Recordar: Dado $(V, K, +, \cdot)$ un e.v y

$A = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V \quad (A \neq \emptyset)$.

Definimos: $[A] = \{ v \in V / \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k,$
$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \}$

o sea $[A]$ es el conjunto de los vectores de V tales que son combinación lineal de los elementos de A

Prop: El conjunto $[A]$, antes definido, es un s.e.v de V.

dem: Falta probar (viene de la clase pasada) que si $\left.\begin{array}{l} u \in [A] \\ t \in K \end{array}\right\}$ entonces $tu \in [A]$

Como $u \in [A] \rightarrow u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

$\rightarrow tu = t\alpha_1 v_1 + \dots + t\alpha_k v_k \Rightarrow tu \in [A]$

Obs: Si S es un s.e.v de $(V, K, +, \cdot)$ entonces $(S, K, +, \cdot)$ también es un e.v

(Las funciones $+$ y $\cdot$ que considero en $(S, K, +, \cdot)$ son restricciones de las funciones $+$ y $\cdot$ que se tienen en $(V, K, +, \cdot)$)

Vamos a estar trabajando en un ev $(V, K, +, \cdot)$

Def: Sea $A \subset V$ $(A \neq \emptyset)$, $A = \{v_1, \dots, v_n\}$.
Decimos que A genera V (o A es un generador de V) si $[A] = V$, o sea $\forall v \in V$
$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \,/\, v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

Obs: Si $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $v = v_2 + 2v_1 \rightarrow$
$v = v_2 + 2v_1 + 0 v_3 \rightarrow v \in [A]$

Def: Sea $A = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Decimos que el conjunto A es linealmente independiente si el sistema $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ es compatible determinado. O sea que la única solución es la trivial $(\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0)$

Ejemplo: $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$

$A = \{(1,2,3), (-1,0,1)\}$ ¿El conjunto es l.i?

$$\alpha(1,2,3) + \beta(-1,0,1) = (0,0,0)$$

$$(\alpha - \beta, 2\alpha, 3\alpha + \beta) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha = 0 \longrightarrow \alpha = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \underline{\beta = 0}$$

$\longrightarrow A$ es $\underline{li}$

Obs: Si el conjunto A contiene al vector nulo entonces A **no** es l.i (o sea A es l.d)

dem: $A = \{ v_1, v_2, \dots, v_n, 0 \}$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \beta 0 = 0$$

Si tomo $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ y $\beta = 1$

$0 . v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n + 1 . 0 = 0$ entonces encontré una solución no trivial $\Rightarrow$ A es l.d

---

$V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \leftarrow$ polinomios de grado ≤ 2.

$v \rightarrow x^2+1 \ , \ x+1 \ , \ 0$

$A = \{ x, x^2+1, 0 \}$

$$\alpha (x^2+1) + \beta (x) + \gamma . 0 = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\alpha x^2 + \beta x + \alpha + 0\gamma = 0x^2 + 0x + 0$$

$\rightarrow \underline{\alpha = 0}, \underline{\beta = 0}, \gamma$ cualquiera $\Rightarrow$ A es l.d.

5

Prop: Si el conjunto $A = \{v_1 .., v_r\}$ es l.d. entonces $\exists j_0 / v_{j_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j_0}}^{r} \alpha_i v_i$ (el v_j es combinación de los otros vectores del conjunto A)

dem: Si el conjunto es l.d entonces el sistema de ecuaciones $\alpha_1 v_1 + .. + \alpha_r v_r = 0$ tiene alguna solución no trivial $\rightarrow$ Si $(\alpha_1, .., \alpha_r)$ es una solución no trivial, $\exists j_0 / \alpha_{j_0} \neq 0$

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{j_0} v_{j_0} + .. + \alpha_r v_r = 0 \rightarrow$$

$$\alpha_{j_0} v_{j_0} = -\alpha_1 v_1 - .. - \alpha_r v_r$$

$$\alpha_{j_0} \neq 0 \qquad \boxed{v_{j_0} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{j_0}} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_{j_0}} v_r}$$

Ejemplo: Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $A = \{(1,1,0), (1,1,1), (0,1,2)$
$(-1,0,1)\}$.

a) Verificar que A e l.d.

b) Ver que algún vector de A puede escribirse como combinación lineal de los otros.

a) $\alpha(1,1,0) + \beta(1,1,1) + \gamma(0,1,2) + \delta(-1,0,1) = (0,0,0)$

$(\alpha+\beta-\delta, \alpha+\beta+\gamma, \beta+2\gamma+\delta) = (0,0,0)$.

$$\begin{cases} \alpha+\beta-\delta = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+2\gamma+\delta = 0 \end{cases} \quad S.C.I$$

Este sistema es homogeneo y tiene más incógnitas que ecuación $\Rightarrow$ el sistema es C.I

b)
$$\begin{array}{l} \alpha+\beta+0\gamma-\delta=0 \\ \alpha+\beta+\gamma+0\delta=0 \\ 0\alpha+\beta+2\gamma+\delta=0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha+\beta+0\gamma-\delta=0 \\ \gamma+\delta=0 \\ \beta+2\gamma+\delta=0 \end{array}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 0\gamma - \delta = 0 \\ \beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ \gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

$\delta = 1 \rightarrow \gamma = -1 \rightarrow \beta = 1 \rightarrow \alpha = 0$

$0 v_1 + 1 . v_2 - v_3 + v_4 = \sigma$

$(1,1,1) - (0,1,2) + (-1,0,1) = (0,0,0)$

$(1,1,1) = (0,1,2) - (-1,0,1)$

$(0,1,2) = (1,1,1) + (-1,0,1)$

Proposición: Si $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ es l.d, existe $B \subset A$, B. l.i tal que $[A] = [B]$ (es necesario que $\sigma \notin A$)

Rango de una matriz

Sea $\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Proposición: rango A = max del cardinal de los subconjunto l.i del conjunto de las columnas (o filas) de la matriz A.

$A = \{(a_{11}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, \ldots, a_{2n}), \ldots (a_{m1}, \ldots a_{m,n})\}$

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

¿B es l.i? $\rightarrow$ NO $\rightarrow$ rango $A < 3$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 0 \\ -\alpha + \beta &= 0 \\ 3\beta &= 0 \rightarrow \beta = 0 \rightarrow \underline{\alpha = 0} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ C es l.i $\rightarrow$ rango $A = 2$
