

SEGUNDO PARCIAL DE MATEMÁTICA DISCRETA 2

Nombre	C.I.	No. de prueba
--------------	-----------	---------------------

Duración: 3:30 horas. Sin material y sin calculadora.

Es necesario mostrar la resolución de los ejercicios, presentar únicamente la respuesta final carece de valor.

Ejercicio 1.

- A. Enuncie (y NO demuestre) el Teorema de Lagrange.
- B. Probar que si G es un grupo finito y $g \in G$ entonces $o(g) \mid |G|$.

(Obs. No se puede utilizar que $g^{|G|} = e$ ya que esto es consecuencia de lo que se pide probar; a menos que lo prueben de forma independiente).

- C. Probar que 2 es raíz primitiva módulo 29 y hallar $s \in \{0, 1, \dots, 27\}$ tal que $9 \equiv 2^s \pmod{29}$.
- D. Hallar todos los $x \in \mathbb{Z}$ que verifican $x^{18} \equiv 9 \pmod{29}$.

Ejercicio 2

- A. Enuncie (y NO demuestre) el Primer Teorema de Isomorfismo.

- B. Probar que $\frac{(\mathbb{R}^*, \cdot)}{\{1, -1\}} \simeq (\mathbb{R}, +)$.

((\mathbb{R}^*, \cdot) es el grupo $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con el producto usual y $(\mathbb{R}, +)$ son los reales con la suma usual.)

- C. Sean p y q primos distintos.

- i) Probar que si $\bar{z} \in \mathbb{Z}_{p^2}$ es tal que $o(\bar{z}) = p$ entonces $z \equiv kp \pmod{p^2}$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

(Recordar que la estructura de grupo de \mathbb{Z}_{p^2} es con la suma de clases, y no con el producto).

- ii) Probar que $H = \langle \bar{p} \rangle$ es el único subgrupo de \mathbb{Z}_{p^2} de orden p .

- iii) Si $\psi : \mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \mathbb{Z}_{pq}$ es un homomorfismo no trivial, hallar $\ker(\psi)$.

Ejercicio 3

- A. Sea $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ un homomorfismo, probar que $o(\psi(g)) \mid o(g)$ para todo $g \in G_1$.

- B. Sea S_n el grupo de permutaciones de n elementos. Probar que si $\psi : S_n \rightarrow G$ es un homomorfismo que verifica $\psi(\tau) = e_G$ para toda **trasposición** $\tau \in S_n$, entonces ψ es el homomorfismo trivial (es decir, $\psi(\sigma) = e_G, \forall \sigma \in S_n$).

- C. Probar que si G es un grupo de orden impar entonces no existen homomorfismos $\psi : S_n \rightarrow G$ no triviales. (Sugerencia: utilizar las partes anteriores).

- D. Hallar todos los homomorfismos no triviales $\psi : S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_4$.