

## Segundo examen de Matemática Discreta 2 - Curso 2006 - IMERL

Miércoles 27 de diciembre de 2006, 13:00 hs. Duración: 4 horas.

Nº. Examen	Cédula	Apellido, Nombre

No se permite el uso de ningún tipo de material salvo calculadoras.

Se deberá apagar los celulares.

**Ejercicio 1. (24 puntos).** Las dos partes de este ejercicio son independientes.

1. Enunciar y probar el pequeño teorema de Fermat.
2. Hallar los pares  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tales que  $a^2 + b^2 = 14365$  y  $\text{mcd}(a, b) = 13$ .

**Ejercicio 2. (33 puntos).** Sea  $A$  un anillo conmutativo y con unidad. Definimos el conjunto  $A[i] = \{a + bi : a, b \in A\}$

1. Probar que  $(A[i], +, \star)$  es un anillo conmutativo y con unidad siendo  
 $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$  y  $(a + bi) \star (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ .
2. Investigar para  $A = \mathbb{Z}_2$  y  $A = \mathbb{Z}_3$  cuando  $A[i]$  es un cuerpo.
3. Considerar  $A = \mathbb{Z}$  y  $M = \{a + bi : 3|a \text{ y } 3|b\} \subset \mathbb{Z}[i]$ . Probar que  $M$  es un ideal de  $\mathbb{Z}[i]$ .
4. Probar que  $M$  es un ideal maximal de  $\mathbb{Z}[i]$ .

**Ejercicio 3. (24 puntos).**

Se considera un grupo  $(G, \star)$  tal que  $|G| = pq$  con  $p, q$  primos y  $p > q$ .

1. Probar que existe un único subgrupo normal  $H$  con  $p$  elementos.
2. (a) Sea  $G$  un grupo con  $91 = 7 \times 13$  elementos. Hallar todos los subgrupos de  $G$ .  
(b) ¿Es  $G$  abeliano? Justificar con detalles.

**Ejercicio 4. (19 puntos).**

Sea  $P$  un polinomio en  $\mathbb{Z}[x]$ .

1. Probar que si  $P(0)$  y  $P(1)$  son impares entonces  $P$  no tiene raíz en  $\mathbb{Z}$ .
2. Sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que ningún entero  $P(0), P(1), \dots, P(n-1)$  sea divisible por  $n$ . Probar que  $P$  no tiene raíz en  $\mathbb{Z}$ .

¡Buena Suerte!

**PARA USO DOCENTE:**

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
(1)	(1)	(1)	(1)
(2)	(2)	(2) (a)	(2)
	(3)	(2)(b)	
	(4)		
Total:	Total:	Total:	Total:

**TOTAL EXAMEN:**