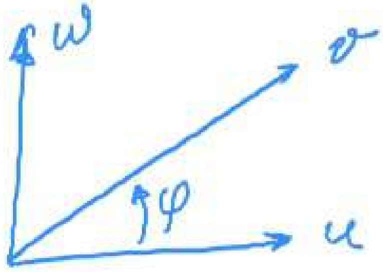
Producto vectorial

u, v vectores de $\mathbb{R}^3$

$u \wedge v = w$ / $w \perp u$, $w \perp v$, $\|w\| = \|u\| \, \|v\| \operatorname{sen} \varphi$



Recordar que la definición fue dada para u y v no colineales.

$$\boxed{\text{Si } u \text{ es colineal con } v \text{ definimos } \underline{u \wedge v = \vec{0}}}$$

El sentido de w está dado por la regla de la mano derecha

Puede probarse lo siguiente:

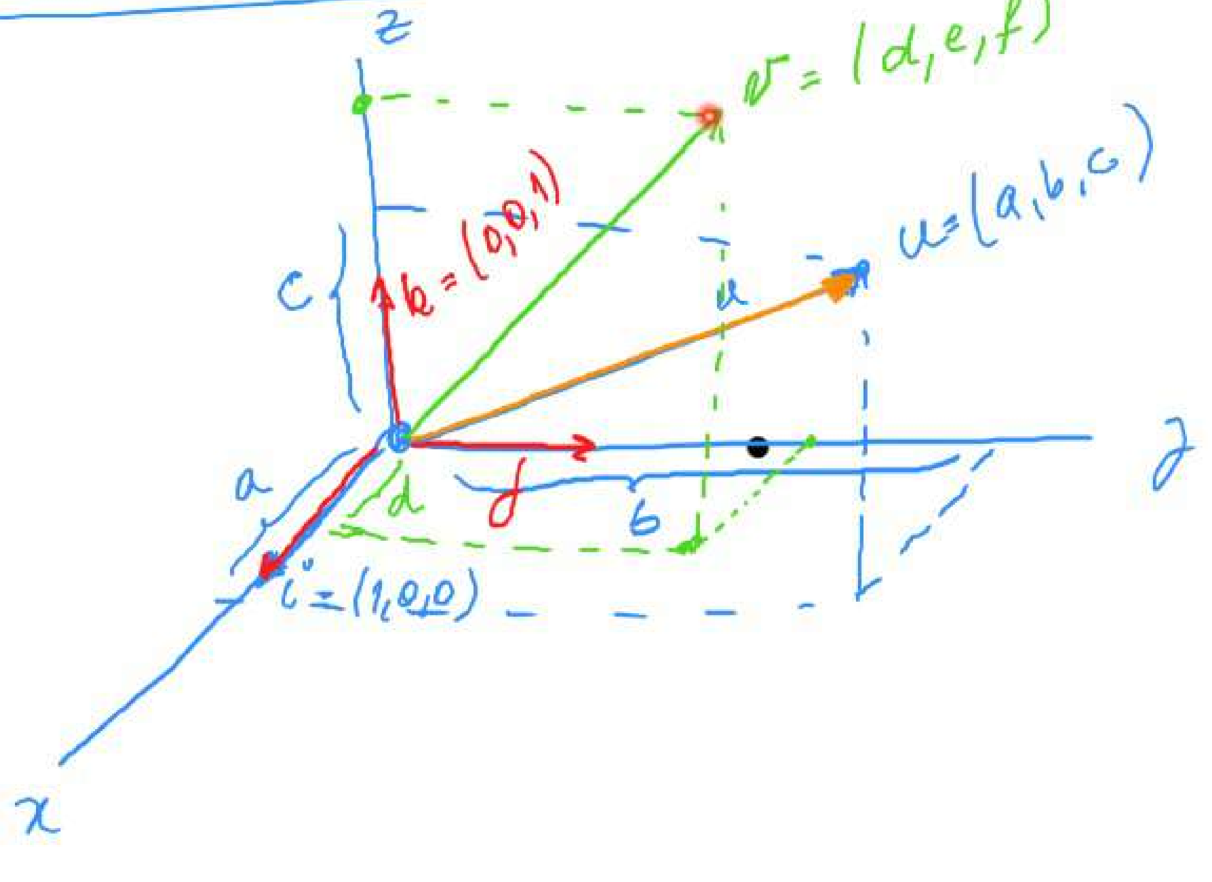
Sean u y v / $u = (a, b, c)$
$v = (d, e, f)$

Vamos a ver como encontrar las coordenadas de $u \wedge v$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} =$$

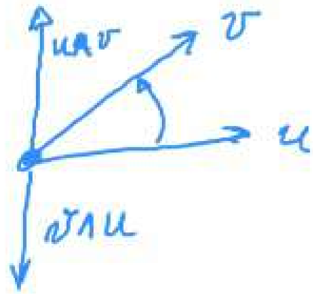
$$i(bf-ce)-j(af-cd)+k(ae-bd)$$

$$\boxed{w=(bf-ce,\ cd-af,\ ae-bd)}$$



Propiedades:

Obs: 1) $u \wedge v = - v \wedge u$



$u = (a, b, c)$
$v = (d, e, f)$

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$v \wedge u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

2) $u \wedge (v_1 + v_2) = u \wedge v_1 + u \wedge v_2$

3) $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$

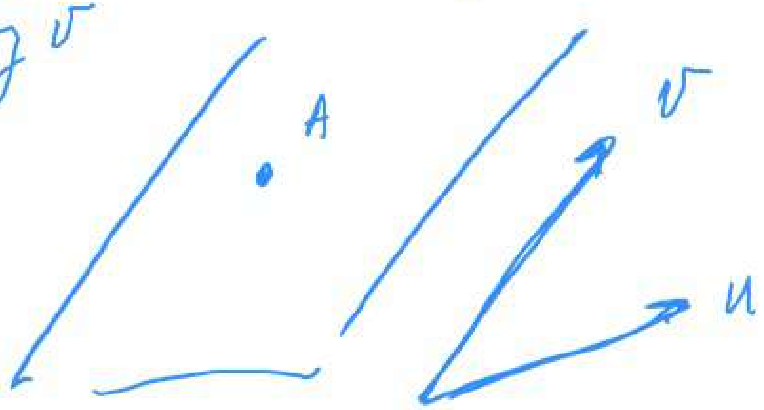
Ejemplo: $u = (1, 1, 0)$

$v = (0, 1, 2)$

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = i(2-0) - j(2-0) + k(1-0)$$

$$u \wedge v = (2, -2, 1)$$

Ejercicio: Sean los vectores $u = (1,-1,2)$ y $v = (1,3,4)$. Encontrar el plano que pasa por el punto $(1,1,0)$ y tiene dirección dada por u y v



$$X = (1,1,0) + \alpha(1,-1,2) + \beta(1,3,4)$$

$$ax + by + cz = d$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-10, -2, 4)$$

$$-5x - y + 2z = d$$

$$(1,1,0) \in \pi \rightarrow -5 - 1 = d$$

$$\pi)\ -5x - y + 2z = -6$$

Pasos de la resolución: (5)

a) Hallamos $u \wedge v$

En este caso $u \wedge v = (-10,-2,4)$

b) Entonces $n_{\pi} = (-10,-2,4)$ o cualquier vector colineal no nulo.

En el ejercicio usé el $(-5,-1,2)$

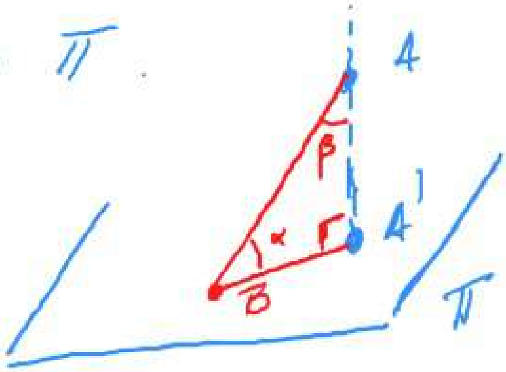
c) Se que la ecuación del plano va a ser $\pi) -5x - y + 2z = d$

d) $(1,1,0) \in \pi \Rightarrow -5.1-(1)+2.0 = d$

o sea $d = -6$

Entonces $\pi) -5x - y + 2z = -6$

Ejercicio: Sea el plano $\pi)\ 2x+3y+z=1$ y el punto $A=(1,-1,2)$. Calcular la distancia de A al plano π.



1) $\overline{AA'} = \overline{BA}\cos\beta$

2) $\overline{AA'} = \overline{BA}\ \mathrm{sen}\ \alpha$

$$1)\ \left|\left\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AA'} \right\rangle\right| = \left| \|\overrightarrow{BA}\|\, \|\overrightarrow{AA'}\| \cos\beta \right|$$

$$\left| \|\overrightarrow{BA}\| \cos\beta \right| = \left| \frac{1}{\|\overrightarrow{AA'}\|} \left\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AA'} \right\rangle \right| =$$

$$= \left| \left\langle \overrightarrow{BA}, \frac{\overrightarrow{AA'}}{\|\overrightarrow{AA'}\|} \right\rangle \right|$$

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\|\overrightarrow{AA'}\|} = \frac{(2,3,1)}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,1)$$

Debo tomar B. Tomo $B=(-1,1,0)$

$$\left| \|\overrightarrow{BA}\| \cos\beta \right| = \left| \left\langle (2,-2,2), \frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,1) \right\rangle \right|$$

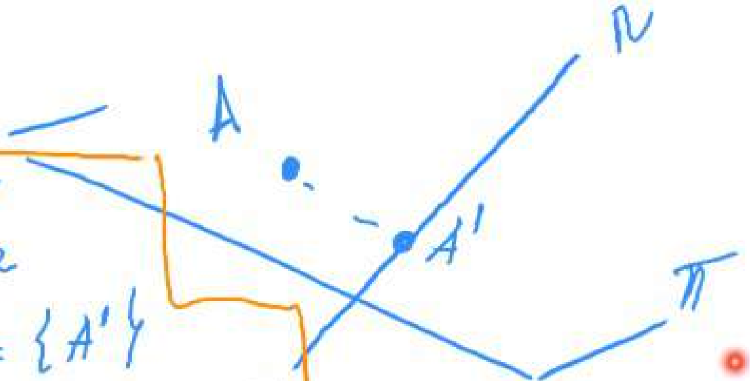
$$= 1/\sqrt{14}\ |4-6+2| = 0$$

Ejercicios: Repasar la definición de producto vectorial y probar las propiedades (ver propiedades en las notas)

Ejercicio: Sea $A=(1,2,0)$ y la recta

$$r)\ \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

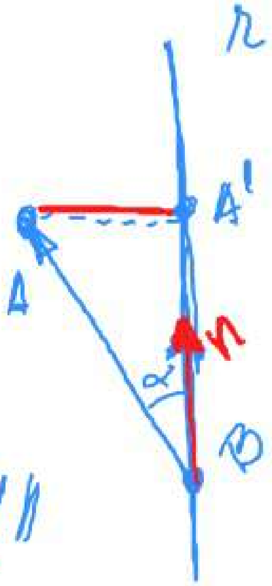
. Calcular $d(A,r)$



1) Encontrar $\pi \,/\, \begin{array}{l} A\in\pi \\ \pi\perp r \end{array}$

2) Hallar $\pi \cap r = \{A'\}$

Entonces $d(A,r) = d(A,A')$



$\langle \vec{AB}, \vec{n}\rangle = \|AB\|\cdot 1 \cos\alpha$

$\|\vec{n}\| = 1$ $\quad \big|\,\|\vec{AB}\|\cos\alpha\,\big| = \|\vec{BA'}\|$

$\|\vec{AB}\wedge\vec{n}\| = \big|\,\|\vec{AB}\|\operatorname{sen}\alpha\,\big| = \|\vec{AA'}\|$

Tomo $B = (1,-1,1)$

$\vec{AB} = (0,-3,1)$

$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ $\qquad \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -3 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{(1,1,3)}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(A,r) = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$$

$B = (1,-1,1)$

$$\left| \left\langle (0,-3,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \right\rangle \right| = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \|\overline{BA'}\| = 3/\sqrt{2}$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{10} \qquad 10 = \overline{AA'}^2 + 9/2$$

$$\overline{AA'}^2 = 11/2 \qquad \|AA'\| = \sqrt{11/2}$$