Matrices semejantes

<u>Definición</u>: Sean $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ matrices cuadrados. Decimos que A y B son semejantes si existe $P_{n\times n}$ invertible tal que:

$$\boxed{A = P^{-1}.B.P} \qquad \left(PA = \underbrace{PP^{-1}}_{I} BP,\ PA = BP \right.$$

$$(A \sim B) \qquad \left. \longrightarrow \boxed{PAP^{-1} = B} \right)$$

Ejemplos:

1) Sea A cualquiera. <u>Afirmación</u>: $A \sim A$

<u>dem</u>

$A = I^{-1} A I$ entonces $A \sim A$

2) Considero la matriz nula y me pregunto que matrices son semejantes a la matriz nula.

Si $A \sim 0 \Rightarrow \exists P \,/\, A = P^{-1}.\underbrace{0.P}_{0} =$

$\Rightarrow A = P^{-1}.0 = 0$

3) Considero I y me pregunto que matrices son semejantes con I. ②

Si $A \sim I \Rightarrow \exists P \,/\, A = P^{-1} \underbrace{I P}_{P} = P^{-1} \cdot P = I$

4) Considero $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Para encontrar alguna B semejante con A considero alguna P invertible y entonces tomo

$B = P A P^{-1}$

Tomo $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Propiedad</u>: Si $A \sim B$ entonces $|A| = |B|$

<u>dem</u>: Si $A \sim B$ entonces $\exists P / A = P^{-1} B P$

Entonces $|A| = |P^{-1}.B.P| = |P^{-1}||B||P|$

$$= \underbrace{|P^{-1}|.|P|}_{1} |B| = |B|$$

<u>Obs</u>: No vale el recíproco porque:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no

son semejantes y tienen el mismo determinante

<u>Proposición</u>: Si $A_{n\times n} \sim B_{n\times n}$ representan una misma t.l en bases adecuadas (y recíprocamente)

<u>dem</u>: Sabemos que $A = P^{-1} B P$ (supongo $K = \mathbb{R}$)

Considero $\mathbb{R}^n$. Entonces $\exists\ \tilde{C} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^n$ tal que ${}_{C}(Id)_{\tilde{C}} = P$ donde C es la base canónica

Entonces ${}_{\tilde{C}}(Id)_{C} = P^{-1}$ ya que

$$\boxed{{}_{\tilde{C}}(Id)_{C} \cdot {}_{C}(Id)_{\tilde{C}} = {}_{\tilde{C}}(Id \circ Id)_{\tilde{C}} = {}_{\tilde{C}}(Id)_{\tilde{C}} = I}$$

Defino $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \,/\, \boxed{{}_{C}(T)_{C} = B}$

Entonces $\underbrace{{}_{\tilde{C}}(Id)_{C}}_{P^{-1}} \underbrace{{}_{C}(T)_{C}}_{B} \underbrace{{}_{C}(Id)_{\tilde{C}}}_{P} = A$

$${}_{\tilde{C}}(Id \circ T)_{C} \; {}_{C}(Id)_{\tilde{C}} = A$$

$${}_{\tilde{C}}(Id \circ T \circ Id)_{\tilde{C}} = A$$

$$\boxed{{}_{\tilde{C}}(T)_{\tilde{C}} = A}$$