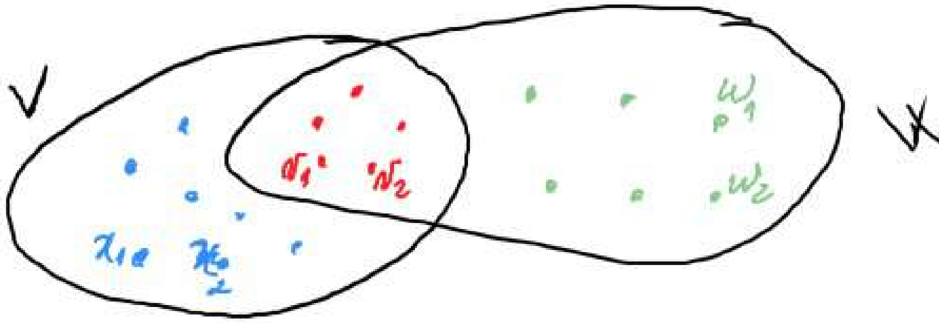
**Proposición:** Sean $V$ y $W$ s.e.v de $U$ con $V$ y $W$ de dimensión finita.

Entonces $\boxed{\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V\cap W)}$

a) Habíamos hecho la prueba en el caso que $V\cap W = \{0\}$ $(\dim(V\cap W) = 0)$

b) $V\cap W \neq \{0\}$ o sea $\dim(V\cap W) = n \geq 1$




Sea $A = \{v_1, \dots, v_n\} \xrightarrow{b} V\cap W$

Ahora sea $B = \{v_1, \dots, v_n, x_1 \dots x_k\} \xrightarrow{b} V$

y $C = \{v_1, \dots, v_n, w_1 \dots\} \xrightarrow{b} W$

Lo que se puede probar es que

$\{v_1, \dots, v_n; x_1, \dots, x_k, w_1, \dots, w_s\} \xrightarrow{b} V+W$

(probarlo como ejercicio)

Entonces $\dim(V+W) = n+h+s$

$$\dim V = n+h \qquad \dim(V\cap W) = n.$$
$$\dim W = n+s$$

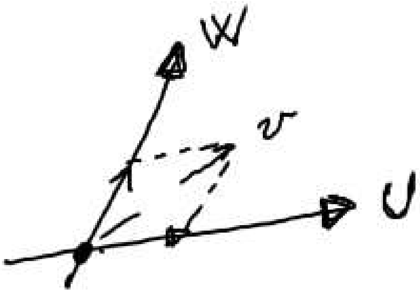
$$n+h+s = n+h+\cancel{n}+s-\cancel{n}$$

---

<u>Proposición</u>: Sea $V = U \oplus W$ (o sea $U \cap W = \{0\}$).

Si $v \in V$ / $\begin{matrix} v = u_1 + w_1 \\ v = u_2 + w_2 \end{matrix}$, entonces $\begin{matrix} u_1 = u_2 \\ w_1 = w_2 \end{matrix}$

<u>dem</u>: Como




$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \longrightarrow u_1 = u_2 \\ w_1 - w_2 = 0 \longrightarrow w_1 = w_2 \end{cases}$$

# Transformaciones lineales:

Sean $(U, K, +, \cdot)$ y $(V, K, +, \cdot)$ e.v.

**Def:** Decimos que la función $T: U \to V$ es una transformación lineal (t.l) si:

$$\boxed{\begin{gathered} T(\alpha . u_1 + \beta . u_2) = \alpha . T u_1 + \beta . T u_2 \\ \forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall u_1, u_2 \in U. \end{gathered}}$$

**Ejemplos:** $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ $\quad (\mathbb{P}_3(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$

Sea $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ T(a,b) = a x^3 + b x^2$

$(a,b) \quad (c,d) \quad \alpha, \beta$

¿T es lineal?

(1) $T(\alpha(a,b) + \beta(c,d))$

(2) $\alpha T(a,b) + \beta T(c,d)$

(1) $T((\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d)) = (\alpha a + \beta c) x^3 + (\alpha b + \beta d) x^2$

(2) $\alpha T(a,b) + \beta T(c,d) = \alpha(a x^3 + b x^2) + \beta . (c x^3 + d x^2)$

las expresiones son iguales entonces T es una t.l.

3

Sean $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ , $(\mathbb{P}_3(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ y

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) /\ T(a,b) = a \cdot b \cdot x$

$(a,b)$ , $(c,d)$ , $\alpha$ , $\beta$

$$T(\alpha(a,b) + \beta(c,d)) = T(\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d) = (\alpha a + \beta c) \cdot (\alpha b + \beta d) x$$

$$\neq$$

$$\alpha T(a,b) + \beta T(c,d) = \alpha\, a \cdot b x + \beta\, c \cdot d x$$

Entonces $T$ no es t.l

---

Sean $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ ; $(M_{3\times 3}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ tal que

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+d & c \cdot a \\ a^3 \operatorname{sen}(ab) & \lg(a^2+d^2) & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ver que no es t.l.

(4)

$(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ $\quad T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & d \\ -c & a+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \alpha, \beta$$

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha a+\beta e & \alpha b+\beta f \\ \alpha c+\beta g & \alpha d+\beta h \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a+\beta e+\alpha b+\beta f & \alpha d+\beta h \\ -\alpha c-\beta g & \alpha a+\beta e+1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a+b & d \\ -c & a+1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} e+f & h \\ -g & e+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a+\alpha b+\beta e+\beta f & \\ & \alpha a+\alpha+\beta e+\beta \end{pmatrix}$$

No es t.l.

<u>Proposición</u>: Si $T: V \to W$ es t.l entonces $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$. $\quad$ <u>dem</u>: $\vec{0}_V = 0.\vec{0}_V \quad T(\vec{0}_V) = T(0.\vec{0}_V)$

$$= 0.T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$$

Obs: 1) Si $T$ es lineal entonces.

$$T(\alpha u+\beta v)=\alpha Tu+\beta Tv$$

$$T(\alpha u)=T(\alpha u+0.v)=\alpha Tu+\underbrace{0\,Tv}_{\theta}=\alpha Tu$$

2) a) $T(\alpha u+\beta v)=\alpha Tu+\beta Tv$ es equivalente

b) $\begin{cases} T(u+v)=Tu+Tv \\ T(\alpha u)=\alpha Tu \end{cases}$

---

Ejemplo: Sea $T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(p)=p'$

$$T(ax^2+bx+c)=2ax+b$$

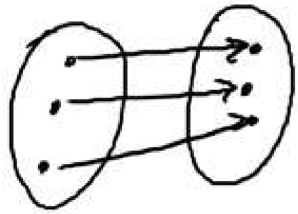
$$T(p+q)=(p+q)'=p'+q'$$

$$T(\alpha.p)=(\alpha p)'=\alpha p'$$

Entonces $T$ es una t.l.

Recordar: Sea $T: U \to V$

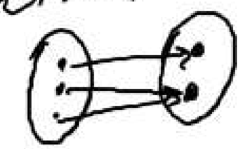
a) Decimos que $T$ es inyectiva si:



$u, v \,/\, u \neq v$ entonces $Tu \neq Tv$

(Si $Tu = Tv$ entonces $u = v$)

b) Decimos que $T: U \to V$ es sobreyectiva si $\forall\, v \in V, \exists\, u \,/\, Tu = v$



c) Cuando $T$ es inyectiva y sobreyectiva decimos que es bijectiva.

---

## Núcleo e imagen de una t.l

Sea $T: U \to V$ t.l

Def: Llamamos núcleo de $T$ $(N(T))$ al conjunto:

$$\boxed{N(T) = \{u \in U \,/\, Tu = 0_V\} \subset U}$$

**Def:** Llamamos imagen de $T$ al conjunto $\boxed{Im(T) = \{v \in V \,/\, \exists u, Tu = v\} \subset V}$

**Proposición:** El $N(T)$ y la $Im(T)$ son s.e.v de $U$ y $V$ respectivamente.