

EXAMEN JULIO

**Ejercicio 1** (25 puntos)

1. (5 puntos) Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $3n^3 - 11n + 48$  es divisible por  $n + 3$ .
2. (6 puntos) Mostrar que para todo  $a, b$  y  $c$  enteros no nulos,  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(bc - a, b)$ .
3. (6 puntos) Probar que para todo entero natural  $n \geq 2$ , se cumple:  $\text{mcd}(3n^3 - 11n, n + 3) = \text{mcd}(48, n + 3)$ .
4. (8 puntos) Determinar los divisores positivos de 48 y deducir cuáles son los enteros naturales  $n$  tales que  $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$  es un entero natural.

**Ejercicio 2** (25 puntos)

Sea  $U_{12}$  el conjunto de las clases de congruencia  $[n]$  mód. 12, donde  $n$  es natural tal que  $1 \leq n \leq 11$  y  $\text{mcd}(n, 12) = 1$ .

1. (8 puntos) Probar que  $U_{12}$  es un grupo con la operación producto de clases de congruencia módulo 12.
2. (7 puntos) Escribir la tabla de operación de  $U_{12}$ .
3. (10 puntos) Sea  $G = \{e, a, b, c\}$  un grupo con neutro  $e$  tal que  $x^2 = e$  para todo  $x \in G$ . Probar que  $G$  es isomorfo a  $U_{12}$ .

**Ejercicio 3** (20 puntos)

Sea  $G$  un grupo abeliano con  $n$  elementos y  $m$  un entero primo con  $n$ .

1. (10 puntos) Demostrar que la aplicación  $f : G \rightarrow G$  definida por  $f(g) = g^m$  es un isomorfismo.
2. (10 puntos) Demostrar que, para todo  $a \in G$ , la ecuación  $x^m = a$  tiene una solución en  $G$ . (en otras palabras todo elemento tiene raíz  $m$ -ésima)

**Ejercicio 4** (30 puntos)

Sea  $A$  el anillo conmutativo de todas las funciones  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  con las operaciones suma  $f + g$  y producto  $fg$  usuales de funciones reales.

Sean  $N_1 = \{f \in G : f(1) = 0\}$ ,  $N_2 = \{f \in G : f(1) = 0, f(2) = 0\}$ .

1. (5 puntos) Probar que  $N_1$  y  $N_2$  son ideales de  $A$ .
2. (10 puntos) Probar que  $A/N_1$  es un anillo isomorfo al cuerpo de los reales.
3. (8 puntos) ¿Es  $N_1$  un ideal maximal de  $G$ ? Justificar la respuesta.
4. (7 puntos) Probar que  $N_2$  es un ideal maximal de  $N_1$  pero no es ideal maximal de  $A$ .