Recordar: Cuando usamos la matriz asociada a una t.l, lo hacemos con las coordenadas de los vectores.

Sea $T: V \longrightarrow W$ una t.l, con $A \xrightarrow{b} V$ y $B \xrightarrow{b} W$. Si tengo $(T)_{BA}$ entonces:

$$\boxed{\forall v \in V \quad (T)_{BA} \, \text{coord}_A v = \text{coord}_B Tv}$$

Ejercicio: Sea $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una t.l.

$A = \{(1,0,1), (2,0,0), (0,1,0)\}$ base $\mathbb{R}^3$

$B = \{(2,-1), (0,2)\}$ base $\mathbb{R}^2$. Se sabe que:

$$(T)_{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $T(1,2,-1)$

$\text{Coord}_A (1,2,-1) \qquad \alpha(1,0,1) + \beta(2,0,0) + \gamma(0,1,0) = (1,2,-1)$

$\gamma = 2, \alpha = -1, \beta = 1$

$\text{Coord}_A\,(1,2,-1) = (-1,1,2)$

Entonces $\text{coord}_B\, T(1,2,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ entonces $T(1,2,-1) = -1(2,-1) + 3(0,2)$

b) Encontrar el $N(T)$

Voy a buscar las coordenadas de los vectores que su imagen es el vector $(0,0)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \\ \alpha \qquad + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -2\gamma \\ 2(-2\gamma) + 3\beta - \gamma = 0 \\ 3\beta = 5\gamma \end{array}$$

$\rightarrow \beta = 5/3\,\gamma \qquad (-2\gamma, 5/3\,\gamma, \gamma) =$

$= \gamma(-2, 5/3, 1)$

$(-2, 5/3, 1) \rightarrow -2(1,0,1) + 5/3(2,0,0) + 1(0,1,0) = (4/3, 1, -2)$

$N(T) = [(4/3, 1, -2)]$

c) ¿Cuál es el subespacio $Im(T)$?

$\underbrace{\dim N(T)}_{=1} + \dim Im(T) = 3 \to \dim Im(T) = 2$

$\Rightarrow \boxed{Im(T) = \mathbb{R}^2}$

Recordar:

Si $T: V \to W$, $A = \{v_1, \dots, v_n\} \xrightarrow{b} V$

$\Longrightarrow \{Tv_1, \dots Tv_n\} \xrightarrow{g} Im(T)$

Sean $T, S: V \to W$ transformaciones lineales.

Def: ① $T + S : V \to W$ se define como:

$(T+S)v = Tv + Sv$

② Si $\alpha \in K$ $\alpha . T : V \to W$ se define como:

$(\alpha . T)(v) = \alpha . Tv$

Ejercicio: $T + S$ y $\alpha . T$ son transformaciones lineales.

Proposición: Sean $T, S : V \to W$ transformaciones lineales $A \xrightarrow{b} V$, $B \xrightarrow{b} W$, $\alpha \in K$

Entonces: a) $_B(T+S)_A = {_B(T)_A} + {_B(S)_A}$

b) $_B(\alpha . T)_A = \alpha \, {_B(T)_A}$

Composición de transformaciones lineales

Sean $T : V \to W$ y $S : W \to U$ transformaciones lineales. Entonces tiene sentido componerlas.

$S \circ T : V \to U \quad S \circ T(v) = S(T(v))$

Ejercicio: Probar que $S \circ T$ es una t.l

Observación:

Supongamos que $A \xrightarrow{b} V$, $B \xrightarrow{b} W$, $C \xrightarrow{b} U$ y conocemos $_B(T)_A$ y $_C(S)_B$

Queremos encontrar la matriz M (que va ser la matriz asociada a $S \circ T$ en las bases A y C) que satisface:

$$\boxed{\underset{C}{\text{coord}}(S \circ T)v = M \cdot \underset{A}{\text{coord}}\, v}$$

Sea $v \in V$ y considero $\underset{A}{\text{coord}}\, v$

Entonces: $\underset{B}{\text{coord}}\, Tv = {}_B(T)_A \cdot \underset{A}{\text{coord}}\, v$

$\underset{C}{\text{coord}}\, S(Tv) = {}_C(S)_B \cdot \underset{B}{\text{coord}}\, Tv$

$$\Longrightarrow \text{coord}_C (S \circ T)v = {}_C(S)_B\, {}_B(T)_A\, \text{coord}_A\, v$$

Entonces $\boxed{{}_C(S \circ T)_A = {}_C(S)_B\, {}_B(T)_A}$

Obs: Sea V un e.v con cuerpo $\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) tal que $\dim V = n$. Entonces $\exists\ A = \{v_1, \dots, v_n\} \xrightarrow{b} V$

Considero $T: V \to \mathbb{R}^n \,/\, T(v) = \underset{A}{\text{coord}}\, v$

Esta función T es biyectiva; además es una t.l (verlo como ejercicio). O sea T es un isomorfismo.

Entonces:

a) Si $\{w_1, \ldots w_k\}$ es un conj l.i entonces $\{\operatorname{coord}_A w_1, \ldots, \operatorname{coord}_A w_k\}$ es un conj l.i

b) Si $\{w_1, w_2, w_3\}$ es l.d entonces $\{\operatorname{coord}_A w_1, \operatorname{coord}_A w_2, \operatorname{coord}_A w_3\}$ es l.d y

si $w_3 = \alpha w_1 + \beta w_2 \Rightarrow \operatorname{coord}_A w_3 = \alpha \operatorname{coord}_A w_1 +$
$+ \beta \operatorname{coord}_A w_2$

Cómo saber que una t.l es biyectiva

Sea $T: V \to W$ / $\dim V = \dim W = n$
Sean $A \xrightarrow{b} V$ $B \xrightarrow{b} W$ y consideremos
$({}_B T)_A$

Obs: Si T es inyectiva, o sea $\dim N(T) = 0$

entonces $0 + \dim Im(T) = n \Rightarrow \dim Im(T) = n$

$Im(T) \subset W$, $\dim W = n \Rightarrow Im(T) = W$

$\Rightarrow T$ es biyectiva

Análogamente, si $Im(T) = W$ (T es sobreyectiva)

$\Rightarrow \dim N(T) + n = n \rightarrow \dim N(T) = 0$

$\rightarrow T$ es biyectiva

Ya vimos que: Si $T: V \rightarrow W$ es t.l.

a) Si $\dim V > \dim W \Rightarrow T$ no es inyectiva

b) Si $\dim V < \dim W \Rightarrow T$ no es sobreyectiva

c) Si T es biyectiva $\rightarrow \dim V = \dim W$

Vamos a ver que T es biyectiva si y sólo si:

$$\left| {}_B(T)_A \right| \neq 0 \leftrightarrow \text{rango } {}_B(T)_A = n$$