

Segundo parcial de Matemática Discreta 2 - Curso 2006 - IMERL

Lunes 03 de Julio de 2006, 13:00 hs. Duración: 4 horas.

Nº. Parcial	Cédula	Apellido, Nombre

No se permite el uso de ningún tipo de material salvo calculadoras.

Se solicita apagar los celulares.

Ejercicio 1. (15 puntos)

Sea (G, \star) un grupo y H un subgrupo de G .

(1) (2 puntos) Definir el conjunto cociente G/H .

(2) (6 puntos) Probar que, si H es un subgrupo normal de G entonces G/H tiene estructura de grupo con la operación $[a] \bar{\star} [b] = [a \star b]$ (se pide probar todas las propiedades que tiene un grupo).

(3) (7 puntos) En las condiciones de (2), probar que existe un morfismo de grupos $\varphi : G \rightarrow G/H$, sobreyectivo, tal que $\text{Ker}(\varphi)$, el núcleo de φ , es H .

Ejercicio 2. (15 puntos)

Sea G un grupo tal que $|G| = 110$.

(1) (3 puntos) Probar que existe H subgrupo normal de G tal que $|H| = 11$.

(2) (2 puntos) Probar que existe K subgrupo de G tal que $|K| = 5$.

(3) (6 puntos) Probar que existe T subgrupo de G tal que $|T| = 55$ y que T es normal en G .

(4) (4 puntos) ¿Es G abeliano?

Ejercicio 3. (12 puntos)

Sea σ perteneciente a S_9 tal que:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & a & 5 & 3 & 4 & 6 & 2 & b & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 5 & 8 & 9 & c & 6 & 1 & d \end{pmatrix}.$$

(1) (5 puntos) Hallar a, b, c y d para que σ tenga el mayor orden posible.

(2) (4 puntos) Para la σ hallada calcular σ^{248} .

(3) (3 puntos) Hallar el signo de σ .

Ejercicio 4. (18 puntos)

Sea $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ tal que

$$\begin{aligned}(x, y, z) + (x', y', z') &= (x + x', y + y', z + z'), \\ (x, y, z) \times (x', y', z') &= (xx', yy', xz' + y'z).\end{aligned}$$

(1) (5 puntos) Demostrar que $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ es un anillo, no conmutativo y con unidad.

(2) (3 puntos) Hallar las unidades del anillo (los elementos invertibles) y sus inversos.

(3) (3 puntos) Mostrar que el anillo tiene divisores propios de cero.

(4) (3 puntos) Sea $I = \{(a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Probar que I es un ideal a izquierda y a derecha de \mathbb{R}^3 .

(5) (4 puntos) Probar que I es maximal. (Sugerencia: Considerar la función $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x, y, z) = y$).

¡Buena Suerte!

PARA USO DOCENTE:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
(1)	(1)	(1)	(1)
(2)	(2)	(2)	(2)
(3)	(3)	(3)	(3)
	(4)		(4)
			(5)
Total:	Total:	Total:	Total:

TOTAL PARCIAL: