Definiciones: Sean r_1 y r_2 rectas en $\mathbb{R}^3$

a) Decimos que r_1 y r_2 son secantes (o se cortan) si

$r_1 \cap r_2 = \{P\}$

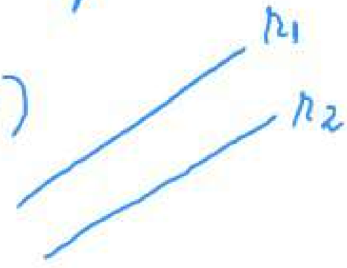
(a) 

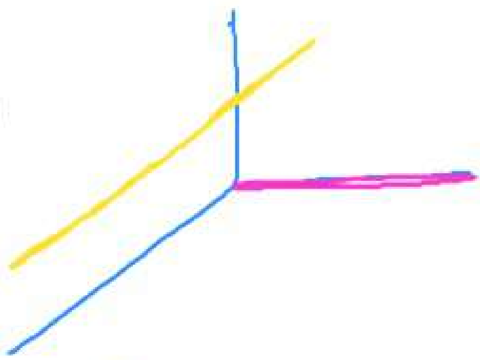
b) Decimos que r_1 es paralela a r_2 ($r_1 \mathbin{//} r_2$) si

i) r_1 y r_2 coplanares (existe un plano que los contiene

ii) $r_1 \cap r_2$ no es un conjunto de un punto, o sea $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ o $r_1 = r_2$

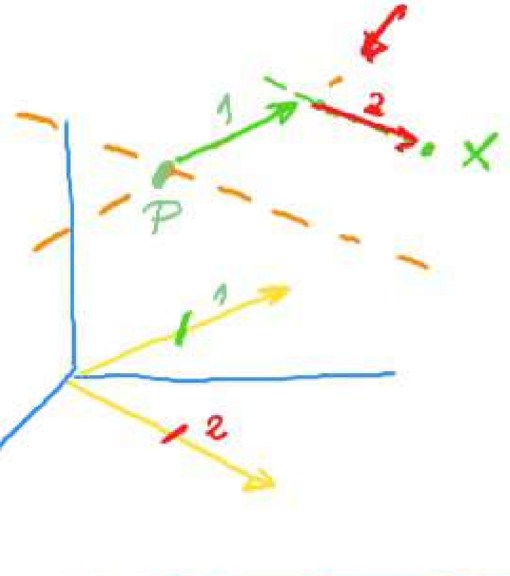
c) Decimos que r_1 y r_2 se cruzan si no son coplanares.

(b) 

(c) 

Obs: En el caso (c) $r_1 \cap r_2 = \emptyset$

Ecuación del plano:



②

Sea P un punto y v_1 y v_2 vectores no colineales.

Def: decimos que $u=(a,b,c)$ y $v=(m,n,p)$ son colineales si $u=\alpha . v$ ó $v=\beta . u$

Ej $v=(1,2,3)$, $u=(3,6,9)$ son colineales.

porque $u=3.v$

Ej: $v=(0,0,0)$, $u=(1,-1,0)$

$v=0.u \rightarrow$ u y v colineales.

La ecuación del plano que pasa por P y tiene dirección determinada por v_1 y v_2 es:

$$\boxed{\pi)\quad X = P + \alpha v_1 + \beta v_2}$$

Si $P=(x_p, y_p, z_p)$, $v_1=(m,n,p)$, $v_2=(q,r,s)$ (3)

Entonces $\pi)\ (x,y,z) = (x_p, y_p, z_p) + \alpha(m,n,p) + \beta(q,r,s)$

$$\pi \begin{cases} x = x_p + \alpha . m + \beta . q \\ y = y_p + \alpha . n + \beta . r \\ z = z_p + \alpha p + \beta . s \end{cases}$$

Ecuación paramétrica de π

Ej: $P=(1,-1,0)$ $v_1=(-1,2,3)$ $v_2=(1,1,0)$

$\pi)\ (x,y,z) = (1,-1,0) + \alpha(-1,2,3) + \beta(1,1,0)$

$$\pi) \begin{cases} x = 1 - \alpha + \beta \\ y = -1 + 2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha \end{cases}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

¿El punto $(-1,1,3)$ está en π?

$$\begin{cases} 1 - \alpha + \beta = -1 \\ -1 + 2\alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha = 3 \longrightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta = -1 \\ 1 + \beta = 1 \end{array}\right\} \text{S.I} \Rightarrow (-1,1,3) \notin \pi$$

Ecuación reducida del plano:

Sea $\pi \begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = -1 + \alpha + 2\beta \\ z = 2 + 2\alpha - \beta \end{cases}$

$$\longrightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta = x - 1 \\ \alpha + 2\beta = y + 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Sumo}} \beta = x + y$$

$$\alpha = y + 1 - 2\beta = y + 1 - 2(x+y) = 1 - 2x - y$$

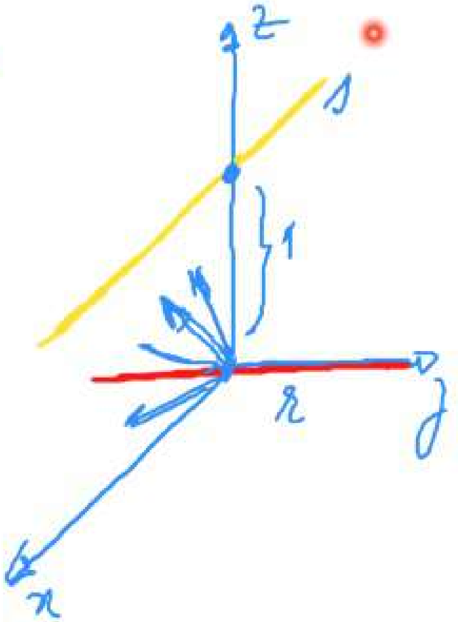
$$\pi) \; z = 2 + 2(1 - 2x - y) - (x + y)$$

$\pi) \; -5x - 3y - z = -4 \longrightarrow$ ecuación reducida del plano

---

$$r) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

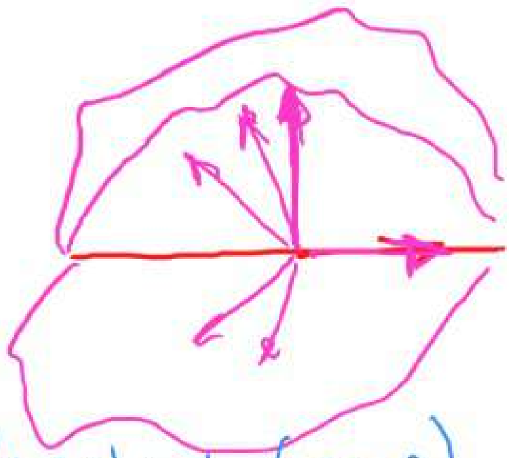
Ej: Sean $r) \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ y $s \begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases}$



¿Existe π que contiene a r y s?

Veamos $\underline{r \cap s}$

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \quad S.I$$



$v_1 = (0,1,0)$

$v_2 = (\alpha, 0, \beta)$

$\pi) \ (x,y,z) = (0,0,0) + \lambda_1 (0,1,0) + \lambda_2 (\alpha, 0, \beta)$

$$\begin{cases} x = \lambda_2 \alpha \\ y = \lambda_1 \\ z = \lambda_2 \beta \end{cases} \qquad \lambda_2 = x/\alpha \quad (\alpha \neq 0) \qquad \longrightarrow \lambda_1 = y$$

$\pi) \ z = \dfrac{x}{\alpha} \beta \qquad \pi) \ \beta x - \alpha z = 0$

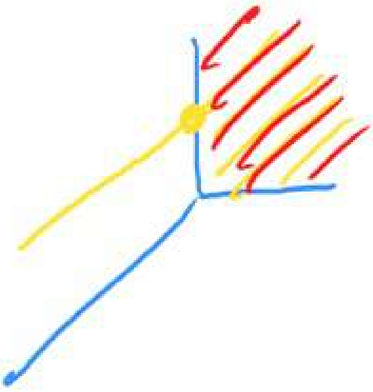
$\pi \cap s \ \begin{cases} \beta x - \alpha z = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \beta x - \alpha = 0 \rightarrow x = \dfrac{\alpha}{\beta} \ (\beta \neq 0)$

$(\alpha/\beta, 0, 1)$

Si $\underline{\beta = 0}$, $\pi \cap s = \phi$

Veamos ahora $\underline{\alpha = 0}$

$$\pi)\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda_1 \\ z = \lambda_2 \beta \end{cases} \longrightarrow \pi)\ x = 0$$



$$\pi \cap s \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \qquad (0,0,1)$$

Sean $\pi_1)\ x + y + z = 1$ y $\pi_2)\ x - y - z = 3$

Hallar ecuación de $\pi_1 \cap \pi_2$

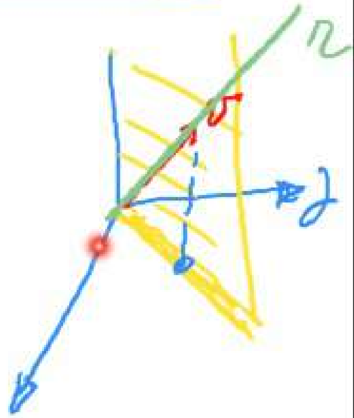
$$\pi_1 \cap \pi_2 \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

Sean $\pi_1)\ x + y + z = 1$ y $r \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$

Hallar $\underline{\pi_1 \cap r}$ $\qquad \pi_1 \cap r \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$

$$\pi \cap r : \begin{cases} x + y + z = 1 & \longrightarrow z = 0 \\ x + y = 1 & \\ x - z = 2 & \longrightarrow \underline{x = 2} \end{cases}$$

$$2 + y + 0 = 1 \longrightarrow y = -1 \qquad (2, -1, 0)$$



Sean $\pi)\ x - y = 0$ y

la recta $r)\ (x, y, z) = \alpha(1, 1, 3)$

Encontrar $r \cap \pi$.

$$r) \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 3\alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \\ z - 3x = 0 \end{cases} \longrightarrow r \begin{cases} y - x = 0 \\ z - 3x = 0 \end{cases}$$

$$z = 3x \quad y = x \qquad (x, x, 3x) = x(1, 1, 3)$$