Inversa de una matriz

Def: Sea $A_{n\times n}$ $\left(A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\right)$ una matriz $n\times n$, decimos que $B_{n\times n}$ es inversa de A si:

$$AB = I_{n\times n} \quad , \quad BA = I_{n\times n}$$

Obs: Existen matrices que no tienen inversa

Ej 1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En este caso A no tiene inversa.

Ej 2: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No existe B

Proposición: Si A tiene inversa, esta es única ②

dem: Sean B y C inversas de A. Veamos que $B=C$

Considero $(BA)C = B(AC)$

$$I.C = B.I$$

$$\boxed{C = B}$$

Notación: Cuando A tiene inversa, a la inversa la denotamos por A^{-1}

Obs: A, $(A^{-1})^{-1} = A$

dem: Sabemos que $\underbrace{A.A^{-1} = A^{-1}.A = Id}_{①}$. porque A^{-1} es la inversa de A.

Si B es inversa A^{-1} si y sólo si

$\underline{A^{-1}B = BA^{-1} = Id}$. Mirando ① $B=A$, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.

Propiedades:

1) $(AB)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$ (acá suponemos que A, B y $A.B$ son invertibles)

2) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ (acá suponemos que A y A^t son invertibles).

Afirmación: Si $AB = I \Rightarrow BA = I$

$A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

Entonces si $A.B = I$, $B = A^{-1}$ y $B^{-1} = A$

dem: 1) $AB(B^{-1}.A^{-1}) = A(B.B^{-1}).A$

$= (AI)A^{-1} = A.A^{-1} = I$

Entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Ejercicio: probar 2

Propiedades:

1) $(AB)^{-1} = B^{-1} . A^{-1}$ (acá suponemos que A, B y $A.B$ son invertibles)

2) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ (acá suponemos que A y A^t son invertibles).

Afirmación: Si $AB = I \Rightarrow BA = I$
$A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Entonces si $A.B = I$, $B = A^{-1}$ y $B^{-1} = A$

dem: 1) $AB(B^{-1}.A^{-1}) = A(B.B^{-1}).A^{-1}$
$= (AI)A^{-1} = A.A^{-1} = I$

Entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Ejercicio: probar 2