Ejemplo: $\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 1 \end{cases}$ 5 variables. (1)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

ya escalonado

S.C.I

$x_5 = 1$

$x_3 = 0$

$x_2 - x_4 = 2 \longrightarrow x_2 = 2 + x_4$

$x_1 + x_4 = 1 \longrightarrow x_1 = 1 - x_4$

$S = \{ (1 - x_4, 2 + x_4, 0, x_4, 1) : x_4 \in \mathbb{R} \}$

$\# S = +\infty$

Matrices:

Def: Llamamos matriz de m filas y n columnas a un conjunto de $m \cdot n$ números ordenados en filas y columnas.

Notación: $A = (a_{ij})$ $\begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array}$

$a_{ij} \longrightarrow$ el elemento de la matriz A que está en la fila i y en la columna j.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lll} a_{11} = 1 & a_{12} = 2 & a_{13} = 3 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = 1 & a_{23} = 2 \end{array}$$

$A_{m \times n} \longrightarrow$ una matriz de m filas y n columnas.

Def: Sean $A_{m \times n}$ y $B_{m \times n}$ (de la misma dimensión), donde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$.
Se define $A + B$ como la matriz $C = (c_{ij})$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array}$

Propiedades:

1) $A+B = B+A$

2) $(A+B)+C = A+(B+C)$

Notación: $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \{ A_{m\times n}(\mathbb{R}) \}$

3) Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Sea $O_{m\times n} = (o_{ij})$ /

$o_{ij} = 0 \quad \forall i, \forall j$

$A_{m\times n} + O_{m\times n} = A_{m\times n} \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

4) Para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\exists B_{m\times m}$ tal que $A+B = O$

Claramente si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y

$A+B = O \Rightarrow b_{ij} = -a_{ij}$

Ej $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ op $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Notación Si $A+B = O$ decimos que $B = \text{op} A$.

Producto de una matriz por un escalar.

Def: Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ (o $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$) y $\alpha \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Se define $\alpha . A$ como la matriz $B_{m\times n}$ / Si $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ entonces $b_{ij}=\alpha . a_{ij}$

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 3.A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

Propiedades:

1) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

2) $1.A = A$, $0.A_{m\times n} = 0_{m\times n}$

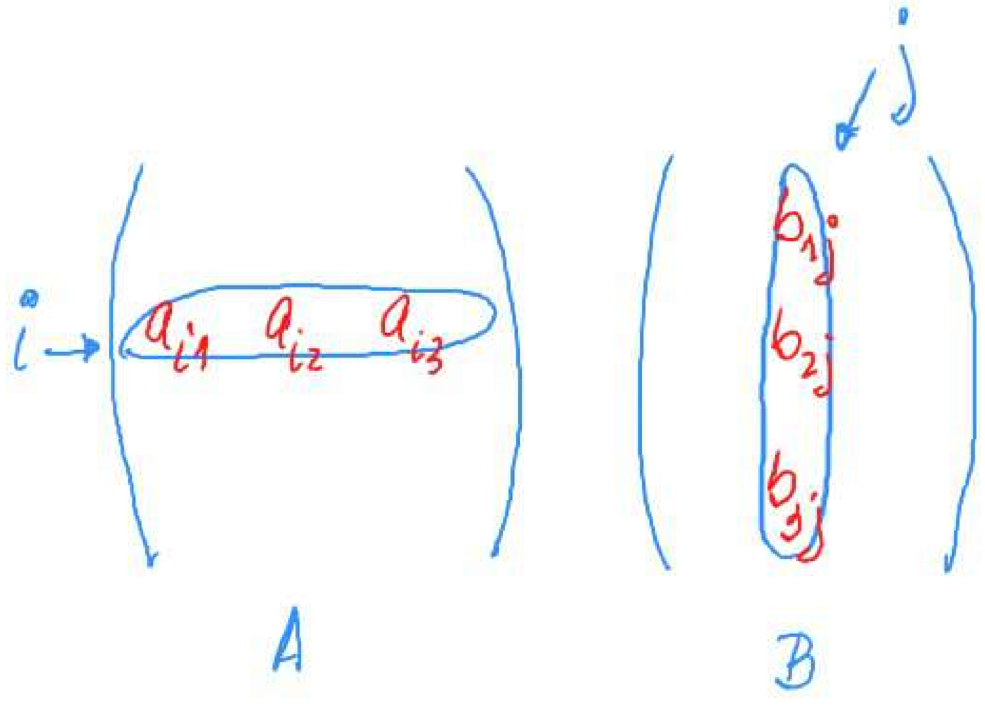
3) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

4) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

Producto de matrices:

Def: Sean las matrices $A_{m\times n}$ y $B_{n\times p}$.
Se define $A.B$ como la matriz
$C_{m\times p} = (c_{ij})$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$



Obs: El producto de matrices no es conmutativo

$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 5}$ ← tiene sentido

$B_{3\times 5} \cdot A_{2\times 3}$ ← no tiene sentido

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $B.A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Propiedades:

1) $(A.B)C = A(B.C)$

2) $(A+B)C = AC + BC$

3) $C(A+B) = CA + CB$

Def: Llamamos matriz identidad $n \times n$ $(I_{n\times n})$ a la matriz $I_{n\times n} = (\eta_{ij})$ /

$\eta_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$\eta_{ij} = 1$ si $i = j$

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición: i) $I_{n\times n} \cdot A_{n\times m} = A$

ii) $A_{n\times m} I_{m\times m} = A$

dem: i) Sea $A = (a_{ij})$ $\quad I_{n\times n} = (\eta_{ij})$

$I \cdot A = (b_{ij})$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik} \cdot a_{kj} = \eta_{ii}\, a_{ij} = a_{ij}$$

$$\Longrightarrow \boxed{I \cdot A = A}$$

Obs: (I) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad\;\; y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases}$

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{3\times 1}{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A.X = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 0x + y + 2z \\ 3x + y + z \end{pmatrix}$$

$$\underline{A.X = B} \sim \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad\;\; y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases}$$

La traspuesta de una matriz se obtiene "cambiando" las filas por columnas.

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Def: Sea $A_{m\times n}$, se define la traspuesta de A (A^t) como la matriz

$$A^t_{n\times m} = (b_{ij}) \;/\; b_{ij} = a_{ji}$$ donde

$$A = (a_{ij}).$$

Obs: $(A^t)^t = A$

Prop: 1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

3) $(AB)^t = B^t A^t$