Sea $T: V \to W$ una t.l, $\dim V = \dim W = n$ (1)

Afirmación: T es biyectiva $\leftrightarrow$ rango $(T)_{BA} = n$

donde $A \xrightarrow{b} V$

$B \xrightarrow{b} W$

dem: Sea $A = \{v_1, \dots, v_n\}$

Sabemos que T es biyectiva $\leftrightarrow \{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ es l.i

$\leftrightarrow$ rango $(T)_{BA} = n$.

Consecuencia: T es biyectiva $\leftrightarrow \det\left((T)_{BA}\right) \neq 0$

Recordar:

$$(T \circ S)_{CA} = (T)_{CB} (S)_{BA}$$

Observaciones:

1) Sea V un e.v / $\dim V = n$ y consideremos:

$Id: V \to V$, $Id(v) = v$

Considero $A = \{v_1, \dots, v_n\} \xrightarrow{b} V$. Calculemos $(Id)_{AA}$

$v_1 \to Id(v_1) = v_1$, $\underset{A}{coord}\, v_1 = (1,0,\dots 0)$

$v_2 \to Id(v_2) = v_2$, $\underset{A}{coord}\, v_2 = (0,1,0,\dots 0)$

$\vdots$

$v_n \to Id(v_n) = v_n$, $\underset{A}{coord}\, v_n = (0,\dots,0,1)$

$$\Rightarrow {}_A(I)_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{la matriz identidad } n\times n$$

2) Sea P una matriz invertible $n\times n$ (osea $|P| \neq 0$)

Considero $\mathbb{R}^n$. Existen bases A y B de $\mathbb{R}^n$

tales que ${}_B(Id)_A = P$

<u>dem</u>: $P = (C_1, \dots, C_n)$ $\quad C_1, \dots, C_n \leftarrow$ columnas de P

tomo $A = \{C_1, \dots, C_n\}$, B la base canónica

Sea $Id: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y calculemos ${}_B(Id)_A$

$C_1 \to Id(C_1) = C_1$, $\underset{B}{coord}\, C_1 = C_1$

$C_2 \to Id(C_2) = C_2$, $\underset{B}{coord}\, C_2 = C_2$

$\vdots$

$C_n \longrightarrow \underset{B}{coord}\, C_n = C_n$

$\to {}_C(Id)_A = (C_1, \dots, C_n) = P$

3) Como encontrar la inversa de una matriz.

Sea $A_{n \times n}$ una matriz invertible

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(x) = A.x$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Obs: $_C(T)_C = A$ donde $C \to$ base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Si considero T^{-1} entonces:

$$_C(T^{-1})_C \underbrace{_C(T)_C}_{A} = {}_C(T^{-1} \circ T)_C = {}_C(Id)_C = I$$

Entonces $_C(T^{-1})_C = A^{-1}$

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular A^{-1}

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ -a+2b \end{pmatrix}$

$_C(T^{-1})_C$ $\quad T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} a+b=1 \\ -a+2b=0 \end{cases}$ $\quad b = 1/3 \quad a = 2/3$

$T^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} a+b=0 \\ -a+2b=1 \end{cases}$ $\quad b = 1/3 \quad a = -1/3$

Entonces $T^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}$, $T^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3\\1/3\end{pmatrix}$ 4

y $A^{-1}=\begin{pmatrix}2/3 & -1/3\\1/3 & 1/3\end{pmatrix}$.

<u>Ejercicio</u>: Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que tiene como matriz asociada $(T)_{BA}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

donde $A=\{(1,0,1),(2,0,0),(0,1,0)\}$

$B=\{(2,-1),(0,2)\}$

a) Calcular $T(1,1,1)$

$\text{coord}_A(1,1,1)=(1,0,1)$

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\leftarrow \text{coord}_B\, T(1,1,1)$$

$\Rightarrow T(1,1,1)=1(2,-1)+3(0,2)=(2,5)$

b) Hallar $N(T)$ e $Im(T)$

$\underline{N(T)}$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 5

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \qquad \underline{x = -2z}$$

$$2(-2z) + 3y - z = 0 \qquad y = 5/3\, z$$

$$(-2z, 5/3\, z, z) = z\,(\underline{-2, 5/3, 1})$$

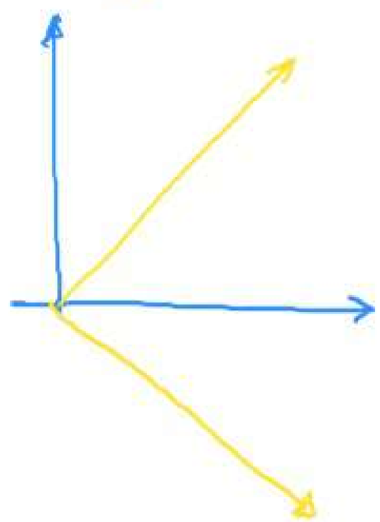
$$v \to -2(1,0,1) + 5/3(2,0,0) + 1(0,1,0) = (4/3, 1, -2)$$

$$\Rightarrow N(T) = [\{(4/3, 1, -2)\}]$$

$$\underbrace{\dim N(T)}_{1} + \dim Im(T) = 3 \to \boxed{\dim I(T) = 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Im(T) = \mathbb{R}^2}$$

Matriz cambio de base:



Sean $A=\{v_1,\dots,v_n\}$ y
$B=\{w_1,\dots,w_n\}$ bases
de un espacio V.

Considero $Id: V \to V$ y
${}_B(Id)_A$

$$\boxed{\textbf{Obs:}\quad {}_B(Id)_A \cdot \text{coord}_A\, v = \text{coord}_B(Id(v)) = \text{coord}_B\, v}$$

Ejercicio: Sean las bases $A=\{(1,0),(1,1)\}$
y $B=\{(0,-1),(-1,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$

Sea v tal que $\text{coord}_A\, v = (1,2)$

Calcular $\text{coord}_B\, v$

${}_B(Id)_A$

$(1,0) = \alpha(0,-1)+\beta(-1,2)$ $\quad -\beta = 1 \to \beta=-1$
$\quad -\alpha+2\beta=0 \quad \alpha=-2$

$(1,1) = \alpha(0,-1)+\beta(-1,2)$ $\quad -\beta=1 \to \beta=-1$
$\quad -\alpha+2\beta=1 \to \alpha=-3$

$${}_B(Id)_A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$