

Parcial de Matemática Discreta II.

Apellidos

Nombres
Cédula

Nro de

-
- La duración del parcial es de 3 horas.
-Está permitido el uso de todo tipo de material y calculadora.
-Justifique sus respuestas. Para ello puede citar cualquier resultado demostrado en el teórico y cualquier ejercicio de la práctica. No se aceptarán conclusiones salidas de la nada.
-Al finalizar el parcial debe entregar esta hoja. Asegúrese de haber incluido en ella sus datos personales. Escriba sus respuestas en las hojas blancas que le serán entregadas.
-Buena suerte!!!

Problema 3. Denotemos por G el grupo abeliano finito Z_{15}^* , también conocido como U_{15} .

- (a) Escriba la tabla de multiplicación de G .
- (b) Halle el orden de cada elemento de G . Es G cíclico?
- (c) Sea H el subgrupo de G generado por $[4]$. Halle las clases laterales de H y escriba la tabla de multiplicación de G/H .

Problema 4. Sean G y G' grupos finitos y sea $f : G \rightarrow G'$ un homomorfismo de grupos. Supongamos que los órdenes de G y G' son primos entre sí. Pruebe que f manda cada elemento de G en el elemento neutro de G' .

Problema 5. Sea G un grupo no abeliano de orden 39.

- (a) Pruebe que existen $x, y \in G$ tales que se cumplen las condiciones siguientes:

- (a1) $x^{13} = 1$.
- (a2) $y^3 = 1$.
- (a3) Todo elemento de G se escribe en forma única como $x^i y^j$, donde $0 \leq i \leq 12, 0 \leq j \leq 2$.
- (a4) $xyx^{-1} = x^3$.

Sugerencia para (a3) y (a4): Una vez elegidos x e y adecuadamente, sean $H = \langle x \rangle$, $K = \langle y \rangle$, $L = yHy^{-1}$. Utilice (pero no demuestre) la fórmula del Práctico 6

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

para probar que $|HK| = 39$. Deduzca la validez de (a3). Reemplace K por L en la formula anterior y deduzca que $H = L$. Esto garantiza que $xyx^{-1} = x^i$ para algún i . Conjugue por y esta ecuación y vuelva a repetir la operación con la ecuación resultante. Ahora utilice (a2). Está en condiciones de determinar i módulo 13. De las tres opciones, una es imposible y otra resulta en (a4). Verifique que reemplazando y por y^2 en la tercera opción se verifica (a4), y que además (a2) y (a3) siguen valiendo.

(b) Cuántas clases de conjugación hay en G ?

Sugerencia: calcule el orden del centralizador de cada elemento de G basándose únicamente en el orden de tal elemento.

Problema 6 Comencemos con una definición: si p es un número primo, $n \in \mathbb{N}$ y G es un grupo finito cuyo orden es divisible por p^n pero no por p^{n+1} , entonces todo subgrupo de G de orden p^n se denomina p -subgrupo de Sylow de G .

En caso de no poder resolver algún ítem de este problema, asuma su validez y continúe con el ítem siguiente.

(a) Pruebe que el centro, $Z(S_4)$, de S_4 es igual a $\{e\}$.

(b) Pruebe que todo 2-subgrupo de Sylow de S_4 es igual al centralizador de algún elemento de S_4 .

Sugerencia: Tenga en cuenta (a) y el centro de tal subgrupo.

(c) Halle todos los 2-subgrupos de Sylow de S_4 .

Sugerencia: Use (b). Qué tipo de elemento de S_4 tiene centralizador de orden 8?