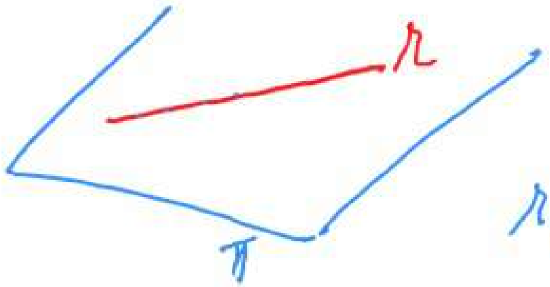
Intersección entre recta y plano.

1)



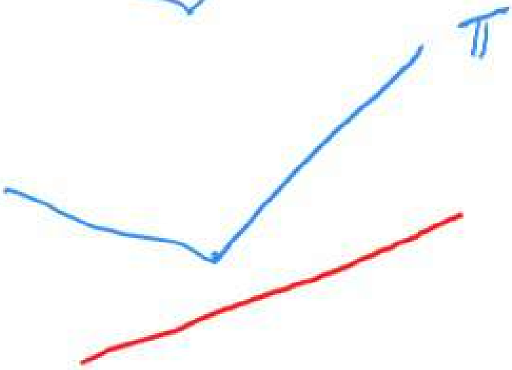
$r \subset \pi$

$r \cap \pi$ S.C.I

2)

$r \cap \pi = \{P\}$

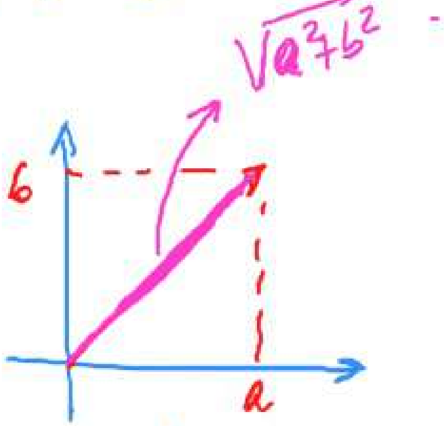
3)



$r \cap \pi = \emptyset$

Producto escalar y vectorial:

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$



Def: Sea $v=(a,b,c)$, se define $\|v\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

O sea que si a el vector v lo representamos por un par de puntos A y B, $\|v\| = d(A,B)$

Ej: Sea $v=(-1,1,0)$, entonces

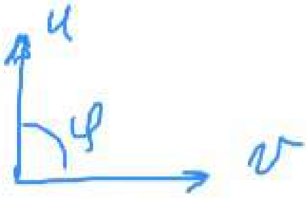
$$\|v\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$$

Obs: $\|v\| \geq 0$ y si $\|v\|=0$ entonces $v=(0,0,0)$

Def: El producto escalar entre u y v es: $\langle u,v\rangle = \|u\|.\|v\|\cos\varphi$

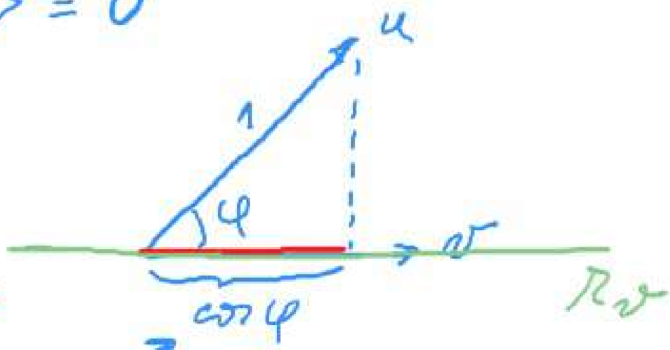
Obs:

1) Si $u \perp v$



$\rightarrow \varphi = \pi/2 \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$

2) Si $\|u\| = \|v\| = 1$

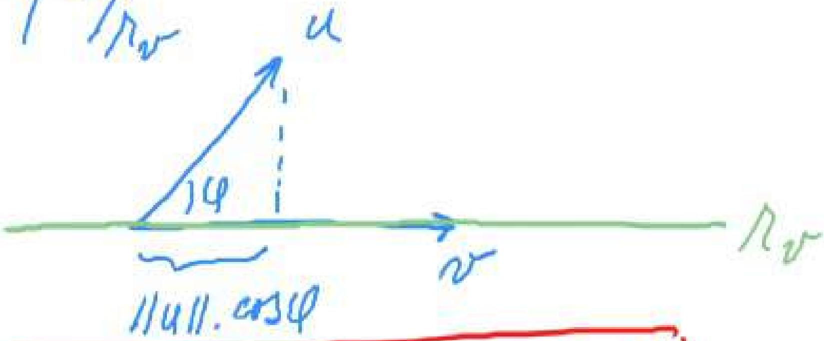


$\langle u, v \rangle = \|u\| . \|v\| \cos\varphi =$

$= \cos\varphi$

$= \text{proy}_{r_v} u$

3)



$$\boxed{\langle u, v \rangle = \underbrace{\|u\| \cos\varphi}_{\text{proy}_{r_v} u} \|v\|}$$

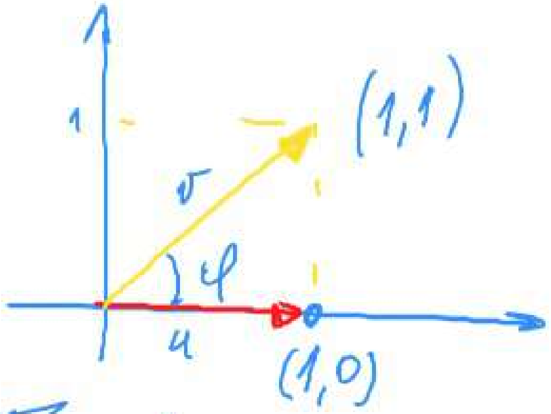
Propiedad: Si $u = (a,b,c)$ y $v = (d,e,f)$ (3)

entonces $\langle u, v \rangle = a.d + b.e + c.f$

Obs: Si estoy en $\mathbb{R}^2$, $u = (a,b)$, $v = (d,e)$

entonces $\langle u, v \rangle = ad + be$

Ejemplo:



$\varphi = \pi/4$

$\cos \pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\langle u, v \rangle = \|u\| \, \|v\| \cos\varphi = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

$u = (1,0)$ $\quad \langle u, v \rangle = 1.1 + 0.1 = 1$

$v = (1,1)$

Ej: Sean $u=(1,0,1)$ y $v=(-1,\sqrt{2},3)$

Calcular $\langle u,v\rangle = 1(-1)+0.\sqrt{2}+1.3 = 2$

Cuál es el ángulo en u y v.

$\langle u,v\rangle = 2 = \|u\|\,\|v\|.\cos\varphi$

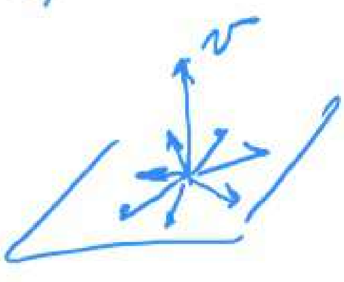
$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{2}\,\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{2}{12}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Obs Entonces el producto escalar sirve para calcular el ángulo entre vectores.

Ej: Sea $v=(1,0,2)$. Encontrar w de norma 1 tal que $w \perp v$

$w=(a,b,c)$

$$\begin{cases} \langle (1,0,2),(a,b,c)\rangle = 0 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 1 \end{cases}$$

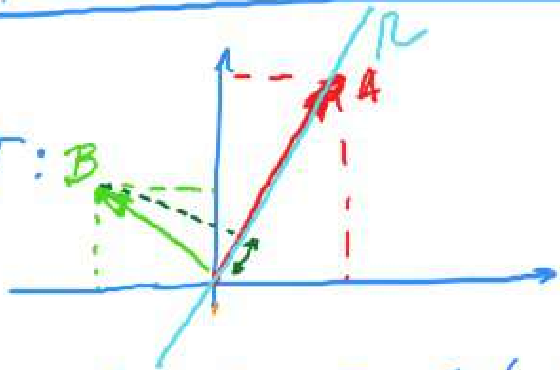


$$\begin{cases} a+2c=0 \rightarrow a=-2c \\ a^2+b^2+c^2 = 1 \end{cases}$$

$(-2c)^2+b^2+c^2=1 \longrightarrow 5c^2+b^2=1$

tomo $\underline{b=0}$ $\quad 5c^2=1 \quad c^2=1/5 \quad c=\pm 1/\sqrt{5}$

Hay infinitas soluciones.



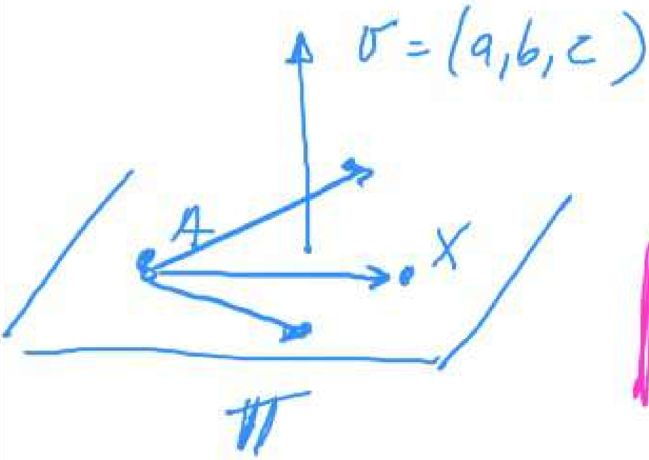
Ejercicio:

Sean $A=(1,2)$ y $B(-1,1)$

$\text{proy}_r \overrightarrow{OB}$, $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cos\varphi$

$$\text{proy}_r \overrightarrow{OB} = \frac{\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle}{\|\overrightarrow{OA}\|} = \frac{-1+2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ecuación del plano que pasa por un punto $A=(x_A, y_A, z_A)$ y es perpendicular a $v=(a,b,c)$



$A=(x_A,y_A,z_A)$

$$\boxed{X\in\pi \leftrightarrow \overrightarrow{AX}\perp v}$$

$X=(x,y,z)$

$\overrightarrow{AX}=(x-x_A,\, y-y_A,\, z-z_A)$

$v=(a,b,c)$

$\langle \overrightarrow{AX}, v\rangle = 0$

$$\pi)\ a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$\boxed{\pi)\ ax+by+cz = ax_A+by_A+cz_A}$$

__Obs__ Sea el plano $\pi)\ x+y+3z=1$

Veamos que $v=(1,1,3)$ es perpendicular al plano.

Tomemos un punto del plano, por ej $A=(-1,-1,1)$ y uno genérico: $X=(1-y-3z,\, y,\, z)$

Entonces $\vec{AX} = X - A = (-2+y+3z, -1-y, 1-z)$ ⑥

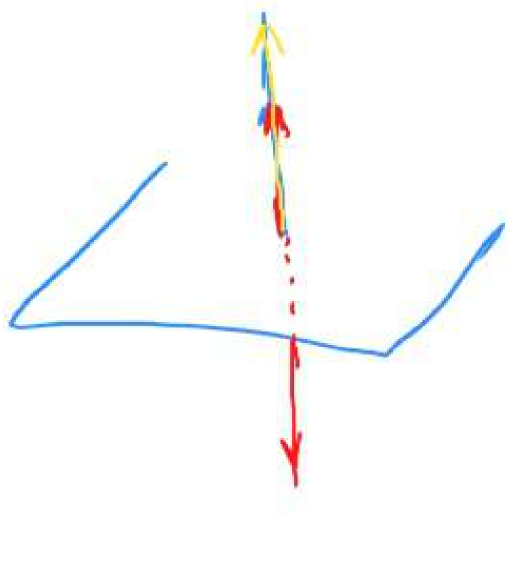
$$\langle \vec{AX}, (1,1,3) \rangle = \langle (-2+y+3z, -1-y, 1-z), (1,1,3) \rangle$$

$$= -2+y+3z+(-1-y)+3(1-z) =$$

$$= -2+y+3z-1-y+3-3z = 0$$

Sea $\pi)\ 2x-y=7$

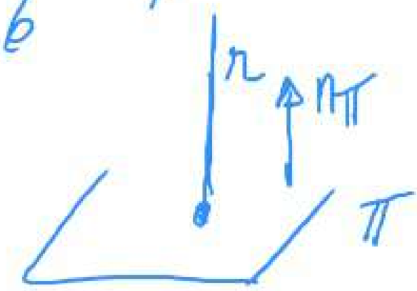
Entonces $v=(2,-1,0)$ es perpendicular al plano.



Ej: Sean el plano $\pi)\ 2x - y + z = 1$

y la recta $r) \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

¿El plano π es perpendicular a r?



$v_r = (-2, 4, -1)$

$n_\pi = (2, -1, 1)$

Si π es perpendicular a $r \Longrightarrow v_r$ tendría que ser colineal con n_π

En este caso π no es perpendicular a r porque v_r no es colineal con n_π