

PRIMER PARCIAL – JUEVES 7 DE OCTUBRE DE 2021

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen. Deben justificar todas sus respuestas.

Ejercicio 1.

- a) (3 pts.) Definir el máximo común divisor de dos enteros y enunciar la identidad de Bezout.
- b) (5 pts.) Sean a, b y p enteros positivos con p primo. Pruebe (sin usar el teorema fundamental de la aritmética) el Lema de Euclides: si $p \mid ab$ entonces $p \mid a$ o $p \mid b$.
- c) (5 pts.) Calcular $d = \text{mcd}(323, 204)$ y expresar d como combinación lineal de 323 y 204.

Ejercicio 2. Considere un primo p y un entero positivo a coprimo con p .

- a) (6 pts.) Pruebe que los números $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ dejan restos $1, 2, \dots, p-1$ en la división por p (en algún orden) y úselo para probar el Teorema de Fermat: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
- b) (2 pts.) Enuncie el Teorema de Fermat-Euler (no precisa probarlo).
- c) (6 pts.) Calcule el resto de dividir $2^{3^{242}}$ entre 71.

Ejercicio 3.

- a) (2 pts.) Enuncie el teorema chino del resto (versión módulos coprimos) para una cantidad arbitraria de congruencias.
- b) (5 pts.) Pruebe el teorema chino del resto (versión módulos coprimos) para el caso de 2 congruencias.
- c) Un entero positivo n se dice admisible si verifica que $\frac{7n+i}{2+i}$ es entero para $i = 1, 2, 3$.
 - i) (3 pts.) ¿Cuántos enteros positivos admisibles verifican $n \leq 1200$?
 - ii) (3 pts.) Hallar el menor entero admisible que verifique $n > 1200$.