

Soluciones resumidas del segundo parcial de Matemática Discreta 2 - Curso 2006 - IMERL

Lunes 03 de julio de 2006

Ejercicio 1. (16 puntos)

1) (2ptos) Si (G, \star) es un grupo y H es un subgrupo de G , definimos la relación en G : $a \sim b \Leftrightarrow a \star b^{-1} \in H$. Es una relación de equivalencia.

Clase de equivalencia de $a \in G$ es $[a] = \{b \in G / b \sim a\} = Ha$.

$G/H = \{Ha / a \in G\}$.

2) (7 ptos) Si H es normal, veamos que la operación $\bar{\star}$ definida por $[a]\bar{\star}[b] = [a \star b]$ está bien definida. Supongamos que $[a] = [a']$ y $[b] = [b']$.

Esto significa que $aa'^{-1} \in H$ y que $bb'^{-1} \in H$. Queremos ver que $[a \star b] = [a' \star b']$ (esto es que $[a]\bar{\star}[b] = [a']\bar{\star}[b']$, o sea no depende del representante elegido).

$[a \star b] = [a' \star b'] \Leftrightarrow ab(a'b')^{-1} \in H$. Pero $ab(a'b')^{-1} = abb'^{-1}a'^{-1} = (abb'^{-1}a^{-1})(aa'^{-1})$.

Como H es normal en G entonces $abb'^{-1}a^{-1} \in H$ ya que $bb'^{-1} \in H$. Luego $(abb'^{-1}a^{-1})(aa'^{-1}) \in H$ por ser producto de dos elementos en H .

entonces el producto está bien definido.

La propiedad asociativa de $\bar{\star}$ se deduce fácilmente de la propiedad asociativa de \star .

El elemento neutro de G/H es $e_{G/H} = [e_G]$ (verificarlo).

Todo elemento tiene inverso $[a]^{-1} = [a^{-1}]$ (verificarlo).

3) (7 ptos) Defino $\phi : G \rightarrow G/H$ por $\phi(a) = [a]$.

Es morfismo de grupos: $\phi(a \star b) = [a \star b] = [a]\bar{\star}[b] = \phi(a)\bar{\star}\phi(b)$.

Es sobreyectivo: dado $[x] \in G/H$, se tiene que $\phi(x) = [x]$.

Núcleo de ϕ : $\text{Ker}(\phi) = \{a \in G / \phi(a) = e_{G/H}\} = \{a \in G / [a] = [e_G]\} = \{a \in G / ae_G^{-1} \in H\} = \{a \in G / a \in H\} = H$.

Ejercicio 2. (12 puntos)

1) (3 ptos) Por el primer teorema de Sylow, como $11 \mid 110$, existe un subgrupo $S_{11} = H$ con $|H| = 11$. La cantidad de tales subgrupos es $n_{11} = 1 + k11$ y tiene que dividir a 10. Entonces $n_{11} = 1$ y H es normal en G .

2) (3 ptos) De la misma manera como $5 \mid 110$ existe un subgrupo $S_5 = K$ con $|K| = 5$.

3) (6 ptos) Sea $T = HK$. Como H es normal en G se tiene que $HK = KH$ (probarlo), entonces HK es un subgrupo de G .

Por otro lado $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{11 \times 5}{1}$ pues $H \cap K = S_{11} \cap S_5 = \{e\}$ (justificarlo). Entonces $T = HK$ es un subgrupo de G con 55 elementos.

T es normal en G pues es subgrupo y $[G : T] = 2$.

Ejercicio 3. (13 puntos)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & a & 5 & 3 & 4 & 6 & 2 & b & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 5 & 8 & 9 & c & 6 & 1 & d \end{pmatrix}.$$

1) (6 ptos) Tenemos escrito σ como el producto de $\gamma_1 \gamma_2$.

Recordamos que si σ se descompone como unión de ciclos disjuntos $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r$ entonces el orden de σ es $\text{mcm}(\tau_1, \dots, \tau_r)$.

Como $\sigma(2) = 2$ quedan para permutar 8 elementos. Para que el mayor orden se dé, habría que escribir σ como producto de un 3-ciclo y de un 5-ciclo, ya que $\text{mcm}(3, 5) = 15$.

Se llega a que:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 4 & b & 8 & \star_1 & 6 & 7 & \star_2 \end{pmatrix}$$

donde $\star_1 = \gamma_1(c)$ y $\star_2 = \gamma_1(d)$.

Se llega a que $b = 9, c = 2, d = 4$ y $a = 1$.

Luego $\sigma = (15876)(349)$.

Podrá haberse estudiado también los 4 casos ya que se sabe que $a, b \in \{1, 9\}$ y $c, d \in \{2, 4\}$.

2) (4 ptos) $\sigma^{248} = ((15876)(349))^{248} = (15876)^{248}(349)^{248} = (17568)(394)$

3) (3 ptos) σ es el producto de un 5-ciclo y de un 3-ciclo, ambos con signo par, luego σ tiene signo par también.

Ejercicio 4. (19 puntos)

1) (5 pts) Hay que verificar que $(\mathbb{R}^3, +)$ es un grupo conmutativo, \times es asociativa, \times es distributiva sobre $+$ (ambos lados) y que la unidad es $(1, 1, 0)$.

No es conmutativo, por ejemplo $(1, 2, 3) \times (3, 4, 5) = (3, 8, 13)$ y $(3, 4, 5) \times (1, 2, 3) = (3, 8, 19)$.

2) (4 pts) (x, y, z) es una unidad si y sólo si $(x, y, z) \times (x', y', z') = (1, 1, 0) = (x', y', z') \times (x, y, z)$.

O sea $(xx', yy', xz' + y'z) = (1, 1, 0) = (x'x, y'y, x'z + yz')$. o sea hay que pedir que x e y sean invertibles y que $xz' + y'z = x'z + yz' = 0$. Los invertibles son de la forma $\{(x, y, z) : x, y, \text{ invertibles}, z \text{ cualquiera}\}$.

El inverso de $(x, y, z) = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{-z}{xy})$.

3) (3 pts) los elementos de la forma $(0, y, z)$ son divisores propios de 0. También los del tipo $(x, 0, z)$.

$(0, y, z) \times (x', 0, z') = (0, 0, 0)$.

4) (3 pts) Claramente $(I, +, 0)$ es un subgrupo de \mathbb{R}^3 .

$(x, y, z) \times (a, 0, b) = (xa, 0, xb + 0z) \in I$ y $(a, 0, b) \times (x, y, z) = (xa, 0, az + y0) \in I$, luego I es un ideal bilateral de \mathbb{R}^3 .

5) (4 pts) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x, y, z) = y$ es un morfismo de anillos sobreyectivo (verificarlo).

$\text{Ker}(\varphi) = I$. Por el primer teorema de homomorfismos de anillos tenemos que $\mathbb{R} = \text{Im}(\varphi) \cong \mathbb{R}^3 / \text{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}^3 / I$.

Como \mathbb{R} es un cuerpo, I es un ideal maximal ya que por el segundo teorema de homomorfismos de anillos los ideales de \mathbb{R} están en correspondencia con los ideales de \mathbb{R}^3 que contienen a $I = \text{Ker}(\varphi)$. Al ser \mathbb{R} un cuerpo, I es maximal.

Otra manera. Sea J ideal de \mathbb{R}^3 tal que $I \subset J$. Sea $v \in J \setminus I$. Entonces v es de la forma (a', α, b') con $\alpha \neq 0$.

Si $a' \neq 0$ entonces (a', α, b') es un elemento invertible del anillo \mathbb{R}^3 , luego $J = \mathbb{R}^3$.

Si $a' = 0$ entonces $(0, \alpha, b) + (1, 0, 0) = (1, \alpha, b) \in J$, luego $J = \mathbb{R}^3$.

Entonces I es maximal.