Teorema: Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Son equivalentes: 1

a) A es invertible

b) $\exists\, E_1, \dots, E_k \,/\, A = E_1 \cdot \ldots \cdot E_k$

c) $\text{rango}(A) = n$

Obs: Sea E una matriz elemental que se obtuvo de I aplicando una operación elemental. Entonces $E A = A' \,/\, A'$ se obtiene de A aplicando la misma operación elemental.

Determinante de una matriz $n\times n$

Sea $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ y vamos definir el

$\det(A_{n\times n}) = |A_{n\times n}|$ que va a ser un número (real)

1) Si $A_{1\times 1} = (a_{11}) \longrightarrow |A| = a_{11}$

2) Si $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

②

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \; a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

En general:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\boxed{|A| = \sum (-1)^{1+j} a_{1j} \, |A_{1j}|}$$

La matriz que se obtiene de A eliminando la fila 1 y columna j

Se puede probar que:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \, |A_{kj}|$$

②

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

En general:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{|A| = \sum (-1)^{1+j} a_{1j} \, |A_{1j}|}$$

La matriz que se obtiene de A eliminando la fila 1 y columna j

Se puede probar que:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \, |A_{kj}|$$

Eg : $A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$|A| = -1 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix}$$

$$+1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(-1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$+ \left(1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$-2 \left(1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -(6 - 18 + 0) + (6 + 2 + 2) - 2(0 - 2 + 6)$$

Regla de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Propiedades:

1) Si A tiene una fila (o columna) de ceros entonces $|A| = 0$

2) $$\begin{vmatrix} 2 & 1+2 & 0 \\ 3 & 3+4 & 5 \\ 6 & 7+8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Regla de Sarrus:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| =$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23}$$
$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{23} a_{32} a_{11} - a_{33} a_{12} a_{21}$$

Propiedades:

1) Si A tiene una fila (o columna) de ceros entonces $|A| = 0$

2) $$\left|\begin{matrix} 2 & 1+2 & 0 \\ 3 & 3+4 & 5 \\ 6 & 7+8 & 9 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{matrix}\right|$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1+2 & 0 \\ 3 & 3+4 & 5 \\ 6 & 7+8 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

3) Si la matriz B se obtiene de la matriz A intercambiando dos filas (o columnas) entonces

$$\boxed{\det A = -\det B}$$

4) Si la matriz B se obtiene de la matriz A sumándole a una fila una combinación lineal de las restantes filas entonces.

$$\boxed{\det A = \det B}$$

5) Si la matriz B se obtiene de la matriz A multiplicando una fila por $\alpha \in \mathbb{R}$

entonces. $\boxed{\det B = \alpha \det A}$

---

(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad$

(5) $\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha ad - \alpha bc =$
$= \alpha (ad - bc)$

(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c+a & d+b \end{vmatrix} = a(d+b)$
$- b(c+a) = ad + ab - bc - ba$
$= ad - bc$

Obs: 1) Si A tiene dos filas iguales entonces $\det A = 0$ (se deduce a partir de la propiedad 3)

2) Si A tiene una fila que es multiplo de otra fila entonces $\det A = 0$

dem: $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \alpha F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$

$$\det A \underset{\text{prop } 5}{=} \alpha \det \begin{pmatrix} F_1 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = 0$$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow$ triangular superior.

$$\det A = 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 1 . 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 1 . 2 . 3 . 4$$

Si tengo una matriz A triangular entonces.

$$\det A = a_{11} . a_{22} . \dots . a_{nn}$$