

PRIMER PARCIAL DE MATEMÁTICA DISCRETA 2

Nombre	C.I.	No. de prueba
--------------	-----------	---------------------

Duración: 3:30 horas. Sin material y sin calculadora.

Es necesario mostrar la resolución de los ejercicios, presentar únicamente la respuesta final carece de valor.

Ejercicio 1. (12 puntos)

- Enuncie (y **NO** demuestre) el Teorema de Euler.
- Hallar el valor de $x \in \{0, 1, 2, \dots, 34\}$ tal que $x \equiv 102^{201} \pmod{35}$.
- Hallar el resto de dividir 30^{3998} entre 4001. (Observación: 4001 es primo, y no es necesario probarlo).

Ejercicio 2. (16 puntos)

- Enuncie (y **NO** demuestre) el Teorema Chino del Resto.
- Sea $\varphi(n)$ la cantidad de naturales coprimos con n que son menores o iguales que n . Probar que

$$\text{si } \text{mcd}(n, m) = 1 \text{ entonces } \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m).$$

(Sugerencia: encontrar una biyección entre dos conjuntos, uno con cardinal $\varphi(nm)$ y otro con cardinal $\varphi(n)\varphi(m)$. Cualquier propiedad de φ que se utilice en esta parte deberá probarse).

- Probar que si $d, m \in \mathbb{N}$ y $d|m$ entonces $\varphi(dm) = d\varphi(m)$.
- Probar que si un entero $n > 4$ es compuesto, entonces n divide a $(n-1)!$ (Sugerencia: discutir según si n es producto de dos coprimos o no).
- Calcular $\varphi(n!)/\varphi((n-1)!)$ para todo $n \geq 2$. (Sugerencia: discutir según si n es primo o compuesto).

Ejercicio 3. (12 puntos)

- Sea (G, \cdot) un grupo y $x \in G$ un elemento que verifica $x \cdot g_0 = g_0$ para algún $g_0 \in G$. Probar que $x \cdot g = g$ para todo $g \in G$.
- Probar que en una misma columna o fila de la tabla de Cayley de un grupo no aparecen elementos repetidos.
- La tabla abajo representa la tabla de Cayley (tabla de multiplicación) de un grupo.
 - Hallar el elemento neutro del grupo.
 - Hallar el orden del elemento g_2 .
 - Completar (justificando) la tabla de Cayley.

\cdot	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_1		g_6		g_5		
g_2		g_1				
g_3	g_5	g_4	g_6			
g_4		g_5		g_6		
g_5		g_3			g_6	
g_6						