

## Examen de Matemática Discreta 2

Miércoles 01 de Marzo de 2006, 14:00 hs. **Duración: 4 horas.**

Nº. EXAMEN	Cédula	Apellido, Nombre

**No se permite el uso de ningún tipo de material salvo calculadoras.**

**Se solicita apagar los celulares.**

**El examen se aprueba con 60 puntos o más.**

### Ejercicio 1 (25 puntos).

Sea  $R$  un anillo conmutativo y sea  $I_a = \{b \in R / ba = 0\}$ .

- (1) **(8 puntos)** Mostrar que  $I_a$  es un ideal de  $R$ .
- (2) **(7 puntos)** En  $\mathbb{Z}_{12}$  hallar  $I_8$  e  $I_9$ .
- (3) **(10 puntos)** Hallar las tablas de suma y producto del anillo cociente  $\frac{\mathbb{Z}_{12}}{I_8}$ .

### Ejercicio 2. (25 puntos).

- (1) **(8 puntos)** Determinar los enteros positivos  $m$  tales que  $28 \equiv 52 \equiv 88(m)$ .
- (2) **(7 puntos)** Un comerciante compró 22 camisas en  $x293y$  pesos siendo  $x$  e  $y$  dígitos. Se sabe que cada camisa cuesta más de 2500. ¿Cuál es el precio de cada camisa?
- (3) **(8 puntos)** Hallar el resto de dividir  $8392^{477} \cdot 322^{512}$  entre 13.

### Ejercicio 3. (25 puntos).

Sea  $G$  el grupo de todas las matrices  $2 \times 2$  de coeficientes reales que son invertibles, con la operación producto usual de matrices. Sea  $N$  el subgrupo de todas las matrices de  $G$  que tienen determinante igual a 1.

- (1) **(7 puntos)** Probar que para todo  $a \in N$  la clase de conjugación  $cl(a)$  de  $a$  en  $G$  está contenida en  $N$ .
- (2) **(8 puntos)** Sea  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  el grupo de todos los reales distintos de cero con la operación producto de reales. Construir un homomorfismo de grupos  $\Phi : G \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , tal que  $Ker(\Phi) = N$
- (3) **(10 puntos)** Probar que el grupo cociente  $G/N$  es isomorfo a  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Ejercicio 4. (25 puntos).** En  $\mathbb{Z}_5[x]$  consideramos el polinomio  $p(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ .

- (1) **(8 puntos)** Probar que  $p$  es reducible y hallar su descomposición como producto de factores irreducibles.
- (2) **(7 puntos)** Probar que  $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 2)$  es un cuerpo y hallar cuantos elementos tiene.
- (3) **(8 puntos)** Hallar  $[p(x)]$  y  $[x^4 + 3x^2 + 3]$  en  $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 2)$ .

---

#### PARA USO DOCENTE:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
(1)	(1)	(1)	(1)
(2)	(2)	(2)	(2)
(3)	(3)	(3)	(3)
<b>Total:</b>	<b>Total:</b>	<b>Total:</b>	<b>Total:</b>

**TOTAL EXAMEN:**