

Matemática Discreta 2

1er Parcial curso 2003

23 / 5 / 2003

Resolución

1) a) Sean $n > m$ enteros positivos. Hallar el resto de dividir $2^n - 1$ entre $2^m - 1$.

Res: Si $n = qm + r$ con $0 \leq r < m$ entonces
 $2^n - 1 = 2^{qm+r} - 1 = (2^m)^q \cdot 2^r - 1 = (2^m - 1 + 1)^q \cdot 2^r - 1$ (por binomio) $= (1 + k(2^m - 1))2^r - 1 = k'(2^m - 1) + 2^r - 1$. Pero $0 \leq 2^r - 1 < 2^m - 1$, por lo tanto, por la unicidad del resto de la división entera, el resto buscado es

$$2^r - 1.$$

b) Demostrar que $4^n \equiv 4 \pmod{6}$ para todo entero $n \geq 1$.

Res1: $4^1 \equiv 4 \pmod{6}$, $4^{n-2} \equiv 4 \pmod{6}$, por lo tanto, por inducción se cumple (el paso base es trivial).

Res2: Por un lado $4^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod{3}$. $4^n \equiv 0^n \equiv 0 \pmod{2}$. Pero por el teorema chino del resto, $x \equiv 1 \pmod{3}$; $x \equiv 0 \pmod{2}$, si y solo si $x \equiv 4 \pmod{6}$.

2) Hallar todas las parejas de enteros positivos que verifican :

$$a \cdot b = 22275,$$

$$\text{mcd}(a, b) = 15,$$

$$a \leq b.$$

Res: $a = a' \cdot 15$ y $b = b' \cdot 15$, de donde $a' \cdot b' = 22275 / 15^2 = 99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$. Por lo tanto, como $\text{mcd}(a', b') = 1$, los posibles valores para (a', b') son $(1, 99)$, $(9, 11)$ y los correspondientes valores de (a, b) son

$$(15, 1485), (135, 165).$$

3) Hallar los naturales ≤ 1000 , que tienen exactamente 3 divisores positivos distintos.

Res: Si $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ la cantidad de sus divisores será $(a_1 + 1) \dots (a_k + 1)$ la única forma que este producto de 3 es para $k = 1$ y $a_1 = 2$. Por lo tanto n debe ser el cuadrado de un primo. Los únicos $n = p^2$ con p primo y $n \leq 1000$ son

$$4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841 \text{ y } 961.$$

4) Hallar el mínimo entero positivo que verifique el sistema de congruencias:

$$9x + 5 \equiv 14 \pmod{45},$$

$$12x + 6 \equiv 8 \pmod{55},$$

o probar que no existe ninguna solución. Justificar exponiendo un método de resolución.

Res: De la primera ecuación tenemos que $9x \equiv 9 \pmod{45}$, de lo cual $x \equiv 1 \pmod{5}$;

$$0 \equiv 0 \pmod{9}$$

De la segunda $12x \equiv 2 \pmod{55}$, de lo cual

$$2x \equiv 2 \pmod{5} \text{ o sea } x \equiv 1 \pmod{5}$$

$$x \equiv 2 \pmod{11}$$

Por lo tanto solamente quedan dos ecuaciones $x \equiv 1 \pmod{5}$; y $x \equiv 2 \pmod{11}$. Por el teorema Chino del resto, $x \equiv 46 \pmod{55}$ por lo que $x = 46 + 55k$ y el menor de dichos valores positivos es

$$x = 46.$$

5) Demostrar que si dos elementos a, b de un grupo verifican $(a.b)^3 = e$,

entonces

$$(b.a)^3 = e.$$

Res: Si $(a.b)^3 = e$, entonces $a.b.a.b.a.b = e$, de donde $b.a.b.a = a^{-1}b^{-1}$. Por otro lado $(b.a)^3 = b.a.b.a.b.a = (b.a.b.a)b.a = a^{-1}b^{-1}b.a = a^{-1}e.a = a^{-1}.a = e$.

6) a) Testear si $H = \{ [1], [4], [16], [19], [31], [34] \}$ es un subconjunto de U_{45} .

b) Testear si H es un subgrupo de $(U_{45}, *)$ (* es el producto módulo 45)

Recordar que: $U_n = \{[x] \in Z_n, \text{mcd}(x,n)=1\}$.

Res: Basta observar que $\text{mcd}(4,45)=1$ por lo que $[4]$ está en U_{45} y que $H = \langle [4] \rangle$, ya que: $[4]^2 = [16]$, $[4]^3 = [19]$, $[4]^4 = [31]$, $[4]^5 = [34]$ y $[4]^6 = [1]$.

Puntajes: 1) 9 : a) 5 b) 4 2) 6 3) 6 4) 8 5) 6 6) 5 : a) 1 b) 4
--