

# Primer examen de Matemática Discreta 2 - Curso 2006 - IMERL

Viernes 21 de julio de 2006, 14:00 hs. Duración: 4 horas.

Nº. Examen	Cédula	Apellido, Nombre

No se permite el uso de ningún tipo de material salvo calculadoras.

Se deberá apagar los celulares.

## Ejercicio 1. (25 puntos)

Un entero positivo  $N$  se dice que es *discreto* si verifica las siguientes tres condiciones:

- $N$  termina en 317;
- $N$  deja resto 1 en la división entre 49;
- $N + 1$  es múltiplo de 3.

1. (6 puntos) Probar que el conjunto de números discreto es no vacío.
2. (13 puntos) Probar que existen al menos 6 números discretos de exactamente 6 dígitos (nota: el número  $003728 = 3728$  tiene cuatro dígitos y no seis).
3. (6 puntos) Probar que ningún número discreto puede ser cuadrado perfecto (sug. utilizar congruencia mód. 3).

## Ejercicio 2. (25 puntos)

Sea  $A$  un anillo, se dice que un ideal  $I$  de  $A$  es regular si  $A/I$  tiene unidad.

1. (11 puntos) Probar que  $I$  es regular en  $A$  si y solo si existe  $y \in A$  tal que  $a - ay \in I$  y  $a - ya \in I \quad \forall a \in A$ .
2. (3 puntos) Probar que si  $A$  tiene unidad todo ideal de  $A$  es regular.
3. (11 puntos) Sea  $\mathbb{R}^2$  con la suma usual y el producto:  $(r, r') \cdot (x, x') = (rx + r'x + rx', r'x')$ .  
Probar que  $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(r, 0) / r \in \mathbb{R}\}$  es un ideal regular de  $\mathbb{R}^2$  que es isomorfo a  $\mathbb{R}$

## Ejercicio 3. (25 puntos)

Sea  $\sigma$  una permutación en  $S_9$  tal que  $\sigma(i) = 3i \pmod{10}$  y sea  $\tau$  otra permutación en  $S_9$  tal que  $\tau(i) = 7i \pmod{10}$ .

1. (12 puntos) Hallar los ordenes y signo de  $\sigma$  y  $\tau$ .
2. (13 puntos) Mostrar que  $\sigma$  y  $\tau$  son conjugados. Hallar  $\gamma \in S_9$  tal que  $\sigma = \gamma\tau\gamma^{-1}$ . ¿Es  $\gamma$  única?

## Ejercicio 4. (25 puntos)

Se considera el cuerpo  $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  con la suma y el producto módulo 3.

1. (5 puntos) Demostrar que un polinomio  $P(x)$  de  $\mathbb{Z}_3[x]$  de grado 2 o 3 es reducible si y sólo si admite alguna raíz  $\alpha \in \mathbb{Z}_3$ .
2. (6 puntos) Hallar todos los polinomios irreducibles de  $\mathbb{Z}_3[x]$  de la forma  $x^2 + cx + 1$ ,  $c \in \mathbb{Z}_3$ .
3. (8 puntos) Demostrar que si  $P(x)$  es irreducible entonces el ideal  $\langle P(x) \rangle$ , generado por  $P(x)$ , es maximal.
4. (6 puntos) Para  $P(x)$  correspondiente al valor de  $c$  más chico posible de la parte 2) (pensando  $c$  como número entero), justificar que  $K = \mathbb{Z}_3[x] / \langle P(x) \rangle$  es un cuerpo y hallar el representante minimal de  $[P(x)]$  y  $[x^4 + x^2 + 2x + 1]$ .

¡Buena Suerte!

## PARA USO DOCENTE:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
(1)	(1)	(1)	(1)
(2)	(2)	(2)	(2)
(3)	(3)		(3)
			(4)
Total:	Total:	Total:	Total:

## TOTAL EXAMEN: