Recordar: Sea $T: V \to W$ una t.l

1. Si $\{v_1, \ldots, v_n\} \xrightarrow{b} V$ entonces $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\} \xrightarrow{g} Im(T)$
2. Si T es inyectiva $\Longleftrightarrow$ $\forall A = \{v_1 \ldots, v_k\}$ l.i se cumple $\{Tv_1, \ldots, Tv_k\}$ l.i
3. T es inyectiva $\Longleftrightarrow$ $N(T) = \{\sigma\}$

Teorema: Sea $T: V \to W$ una t.l con $\dim V = n \geq 1$. Entonces:

$$\boxed{\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim V = n}$$

dem: 1. $N(T) = \{\sigma\}$, o sea T inyectiva

$\Rightarrow \dim N(T) = 0$

Sea $\{v_1 \ldots, v_n\} \xrightarrow{b} V \overset{1}{\Rightarrow} \{Tv_1, \ldots, Tv_n\} \xrightarrow{g} Im(T)$

$\{v_1 \ldots, v_n\} \xrightarrow{b} V \underset{2}{\Rightarrow} \{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ es l.i

$\Rightarrow \dim Im(T) = n$

(2) $\dim N(T) = m \geq 1$ ($m \leq n$)

Sea $\{w_1, \dots, w_m\} \xrightarrow{b} N(T)$

Si $m = n \Rightarrow N(T) = V \Rightarrow Im(T) = \{0\}$.

$\dim N(T) = n$ $\qquad$ $\dim V = n$.

$\dim Im(T) = 0$

Si $m < n$ $\quad (m + h = n)$

Sabemos que existen $v_1, \dots, v_h$

tales que $\{w_1, \dots, w_m, v_1, \dots, v_h\} \xrightarrow[b]{} V$

$\Rightarrow \{\overset{=0}{Tw_1}, \dots, \overset{=0}{Tw_m}, Tv_1, \dots, Tv_h\} \xrightarrow{g} Im(T)$

$\Rightarrow \{Tv_1, \dots, Tv_h\} \xrightarrow{g} Im(T)$

Afirmación: $\{Tv_1, \dots, Tv_h\}$ es l.i

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dim Im(T) = h \\ \dim N(T) = m \end{array}\right\} \Rightarrow \text{tengo la tesis.}$$

Prueba de la afirmación:

$$\alpha_1 T v_1 + \cdots + \alpha_h T v_h = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_h v_h) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_h v_h \in N(T) \Rightarrow$$

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_h v_h = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m \Rightarrow$$

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_h v_h - \beta_1 w_1 - \cdots - \beta_m w_m = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_h = 0$$

Obs: Sea $T: V \to W$ una t.l con $\dim V = n$ y $\dim W = m$

(1) Si T es biyectiva $\Rightarrow$ $\dim(T) = W$, $\dim N(T) = 0$

$$\underbrace{\dim N(T)}_{=0} + \underbrace{\dim Im(T)}_{m} = n \Rightarrow m = n$$

2. Si $n > m$ entonces $\dim N(T) + \dim Im(T) = n$
Como $Im(T) \subset W \Rightarrow \dim Im(T) \leq m < n$

$\Rightarrow \dim N(T) \geq 1 \Rightarrow$ $\boxed{T \text{ no es inyectiva}}$

3. Si $n < m$ entonces $\dim N(T) + \dim Im(T) = n < m$

$\Rightarrow \dim Im(T) < m \Rightarrow$ $\boxed{T \text{ no es sobreyectiva}}$

Matriz asociada a una t.l

Sea $T: V \to W$ una tl $\dim V = n$ $\dim W = m$

Sean $A \xrightarrow{b} V$ y $B \xrightarrow{b} W$

Vamos a definir una matriz asociada a la tl y a las base A y B.

Para trabajar con esa matriz debo calcular los coordenadas de los vectores en la

base de salida

Def: La matriz asociada a T en las bases $A=\{v_1,\dots,v_n\}$ y $B=\{w_1,\dots,w_m\}$ es la que se obtiene:

$$v_1 \longrightarrow Tv_1 \longrightarrow \operatorname{coord}_B Tv_1$$
$$v_2 \longrightarrow Tv_2 \longrightarrow \operatorname{coord}_B Tv_2$$
$$\vdots$$
$$v_n \longrightarrow Tv_n \longrightarrow \operatorname{coord}_B Tv_n$$

$$(T)_{BA} = \left(\operatorname{coord}_B Tv_1, \operatorname{coord}_B Tv_2, \dots, \operatorname{coord}_B Tv_n\right)$$

Ejemplo Sea $T: \mathbb{P}_2(x) \to \mathbb{P}_2(x)$ /

$T(p)=p'$ $\quad T(ax^2+bx+c)=2ax+b$

$A=\{x^2,x,1\}$ $\qquad B=\{1,x,x^2\}$

$$x^2 \to 2x \to \operatorname{coord}_B 2x = (0,2,0)$$
$$x \to 1 \to \operatorname{coord}_B 1 = (1,0,0)$$
$$1 \to 0 \to \operatorname{coord}_B 0 = (0,0,0)$$

$$(T)_{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema: Si $v \in V$ entonces

$$(T)_{B}^{A} \cdot \operatorname{coord}_A v = \operatorname{coord}_B Tv$$

pensado como columna

pensado como columnas