Estimación y Predicción en Series Temporales

Ejemplos de Kalman

Departamento de Procesamiento de Señales

Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería

2023

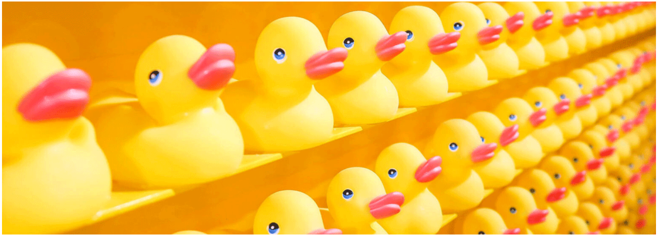
Introducción

Motivación:

- Filtros de Kalman: muy generales
- Pueden ser intimidantes
- Cómo llevarlo a la práctica?
- Intentaremos ganar un poco de intuición

Agenda:

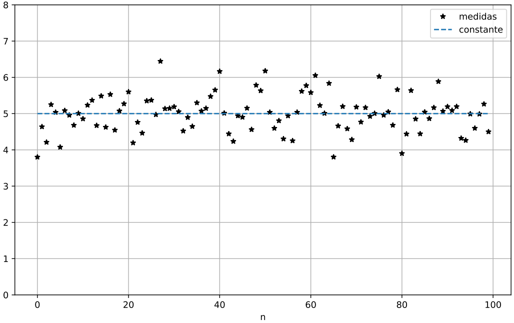
- Medición de una constante
- Modelado de procesos ARMA
- Aplicación completa: KalmanPaint



Medición de una constante

Modelo de constante

Modelando

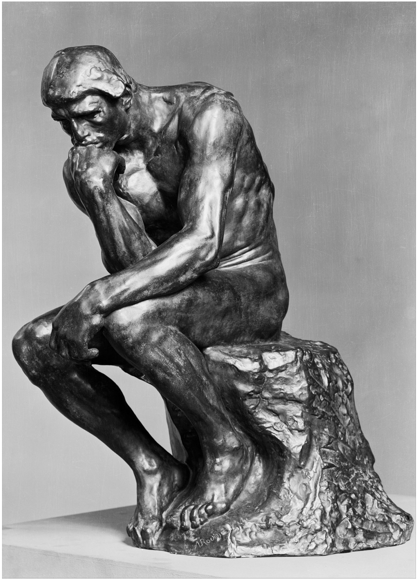


- N medidas secuenciales de una constante a + ruido
- Cómo podemos diseñar un filtro de Kalman para esto?

(si estás leyendo los slides, tomate un rato para pensarlo)

Modelo de constante

Modelando



Modelo general

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n\,,\;\; \mathbf{x}, \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}),\;\; \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{M\times M},\;\; \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{M\times M}$$
$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n\,,\;\; \mathbf{y},\; \mathbf{v} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}),\;\; \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N\times M},\;\; \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

Este caso

$$x_{n+1} = 1 \cdot x_n = a \in \mathbb{R}$$
$$y_n = 1 \cdot x_n + 1 \cdot v_n \quad v_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Identificando

- $\mathbf{F} = 1$, $\mathbf{Q} = 0$, $\mathbf{C} = 1$, $\mathbf{R} = \sigma^2$

Recursión genérica

1. Gananacia de Kalman: $\mathbf{K}_n = \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{C}_n^\intercal (\mathbf{C}_n \bar{\mathbf{P}}_n \mathbf{C}_n^\intercal + \mathbf{R}_n)^{-1}$
2. Corrección del estimador: $\hat{\mathbf{x}}_n = \bar{\mathbf{x}}_n + \mathbf{K}_n(\mathbf{y}_n - \mathbf{C}_n \bar{\mathbf{x}}_n)$
3. Corrección de covarianza: $\mathbf{P}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n \mathbf{C}_n)\bar{\mathbf{P}}_n$
4. Proyección a $n+1$:

$$\bar{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{F}_n \hat{\mathbf{x}}_n, \quad \bar{\mathbf{P}}_{n+1} = \mathbf{F}_n \mathbf{P}_n \mathbf{F}_n^\intercal + \mathbf{Q}_n$$

Recursión en este caso

1. Gananacia de Kalman: $K_n = \bar{P}_n \cdot 1 \cdot (1 \cdot \bar{P}_n \cdot 1 + \sigma^2)^{-1}$
2. Corrección del estimador: $\hat{x}_n = \bar{x}_n + K_n(y_n - 1 \cdot \bar{x}_n)$
3. Corrección de covarianza: $\hat{P}_n = (1 - K_n \cdot 1) \cdot \bar{P}_n$
4. Proyección a $n+1$:

$$\bar{x}_{n+1} = 1\hat{x}_n, \quad \bar{P}_{n+1} = 1 \cdot \bar{P}_n \cdot 1$$

Recursión en este caso

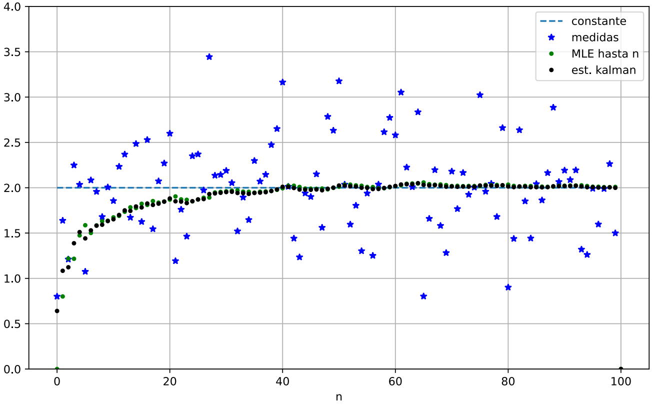
1. Gananacia de Kalman: $K_n = \bar{P}_n/(\bar{P}_n + \sigma^2)$
2. Corrección del estimador: $\hat{x}_n = \bar{x}_n + K_n(y_n - \bar{x}_n)$
3. Corrección de covarianza: $\hat{P}_n = (1 - K_n)\bar{P}_n$
4. Proyección a $n + 1$:

$$\bar{x}_{n+1} = \hat{x}_n, \quad \bar{P}_{n+1} = \hat{P}_n$$

5. Valores iniciales: $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{P}_0 = 1$

Modelo de constante

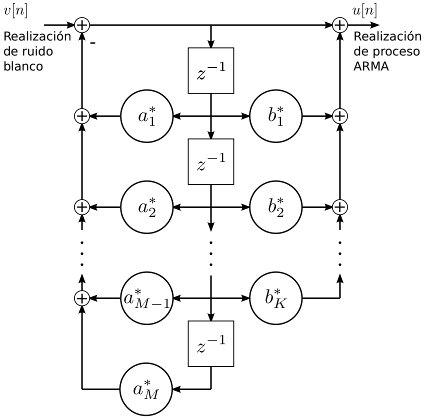
Resultado



Modelos ARMA

Modelos ARMA

Esquema de síntesis modelo ARMA



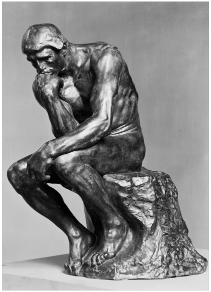
- $v[n]$ es ruido blanco
- Filtro transpuesto tipo II
- **Representación no es única**

Modelo general

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n \,,\; \mathbf{x}, \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}),\; \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{M\times M},\; \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{M\times M}$$
$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \,,\; \mathbf{y},\; \mathbf{v} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}),\; \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N\times M},\; \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

Este caso

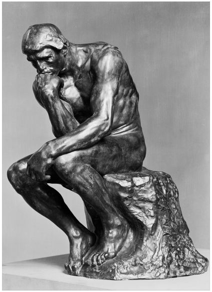
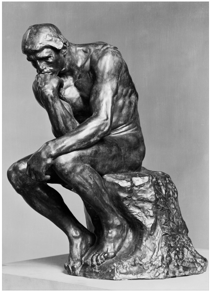
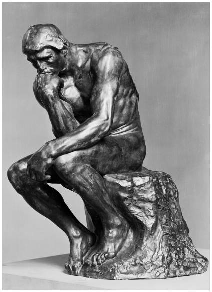
- Que es qué?
- No es tan fácil hacer la correspondencia
- Infinitas formas distintas: elegimos una

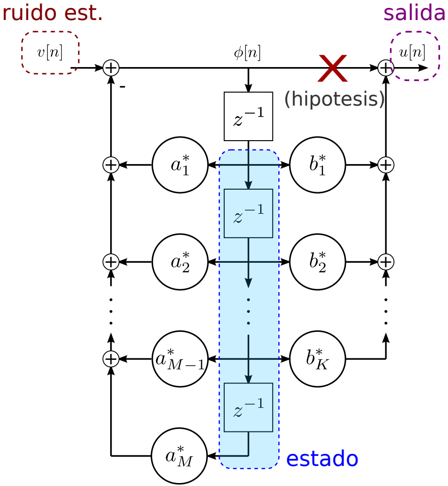


- Qué es lo que observamos? Eso debería ser $y[n]$
- Cuál es el estado del sistema? Eso deberíá ser $\mathbf{x}[n]$
- **Estado = memoria del sistema**
- Y dónde está la memoria?

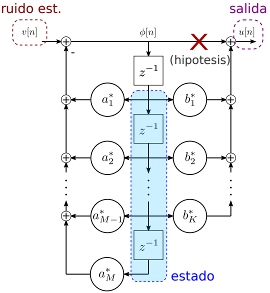
Modelos ARMA

Pensemos



ruido est.
salida
$v[n]$
$\phi[n]$
$u[n]$
-
(hipotesis)
z^{-1}
a_1^*
b_1^*
z^{-1}
a_2^*
b_2^*
a_{M-1}^*
b_K^*
z^{-1}
a_M^*
estado



$$\phi_n = -\mathbf{a}^\mathsf{T}(\phi_{n-1}, \ldots, \phi_{n-M}) + v_n$$

$$\phi_{n-r} \leftarrow \phi_{n-r+1} \quad \text{al actualizar} \quad n \leftarrow n+1$$

$$u_n = \mathbf{b}^\mathsf{T}(\phi_{n-1}, \ldots, \phi_{n-K})$$

Teníamos:

$$\phi_n = -\mathbf{a}^\mathsf{T}(\phi_{n-1}, \ldots, \phi_{n-M}) + v_n, \quad \phi_{n-r} \leftarrow \phi_{n-r+1}$$
$$u_n = \mathbf{b}^\mathsf{T}(\phi_{n-1}, \ldots, \phi_{n-K})$$

Definimos:

- Estado $\mathbf{x}_n = (\phi_{n-1}, \ldots, \phi_{n-M})$
- Salida $y_n = u_n = \mathbf{b}^\mathsf{T}(\phi_{n-1}, \ldots, \phi_{n-K}) = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x}_n$

Llegamos a la siguiente forma:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \phi_n \\ \phi_{n-1} \\ \cdots \\ \phi_{n-M+1} \end{pmatrix}}^{\mathbf{x}_{n+1}} = \overbrace{\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{M-1} & -a_M \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\mathbf{F}} \overbrace{\begin{pmatrix} \phi_{n-1} \\ \phi_{n-2} \\ \cdots \\ \phi_{n-M} \end{pmatrix}}^{\mathbf{x}_n} + \overbrace{\begin{pmatrix} v_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}^{\mathbf{w}_n}$$

$$y_n = \overbrace{(\mathbf{b}^\intercal, 0, 0, \ldots, 0)}^{\mathbf{C}} \mathbf{x}_n$$

- Recordar: hay muchas formas de hacer esto mismo, con otras definiciones de estado y otras matrices.

Suavizado de trayectorias

- Kalman aplicado a modelo físico
- Objetivo: seguir trayectoria
- Observación: posición
- Estado: posición + velocidad + aceleración
- Hipótesis (FALSA): aceleración constante + ruido

Ecuaciones dinámicas

- Aceleración a, período de muestreo Δt
- Velocidad (horizontal): $\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \ddot{x}_n \Delta t$
- Posición (horizontal): $x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \Delta t + \ddot{x}_n (\Delta t)^2/2$
- Aceleración: $\ddot{x}_{n+1} = \ddot{x}_n + v_n$
- Idem con vel. y pos horizontal
- Ruido en la aceleración: σ_a^2
- Ruido en la posición: σ_x^2

Sistema dinámico

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n\,,\ \mathbf{x}, \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}),\ \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{M\times M},\ \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{M\times M}$$
$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n\,,\ \mathbf{y},\ \mathbf{v} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}),\ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N\times M},\ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

- Estado = posición + velocidad + aceleración (natural!)
- Eso tanto vertical como horizontal $\Rightarrow$ (6 variables)
- Observación: posición (2 variables)
- Con esto, $\mathbf{F}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{R}$ quedan muy sencillas

Sistema dinámico (cont)

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t & (\Delta t)^2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & (\Delta t)^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 \end{pmatrix}$$

Sistema dinámico (cont)

- Ya $\mathbf{Q}$ no es tan trivial
- El ruido en la aceleración afectan pos. y vel.!
- Hay que tomar valores esperados en cada casilla...
- La solución es:

$$\mathbf{F} = \sigma_a^2 \begin{pmatrix} \Delta t^2/4 & \Delta t^3/2 & \Delta t^2/2 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta t^3 & \Delta t^2 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ \Delta t^2/2 & \Delta t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta t^2/4 & \Delta t^3/2 & \Delta t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta t^3 & \Delta t^2 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & \Delta t^2/2 & \Delta t & 1 \end{pmatrix}$$

KalmanPaint

https://eva.fing.edu.uy/mod/resource/view.php?id=173415