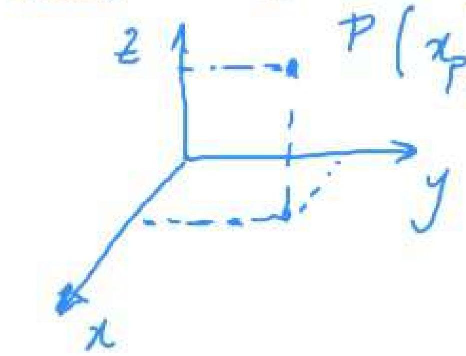
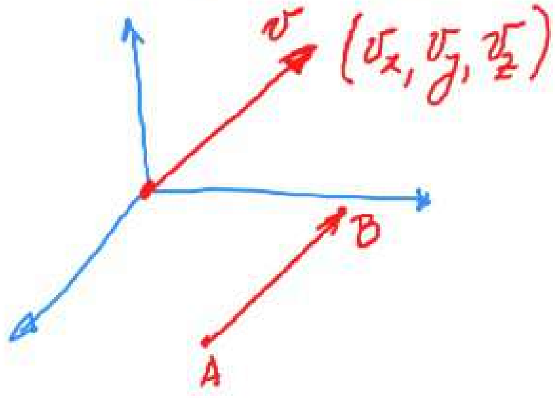
Consideremos el espacio Euclideo (o $\mathbb{R}^3$)

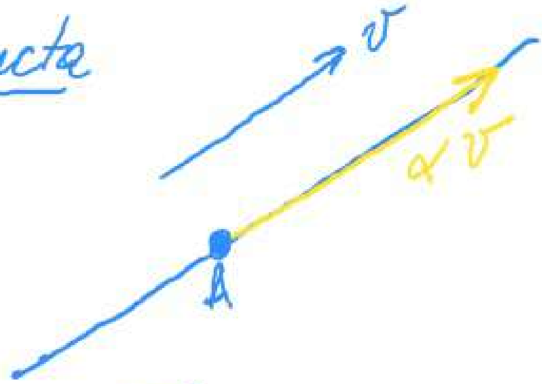




En $\mathbb{R}^3$ (al igual que en $\mathbb{R}^2$) está definido suma entre vectores, punto más vector, resta de puntos, un escalar por un vector, etc

---

Ecuación de la recta



La ecuación paramétrica definida por un punto y un vector v (no nulo) es: $X = A + \alpha . v$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} , \quad \begin{cases} x = x_A + \alpha v_1 \\ y = y_A + \alpha . v_2 \\ z = z_A + \alpha . v_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha v_1 \\ y = y_A + \alpha v_2 \\ z = z_A + \alpha v_3 \end{cases}$$

Como $\underline{v \neq 0}$ entonces v_1 o v_2 o v_3 es diferente de 0.

Supongamos $\underline{v_1 \neq 0} \Rightarrow x = x_A + \alpha v_1 \rightarrow \alpha = \dfrac{x - x_A}{v_1}$

$$\begin{cases} y = y_A + \dfrac{x - x_A}{v_1} v_2 \\ z = z_A + \dfrac{x - x_A}{v_1} v_3 \end{cases}$$

Ec reducida de la recta

Ejemplo: Encontrar la ecuación paramétrica y reducida de la recta que pasa por $A = (1, 2, -1)$ y tiene dirección $v = (-1, 0, 1)$

$X = A + \alpha v \qquad X = (1, 2, -1) + \alpha(-1, 0, 1)$

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 2 \\ z = -1 + \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = 2 \\ z = -1+\alpha \end{cases} \longrightarrow \alpha = 1-x \qquad \begin{cases} y = 2 \\ z = -1+1-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ z + x = 0 \end{cases}$$

$$r = \{ (1-\alpha, 2, -1+\alpha) : \alpha \in \mathbb{R} \}$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 2 \end{cases} \longrightarrow x = -z$$

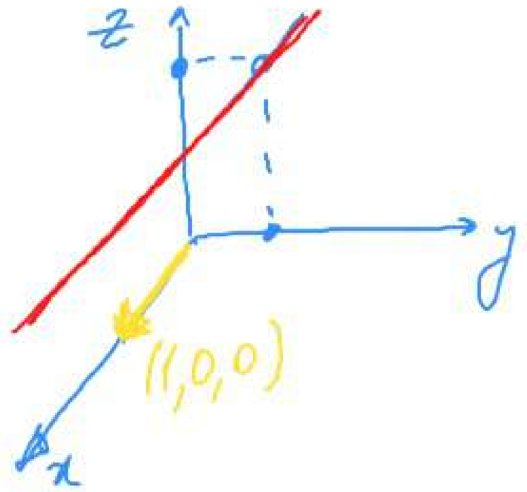
$$S = \{ (-z, 2, z) : z \in \mathbb{R} \}$$

Ejemplo: Encontrar la ecuacion de la recta que pasa por el punto $A = (1,1,2)$ y tiene dirección $v = (1,0,0)$

$$(x,y,z) = (1,1,2) + \alpha(1,0,0)$$

$$\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad (x,1,2)$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$



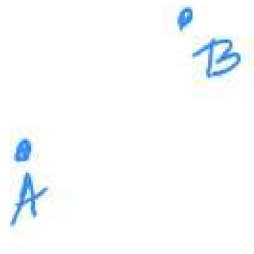
$v = (1,0,0)$

Encontrar la recta que pasa por

$A = (1,2,3)$ y $B(-1,0,1)$

__Obs__: Esta recta tiene dirección $B - A =$

$= (-2,-2,-2)$



Entonces podemos resolver el ejercicio como lo hicimos antes.

4

Supongamos que me dan la ecuación reducida

$$r \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ \quad y + 2z = 1 \end{cases} \longrightarrow y = 1 - 2z$$

$$x + 1 - 2z - z = 0 \longrightarrow x = 3z - 1$$

$$S = \{ (3z-1, 1-2z, z) : z \in \mathbb{R} \}$$

$$(3z-1, 1-2z, z) = (-1, 1, 0) + (3z, -2z, z)$$

$$= (-1, 1, 0) + z(3, -2, 1)$$

$$\to S = \{ (3\alpha - 1, 1 - 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R} \}$$

$$\begin{cases} x = -1 + 3\alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

5

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$\underline{x = \alpha}$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} y - z = -\alpha \\ 3y = 1 - 2\alpha \end{cases}$

$\longrightarrow \; y = 1/3 - 2/3\,\alpha$

$z = y + \alpha = 1/3 - 2/3\,\alpha + \alpha = 1/3 + 1/3\,\alpha.$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 1/3 - 2/3\,\alpha \\ z = 1/3 + 1/3\,\alpha \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Habíamos llegado $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{¿}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

$0 = -1 + 3\alpha$

$\alpha = 1/3$

Ej: Sean las rectas $r_1 \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y=0 \end{cases}$

$r_2) \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -2+3\alpha \\ z = 1-\alpha \end{cases}$ Encontrar $\underline{r_1 \cap r_2}$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y=0 \\ x-\alpha=1 \\ y-3\alpha=-2 \\ z+\alpha=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y-z=-1 \\ -y-z-\alpha=0 \\ y-3\alpha=-2 \\ z+\alpha=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y-z=-1 \\ z+2\alpha=-1 \\ -z-6\alpha=-5 \\ z+\alpha=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y-z=-1 \\ z+2\alpha=-1 \\ -4\alpha=-6 \\ -\alpha=2 \end{cases}$$

S.I

$r_1 \cap r_2 = \emptyset$