

Matemática Discreta 2

Resolución 1er Parcial curso 2004

1) a) Sean a' y b' dos enteros positivos primos entre sí. Probar que :

i) a'^2 y b'^2 son primos entre sí.

ii) $a' + b'$ y $a'b'$ son primos entre sí

Sol: i) Un divisor primo común a a'^2 y b'^2 es divisor de a'^2 y como es primo debe ser divisor de a' . Análogamente es divisor de b' y por lo tanto sería divisor primo común de a' y b' . Como a' y b' son primos entre sí no tienen divisores primos comunes, así que no hay divisores primos comunes entre a'^2 y b'^2 con lo que a'^2 y b'^2 son primos entre sí.

ii) Si p es un divisor primo de $a'b'$ y de $a'+b'$ entonces como divide a $a'b'$ entonces divide a a' o divide a b' . Supongamos que divide a a' . Como divide a $a' + b'$ y divide a a' entonces divide a b' y sería un divisor primo común a a' y b' . Como a' y b' son primos entre sí no tienen ningún divisor primo común y por lo tanto $a'+b'$ y $a'b'$ tampoco, con lo que son primos entre sí.

b) Determinar las parejas de enteros positivos a, b tales que :

$$5(a+b)^2 = 147\text{mcm}(a,b)$$

Sug. : Escribir $a = ca'$ y $b = cb'$ donde c es un número positivo bien conocido que depende de a y b . Relacionar con la parte anterior.

Sol: Tomamos $c = \text{mcd}(a,b)$. Tenemos que $ab = c \cdot \text{mcm}(a,b)$

$$\text{Entonces } 5c(a'+b')^2 = 147a'b' = 3 \cdot 49 \cdot a'b'$$

Como $a'+b'$ es primo con $a'b'$ entonces $(a'+b')^2$ es primo con $a'b'$ y por tanto divide a $3 \cdot 49$. 3 y 49 son primos entre sí y como $(a'+b')^2$ no divide a 3 debe dividir a 49 y por lo tanto $a' + b' = 7$. Entonces $5c = 3a'b'$.

Como a' y b' son primos entre sí tenemos que $5|a'$ o $5|b'$ con lo que $a' = 5$ y $b' = 2$ o $a' = 2$ y $b' = 5$. Entonces $c = 6$ y por lo tanto $a = 30$ y $b = 12$ o $a = 12$ y $b = 30$

2) Sea a un divisor cualquiera de 360 y sea b un divisor cualquiera de 588.

a) ¿Qué valores puede tomar $\text{mcd}(a,b)$?

Sol.: $\text{mcd}(a,b)$ es divisor común de a y de b y por tanto es divisor común de 360 y 588, con lo que es divisor de $\text{mcd}(360,588) = 12$.

$\text{Mcd}(a,b)$ puede ser 12, 6, 4, 3, 2, 1

b) Dar un ejemplo de parejas a, b con $a < b$ para cada una de las respuestas de la parte a)

Sol.: $\text{mcd}(12,84) = 12$, $\text{mcd}(6,84) = 6$, $\text{mcd}(4,84) = 4$, $\text{mcd}(3,84) = 3$,
 $\text{Mcd}(2,84) = 2$, $\text{mcd}(1,84) = 1$

3) a) Resolver el sistema de ecuaciones con congruencias:

$$4x - 5y \equiv 13 \pmod{18},$$

$$3x + 2y \equiv 8 \pmod{18},$$

Sol. : Restando $x - 7y \equiv 5 \pmod{18}$

$$x \equiv 5 + 7y \pmod{18}$$

Sustituyendo en la segunda : $3(5+7y) + 2y \equiv 8 \pmod{18}$

$$23y \equiv 11 \pmod{18}$$

$$5y \equiv 11 \pmod{18}$$

$$3 = 18 - 3 \cdot 5$$

$$2 = 5 - 3$$

$$1 = 3 - 2$$

$$1 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5$$

$$1 = 2 \cdot (18 - 5 \cdot 3) - 5 = 2 \cdot 18 - 7 \cdot 5$$

$$\text{Multiplicando por } 11 : 11 = 2 \cdot 18 - 7 \cdot 5$$

$$\text{Así que } (-7) \cdot 5 \equiv 11 \pmod{18}$$

$$y \equiv 13 \pmod{18} \text{ y entonces } x \equiv 5 + 7 \cdot 13 = 96 \pmod{18}$$

$$x \equiv 6 \pmod{18}$$

b) Hallar el resto de la división de 12^{1257} entre 5

Sol.: Por Fermat $12^4 \equiv 1(5)$. $1257 = 4 \cdot 314 + 1$ con lo que

$$12^{1257} = 12^{4 \cdot 314 + 1} = (12^4)^{314} 12 \equiv 12 \equiv 2 \pmod{5}$$

Por lo tanto el resto de la división entre 5 vale 2

c) Calcular el resto de la división de 11^{34} entre 12

Sol.: $11^{34} \equiv (-1)^{34} \pmod{12}$ $(-1)^{34} = 1$

Por lo tanto el resto de la división entre 12 vale 1

4) En \mathbb{Z} se considera la operación \otimes definida por :

$$a \otimes b = ab - 2(a+b) + 6$$

a) Probar que la operación \otimes es conmutativa, asociativa y posee un elemento neutro que se hallará.

Sol.: $b \otimes a = ba - 2(b+a) + 6 = ab - 2(a+b) + 6 = a \otimes b$, con lo que es conmutativa.

$$(a \otimes b) \otimes c = (ab - 2(a+b) + 6) \otimes c = (ab - 2(a+b) + 6)c$$

$$-2(ab - 2(a+b) + 6 + c) + 6 = abc - 2ac - 2bc + 6c - 2ab + 4a + 4b - 2c - 6.$$

$$a \otimes (b \otimes c) = a \otimes (bc - 2(b+c) + 6) = a(bc - 2(b+c) + 6) - 2(a + bc - 2(b+c) + 6) + 6 = abc - 2ab - 2ac + 6a - 2a - 2bc + 4b + 4c - 6$$

Ambas expresiones son iguales así que la operación es asociativa.

Neutro: $a \otimes x = a$ para todo a entero.

$a = ax - 2(a+x) + 6$. Si $a = 0$ queda: $0 = -2x + 6$, con lo que x sería 3.

En efecto $a \otimes 3 = 3a - 2(a+3) + 6 = a$. Entonces Neutro = 3

b) Hallar los elementos de \mathbb{Z} que tienen inverso por \otimes .

Deducir que (\mathbb{Z}, \otimes) no es un grupo.

Sol.: $a \otimes b = 3$. $ab - 2(a+b) + 6 = 3$ sii $b(a-2) = 2a-3$. Si $a = 2$ no hay ningún b que verifique. Si $a \neq 2$, entonces $b = (2a-3)/(a-2) = 2 + 1/(a-2)$ que será entero sii $a-2$ divide a 1 sii $a-2$ pertenece a $\{-1, 1\}$ sii a pertenece a $\{1, 3\}$

Si $a = 1$ el inverso es 1 y si $a = 3$ el inverso es 3 (normal por ser neutro).

Los elementos invertibles son 1 y 3.

Además para otro a el valor de b que resultaría no es en general entero. Así que hay elementos sin inverso y por lo tanto (\mathbb{Z}, \otimes) no es un grupo.

5) Sean a y b dos elementos de un grupo G tales que :

$$a \neq e, b \neq e, a^7 = e, b^3 = e, ab = ba^2$$

a) Probar que G no es abeliano

Sol.: Si G fuera abeliano entonces $ba^2 = ab$ con lo que cancelando términos quedaría $a = e$. Por tanto G no es abeliano.

b) Probar que $(ab)^2 = b^2 a^6$

Sol.:

$$(ab)^2 = (ab)(ab) = (ba^2)(ba^2) = (ba)(ab)a^2 = (ba)(ba^2)a^2 = b(ab)a^4 = b(ba^2)a^4 = b^2 a^6$$

c) Probar que $(ab)^3 = e$

Sol.: $(ab)^3 = (ab)^2(ab) = (b^2a^6)(ab) = b^2a^7b = b^2eb = b^2b = b^3 = e$

Nota general: Redactar con cuidado. La presentación y la justificación de los resultados forman parte de la calificación final.

Puntajes:

- 1) 9 : a) 4 : i) 2 ii) 2 b) 5
- 2) 6 : a) 3 b) 3
- 3) 11 : a) 7 b) 2 c) 2
- 4) 7 : a) 4 b) 3
- 5) 7 : a) 2 b) 3 c) 2