<u>Propiedades</u>: Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial.

1) El neutro de la suma es único.

<u>dem</u>: Sea 0_1 y 0_2 neutros (o sea:

$0_1 + v = v \ \forall v$ y $0_2 + v = v \ \forall v$)

Considero $0_1 + 0_2 = 0_2$
pensando que 0_1 es neutro

$0_1 + 0_2 = 0_1$
pensando que 0_2 es neutro

$\underline{0_1 = 0_2}$

2) Dado v, existe v' / $v + v' = 0$ (v'=opo)

<u>Afirmación</u>: dado v, existe un único v' tal que $v + v' = 0$

<u>dem</u> Sean v' y v'' / $v + v' = 0$
$v + v'' = 0$

Considero $v + v' + v'' = v + v'' + v'$

$\underline{v + v' + v'' = 0 + v'' = v''}$, $\underline{v + v'' + v' = 0 + v' = v'}$

O sea que $v' = v''$.

Entonces dado v existe $\text{op}\, v$ (único) tal que $v + \text{op}\, v = 0$

<u>Proposición</u>: Sean v y v' vectores. Si $v + v' = v$ entonces $v' = 0$

<u>dem</u>: Considero $v + v' + \text{op}\, v = v + \text{op}\, v + v'$

$$\left.\begin{array}{l} v + \text{op}\, v + v' = 0 + v' = v' \\ v + \text{op}\, v + v' = v + v' + \text{op}\, v = v + \text{op}\, v = 0 \end{array}\right\} v' = 0$$

<u>Proposición</u>: Dado $\alpha \in \mathbb{K}$, se cumple que $\alpha\, 0 = 0$

<u>dem</u>: Considero $\alpha . 0 + \alpha . v = \alpha(0 + v) = \alpha v$

$$\xRightarrow[\text{prop anterior}]{} \boxed{\alpha . 0 = 0}$$

PROP: $\forall v \in V \Rightarrow 0.v = 0_v$

Usamos la prop. anterior.

Dem: Sea $\underline{0.v = (0+0).v = 0.v + 0.v \Rightarrow 0.v = 0_v}$ ■

Otra forma: $0.v + 0_v = 0.v \rightarrow 0.v + (0.v + (-0.v)) = 0.v$

$\Rightarrow (0.v + 0.v) + (-0.v) = 0.v \Rightarrow (0+0).v + (-0.v) = 0.v$

$\rightarrow 0.v + (-0.v) = 0.v \Rightarrow 0_v = 0.v$ ■

PROP: $\forall v \in V \Rightarrow (-1).v$ es el opuesto de v.

Dem: Si probamos que $v + (-1).v = 0_v \Rightarrow$ ganamos.

$v + (-1).v = 1.v + (-1).v = (1+(-1)).v = 0.v = 0_v$ ■

PROP: Si $\alpha.v = 0_v \Rightarrow \alpha = 0$ o $v = 0_v$

Dem: Si $\alpha = 0$ ya sabemos que $\alpha.v = 0_v$.

Veamos que si $\alpha \neq 0$ y $\alpha.v = 0_v \Rightarrow v = 0_v$.

como $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1} \Rightarrow \alpha^{-1}.(\alpha.v) = \alpha^{-1}.0_v$ (existe inverso en $\mathbb{K}$)

$\Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha).v = \alpha^{-1}.0_v$ (asoc del producto)

$\Rightarrow 1.v = \alpha^{-1}.0_v$

$\Rightarrow v = 0_v$ (prop. que vieron con aldo)

SUBESPACIOS VECTORIALES.

→ **Definición**: Sea V un espacio vectorial y sea $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$

Decimos que S es un SUBESPACIO VECTORIAL si

1. $\forall v, w \in S \Rightarrow v + w \in S$ → cerrado bajo la suma
2. $\forall v \in S, \forall \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha v \in S$ → cerrado bajo el producto por escalar.

→ **PROP**: Si S es SEV de $V \Rightarrow 0_V \in S$

Dem: Como $S \neq \emptyset$. Sea $v \in S$. Sabemos que $\forall \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha . v \in S$.

En particular $0 . v \in S \Rightarrow 0_V \in S$.

→ **Ejemplos**:

1. Triviales: $S = \{0_V\}$, $S = V$
2. En $V = \mathbb{R}^3$. $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$ es un SEV

pero $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1\}$ No es SEV.

$(0,0,0) \notin S_2$ pero $(0,0,0) \in S_1$.

Veamos que S_1 es SEV: Sean $(x,y,z), (x',y',z') \in S_1$

$\Rightarrow (x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$

$\Rightarrow (x+x') + (y+y') + (z+z') = (x+y+z) + (x'+y'+z') = 0 + 0 = 0$.

$\Rightarrow (x+x', y+y', z+z') \in S_1$

Sea $(x,y,z) \in S_1$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha . (x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$\Rightarrow \alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha(x+y+z) = \alpha . 0 = 0 \Rightarrow (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in S_1$

Obs: Un plano es SEV de $\mathbb{R}^3$ sii pasa por el origen.

Ídem para las rectas.

→ Ejercicio 7. $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$

a) $S = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) : A^T = A\}$

1. $O_n^T = O_n \Rightarrow O_n \in S$
2. Sean $A, B \in S \rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T = A + B \Rightarrow A+B \in S.$
3. Sea $A \in S,\ \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A \Rightarrow \alpha A \in S.$

} S es SEV.

---

e) Fijo k, $S_k = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) : rg(A) = k\}$ $(k = 0, \dots, n)$

si $k > 0 \Rightarrow O_n \notin S_k \Rightarrow S_k$ NO es SEV

si $k = 0 \rightarrow S_k = \{O_n\} \rightarrow$ es SEV.

k) $S = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) : A^2 = A\}$

1. $O_n^2 = O_n \Rightarrow O_n \in S.$
2. Sea $A \in S,\ \alpha \in \mathbb{K} \rightarrow (\alpha A)^2 = (\alpha A)(\alpha A) = \alpha^2 A^2 \overset{A \in S}{=} \alpha^2 A \Rightarrow \alpha A \notin S$

$\Rightarrow S$ no es SEV.