

Ejercicio 1) Sea S_a el sistema de congruencias

$$S_a \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 5 \pmod{11} \\ x \equiv a \pmod{21} \end{cases}$$

a) Hallar el mínimo $a \in \mathbb{N}$ para que el sistema S_a tenga solución.

Por el teorema chino de los restos, S_a es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 5 \pmod{11} \\ x \equiv a \pmod{3} \\ x \equiv a \pmod{7} \end{cases}$$

Y dicho sistema tiene solución si y sólo si el sistema

$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod{3} \\ a \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

tiene solución. Como $a = 3 \cdot 3 + 2 = 7 + 4 = 11$ es solución de

$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod{3} \\ a \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

Más aún por el teorema chino de los restos, cualquier otro a que sea solución es congruente con 11 módulo $3 \cdot 7 = 21$. O sea que 11 es el menor natural tal que el sistema S_a tenga solución.

b) Determinar la solución del sistema para el a hallado en la parte anterior y probar que la solución es única módulo 231.

El sistema S_a con $a = 11$ queda

$$S_{11} \begin{cases} x \equiv 2 & (\text{mod } 3) \\ x \equiv 4 & (\text{mod } 7) \\ x \equiv 5 & (\text{mod } 11) \\ x \equiv 11 & (\text{mod } 21) \end{cases}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{cases} x \equiv 2 & (\text{mod } 3) \\ x \equiv 4 & (\text{mod } 7) \\ x \equiv 5 & (\text{mod } 11) \end{cases}$$

El sistema

$$\begin{cases} x \equiv 2 & (\text{mod } 3) \\ x \equiv 4 & (\text{mod } 7) \end{cases}$$

ya fue resuelto en la parte anterior y se concluyó $x \equiv 11 \pmod{21}$.

Luego, resolver S_{11} es resolver

$$\begin{cases} x \equiv 5 & (\text{mod } 11) \\ x \equiv 11 & (\text{mod } 21) \end{cases}$$

Como $x = 6 \cdot 21 + 11 = 12 \cdot 11 + 5 = 137$ es solución de S_{11} . Luego cualquier otra solución de S_{11} es congruente con 137 módulo $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$.

Ejercicio 2)

a) Dado $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ con $\alpha_i \geq 1$ y p_i primos para todo $i = 1, \dots, t$, determinar el número de divisores y demostrar el resultado.

Como $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ entonces todos los divisores de n serán de la forma $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_t^{\beta_t}$ con $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ para todo i . Luego n tiene tantos divisores como $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_t + 1)$.

b) Probar que, si un número es un cubo perfecto, entonces su cantidad de divisores positivos es congruente con 1 módulo 3.

Si un número n es un cubo perfecto, entonces $n = a^3$ para cierto entero a . Luego, si $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$ es la descomposición en primos de a , $n = p_1^{3\alpha_1} \dots p_t^{3\alpha_t}$ será la descomposición en primos de n . Pero entonces la cantidad de divisores de n es $(3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) \dots (3\alpha_t + 1)$; y como cada uno de estos factores es congruente con 1 módulo 3, entonces su producto también lo será.

c) ¿Es cierto el recíproco? Caso afirmativo: demostrarlo. Caso negativo: dar contraejemplo.

Es falso: sea $n = 2 \cdot 5 = 10$. Luego n no es un cubo perfecto pero tiene exactamente $4 = 3 + 1$ divisores (1, 2, 5 y 10).

d) Se tiene un tablero de 18×20 casillas y se ponen granos de arroz en las casillas de modo que todas tengan la misma cantidad. ¿Cuál es la menor cantidad de granos que se deben colocar en cada casilla para que la cantidad total de granos sea un cubo perfecto?

Sea n la cantidad de granos que se ponen en cada casilla. O sea que en total hay $18 \cdot 20 \cdot n$ granos en el tablero. Ahora, para que esta cantidad sea un cubo perfecto, es necesario (por la parte **a**) y obviamente suficiente, que todos los primos de la descomposición de $18 \cdot 20 \cdot n$ aparezcan con exponente múltiplo de 3.

Y como $18 \cdot 20 = 2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ entonces el menor n posible es $n = 3 \cdot 5^2$.

Ejercicio 3)

Sea ϕ la función de Euler.

a) Demostrar que $\phi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$ para p primo y $n \geq 1$.

$$\phi(p^n) = \#\{0 \leq a \leq p^n : \text{mcd}(a, p^n) = 1\} = \#(\{0 \leq a \leq p^n\} - \{0 \leq a \leq p^n : \text{mcd}(a, p^n) \neq 1\}) = p^n - \#\{0 \leq a \leq p^n : \text{mcd}(a, p^n) \neq 1\}.$$

Como p es primo, entonces $\text{mcd}(a, p^n) \neq 1$ si y solo si $p|a$. Luego $\{0 \leq a \leq p^n : \text{mcd}(a, p^n) \neq 1\} = \{0 \leq a \leq p^n : p|a\}$ y entonces $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

b) Sean $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$ y $n = p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} p_4^{\beta_4}$ donde los p_i son primos para

$i = 1, 2, 3, 4$, $\alpha_i \geq 1$ para $i = 1, 2, 3$, $\beta_i \geq 1$ para $i = 2, 3, 4$, $\alpha_2 \leq \beta_2$ y $\beta_3 < \alpha_3$.

b)1) Hallar $d = \text{mcd}(m, n)$.

El máximo común divisor de dos números es el producto de todos los primos comunes con el menor exponente. Luego como p_1, p_2, p_3 y p_4 son primos distintos y $\alpha_2 \leq \beta_2$, $\beta_3 < \alpha_3$, $\text{mcd}(n, m) = \text{mcd}(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}, p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} p_4^{\beta_4}) = p_2^{\alpha_2} p_3^{\beta_3}$.

b)2) Probar que $\phi(mn) = \frac{\phi(m)\phi(n)d}{\phi(d)}$.

$$\phi(n \cdot m) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2+\beta_2-1}(p_2-1)p_3^{\alpha_3+\beta_3-1}(p_3-1)p_4^{\beta_4-1}(p_4-1).$$

$$\phi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)p_3^{\alpha_3-1}(p_3-1)$$

$$\phi(m) = p_2^{\beta_2-1}(p_2-1)p_3^{\beta_3-1}(p_3-1)p_4^{\beta_4-1}(p_4-1)$$

$$\phi(d) = p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)p_3^{\beta_3-1}(p_3-1).$$

Luego se obtiene lo querido.

c) Calcular $10 \cdot 17^{2306} \pmod{60 \cdot 42}$.

Por la parte anterior sabemos que $\phi(60 \cdot 42) = \frac{\phi(60) \cdot \phi(42) \cdot 6}{\phi(6)} = \frac{(2^4) \cdot (2 \cdot 3) \cdot 6}{2} = 576$. Por lo tanto como $10 \cdot 17^{2306} = 10 \cdot 17^{4 \cdot 576 + 2}$ usando el Teorema de Euler tenemos que $10 \cdot 17^{2306} \equiv 10 \cdot 17^2 \equiv 370 \pmod{60 \cdot 42}$.