

# Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Matemática Discreta 2

PRIMER PARCIAL - 30 DE ABRIL DE 2022.

## Soluciones.

### Ejercicio 1.

- a. Definir el máximo común divisor de dos enteros  $a$  y  $b$ , donde  $(a, b) \neq (0, 0)$ , justificando que está bien definido.

*Solución.* En las notas de teórico es la Definición 1.2.4. Es necesario justificar que el máximo en cuestión existe como en la Observación 1.2.3; para esto se precisa  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

- b. Demostrar que si  $(a, b) \neq (0, 0)$  entonces

$$\text{mcd}(a, b) = \min\{s > 0 : s = ax + by \text{ para algunos } x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

*Solución.* En las notas de teórico es el Teorema 1.2.8.

- c. Calcular  $d = \text{mcd}(1302, 469)$  y escribir  $d$  como combinación lineal entre 1302 y 469.

*Solución.* Calculamos  $\text{mcd}(1302, 469) = \text{mcd}(469, 369) = \text{mcd}(369, 105) = \text{mcd}(105, 49) = \text{mcd}(49, 7) = 7$ , donde aparecen los restos sucesivos de las siguientes divisiones enteras:

$$364 = 1302 - 2 \cdot 469$$

$$105 = 469 - 1 \cdot 364$$

$$49 = 364 - 3 \cdot 105$$

$$7 = 105 - 2 \cdot 49$$

Para escribir 7 como combinación lineal de 1302 y 469 utilizamos en las ecuaciones anteriores, comenzando por la última:

$$\begin{aligned} 7 &= 105 - 2 \cdot 49 = 105 - 2 \cdot (364 - 3 \cdot 105) \\ &= 7 \cdot 105 - 2 \cdot 364 = 7 \cdot (469 - 1 \cdot 364) - 2 \cdot 364 \\ &= 7 \cdot 469 - 9 \cdot 364 = 7 \cdot 469 - 9 \cdot (1302 - 2 \cdot 469) \\ &= 25 \cdot 469 - 9 \cdot 1302. \end{aligned}$$

### Ejercicio 2.

- a. Enunciar el Teorema Chino de los Restos para dos congruencias con módulos coprimos.

*Solución.* En las notas de teórico es el Teorema 2.5.1.

- b. Definir la función  $\varphi$  de Euler.

*Solución.* En las notas de teórico es la Definición 2.6.1.

- c. Demostrar que si  $\text{mcd}(m, n) = 1$  entonces  $\varphi(mn) = \varphi(m) \varphi(n)$ .

*Solución.* En las notas de teórico es el Teorema 2.6.3.

- d. Encontrar  $0 \leq x < 1616$  tal que  $x \equiv 14^{1603} \pmod{1616}$ .

*Solución.* Como  $\text{mcd}(14, 1616) = 2 > 1$  no podemos usar el Teorema de Euler directamente. En cambio, como  $1616 = 16 \cdot 101$  podemos calcular  $x \pmod{16}$ ,  $x \pmod{101}$ , y utilizar el Teorema Chino. En primer lugar es claro que  $14^{1603} = 2^{1603} \cdot 7^{1603} \equiv 0 \pmod{16}$ .

Como  $\text{mcd}(14, 101) = 1$  podemos utilizar el Teorema de Euler; dado que  $\varphi(101) = 100$  tenemos que  $14^{1603} \equiv 14^3 \pmod{101}$ . Calculamos fácilmente  $14^2 = 196 \equiv -6 \pmod{101}$  y  $14^3 \equiv -6 \cdot 14 = -84 \equiv 17 \pmod{101}$ .

Para terminar resolvamos  $x \equiv 17 \pmod{101}$  y  $x \equiv 0 \pmod{16}$ . Por la primera congruencia debe ser  $x = 17 + 101t$ . Por la segunda  $0 \equiv x = 17 + 101t \equiv 1 + 5t \pmod{16}$ . La solución es  $t \equiv 3 \pmod{16}$  que resulta en  $x \equiv 320 \pmod{1616}$ . Tomando en cuenta las desigualdades concluimos que  $x = 320$ .