Espacios vectoriales:

Sea V un conjunto no vacío (a los elementos de V los llamamos vectores) y K un cuerpo ($K=\mathbb{R}$, $K=\mathbb{C}$) y a los elementos de K los llamamos escalares.

Consideremos un par de funciones:

$+ : V\times V \to V \quad (u,v) \xrightarrow{+} w \quad (w = u+v)$

$\cdot : K\times V \to V \quad (k,v) \longrightarrow w \quad (w = k.v)$

Definición: Decimos que la cuaterna $(V, K, +, \cdot)$ es un espacio vectorial si:

1) $u+v = v+u \qquad \forall u,v \in V$

2) $v+(u+w) = (v+u)+w$

3) Existe $0\in V$ tal que $u+0 = u \;, \forall u \in V$

4) Para cada $v\in V$, existe $v'\in V$ tal que $v+v' = 0$ (acá decimos que v' es opuesto de v)

5) $\forall v \in V \;, 1.v = v$

6) $\forall \alpha, \beta \in K$ y $\forall v \in V$ se cumple que:

$(\alpha . \beta) . v = \alpha . (\beta . v)$

7) $\forall \alpha \in K$, $v_1, v_2 \in V$

$\alpha . (v_1 + v_2) = \alpha . v_1 + \alpha v_2$

8) $\forall \alpha, \beta \in K$ y $v \in V$

$(\alpha + \beta) . v = \alpha . v + \beta . v$

<u>Ejemplo</u>: Sea $V = \{a\}$ y tomemos $\underline{K = \mathbb{R}}$

$V \times V = \{(a,a)\}$

$+ : V \times V \to V \Rightarrow (a,a) \to a \quad (a + a = a)$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V \to (\alpha, a) \to a \quad (\alpha . a = a)$

Propiedades:

1) $a + a = a + a = a$

2) $a + (a + a) = a + (a) = a$

$(a+a) + a = (a) + a = a$

3) $a + a = a$ (a es neutro) $(a = 0_V)$

4) $a + 0_V = a$

5) $1 . a = a$

7) $\alpha (a + a) = \alpha (a) = a$

$\alpha . a + \alpha a = a + a = a$

6) $(\alpha . \beta)(a) = a$

$\alpha . (\beta . a) = \alpha a = a$

8) $(\alpha + \beta) a = a$

$\alpha a + \beta a = a + a = a$

<u>Ejemplo</u> $V = \mathbb{N}$ $\quad K = \mathbb{R}$

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad (n_1, n_2) \to n_1 \cdot n_2$$
$$\cdot \ \mathbb{R} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad (\alpha, n) \to n$$

$1 + 3 = 3 \qquad \sqrt{3} \cdot 17 = 17$

<u>Propiedades</u>:

1) $n_1 + n_2 = n_1 \cdot n_2$, $n_2 + n_1 = n_2 \cdot n_1$

2) $n_1 + (n_2 + n_3) = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)$ (1)

$(n_1 + n_2) + n_3 = (n_1 \cdot n_2) \cdot n_3$ (2

Por la prop asociativa del producto usual de número naturales (1) y (2) son iguales.

3) $n + 0_V = n \cdot 0_V$ tendría que dar n

$0_V = 1$ satisface

4) $n_1 + n_2 = 1 \qquad n_1 + n_2 = n_1 \cdot n_2$

Si $n_1 = 5 \quad 5 \cdot n_2 = 1$ (El 5 no tiene opuesto)

El ejemplo anterior no es un e.v

Ejemplo: $V = \mathbb{R}^2$ $\quad K = \mathbb{R}$

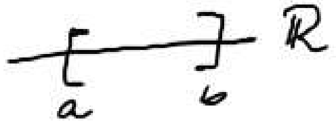
$+ : \quad (a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$

$\cdot : \quad \alpha \cdot (a,b) = (\alpha . a,\ \alpha . b)$

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un e.v porque se satisface las 8 propiedades.

(Como ejercicio, probarlo)

Ejemplo: Sea el $[a,b]$ con $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$



$V = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ es continua} \}$

$K = \mathbb{R}$

$+ : (f,g) \to h \ / \ h(x) = f(x) + g(x)$

$\cdot : (\alpha, f) \to h \ / \ h(x) = \alpha . f(x)$

Veamos que $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ (1)

$(g+f)(x) = g(x) + f(x)$ (2)

(1) y (2) son iguales $\forall x$.

2) $\big(f + (g+h)\big)(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x)$

$\big((f+g)+h\big)(x) = (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x)$

3) Sea $0_V \,/\, 0_V(x) = 0 \ \forall x$

Entonces $(f+0_V)(x) = f(x) + 0_V(x) = f(x) + 0 = f(x)$

4) Dado f, considero $opf \,/\, (opf)(x) = -f(x)$

$(f+opf)(x) = f(x) + opf(x) = f(x) - f(x) = 0$

$\Rightarrow f + opf = 0_V \Rightarrow$ para f cualquiera encontre el opuesto

5) $(1.f)(x) = 1.f(x) = f(x)$

⋮

Terminar como ejercicio las otras propiedades.