

1ER PARCIAL - 4 DE MAYO DE 2021.

Ejercicio 1. Sean a y b dos números naturales cuyas descomposiciones en factores primos son:

$$a = p_1^{c_1} \dots p_k^{c_k} \quad \text{y} \quad b = p_1^{d_1} \dots p_k^{d_k}$$

(a) Demostrar que

$$\text{mcd}(a, b) = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k} \quad \text{y} \quad \text{mcm}(a, b) = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$$

donde para cada $i = 1, \dots, k$

$$m_i = \min\{c_i, d_i\} \quad \text{y} \quad n_i = \max\{c_i, d_i\}$$

(b) Hallar todos los pares de naturales (a, b) tales que $ab = 4900$ y $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Ejercicio 2.

(a) Sea $n > 1$, $a \in \mathbb{Z}$ un entero y a_0 el resto de dividir a entre n . Demostrar que para cualquier $m > 1$ se tiene que

$$a^m = a_0^m \pmod{n}.$$

(b) Determinar todos los enteros $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^3 = 4 \pmod{5}$.

(c) Determinar todos los enteros $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^3 = 3 \pmod{5}$.

Ejercicio 3. En este ejercicio conviene tener en cuenta que $119 = 7 \times 17$, $76 = 4 \times 19$ y $57 = 3 \times 19$.

(a) Hallar los inversos de 4 en \mathbb{Z}_{19} y de 3 en \mathbb{Z}_{119} .

(b) Resolver el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} 4x = 20 & (\text{mod } 76) \\ x = 24 & (\text{mod } 57) \\ 3x = 4 & (\text{mod } 119) \end{cases}$$

Ejercicio 4. Demostrar que si (G, \star) es un grupo tal que $|G| = 3$ entonces G es conmutativo.

Escala de puntos: **1) 10** : (a) 6 (b) 4 **2) 10** : (a) 6 (b) 2 (c) 2 **3) 12** : (a) 6 (b) 6 **4) 8**