

PRIMER PARCIAL MATEMÁTICA DISCRETA 2

07 de mayo de 2005

Parcial No.	Apellido y nombre	Cédula

Para uso docente

PUNTAJE OBTENIDO POR EL ESTUDIANTE:

Ejercicio 1: 1) 2) 3) Total:

Ejercicio 2: Total:

Ejercicio 3: 1) 2) 3) Total:

Ejercicio 4: 1) 2) 3) 4) Total:

PUNTAJE TOTAL:

Instructivo

1. Al finalizar el parcial deberá entregarse la letra con todos los datos identificatorios (apellido, nombre, número de cédula de identidad y número de parcial) entregando además la solución de los ejercicios que hizo. Recuerde que es más importante la explicación que el resultado mismo.
2. Cada ejercicio indica en su cabecera cual es su puntaje total si está totalmente bien resuelto. En cada parte se indica el puntaje de esa parte. El parcial suma un total de 40 puntos.
3. La duración del parcial es de tres horas.
4. No se permite el uso de ningún tipo de material salvo calculadoras. Se solicita apagar los celulares.
5. Los resultados estarán el miércoles 18 de mayo a las 18:00 (carteleros del IMERL y página web) y la muestra será el lunes 23 de mayo a las 13:00.

BUENA SUERTE !!!!

Ejercicio 1. (Total: 9 puntos).

1. **(4 puntos).** Demostrar que existen infinitos valores enteros de x y encontrarlos todos, que resuelven el sistema siguiente:
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$
2. **(3 puntos).** Demostrar que las soluciones del sistema siguiente son las mismas que las del sistema de la parte 1):
$$\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{15} \\ x \equiv 11 \pmod{12} \end{cases}$$
3. **(2 puntos).** Demostrar que no existen valores enteros de x que resuelven el sistema siguiente:
$$\begin{cases} x \equiv 9 \pmod{15} \\ x \equiv 11 \pmod{12} \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Total: 7 puntos). Hallar todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que

$$\text{mcm}(a, b) = 155 \text{mcd}(a, b), \quad a + b = 432 \text{ y } a < b.$$

Ejercicio 3. (Total: 10 puntos).

Sea p un número primo y consideramos $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ el conjunto de los enteros modulo p .

1. **(3 puntos).** Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}_p$ y verifican $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.
Sug: Usar que $ab = 0$ es equivalente en escribir $ab \equiv 0 \pmod{p}$, es decir $ab = kp$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.
2. **(3 puntos).** Probar que si $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ entonces $x \equiv 1 \pmod{p}$ o $x \equiv -1 \pmod{p}$.
3. **(4 puntos).** Probar el teorema de Wilson: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
Sug.: Recordar que $(\mathbb{Z}^p \setminus \{0\}, \cdot)$ es grupo y usar la parte anterior.

Ejercicio 4. (Total: 14 puntos).

Sea G un grupo. Entenderemos por *automorfismo* del grupo G a un isomorfismo de G sobre si mismo (es un morfismo biyectivo sobre G).

Un subgrupo H de un grupo G se dice *invariante en G* si $\varphi(H) \subset H$ para todos los automorfismos φ de G .

1. **(3 puntos).** Si H es invariante en G probar que H es un subgrupo normal de G .
2. **(3 puntos).** Sean H y K subgrupos invariantes en G . Probar que $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ es un subgrupo de G y que además es invariante en G .
Sug.: Recordar que HK es un subgrupo si y solamente si $HK = KH$.
3. **(3 puntos).** Probar que el centro de un grupo G , $Z(G)$, es un subgrupo invariante en G .
4. **(5 puntos).** Supongamos que $|G| = pm$ donde $p > m$, p es primo y m es natural. Si H es un subgrupo de orden p , probar que H es invariante en G .
Sug.: Recordar el resultado del ejercicio 2 del práctico 5: si H y K son subgrupos de un grupo G entonces

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$