s[n])E(s[n-k]) & = \mu_s^2 \end{cases} \quad k =$$

Ejemplo: ecualización de canal

- Por lo tanto, la autocorrelación de la señal en la salida del canal es

$$\begin{aligned}r_x[k] &= (\sigma_s^2 \delta[k] + \mu_s^2) * h[k] * h[-k] \\&= \sigma_s^2 \delta[k] * h[k] * h[-k] + \mu_s^2 * h[k] * h[-k] \\&= \sigma_s^2 (h[k] * h[-k]) + \mu_s^2 \left(\sum_{i=0}^{N-1} h[i] \right)^2\end{aligned}$$

- Finalmente, la autocorrelación de la entrada del filtro Wiener es

$$r_u[k] = \sigma_s^2 (h[k] * h[-k]) + \mu_s^2 \left(\sum_{i=0}^{N-1} h[i] \right)^2 + \sigma_v^2 \delta[k]$$

Ejemplo: ecualización de canal

- Se vio previamente (transparencias del práctico de Filtros Adaptivos, pag. 47), que la correlación cruzada es

$$p[-k] = \sum_{l=0}^{N-1} h[l] r_s[-l - k + L],$$

y en este caso queda,

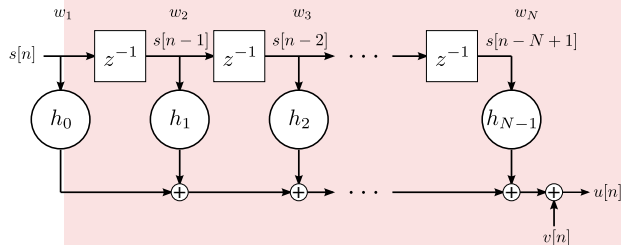
$$\begin{aligned} p[-k] &= \sum_{l=0}^{N-1} h[l] (\sigma_s^2 \delta[-l - k + L] + \mu_s^2) \\ &= \sigma_s^2 h[-k + L] + \mu_s^2 \sum_{l=0}^{N-1} h[l] \end{aligned}$$

- Construyendo el sistema de ecuaciones de Wiener-Hopf $M \times M$ y resolviendo, se obtienen los coeficientes del filtro de Wiener de M coeficientes.

Ejemplo: ecualización de canal

Filtro de Kalman [?]

- Se asume conocida la respuesta al impulso del canal h_n , con $n = 0, \dots, N - 1$.
- Planteo del problema



Los estados

w_1, \dots, w_N

son la entrada en la línea de retardos del filtro,

$s[n], \dots, s[n - N + 1]$.

$$\begin{pmatrix} w_1[k+1] \\ w_2[k+1] \\ w_3[k+1] \\ \vdots \\ w_N[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1[k] \\ w_2[k] \\ w_3[k] \\ \vdots \\ w_N[k] \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{impulse response}} s[k+1]$$

Ejemplo: ecualización de canal

- La ecuación de observación es

$$u[k] = (h_0 \ h_1 \ \dots \ h_{N-1}) \begin{pmatrix} w_1[k] \\ \vdots \\ w_N[k] \end{pmatrix} + v[k]$$

- Los parámetros del filtro de Kalman son

$$\Phi_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mathbf{C}_k &= (h_0 \ h_1 \ \dots \ h_{N-1}) \\ \mathbf{Q}_k &= \sigma_s^2 \\ \mathbf{R}_k &= \sigma_v^2 \end{aligned}$$

- Como estimador de la señal transmitida $s[n]$ se usa el estado i -ésimo, $w_i = \hat{s}[n - i]$.
- Se decide que cada muestra de la señal ecualizada corresponde a un 1 si el estimador supera 0.5 y 0 en el caso contrario.

Ejemplo: ecualización de canal

Algoritmo

- Condiciones iniciales: estimación a priori del estado y la matriz de covarianza del error de estimación en $k = 0$,

$$\mathbf{x}_0^- = \mathbf{0} \quad \mathbf{P}_0^- = 100\mathbf{I}$$

- Para $k = 0, 1, 2, \dots$, se calcula

- La ganancia de Kalman:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

- Actualización de la estimación con la observación k -ésima,

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$$

- Actualización de la covarianza del error de estimación,

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_k^-$$

- Proyecciones del estado y la matriz de covarianza del error del paso $k + 1$ a partir de los datos actuales,

Ejemplo: ecualización de canal

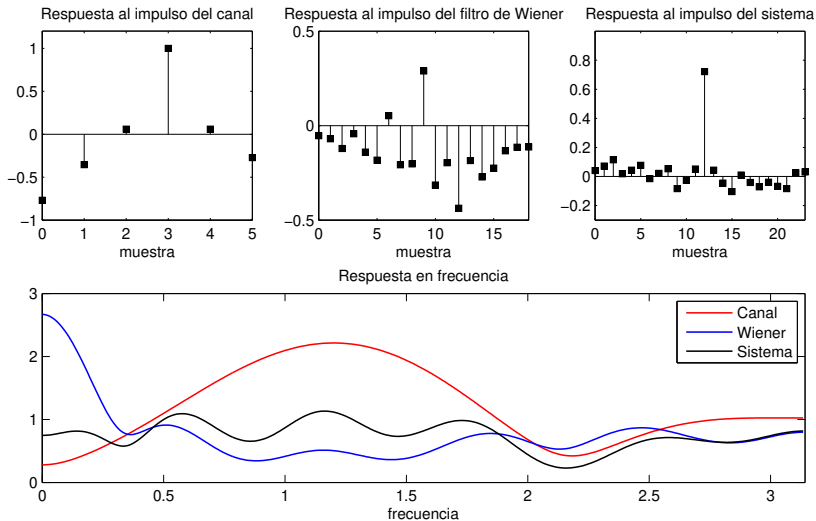
Simulación

- La señal a transmitir es binomial con $p = 0.5$. La potencia es $\sigma_s^2 = p(1 - p) = 0.25$.
- El canal se modela como un filtro FIR de $N = 6$ coeficientes con respuesta al impulso

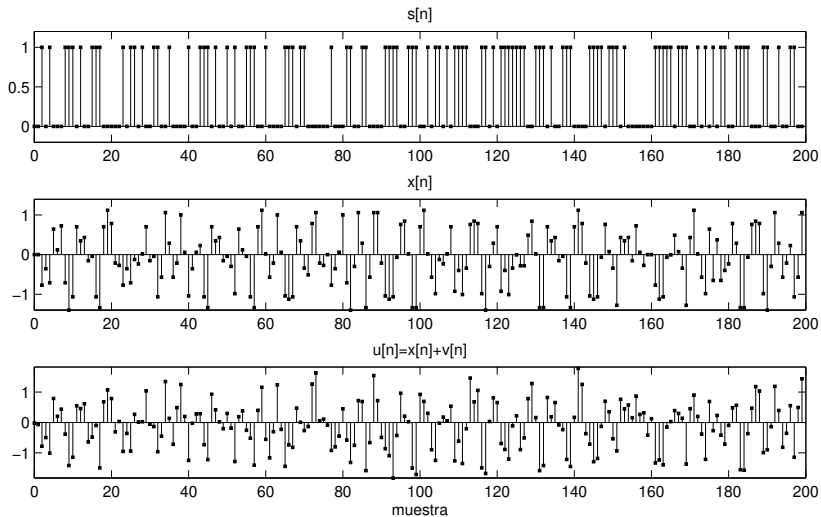
$$h[n] = [-0.77, -0.355, 0.059, 1, 0.059, -0.273].$$

- El ruido aditivo del canal es blanco, gaussiano, de media nula y potencia $\sigma_v^2 = 0.1$ (SNR ≈ 4 dB).
- Se construye un ecualizador usando un filtro de Wiener de $M = 19$ coeficientes.
- Se construye un ecualizador usando un filtro de Kalman usando w_6 como estimación de la señal transmitida.
- Se compara el desempeño a través del porcentaje de bits erróneos.

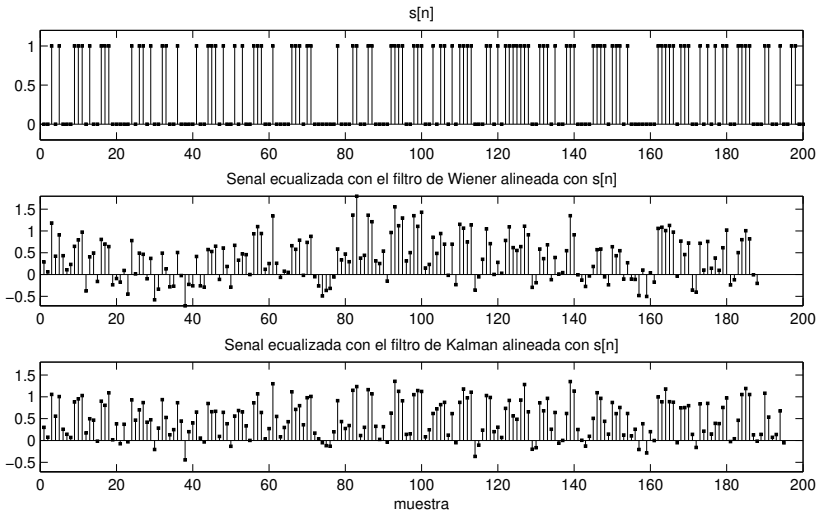
Ejemplo: ecualización de canal



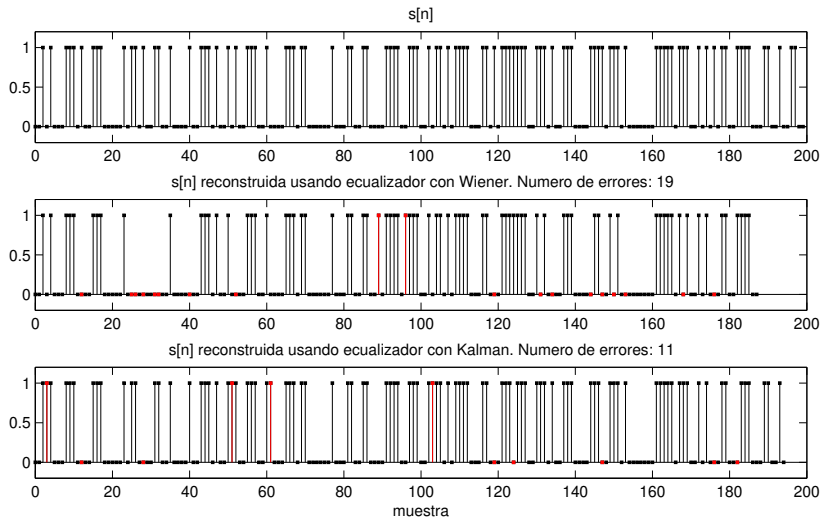
Ejemplo: ecualización de canal



Ejemplo: ecualización de canal

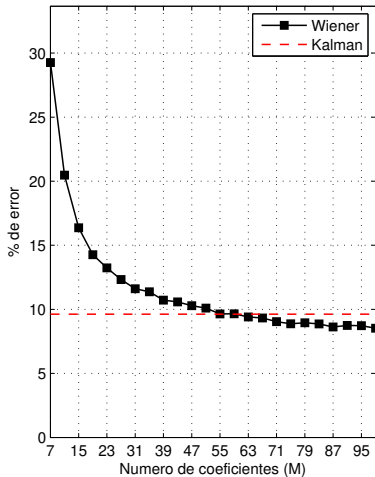


Ejemplo: ecualización de canal

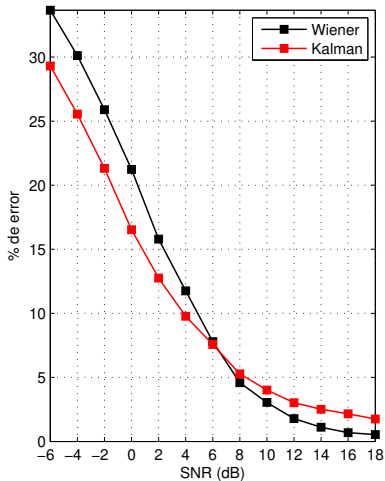


Ejemplo: ecualización de canal

Porcentaje de error al variar el orden del filtro Wiener
SNR = 4 dB



Porcentaje de error al variar la SNR (σ_v^2)
Filtro Wiener con M=31



Ejemplo: ecualización de canal

Observaciones

- Dado que se conoce la respuesta al impulso del canal, el problema consiste en encontrar la filtro inverso al canal (en el caso con $\sigma_v^2 = 0$).
- $h[n]$ es un filtro FIR con función de transferencia

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{N-1} z^{-(N-1)}$$

y el filtro inverso es

$$H_{inv}(z) = \frac{1}{h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_{N-1} z^{-(N-1)}} \quad (\text{puede ser inestable})$$

- El ecualizador Wiener es un filtro FIR, mientras que el ecualizador Kalman es IIR. Esto explica porque el desempeño del ecualizador Wiener es peor que el ecualizador Kalman en ciertas condiciones.

Ejemplo: ecualización de canal

Modelo de canal genérico

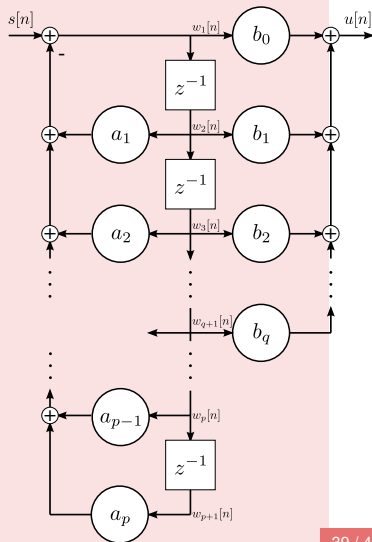
- El canal es un filtro con función de transferencia racional arbitraria,

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}}.$$

- La salida del filtro se caracteriza por las siguientes ecuaciones en recurrencia,

$$w_1[k+1] = -a_1 w_1[k] - a_2 w_1[k-1] - \dots \\ - a_p w_1[n-p+1] + s[k+1]$$

$$u[k] = b_0 w_1[k] + b_1 w_1[k-1] - \dots \\ - b_q w_1[n-q] + v[k]$$



Ejemplo: ecualización de canal

Modelo de canal genérico

- La ecuación del proceso es

$$\begin{pmatrix} w_1[k+1] \\ w_2[k+1] \\ w_3[k+1] \\ \vdots \\ w_p[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_p \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1[k] \\ w_2[k] \\ w_3[k] \\ \vdots \\ w_p[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} s[k]$$

- La ecuación de observación es

$$u[k] = (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_q \ 0 \ \dots \ 0) \begin{pmatrix} w_1[k] \\ \vdots \\ w_{q+1}[k] \\ \vdots \\ w_p[k] \end{pmatrix} + v[k]$$

Ejemplo: ecualización de canal

Coeficientes del canal desconocidos

- Se asume ahora que los coeficientes del filtro son desconocidos.
- Se expande el vector de estados incluyendo los coeficientes del filtro como estados,

$$\mathbf{x}[k] = (w_1[k] \dots w_N[k] \ h_0[k] \dots h_{N-1}[k])^T$$

- La ecuación de evolución de estados es ahora

$$\mathbf{x}[k+1] = \bar{\Phi}[k]\mathbf{x}[k] + \mathbf{G}s[k+1], \quad \bar{\Phi}[k] = \begin{pmatrix} \Phi[k] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\bar{\Phi}[k]$ de tamaño $2N \times 2N$ y \mathbf{G} de tamaño $2N \times 1$.

- La ecuación de observación es

Ejemplo: ecualización de canal

Coeficientes del canal desconocidos

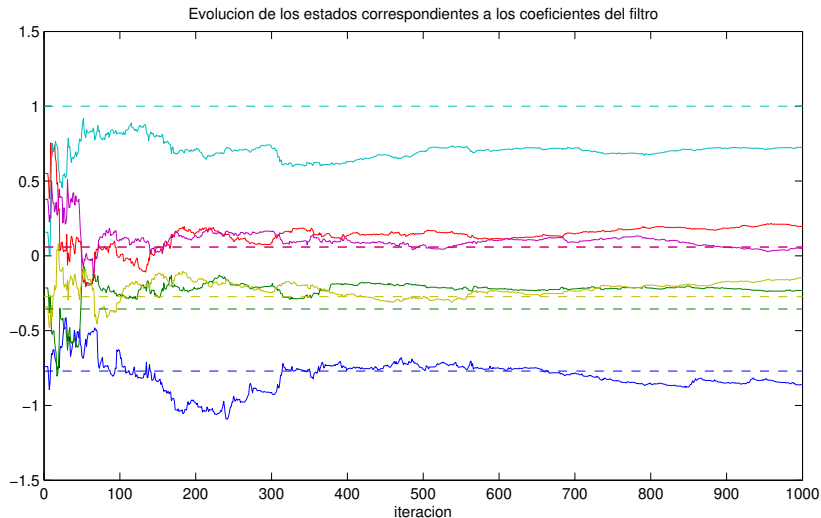
- Como la ecuación de observación no es lineal, hay que usar un filtro de Kalman Extendido.
- En el algoritmo de Kalman, la matriz $\mathbf{C}[k]$ queda

$$\begin{aligned}\mathbf{C}[k] &= \frac{\partial \mathbf{c}[k]}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}^-[k], 0) \\ &= (x_{N+1}[k] \dots x_{2N}[k] \ x_1[k] \dots x_N[k]) \Big|_{\mathbf{x}[k] = \hat{\mathbf{x}}^-[k]}\end{aligned}$$

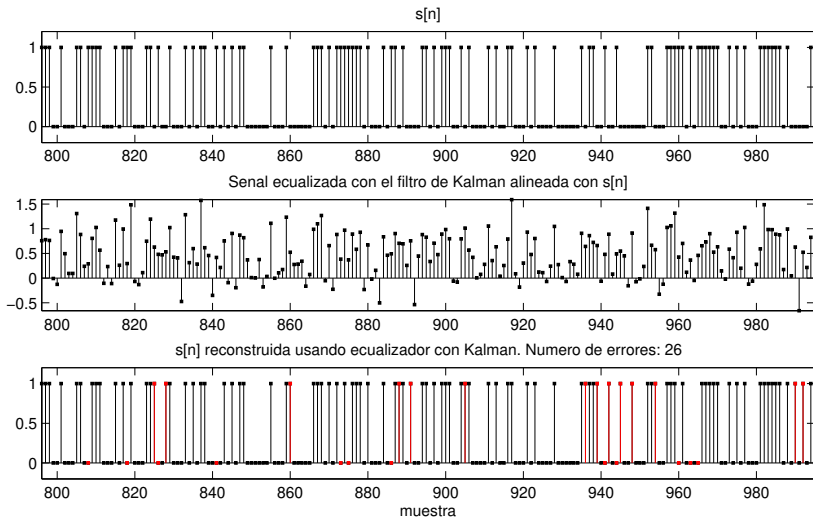
- La actualización de la estimación con la observación k -ésima es

$$\hat{\mathbf{x}}[k] = \hat{\mathbf{x}}^-[k] + \mathbf{K}[k] \left(y[k] - \sum_{j=1}^N x_j^-[k] x_{j+N}^-[k] \right)$$

Ejemplo: identificación y ecualización de canal



Ejemplo: identificación y ecualización de canal



- Se considera el modelo en variables de estado

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k & \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}) \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k & \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \end{cases}$$

- Las ecuaciones del filtro de Kalman pueden deducirse empleando el estimador *MAP* del estado $\mathbf{x}(k)$:

el estimador del estado actual $\hat{\mathbf{x}}_k$ es aquel que maximiza la probabilidad del estado \mathbf{x}_k dada la observación \mathbf{y}_k y la secuencia de estados previos $\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k-2}, \dots, \mathbf{x}_0$,

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \arg \max_{\mathbf{x}_k} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \dots, \mathbf{x}_0)$$

Ejercicio

- 1 Empleando la regla de Bayes, escribir la probabilidad a posteriori de \mathbf{x}_k en función de la densidad de probabilidad de transición de estados $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$ y la observación $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)$.
- 2 Demostrar que maximizar la probabilidad a posteriori equivale a minimizar la función de costo,

$$J(\mathbf{x}_k) = (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k)^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k) + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^-)^T \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^-)$$

- \mathbf{x}_k^- es la predicción de \mathbf{x}_k , $\mathbf{x}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}$.

- 3 Demostrar mediante la minimización de la función de costo que la ecuación de actualización del estimador óptimo puede expresarse como

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-).$$

Indicar el valor de la matriz \mathbf{K} .

