Propiedades:

1) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

2) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Entendemos que todas las matrices tienen inversa.

Habíamos demostrado 1)

dem 2):

debemos probar que $A^t.(A^{-1})^t = Id.$

$$\left(A^t.(A^{-1})^t\right)^t = A^{-1}.A = Id \text{ entonces}$$

$$A^t.(A^{-1})^t = Id \Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Método para encontrar la inversa de una matriz

Supongamos que tenemos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\underline{A.A^{-1} = Id} \rightarrow A\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Estos tres sistemas de ecuaciones tienen a la matriz A como matriz principal de los sistemas.

$$A\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} A & I \\ \downarrow & \downarrow \\ I & A^{-1} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$$

$b_{11} = m$, $b_{21} = n$ $b_{31} = p$

③

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_3 \leftarrow F_3 - F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad F_3 \leftarrow F_3 - 3F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & 3/7 & -1/7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 \leftarrow -F_2 \\ F_3 \leftarrow -\frac{1}{7} F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & & & \\ 0 & 1 & -2 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \quad F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2$$

$$\begin{array}{c|c} \rightsquigarrow & \rightsquigarrow \\ Id & A^{-1} \end{array}$$

<u>Es conveniente verificar</u>

Matrices elementales:

$$O.e \rightarrow \begin{cases} F_i \leftarrow F_i + \alpha F_j & (1) \\ F_i \leftrightarrow F_j & (2) \\ F_i \leftarrow \alpha F_i & (3) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\alpha a_{11} & a_{22}+\alpha a_{12} & a_{23}+\alpha a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$F_2 \leftarrow F_2 + \alpha F_1$$

$$I \xrightarrow{(1)} B \qquad B \cdot A = \bar{A}$$

$$A \xrightarrow{(1)} \bar{A}$$

Definimos: $E_1 \leftarrow$ Matriz que se obtiene de la identidad aplicando o.e del tipo 1

$E_2 \leftarrow$ Matriz que se obtiene de la identidad aplicando o.e - 2

$E_3 \leftarrow$ Matriz que se obtiene de la identidad aplicando o.e - 2

Obs: $\boxed{E_i A = A_i}$

Matrices elementales:

$$O.e \rightarrow \begin{cases} F_i \leftarrow F_i + \alpha F_j & (1) \\ F_i \leftrightarrow F_j & (2) \\ F_i \leftarrow \alpha F_i & (3) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\alpha a_{11} & a_{22}+\alpha a_{12} & a_{23}+\alpha a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$F_2 \leftarrow F_2 + \alpha F_1$

$$I \xrightarrow{(1)} \overline{I} \qquad \overline{I} \cdot A = \overline{A}$$

$$A \xrightarrow{(1)} \overline{A}$$

Definimos: $E_1 \leftarrow$ Matriz que se obtiene de la identidad aplicando o.e del tipo 1

$E_2 \leftarrow$ Matriz que se obtiene de la identidad aplicando o.e - 2

$E_3 \leftarrow$ Matriz que se obtiene de la identidad aplicando o.e - 3

Obs: $\boxed{E_i \cdot A = A_i}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{F_2 \leftrightarrow F_3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Obs: Si en el proceso que usamos para obtener la inversa de una matriz, hay un paso en el que se obtiene una matriz con una o más filas de ceros entonces la matriz original no es invertible.

O sea, si el rango $(A_{n \times n}) < n$, entonces A no es invertible.

Entonces tenemos que para obtener la matriz inversa de A debemos aplicar operaciones elementales a A hasta llegar a la Id.

$$\boxed{\begin{array}{c|c} A & I \\ \downarrow & \downarrow \\ I & A^{-1} \end{array}}$$

$$E_r \dots E_2 E_1 A = Id.$$

$$\Rightarrow \quad (E_r \dots E_1) A = Id. \Rightarrow A^{-1} = E_r \dots E_1$$

En particular, si una matriz es invertible es el producto de matrices elementales.

Obs: a) $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$E_1 . E_1 = Id \Rightarrow (E_1)^{-1} = E_1$$

b) $\underset{F_3 \leftarrow F_3 + \alpha F_2}{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{E}_2 . E_2 = Id \qquad \bar{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

c) $\underset{\alpha \neq 0}{E_3} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{E}_3 = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{E}_3 . E_3 = Id$