Recordar: Sean u y v vectores de $\mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^2$)

Definimos. $\langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\| \cos\varphi$

donde si $u=(a,b,c)$ entonces

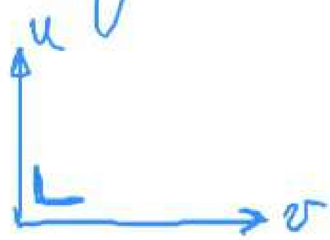
$$\|u\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

(Si $v = \vec{AB} \Rightarrow \|v\| = d(A,B)$)

Prop: Si $u=(a,b,c)$ y $v=(a',b',c')$ entonces

$$\langle u,v\rangle = a.a' + bb' + cc'$$

Def: decimos que u y v son ortogonales ($u \perp v$)
si $\langle u,v\rangle = 0$



Obs: Sea $u=(a,b,c)$. Entonces

$$\langle u,u\rangle = a^2+b^2+c^2 = \|u\|^2 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}}$$

Propiedades:

②

1) $\langle \vec{u},\vec{u}\rangle \geq 0$ y $\langle u,u\rangle = 0 \leftrightarrow u=0$

2) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

3) $\langle u, v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$

dem: Sean $u=(a,b,c)$, $v=(a',b',c')$, $w=(a'',b'',c'')$

$\underline{\langle u, v+w\rangle} = \langle (a,b,c),(a'+a'',b'+b'',c'+c'')\rangle =$

$a(a'+a'') + b(b'+b'') + c(c'+c'') =$

$aa' + bb' + cc' + aa'' + bb'' + cc'' =$

$= \underline{\langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle}$

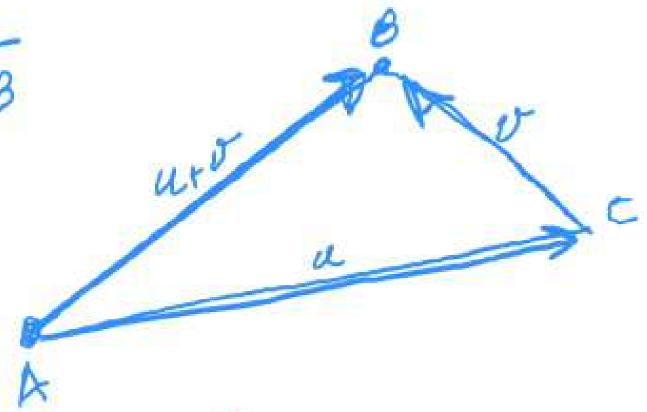
4) $\langle u, \lambda v\rangle = \lambda \langle u,v\rangle$ (hacer como ej)

5) $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$

Si $u=(a,b,c) \to \lambda u = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

$\to \|\lambda u\| = \sqrt{\lambda^2a^2+\lambda^2b^2+\lambda^2c^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2+b^2+c^2)} = \underbrace{\sqrt{\lambda^2}}_{|\lambda|}\ \overbrace{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}^{\|u\|}$

$\overline{AC} + \overline{BC} \geq \overline{AB}$



6) Desigualdad triangular:

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

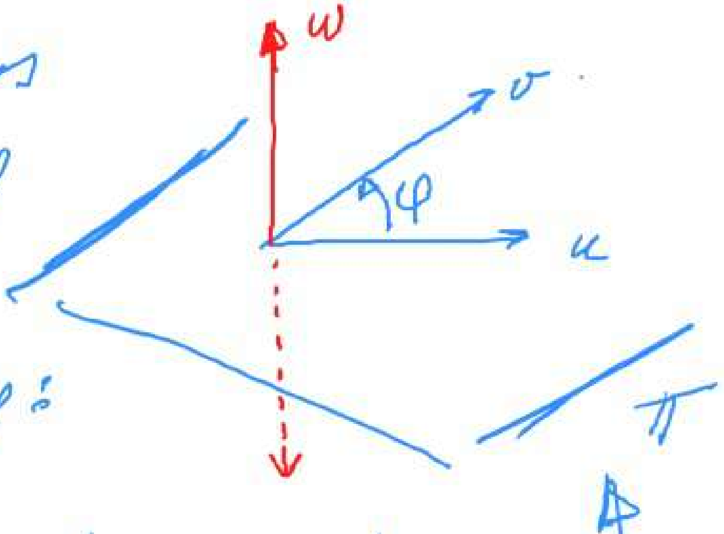
Si estoy en $\mathbb{R}^2$ y $u=(a,b)$ y $v=(c,d)$ tendría que probar $\|(a+c,\, b+d)\| \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$

o sea $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$.

(pensar como ejercicio)

Producto vectorial

Sean u y v vectores no colineales (vectores de $\mathbb{R}^3$). Definimos el producto vectorial de u con v como el vector w tal que:



1) $w \perp u$, $w \perp v$
2) (u, v, w) es una terna directo
3) $\|w\| = \|u\| \, \|v\| \operatorname{sen} \varphi$

Cuando u y v son colineales definimos $u \wedge v = 0$.

Notación $\boxed{w = u \wedge v}$

Obs $u \wedge v = - v \wedge u$