

Segundo parcial de Matemática Discreta II  
3 de julio de 2007

Número de Parcial	Cédula	Nombre y Apellido

**Ejercicio 1. (15 puntos)**

En  $\mathbb{R}^2$  se considera la siguiente operación:  $(x, y).(x', y') = (xx', xy' + x'y)$ .

- (a) Probar que la operación es asociativa, conmutativa y posee neutro.
- (b) Hallar los elementos invertibles. ¿Es  $(\mathbb{R}^2, .)$  un grupo?
- (c) Si se restringe la operación a  $\mathbb{R}^* \times \{0\}$ ; ¿se puede afirmar que  $(\mathbb{R}^* \times \{0\}, .)$  es un grupo?

**Ejercicio 2. (15 puntos)**

Sea  $S = \{ \sigma \in \mathcal{S}_7 / \sigma(4) = 4, \sigma(3) = 3 \}$ .

- (a) Probar que  $S$  es un subgrupo de  $\mathcal{S}_7$ .
- (b)
  - (i) Hallar una permutación  $\sigma \in \mathcal{S}_7$  par tal que  $\sigma(123)(147)\sigma^{-1} \in S$ .
  - (ii) ¿Existe  $\sigma \in S$  que verifique:  $\sigma(123)(147)\sigma^{-1} \in S$ ?
- (c) ¿Es  $S$  subgrupo normal de  $\mathcal{S}_7$ ?

**Ejercicio 3. (30 puntos)**

- (a) Sea  $G$  grupo,  $N \triangleleft G$  y  $H < G$ . Probar que:
  - (i)  $HN < G$ ;
  - (ii)  $N \triangleleft HN$  y  $H \cap N \triangleleft H$ .
- (b) Enunciar y probar el "Segundo teorema de isomorfismos de grupos".
- (c) Deducir que si  $N \triangleleft G$  y  $H < G$ , entonces  $|HN| = \frac{|H||N|}{|H \cap N|}$ .
- (d) Demostrar que si  $|G| = p^2$  con  $p$  primo, entonces  $G$  es abeliano.
- (e) Demostrar que si  $N \triangleleft G$  y  $H \triangleleft G$ , con  $N$  y  $H$  abelianos,  $N \cap H = \{e\}$ , entonces  $HN$  es abeliano.
- (f) Probar que todo grupo con 13225 elementos es abeliano.