

EXAMEN MATEMÁTICA DISCRETA 2

27 de Diciembre de 2005

Examen No.	Apellido y nombre	Cédula

Para uso docente

PUNTAJE OBTENIDO POR EL ESTUDIANTE:

Ejercicio 1: (1) (2) (3) **Total:**

Ejercicio 2: (1) (2) (3) **Total:**

Ejercicio 3: **Total:**

Ejercicio 4: (1) (2) **Total:**

Ejercicio 5: (1) (2) (3) **Total:**

PUNTAJE TOTAL:

Instructivo

1. Al finalizar el examen deberá entregarse la letra con todos los datos identificatorios (apellido, nombre, número de cédula de identidad y número de examen) entregando además la solución de los ejercicios que hizo. Recuerde que es más importante la explicación que el resultado mismo.
2. Cada ejercicio indica en su cabecera cual es su puntaje total si está totalmente bien resuelto. En cada parte se indica el puntaje de esa parte. El examen suma un total de 100 puntos. Para salvar el examen se necesitará un mínimo de 60 puntos.
3. La duración del examen es de cuatro horas.
4. No se permite el uso de ningún tipo de material salvo calculadoras. Se solicita apagar los celulares.
5. Los resultados estarán el miércoles 28 de diciembre a las 17:00 (cartelera del IMERL y página web) y la muestra será el jueves 29 de diciembre a las 10:00.

BUENA SUERTE !!!

Ejercicio 1 (30 puntos)

(1) Hallar a y b enteros positivos tales que
$$\begin{cases} ab = 17836 \\ mcm(a, b) = 2548 \\ a < b \end{cases} .$$

(2) Resolver el sistema de congruencias
$$\begin{cases} 7x + 2y \equiv 7 \pmod{24} \\ 3x - y \equiv 4 \pmod{24} \end{cases}$$

(3) Disponemos de dos tipos A y B de piezas de 9 cm y 15 cm de largo, respectivamente.

¿Con cuántas piezas del tipo A y B podemos obtener la longitud de 6 metros alineando dichas piezas?

¿Y si se quieren colocar al menos 33 piezas del tipo A y 17 piezas del tipo B?

Ejercicio 2 (15 puntos).

Sea G un grupo finito con $|G| = 121$.

(1) Probar que si $a^k = e_G$ para cierto $a \in G$, $a \neq e_G$ y $k \geq 2$, entonces k es múltiplo de 11.

(2) Probar que si $a^{11} = e_G$ entonces $ba^{10} = e_G$ si y solo si $b = a$.

(3) Probar que si G no es cíclico entonces para todo $a \in G$ se cumple $a^{11} = e_G$.

Ejercicio 3 (20 puntos).

Sea f un homomorfismo sobreyectivo de G en \mathbb{Z} .

Demostrar que para todo entero positivo n , G tiene un subgrupo de normal índice n .

Ejercicio 4 (20 puntos).

Consideramos la permutación $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 5 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) Calcular σ^{266} .

(2) Hallar la permutación τ tal que $\tau\sigma\tau^{-1} = (123)(456)$.

Ejercicio 5 (15 puntos).

Consideramos el conjunto $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Probar que $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ es un subanillo de \mathbb{C} pero que no es un ideal de \mathbb{C} .

(2) Probar que $\phi : \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \rightarrow M_2(\mathbb{Z})$ dada por $\phi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es un morfismo de anillos. Hallar su núcleo.

(3) Sea $\psi : \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \rightarrow \mathbb{Z}$ definida como $\psi(a + bi) = a^2 + b^2$. Averiguar si ψ es un morfismo de anillos.