

## Soluciones del examen de Matemática Discreta 2.

Miércoles 01 de Marzo 2006

**Ejercicio 1 (25 puntos).** Sea  $R$  un anillo conmutativo y sea  $I_a = \{b \in R / ba = 0\}$ .

(1) **(8 puntos)** Mostrar que  $I_a$  es un ideal de  $R$ .

Obviamente  $0 \in I_a$ . Si  $b_1$  y  $b_2$  pertenecen a  $I_a$ ,  $b_1a = b_2a = 0$  entonces  $(b_1 + b_2)a = b_1a + b_2a$  y  $(-b)a = -(ba) = 0$  lo cual prueba que  $(I_a, +, 0)$  es grupo.

Sea  $r \in R$  y  $b \in I_a$ , entonces  $(rb)a = r(ba) = r0 = 0$  y  $(br)a = (rb)a = 0$ . Luego  $I_a$  es un ideal de  $R$ .

(2) **(7 puntos)** En  $\mathbb{Z}_{12}$  hallar  $I_8$  e  $I_9$ .  $I_8 = \{0, 3, 6, 9\}$  e  $I_9 = \{0, 4, 8\}$ .

(3) **(10 puntos)** Hallar las tablas de suma y producto del anillo cociente  $\frac{\mathbb{Z}_{12}}{I_8}$ .

	$(\frac{\mathbb{Z}_{12}}{I_8}, +)$					$(\frac{\mathbb{Z}_{12}}{I_8}, \cdot)$					
		[0]	[1]	[2]				[0]	[1]	[2]	
$\frac{\mathbb{Z}_{12}}{I_8} = \{[0], [1], [2]\}$ y	[0]	[0]	[1]	[2]		[0]	[0]	[0]	[0]		
	[1]	[1]	[2]	[0]		[1]	[0]	[1]	[2]		
	[2]	[2]	[0]	[1]		[2]	[0]	[2]	[1]		

**Ejercicio 2. (25 puntos).**

(1) **(8 puntos)** Determinar los enteros positivos  $m$  tales que  $28 \equiv 52 \equiv 88(m)$ .

$28 \equiv 52(m)$  implica que  $m$  divide a  $52 - 28 = 24$ .

$52 \equiv 88(m)$  implica que  $m$  divide a  $88 - 52 = 36$ .

Entonces  $m | \text{mcd}(24, 36) = 12$ , luego los posibles valores son 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

(2) **(7 puntos)** Un comerciante compró 22 camisas en  $x293y$  pesos siendo  $x$  e  $y$  dígitos. Se sabe que cada camisa cuesta más de 2500. ¿Cuál es el precio de cada camisa?

El precio total es  $x293y$  y se compraron 22 camisas. Entonces 22 divide a  $x293y$ , por lo cual  $x293y$  es divisible por 2 (entonces  $y$  es par) y es divisible por 11 (o sea  $x + 9 + y - 5 = x + y + 4$  es múltiplo de 11).

$2500 \times 22 = 55000$ , entonces  $x$  es mayor que 6

Si  $x = 6$  entonces  $y + 10$  es múltiplo de 11, lo cual contradice que  $y$  sea par.

Si  $x = 7$  entonces  $y + 11$  es múltiplo de 11, luego  $y=0$  y el precio de la compra es de 72930. Cada camisa cuesta entonces  $72930/22=3315$ .

Si  $x = 8$  entonces  $y + 12$  es múltiplo de 11, y variando  $y$  entre 0 y 9 se ve que no hay solución.

Si  $x = 9$  entonces  $y + 13$  es múltiplo de 11, entonces  $y = 9$  lo cual contradice que  $y$  sea par.

Conclusión: el precio de una camisa es 3315 pesos.

(3) **(8 puntos)** Hallar el resto de dividir  $8392^{477} \cdot 322^{512}$  entre 13.

Hay que hallar  $8392^{477} \cdot 322^{512}(13)$ .

$8392 \equiv 7(13)$  y  $322 \equiv 10(13)$ .

Por otro lado  $477 = 39 \times 12 + 9$  y  $512 = 42 \times 12 + 8$ .

$7^{477} = 7^{39 \times 12 + 9} = (7^{12})^{39} \cdot 7^9$ . Como  $7^{12} \equiv 1(13)$  por Fermat y  $7^9(13) = 7 \times (7^2)^4 = 7(49)^4 \equiv 7 \times 10^4$ .

Además, por Fermat,  $10^{12} \equiv 1(13)$ . Entonces  $10^{42 \times 12 + 8} \equiv 10^8$ .

El resultado es igual a  $7 \cdot 10^4 \cdot 10^8 = 7 \cdot 100^6 \equiv 7 \cdot 9^6 = 7 \cdot 81^3 \equiv 7 \cdot 3^3 = 189 \equiv 7(13)$ .

**Ejercicio 3. (25 puntos).**

Sea  $G$  el grupo de todas las matrices  $2 \times 2$  de coeficientes reales que son invertibles, con la operación producto usual de matrices. Sea  $N$  el subgrupo de todas las matrices de  $G$  que tienen determinante igual a 1.

(1) **(7 puntos)** Probar que para todo  $a \in N$  la clase de conjugación  $cl(a)$  de  $a$  en  $G$  está contenida en  $N$ .

$cl(a) = \{gag^{-1}, g \in G\}$ . Sea  $b \in cl(a)$ , entonces existe  $g \in G$  tal que  $b = gag^{-1}$ .

$\det(b) = \det(gag^{-1}) = \det(g)\det(a)\det(g^{-1}) = \det(a) = 1$ , entonces  $b \in N$ . Luego  $cl(a) \subset N$ .

(2) **(8 puntos)** Sea  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  el grupo de todos los reales distintos de cero con la operación producto de reales. Construir un homomorfismo de grupos  $\Phi : G \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , tal que  $\text{Ker}(\Phi) = N$

Sea  $\Phi : G \mapsto \mathbb{R} \setminus \{0\}$  definido por  $\Phi(g) = \det(g)$ .

$\Phi(g_1g_2) = \det(g_1g_2) = \det(g_1) \times \det(g_2) = \Phi(g_1) \times \Phi(g_2)$ , entonces  $\phi$  es un homomorfismo de grupos.

$\ker(\phi) = \{g \in G / \Phi(g) = 1\}$  (ojo que el neutro en los reales con el producto es 1).

Entonces  $\ker(\phi) = \{g \in G / \Phi(g) = 1\} = \{g \in G / \det(g) = 1\} = N$ .

(3) **(10 puntos)** Probar que el grupo cociente  $G/N$  es isomorfo a  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$\Phi$  es sobreyectiva: Dado  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  existe  $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$  tal que  $\phi \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = r$ .

Entonces por el Teorema de homomorfismos de grupos  $G/\ker(\Phi) \cong \text{Im}(\Phi)$ , o sea  $G/N \cong \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Ejercicio 4. (25 puntos).** En  $\mathbb{Z}_5[x]$  consideramos el polinomio  $p(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ .

(1) **(8 puntos)** Probar que  $p$  es reducible y hallar su descomposición como producto de factores irreducibles.

$p(0) = 2 \neq 0, p(1) = 4 \neq 0, p(2) = 2 \neq 0, p(3) = 3 \neq 0, p(4) = 3 \neq 0$ , entonces  $p$  no se puede descomponer como producto donde uno de sus factores es de grado 1. Por lo cual si  $p$  es reducible entonces  $p(x)$  se escribe como  $(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f)$ .

Se llega a  $p(x) = (x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$ .

(2) **(7 puntos)** Probar que  $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 2)$  es un cuerpo y hallar cuantos elementos tiene.

$x^2 + 2$  es irreducible en  $\mathbb{Z}_5[x]$ , luego  $(x^2 + 2)$  es un ideal maximal y entonces  $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 2)$  es un cuerpo con  $5^2 = 25$  elementos.

(3) **(8 puntos)** Hallar  $[p(x)]$  y  $[x^4 + 3x^2 + 3]$  en  $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 2)$ .

$[p(x)] = [(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)] = [x^2 + 2][x^2 + x + 1] = [0][x^2 + x + 1] = [0]$ .

$[x^4 + 3x^2 + 3] = [(x^2 + 2)(x^2 + 1) + 1] = [(x^2 + 2)][(x^2 + 1)] + [1] = [0] + [1] = [1]$ .