La clase pasada probamos. (Siempre estamos trabajando en un espacio vectorial $(V, K, +, \cdot)$)

Prop 1: Sean $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ y $B = \{w_1, \dots, w_m\}$ subconjuntos l.i de V.

Si $B \subset [A]$ entonces $\boxed{m \leq k}$

Ejemplo: Sea $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$

$A = \{ (1,1,0), (0,1,0) \}$ → Este conjunto es l.i

$[A] \leftarrow \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,0) = (\alpha, \alpha+\beta, 0)$

$B = \{ (2,3,0), (-1,-2,0), (5,6,0) \}$

Pro prop 1 → B es l.d

Prop 2: Si $A = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$, A es l.d, $v \in A$ entonces $\exists B \subset A$, B es l.i y $[A] = [B]$

(Recordar que $[A]$ es el conjunto de vectores que se escriben como c.l de los elementos de A)

Sea V un e.v finitamente generado (o sea que $\exists\ A = \{v_1, .., v_k\}$ tal que $V = [A]$)

Ejemplo: $V = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (\alpha, \beta, \gamma)$

Entonces V es finitamente generado

Ejemplo: $C = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$

Este espacio vectorial no es finitamente generador

Obs: $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$

entonces $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)\}$ también genera a $\mathbb{R}^3$

Entonces → Si A es l.i tenemos que $A \xrightarrow{\text{base}} V$

→ Si A es l.d $\underset{\text{prop}}{\to}$ $\exists\ B \subset A$, B l.i $/ [B] \to V \Rightarrow B \xrightarrow{\text{base}} V$

En conclusión tenemos que todo e.v finitamente generado tiene base.

Teorema: Todas las bases de un e.v V finitamente generado tienen la misma cantidad de elementos.

dem: Sean $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ y $B = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases de V. ($[A] = [B] = V$, A, B son l.i)

Vamos a probar que $k = m$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Como } [A] = V \\ B \text{ es l.i}\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}A \text{ y } B \text{ l.i} \\ B \subset [A]\end{array}\right\} \underset{\text{prop 1}}{\Longrightarrow} m \le k$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Como } [B] = V \\ A \text{ es l.i}\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}A \text{ y } B \text{ l.i} \\ A \subset [B]\end{array}\right\} \underset{\text{prop 1}}{\Longrightarrow} k \le m$$

$$\Rightarrow \underline{k = m}$$

Def: Llamamos dimensión de un e.v a la cantidad de elementos de una base

4

Sea la matriz $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Puede probarse que rango de A es la dimensión del espacio generado por las filas de A y también es la dimensión del espacio generado por las columnas de A

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$. Además $[A] = \mathbb{R}^2$

entonces rango $A = 2$

$B = \{ (1,3,0,4), (2,-1,1,5) \} \subset \mathbb{R}^4$

$\dim [B] = 2 \rightarrow$ rango $A = 2$

Observaciones:

Sea V / $\dim V = n$ (todos los base de V tienen n elementos $*$)

a) Si $A = \{v_1, \dots, v_k\} \xrightarrow{g} V$ entonces $\underline{k \geq n}$

dem:

Si $\underline{k < n}$

a) Si A es l.i $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} A \xrightarrow{b} V \\ \# k < n \end{array}\right\}$ ABS $*$

b) Si A es l.d $\rightarrow$

$\xrightarrow[\text{prop 2}]{} \exists B \subset A$

tal que $\left.\begin{array}{l} B \xrightarrow{\text{base}} V \\ \# B < \# A < n \end{array}\right\}$ ABS $*$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } V = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \\ \{(1,1), (2,3)\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^2 \\ \{(1,0), (0,1)\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^2 \\ \{(1,1), (2,2)\} \text{ no es base de } \mathbb{R}^2 \\ \alpha(1,1) + \beta(2,2) = (\alpha+2\beta, \alpha+2\beta) \\ \{(1,1)\} \text{ no es base de } \mathbb{R}^2 \end{array}}$$

b) Si $A = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ y A es l.i entonces $k \leq n$

dem: Si A genera a V entonces A es base de V (porque sabemos que A es l.i) entonces $k = n$

Sabemos que $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ es l.i

Consideremos $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ (Pensemos que estamos en $\mathbb{R}^n$)

Esto representa un sistema lineal de k incógnitas con n ecuaciones y sólo tiene la solución trivial $\Rightarrow \boxed{k \leq n}$