Recordar: Sea $(V, K, +, \cdot)$ un e.v. Decimos que $S \subset V$ $(S \neq \emptyset)$ es un s.e.v si S es cerrado frente a la suma y el producto, o sea:

a) $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$

b) $\left.\begin{array}{l} u \in S \\ \alpha \in K \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha . u \in S$

Ejercicios: Sea $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ $\left.\begin{array}{l} + \\ \cdot \end{array}\right\}$ usuales.

$$\boxed{\begin{array}{l} (a, b, c) + (d, e, f) = (a+d, b+e, c+f) \\ \alpha . (a, b, c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c) \end{array}}$$

1) Sea $S_1 = \{ v \in \mathbb{R}^3 / v$ es colineal con $(1,1,1) \}$

2) $S_2 = S_1 \cup \{(1, 2, 3)\}$

Probar que S_1 es un s.e.v y que S_2 no es un s.e.v

Veamos que S_2 no es un s.e.v

$S_1 \to \alpha\underline{(1,1,1)}$ $\quad S_1 = \{(\alpha,\alpha,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

$S_2 = S_1 \cup \{(1,2,3)\}$

tomo $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3)$

$v_1 + v_2 = (2,3,4) \notin S_2$

Entonces S_2 no es un s.ev

$2(1,2,3) = (2,4,6) \notin S_2$

Prop: Sea V un e.v y S un s.ev de V
Entonces $\underline{0 \in S}$

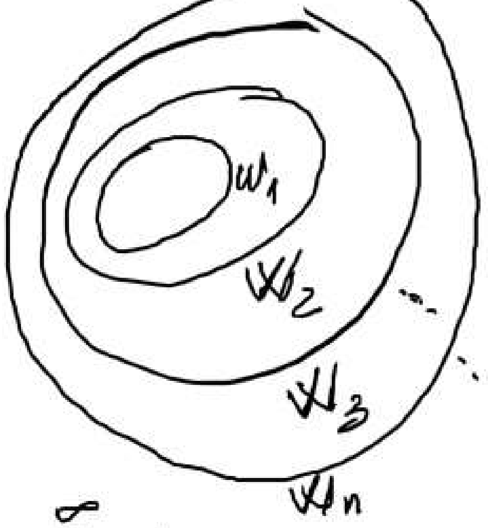
dem: Como S es s.ev $\to \exists\, v \in S$

Entonces $0 \cdot v \in S \Rightarrow \boxed{0 \in S}$

Prop: Sea V un e.v y $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subespacios de V

1) $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$ es un s.ev de V

2) Si $W_i \subset W_{i+1}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{n} W_i$ es un s.ev de V



dem: 1) Como los W_i son s.v.e

en $0 \in W_i \ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$

Sean $u, v \in \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i \Rightarrow v, u \in W_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow u+v \in W_i \ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow u+v \in \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$

Sea $u \in \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i \rightarrow u \in W_i, \forall i \in \mathbb{N}$

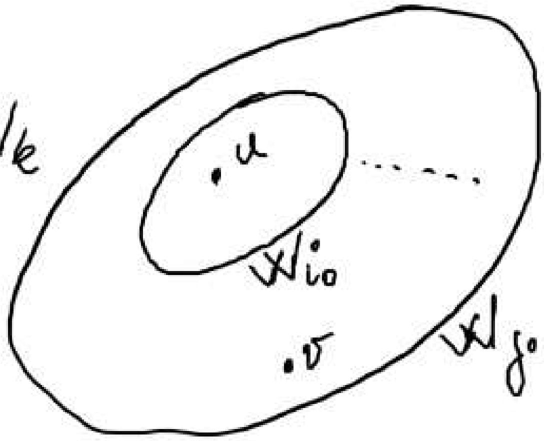
$\alpha \in K$

$\rightarrow \alpha u \in W_i, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha u \in \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$

2) $0 \in W_1 \Rightarrow 0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$

Sean $\underline{u, v} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \Rightarrow \exists\, i_0, j_0 \,/\, \begin{array}{l} u \in W_{i_0} \\ v \in W_{j_0} \end{array}$

Tomo $k = \max\{i_0, j_0\}$



Entonces $\left.\begin{array}{l} u \in W_k \\ v \in W_k \end{array}\right\} \Rightarrow u+v \in W_k$

$\Rightarrow \underline{u+v \in \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i}$

Sea $u \in \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \Rightarrow \exists\, i_0 \,/\, u \in W_{i_0}$
$\alpha \in K$

$\Rightarrow \alpha . u \in W_{i_0} \Rightarrow \underline{\alpha u \in \bigcup_{1}^{\infty} W_i}$

<u>Obs</u>: En la prueba del teorema anterior (parte 2) es necesario que los subespacios sean encajados.

Ejercicio: Considere $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$

$S_1 = \{ (\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R} \}$

$S_2 = \{ (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) : \alpha \in \mathbb{R} \}$

a) Probar que S_1 y S_2 son s.e.v de $\mathbb{R}^2$

b) Probar que $S_1 \cup S_2$ no es s.e.v de $\mathbb{R}^2$

(b) $v = (1,1,1)$, $u = (1,2,3)$

$u + v = (2,3,4) \notin S_1 \cup S_2 \Rightarrow S_1 \cup S_2$ no s.e.v

Hacer como ejercicio la parte a.

Ejercicio: Considere $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$

$S_1 = \{ (\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R} \}$

$S_2 = ((\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta) : \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \}$

Probar que $S_1 \cup S_2$ es un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

6

Sea $(V, K, +, \cdot)$ un ev y $A = \{v_1, .., v_n\} \subset V$

Definimos $[A] = \{ v \,/\, v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n : \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K \}$

<u>Obs</u>: $A \subset [A]$ porque si $v \in A$ entonces $v = 1.v$ y se tiene que $v \in [A]$

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$

$A = \{ (1,1), (1,2), (3,4) \}$

$[A] \longrightarrow v = \alpha(1,1) + \beta(1,2) + \gamma(3,4)$

o sea $v = (\alpha + \beta + 3\gamma, \alpha + 2\beta + 4\gamma)$

¿El vector $(1,7) \in [A]$? $\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma = 7 \end{cases}$

<u>Teorema</u>: El $[A]$ es un s.e.v de V

<u>dem</u>: Sea $A = \{v_1, \dots, v_n\}$

Tomo $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \Rightarrow v = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n =$

$= 0 \Rightarrow 0 \in [A]$

$$u, v \in [A] \rightarrow \left.\begin{array}{l} u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \\ v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \end{array}\right\} \rightarrow$$

$u + v = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)v_n \Rightarrow u + v \in [A]$

Falta probar que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } u \in [A] \\ k \in K \end{array}\right\} \Rightarrow k.u \in [A]$$