

# Estimación y Predicción en Series Temporales

## Procesos Autoregresivos

Departamento de Procesamiento de Señales

Instituto de Ingeniería Eléctrica  
Facultad de Ingeniería

2022

## Modelos estocásticos [?]

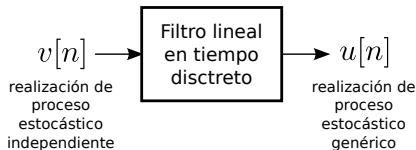
- Filtrado de una realización de un proceso no correlacionado: el filtro introduce correlación en las muestras produciendo un proceso correlacionado.
- Cualquier proceso estocástico estacionario arbitrario puede modelarse a través de ruido blanco filtrado: Descomposición de Wold.
- El modelo consiste en especificar la varianza del ruido de entrada  $\sigma_v^2$  y los parámetros del filtro.
- Imponiendo condiciones sobre el filtro y conociendo los parámetros del proceso que se quiere modelar (ej.: autocorrelación), es posible obtener los parámetros del filtro: ecuaciones de Yule-Walker.
- Encontrar un buen modelo del sistema subyacente a una serie temporal permite aplicaciones importantes como predicción, pronóstico, control, compresión.
- Neurofísica, geofísica, astronomía, economía, sistemas de

# Modelos estocásticos

- Un modelo establece las hipótesis que gobiernan o restringen la generación de una serie temporal correspondiente a realización de un proceso estocástico.
- La idea de genérico mediante un proviene de Yule (1927).

Una serie temporal  $u[n]$  con muestras correlacionadas puede generarse a partir de una serie temporal  $v[n]$  con muestras estadísticamente independientes filtrada con un filtro lineal.

Modelo estocástico



Hipótesis sobre  $v[n]$

- Media nula:  $E(v[n]) = 0 \quad \forall n$
- Blanco:

$$E(v[n]v^*[k]) = \begin{cases} \sigma_v^2 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

- Gaussiano (en general)

# Modelos estocásticos

- El modelo estocástico establece una relación entre la entrada y la salida del filtro, que en el dominio del tiempo es

$$u[n] + a_1^* u[n-1] + \dots + a_M^* u[n-M] = v[n] + b_1^* v[n-1] + \dots + b_K^* v[n-K]$$

El proceso definido por el modelo se llama

- La salida actual  $u[n]$  es una combinación lineal de la muestra actual de la entrada  $v[n]$ , muestras pasadas de la entrada y muestras pasadas de la salida.
- Equivalentemente, la función de transferencia del filtro lineal del modelo es un cociente de polinomios

$$H(z) = \frac{U(z)}{V(z)} = \frac{1 + b_1^* z^{-1} + \dots + b_K^* z^{-K}}{1 + a_1^* z^{-1} + \dots + a_M^* z^{-M}}$$

con  $K$  ceros y  $M$  polos.

Según la estructura del filtro lineal, los modelos estocásticos se clasifican en tres tipos.

## 1 Modelos Autorregresivos (*AR*)

- No se emplean muestras pasadas de la entrada.
- Los coeficientes  $b_k^*$  son nulos para todo  $k$ .
- El filtro lineal es todo polos.

## 2 Modelos de Media Móvil (*MA*)

- No se emplean muestras pasadas de la salida
- Los coeficientes  $a_k^*$  son nulos para todo  $k$ .
- El filtro lineal es todo ceros.

## 3 Modelos Autorregresivos-Media Móvil (*ARMA*)

- Se emplean muestras pasadas de la entrada y la salida
- El filtro lineal tiene polos y ceros

## Definición

- Se dice que una serie temporal  $u[n], u[n-1], \dots, u[n-M]$  representa la realización de un proceso autorregresivo de orden  $M$ , denotado  $\text{AR}(M)$ , si satisface la ecuación en diferencias

$$u[n] + a_1^* u[n-1] + \dots + a_M^* u[n-M] = v[n] \quad (1)$$

- $a_1^*, a_2^*, \dots, a_M^*$  son constantes:  
parámetros  $\text{AR}$
- $v[n]$  es ruido blanco

- Equivalentemente, la ecuación en diferencias se puede escribir como

$$u[n] = w_1^* u[n-1] + w_2^* u[n-2] + \dots + w_M^* u[n-M] + v[n]$$

donde  $w_k = -a_k$ .

- La ecuación 1 se puede expresar a través de una

## Observación

- La salida actual  $u[n]$  del proceso es una combinación lineal finita de los valores pasados del proceso,  $u[n-1], \dots, u[n-M]$ , mas un término de error  $v[n]$ .
- En estadística, una **regresión lineal** se define como la relación entre una variable dependiente  $y$  y un conjunto de variables independientes  $x_1, x_2, \dots, x_M$  mas un término de error  $v$

$$y = \sum_{k=1}^M w_k^* x_k + v$$

Se dice que  $y$  regresa a los valores  $x_k$ .

- En un proceso AR,  $u[n]$  regresa a valores previos de si mismo. De ahí el nombre de proceso autorregresivo.

## Filtro analizador y filtro generador del proceso

- Las transformadas  $z$  de las secuencias  $a_n^*$ ,  $u[n]$  y  $v[n]$  son respectivamente

$$H_A(z) = \sum_{n=0}^M a_n^* z^{-n} \quad U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] z^{-n} \quad V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v[n] z^{-n}$$

- La transformada  $z$  de la ecuación en diferencias del proceso AR (ecuación 2) es

$$(a^* * u)[n] = v[n] \quad H_A(z)U(z) = V(z)$$

- La transformada  $z$  del modelo ofrece dos interpretaciones dependiendo de si el proceso AR  $u[n]$  es visto como la entrada o la salida de interés
  - Analizador del proceso:** dado el proceso AR  $u[n]$ , se puede usar el filtro con función de transferencia  $H_A(z)$  para producir ruido blanco  $v[n]$  como salida.
  - Generador del proceso:** Considerando el filtro con función

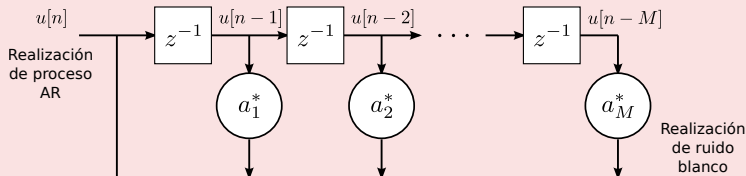


## Filtro analizador del proceso AR

- $H_A(z)U(z) = V(z)$ , con  $H_A(z) = \sum_{n=0}^M a_n^* z^{-n}$
- El filtro  $H_A(z)$  se llama filtro analizador del proceso AR. Si la entrada al filtro analizador es el proceso AR  $u[n]$ , la salida es ruido blanco  $v[n]$ .
- El filtro analizador es un filtro FIR con respuesta al impulso

$$h[n] = a_n^*.$$

- Es todo ceros, y por lo tanto, es estable.



## Filtro generador del proceso AR

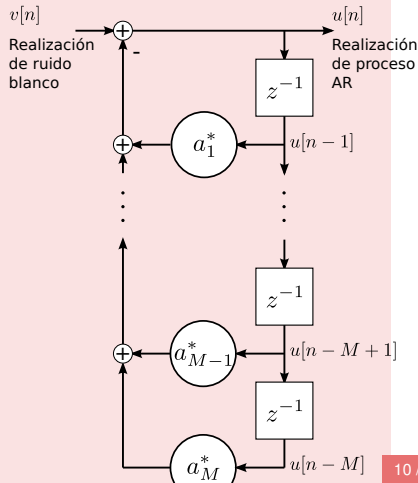
- Considerando el filtro inverso al filtro de análisis

$$H_G(z) = \frac{1}{H_A(z)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^M a_n^* z^{-n}} \quad (3)$$

se tiene el filtro generador,

$$H_G(z)V(z) = U(z).$$

- El filtro generador es todo polos, y por tanto, IIR.
- La condición de estabilidad es que los  $M$  polos estén dentro del círculo unidad.
- Además, esto es condición



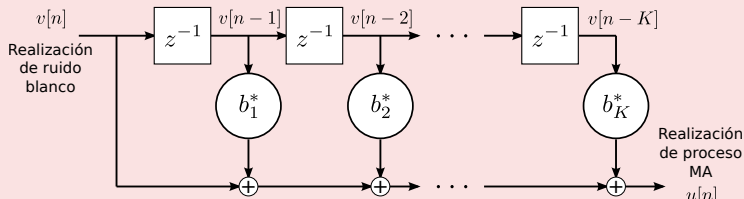
## Definición

- En el modelo de Media Móvil, el filtro es un filtro todo ceros con entrada ruido blanco. Un modelo de media móvil de orden  $K$  se denota  $MA(K)$ .
- El proceso  $u[n]$  producido por el modelo se describe mediante la ecuación en diferencias

$$u[n] = v[n] + b_1^* v[n-1] + \dots + b_K^* v[n-K] \quad (4)$$

- $b_1^*, b_2^*, \dots, b_K^*$  son constantes:  
parámetros MA

- $v[n]$  es ruido blanco  
de varianza  $\sigma_v^2$



# Modelos de Media Móvil (MA)

- Tomando la transformada  $z$  de la ecuación en diferencias del modelo (ec. 4) se tiene que el filtro generador es

$$H_G(z) = \frac{U(z)}{V(z)} = \sum_{n=0}^K b_n^* z^{-n}, \quad \text{con } b_0 = 1$$

- El filtro generador del proceso es todo ceros y por lo tanto estable.
- Para producir ruido blanco a partir del proceso MA, se emplea el filtro analizador,

$$H_A(z) = \frac{V(z)}{U(z)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^K b_n^* z^{-n}}$$

- El filtro analizador del proceso es todo polos.

# Modelos Autorregresivos-Media Móvil (ARMA)

## Definición

Ecuación en diferencias del modelo ARMA:

$$u[n] + a_1^* u[n-1] + \dots + a_M^* u[n-M] = v[n] + b_1^* v[n-1] + \dots + b_K^* v[n-K]$$

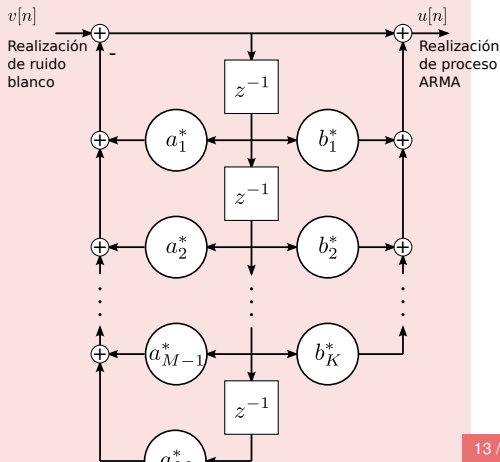
- Para generar un proceso ARMA  $u[n]$  se emplea un filtro lineal que contiene polos y ceros.

- Parámetros ARMA: constantes

$$a_1^*, a_2^*, \dots, a_M^* \text{ y}$$

$$b_1^*, b_2^*, \dots, b_K^*.$$

- el orden del modelo es  $(M, K)$  y el modelo se denota ARMA( $M, K$ ).
- Los modelos AR y MA son un caso particular de



# Consideraciones sobre los modelos

- En la práctica el modelado AR es mas popular que el modelado MA y ARMA.
- Una razón de esto es la sencillez computacional. Para encontrar los parámetros del modelo, hay que resolver un sistema de ecuaciones: las ecuaciones de Yule-Walker.
  - En el caso AR, las ecuaciones de Yule-Walker son un sistema lineal. Además, el sistema tiene características que hacen posible resolverlo eficientemente (Toeplitz).
  - En el caso de MA y ARMA, las ecuaciones de Yule-Walker son un sistema de ecuaciones no lineal mucho mas complicado de resolver.
- Otro motivo que justifica la popularidad del modelado AR está vinculado al teorema de Wold, fundamental en el análisis de series temporales.
  - El teorema ayuda a justificar que un proceso estacionario cualquiera puede descomponerse en la suma de un proceso determinístico y un proceso AR.

# Descomposición de Wold (1938)

Todo proceso estocástico estacionario en tiempo discreto puede descomponerse como la suma de un (componente estocástica) y un (componente determinístico), entre si.

## Teorema

Todo proceso estocástico estacionario discreto  $x[n]$  puede expresarse como

$$x[n] = u[n] + s[n]$$

- 1  $u[n]$  y  $s[n]$  son procesos no correlacionados.
- 2  $u[n]$  es un proceso general lineal representado por el modelo  $\text{MA}(\infty)$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^* v[n-k] \quad \text{con } b_0 = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 < \infty$$

donde  $v[n]$  es ruido blanco no correlacionado con  $s[n]$ ,

## Consideraciones

- La parte estocástica de la descomposición es

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^* v[n-k]$$

- Ruido blanco filtrado con filtro todo ceros
- Proceso MA( $\infty$ )
- En el caso en que el filtro todo ceros sea de fase mínima (todos los ceros se encuentran dentro del círculo unidad), es posible remplazar el filtro todo ceros por un filtro todo polos con la misma respuesta al impulso.
- La parte estocástica de la descomposición puede ser remplazada por un proceso AR de orden apropiado.
- Bajo la hipótesis de fase mínima, la descomposición de Wold indica que un proceso estacionario se puede descomponer como una parte determinística y un proceso AR de orden apropiado.



# Estacionaridad asintótica de los procesos autorregresivos

## Solución general de una ecuación en diferencias

- Un proceso  $AR(M)$  satisface la ecuación en diferencias (ec. 1)

$$u[n] + a_1^* u[n-1] + \cdots + a_M^* u[n-M] = v[n]$$

- Para resolver la ecuación en diferencias, se puede emplear el método clásico de expresar la solución como la suma de la función complementaria  $u_c[n]$  y la solución particular  $u_p[n]$ ,

$$u[n] = u_c[n] + u_p[n]$$

- 1 La función complementaria  $u_c[n]$  es la solución de la ecuación homogénea

$$u[n] + a_1^* u[n-1] + \cdots + a_M^* u[n-M] = 0.$$

# Estacionaridad asintótica de los procesos autorregresivos

## Solución general de una ecuación en diferencias

- 2 La solución particular  $u_p[n]$  se define como

$$u_p[n] = H_G(D)\{v[n]\},$$

donde

- $H_G(z)$  es el filtro generador del proceso AR( $M$ ) (ec. 3)

$$H_G(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^M a_n^* z^{-n}}$$

- $D$  es el operador de retardo unitario

$$D^k\{u[n]\} = u[n - k]$$

- $H_G(D)$  se obtiene sustituyendo  $z^{-k}$  por  $D^k$  en  $H_G(z)$ .

Ejemplo:

# Estacionaridad asintótica de los procesos autorregresivos

## Solución general de una ecuación en diferencias

- Las constantes  $B_1, \dots, B_M$  de la solución homogénea, se determinan imponiendo  $M$  condiciones iniciales,

$$u[0] = u[-1] = \dots = u[-M + 1] = 0$$

- Sustituyendo las condiciones iniciales en la solución general se obtiene un sistema de  $M$  ecuaciones de donde es posible despejar  $B_1, \dots, B_M$ .
- La imposición de condiciones iniciales implica darle un estado artificial al proceso en  $n = 0$ . Esto hace que el proceso no sea estacionario.
- Si la solución  $u[n]$  es capaz de olvidar su estado inicial, el proceso es asintóticamente estacionario. Para eso se requiere que la solución complementaria  $u_c[n]$  decaiga a

# Estacionaridad asintótica de los procesos autorregresivos

## Ejemplo: Análisis de proceso AR(1)[?]

Se quiere estudiar la estacionaridad del proceso AR(1) dado por

- $w$  es una constante real
- $v[n]$  es ruido blanco de varianza  $\sigma_v^2$  y media 0.
- La condición inicial es  $u[0] = 0$
- La condición inicial implica que  $u[1] = wu[0] + v[1] = v[1]$
- La ecuación en diferencias puede resolverse iterativamente,

$$\begin{aligned}u[n] &= v[n] + wu[n-1] = v[n] + w(v[n-1] + wu[n-2]) \\&= v[n] + wv[n-1] + w^2u[n-2] \\&= v[n] + wv[n-1] + w^2v[n-2] + w^3u[n-3]\end{aligned}$$

La solución es

$$u[n] = \sum_{k=0}^{n-1} w^k v[n-k]$$

# Estacionaridad asintótica de los procesos autorregresivos

## Ejemplo: Análisis de proceso AR(1)

Cálculo de la solución a partir de la solución particular y homogénea.

- Solución de la ecuación homogénea
  - La ecuación homogénea es

$$u_c[n] - wu_c[n-1] = 0$$

- La ecuación característica es  $1 - wz^{-1} = 0$ .
- La raíz es  $p_1 = w$ .
- La función complementaria es

$$u_c[n] = Bw^n \tag{6}$$

- Verificación de que es solución de la homogénea,

$$\begin{aligned} Bw^n &= wBw^{n-1} \\ &= Bw^n. \end{aligned}$$

# Estacionaridad asintótica de los procesos autorregresivos

## Ejemplo: Análisis de proceso AR(1)

- Solución particular

- La solución particular es  $u_p[n] = H_G(D)\{v[n]\}$ .
- La transferencia del filtro generador es

$$H_G(z) = \frac{U(z)}{V(z)} = \frac{1}{1 - wz^{-1}} \Rightarrow H_G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w^k z^{-k}$$

- Finalmente se llega a que

$$u_p[n] = H_G(D)\{v[n]\} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k D^k \{v[n]\} \Rightarrow u_p[n] = \sum_{k=0}^{\infty} w^k v[n-k] \quad (7)$$

- Verificación de la solución encontrada cumple la ecuación en diferencias ( $u_p[n] = wu_p[n-1] + v[n]$ )

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^k v[n-k] = w \sum_{k=0}^{\infty} w^k v[n-1-k] + v[n] = \sum_{k=0}^{\infty} w^{k+1} v[n-1-k] + v[n]$$

# Estacionaridad asintótica de los procesos autorregresivos

## Ejemplo: Análisis de proceso AR(1)

- La solución general es la suma de la solución homogénea (ec. 6) y la solución particular (ec. 7)

$$u[n] = Bw^n + \sum_{k=0}^{\infty} w^k v[n-k]$$

- La constante  $B$  se obtiene imponiendo las condiciones iniciales,

$$u[0] = B + \sum_{k=0}^{\infty} w^k v[-k] = 0 \quad \Rightarrow \quad B = - \sum_{k=0}^{\infty} w^k v[-k]$$

- Sustituyendo la constante en la solución se llega al mismo resultado que antes (ec. 5),

$$u[n] = -w^n \sum_{k=0}^{\infty} w^k v[-k] + \sum_{k=0}^{\infty} w^k v[n-k] = - \sum_{k=0}^{\infty} w^{k+n} v[-k] + \sum_{k=0}^{\infty} w^k v[n-k]$$

# Estacionaridad asintótica de los procesos autorregresivos

## Ejemplo: Análisis de proceso AR(1)

- Observación

- La función de transferencia a partir de proceso AR(1) es

$$u[n] = wu[n-1] + v[n], \quad H_{ap}(z) = \frac{U(z)}{V(z)} = \frac{1}{1 - wz^{-1}}$$

- La función de transferencia a partir de la solución es

$$u[n] = \sum_{k=0}^{n-1} w^k v[n-k], \quad H_{az}(z) = \frac{U(z)}{V(z)} = \sum_{k=0}^{n-1} w^k z^{-k}$$

El proceso AR(1) se genera con un filtro todo polos y es equivalente al proceso MA( $\infty$ ), que se genera con filtro todo ceros.



# Estacionaridad asintótica de los procesos autorregresivos

## Ejemplo: Análisis de proceso AR(1)

- Se quiere estudiar la estacionaridad del proceso. En particular, se estudia la estacionaridad de primer y segundo orden.
- **Momento de primer orden.** Sea  $\mu_v$  la media del ruido, entonces

$$E(u[n]) = \sum_{k=0}^{n-1} w^k E(v[n-k]) = \mu_v \sum_{k=0}^{n-1} w^k = \mu_v \frac{1-w^n}{1-w}$$

- Se tiene que
  - Si  $\mu_v = 0$ , se cumple que  $E(u[n]) = 0$ . **El proceso es estacionario hasta orden 1.**
  - Si  $\mu_v \neq 0$ , la media del proceso depende de  $n$ . No es estacionario hasta orden 1.
  - Sin embargo, si  $|w| < 1$ , se cumple que

# Estacionaridad asintótica de los procesos autorregresivos

## Ejemplo: Análisis de proceso AR(1)

- **Momento de segundo orden.** La autocorrelación del proceso es,

$$r_u[n+l, n] = E(u[n+l]u[n])$$

- Sustituyendo  $u[n]$  (ec. 5) se ve que

$$\begin{aligned} r_u[n+l, n] &= E \left( \sum_{k=0}^{n+l-1} w^k v[n+l-k] \sum_{m=0}^{n-1} w^m v[n-m] \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+l-1} \sum_{m=0}^{n-1} w^k w^m E(v[n-(k-l)]v[n-m]) \\ &= \sum_{k=0}^{n+l-1} \sum_{m=0}^{n-1} w^k w^m r_v[m-(k-l)] \end{aligned}$$

# Estacionaridad asintótica de los procesos autorregresivos

## Ejemplo: Análisis de proceso AR(1)

- Como  $v[n]$  es un proceso IID, se cumple que

$$r_v[l] = \begin{cases} \sigma_v^2 & l = 0 \\ 0 & l \neq 0 \end{cases}$$

- solo los términos con  $s = m$  en las sumatorias de la ecuación 8 no son nulos, por lo tanto

$$\begin{aligned} r_u[n+l, n] &= \sum_{m=0}^{n-1} w^{l+m} w^m r_v[0] \\ &= \sigma_v^2 w^l \sum_{m=0}^{n-1} w^{2m} \end{aligned}$$

- Finalmente, la autocorrelación del proceso es

$$r_u[n+l, n] = \sigma_v^2 w^l \frac{1 - w^{2n}}{1 - w^2}$$

# Estacionaridad asintótica de los procesos autorregresivos

## Ejemplo: Análisis de proceso AR(1)

- Se llegó a que

$$r_u[n+l, n] = \sigma_v^2 w^l \frac{1 - w^{2n}}{1 - w^2}$$

- El proceso no es estacionario, ya que la autocorrelación de  $u[n]$  depende del tiempo absoluto  $n$  y no solamente del retardo  $l$ .
- Asintóticamente, si  $|w| < 1$ , se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_u[n+l, n] = \sigma_v^2 w^l \frac{1}{1 - w^2} = r_u[l]$$

por lo que el proceso AR(1) es asintóticamente estacionario hasta orden 2.

- En este ejemplo se vió que si el polo del filtro generador

# Función de autocorrelación de un proceso AR

Se derivará la función de autocorrelación de un proceso AR( $M$ ) asintóticamente estacionario en función de los coeficientes del modelo.

- La ecuación en diferencias de un proceso  $u[n]$  AR( $M$ ) es (ec. 1)

$$\sum_{k=0}^M a_k^* u[n-k] = v[n], \quad \text{con } a_0 = 1$$

- Multiplicando ambos lados de la igualdad por  $u^*[n-l]$  y tomando la esperanza, se tiene que,

$$E \left( \sum_{k=0}^M a_k^* u[n-k] u^*[n-l] \right) = E(v[n] u^*[n-l])$$

$$\sum_{k=0}^M a_k^* E(u[n-k] u^*[n-l]) = E(v[n] u^*[n-l])$$

$$\sum_{k=0}^M a_k^* E(u[n-l-k] u^*[n-l]) = E(v[n] u^*[n-l])$$

# Función de autocorrelación de un proceso AR

- $u[n-l]$  solo depende de muestras del ruido hasta el tiempo  $n-l$ , ya que la salida del filtro no depende de muestras futuras de la entrada. Por lo tanto,

$$E(v[n]u^*[n-l]) = E(v[n])E(u^*[n-l]) = 0 \quad l > 0$$

- y la ecuación 9 queda,

$$\sum_{k=0}^M a_k^* r[l-k] = 0 \quad l > 0.$$

- Se concluye que la autocorrelación cumple la ecuación en diferencias

$$r[l] = w_1^* r[l-1] + w_2^* r[l-2] + \dots + w_M^* r[l-M] \quad l > 0. \quad (10)$$

con  $w_k = -a_k$ .

•

.

•

# Función de autocorrelación de un proceso AR

## Observación

- La solución general de la ecuación en diferencias de la autocorrelación (ec. 10) es

$$r[m] = \sum_{k=1}^M C_k p_k^m$$

- $C_1, C_2, \dots, C_M$  son constantes
- $p_1, p_2, \dots, p_M$  son las raíces de la ecuación característica.

- Cuando el proceso AR cumple la condición de estacionaridad asintótica,  $|p_k| < 1$  para todo  $k$ , se cumple que

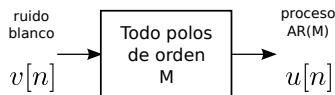
$$\lim_{m \rightarrow \infty} r[m] = 0,$$

por lo que el proceso es asintóticamente no correlacionado.

- La condición necesaria y suficiente para que un proceso sea WSS es que sea asintóticamente no correlacionado.

# Ecuaciones de Yule-Walker (1927)

- Dado un proceso estocástico estacionario  $u[n]$ , se quiere encontrar el proceso  $\text{AR}(M)$  que lo modela. Se asume que se conoce la autocorrelación del proceso.
- Para definir completamente un modelo  $\text{AR}(M)$  se necesita especificar dos conjuntos de parámetros
  - 1 Los coeficientes AR  $a_1, a_2, \dots, a_M$ .
  - 2 La varianza  $\sigma_v^2$  del ruido blanco empleado como excitación.





## Cálculo de los coeficientes AR

- Se vio que la ecuación en diferencias de la autocorrelación del proceso es

$$r[l] = w_1^* r[l-1] + w_2^* r[l-2] + \cdots + w_M^* r[l-M] \quad l > 0.$$

- La idea es evaluar la autocorrelación en  $l = 1, 2, \dots, M$  para obtener un conjunto de  $M$  ecuaciones con  $M$  incógnitas.
- Evaluando para  $l = 1$  se tiene que

$$\begin{aligned} r[1] &= w_1^* r[0] + w_2^* r[-1] + \cdots + w_M^* r[-M+1] \\ &= w_1^* r[0] + w_2^* r^*[1] + \cdots + w_M^* r^*[M-1] \end{aligned}$$

en donde se usó la propiedad de que  $r[k] = r^*[-k]$ .

- Conjugando en ambos lados de la igualdad se llega a que

## Cálculo de los coeficientes AR

- Repitiendo para  $l = 2, \dots, M$  se tiene que

$$r^*[2] = w_1 r^*[1] + w_2 r[0] + w_3 r[1] + \dots + w_M r[M-2]$$

$$r^*[3] = w_1 r^*[2] + w_2 r^*[1] + w_3 r[0] + \dots + w_M r[M-3]$$

$$\vdots$$

$$r^*[M] = w_1 r^*[M-1] + w_2 r^*[M-2] + w_3 r^*[M-3] + \dots + w_M r[0]$$

- El sistema de ecuaciones expresado en notación matricial queda

$$\begin{pmatrix} r[0] & r[1] & r[2] & \dots & r[M-1] \\ r^*[1] & r[0] & r[1] & \dots & r[M-2] \\ r^*[2] & r^*[1] & r[0] & \dots & r[M-3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*[M-1] & r^*[M-2] & r^*[M-3] & \dots & r[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^*[1] \\ r^*[2] \\ r^*[3] \\ \vdots \\ r^*[M] \end{pmatrix}$$

# Ecuaciones de Yule-Walker

## Cálculo de los coeficientes AR

- El sistema de ecuaciones expresado en notación matricial es

$$\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{r}$$

- $\mathbf{R}$  es la matriz de autocorrelación de tamaño  $M$ .

- $\mathbf{r} = [r^*[1], r^*[2], \dots, r^*[M]]^T$

- $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$

- La solución para obtener los coeficientes es  $\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}$

## Conclusiones

- En el caso de procesos AR, se encontró una relación univoca entre los coeficientes del modelo y la autocorrelación del proceso.
- Además, la relación esta dada por un sistema lineal de ecuaciones, fácil de resolver. La matriz de autocorrelación

## Cálculo de la varianza del ruido

- La ecuación 9 indica que

$$\sum_{k=0}^M a_k^* r[l - k] = E(v[n]u^*[n - l])$$

- Evaluando en  $l = 0$ , se tiene que el lado derecho de la igualdad es

$$\begin{aligned} E(v[n]u^*[n]) &= E\left(v[n]\left(v[n] - \sum_{k=1}^M a_k^* u[n - k]\right)^*\right) \\ &= E(v[n]v^*[n]) - \sum_{k=1}^M a_k E(v[n]u^*[n - k]) \\ &\stackrel{(a)}{=} E(v[n]v^*[n]) \\ &= \sigma_v^2. \end{aligned}$$

(a) La salida no depende de muestras futuras de la entrada y el ruido es de media nula.

- Por lo tanto, la ecuación 9 evaluada en  $l = 0$  queda

