

Segundo parcial de Matemática Discreta II
3 de julio del 2007

Soluciones.

Ejercicio 1. (15 puntos)

a) La asociativa y conmutativa son claras, el elemento neutro es el $(1, 0)$.

b) Observar que si (x, y) es invertible, entonces existen x' e y' reales tales que: $(x, y)(x', y') = (xx', xy' + x'y) = (1, 0)$ esto implica que $xx' = 1$ lo cual a su vez implica que $x \neq 0$. Recíprocamente, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq 0$ entonces se chequea facilmente que $(1/x, -y/x^2)$ es el inverso de (x, y) . Se observa que no puede ser grupo porque, por ejemplo, $(0, 0)$ no tiene inverso en $\mathbb{R}^* \times \{0\}$.

c) La asociativa y neutro se hereda de (\mathbb{R}^2, \cdot) . Es cerrado por el producto pues $(x, 0)(x', 0) = (xx', 0)$ y todo elemento tiene inverso pues $(x, 0)^{-1} = (1/x, 0)$.

Ejercicio 2. (15 puntos)

a) $id \in S$ y si σ y τ son elementos de S entonces: $\sigma\tau(i) = \sigma(i) = i$ para $i = 3, 4$ así que $\sigma\tau \in S$ y por lo tanto S es cerrado por el producto, además como S es finito esto implica que $S < S_7$.

b) i) Se considera $\sigma = (35)(46)$ tenemos que $\sigma(123)(147)\sigma^{-1} = (16725) \in S$.

ii) Si $\sigma \in S \Rightarrow \sigma(3) = 3 \Rightarrow \sigma^{-1}(3) = 3$, luego: $\sigma(123)(147)\sigma^{-1}(3) = \sigma(2) \neq 3$ pues σ es biyectiva y $\sigma(3) = 3$, luego $\sigma(123)(147)\sigma^{-1} \notin S$.

c) Si $\sigma = (35)(46)$ entonces $\sigma(165)\sigma^{-1} = (143) \notin S$ por lo tanto S no es normal.

Ejercicio 3. (30 puntos)

Las partes a) y b) se probaron en teórico, la parte c) puede deducirse directamente del segundo teorema de isomorfismos (tomando cardinales).

d) Por corolario de la ecuación de clases $Z(G) = \dot{p}$ como el centro es un subgrupo, aplicando Lagrange tenemos que su cardinal es p ó p^2 , si fuese p^2 entonces $G = Z(G)$ es abeliano. Si fuese p llegamos a un absurdo pues tendríamos que $G/Z(G)$ sería cíclico (por tener orden p) y por lo tanto G

sería abeliano y $Z(G)$ tendría orden p^2 (absurdo).

e) $HN < G$ por la parte a).

Ahora probamos que $hn = nh$ para todo $h \in H$ y $n \in N$:

$nh^{-1}n^{-1} \in H$ porque $H \triangleleft G$ así que $hnh^{-1}n^{-1} \in H$.

$hnh^{-1} \in N$ porque $N \triangleleft G$ así que $hnh^{-1}n^{-1} \in N$. Por lo tanto $hnh^{-1}n^{-1} \in H \cap N = \{e\}$, lo cual implica $hn = nh$ para todo $h \in H$ y $n \in N$.

Si $h_1n_1, h_2n_2 \in HN$ entonces $h_1n_1 \cdot h_2n_2 = h_1h_2n_1n_2 = h_2h_1n_2n_1 = h_2n_2 \cdot h_1n_1$, donde la primer y última igualdad es por lo que probamos anteriormente y la segunda porque H y N son abelianos.

f) $13225 = 5^2 23^2$, usando las condiciones de divisibilidad del teorema de Sylow, llegamos a que $n_5 = 1$ y $n_{23} = 1$ por lo tanto hay un solo 5-Sylow y un único 23-Sylow y estos deben ser normales (también por el teorema de Sylow). Usando Lagrange el orden de $H \cap K$ debe dividir a $5^2 = |H|$ y a $23^2 = |K|$ por lo tanto $H \cap K = \{e\}$, por la parte c) nos queda que $G = HK$, por la parte d) tenemos que H y K son abelianos, luego por la parte e) concluimos que G es abeliano.