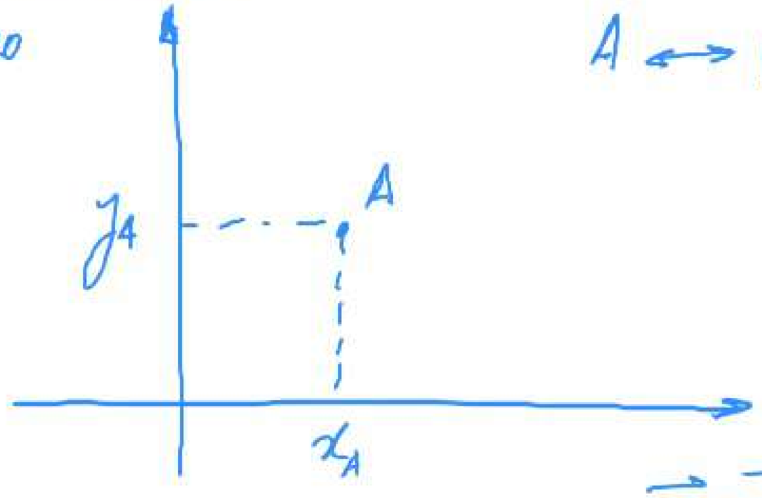
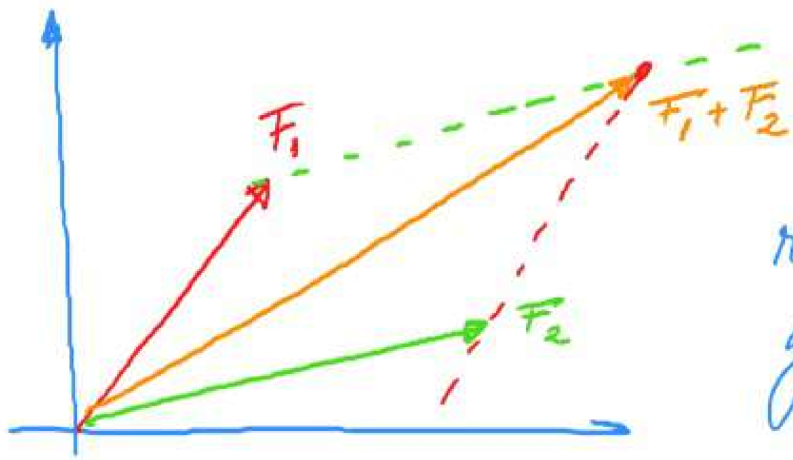
Geometría en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

puntos, vectores, suma de vectores, suma de punto y vector, ecuación de la recta y del plano, "intersecciones", distancia entre puntos, entre punto y plano, etc.

$\mathbb{R}^2 \leftarrow$ plano

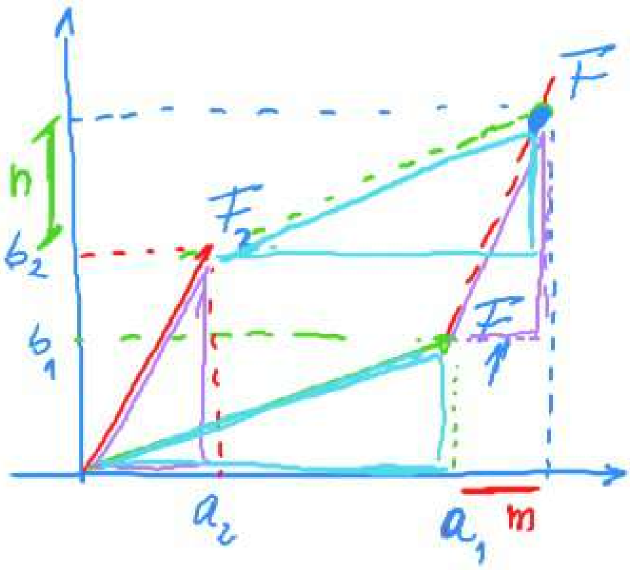
$A \longleftrightarrow (x_A, y_A)$





$\vec{F_1} + \vec{F_2}$ se suma utilizando la regla del paralelogramo.

Veamos como se suman dos vectores en $\mathbb{R}^2$ de forma que satisfaga la regla del paralelogramo.



$F_2 = (a_2, b_2)$

$F_1 = (a_1, b_1)$

$F_1 + F_2 = F$

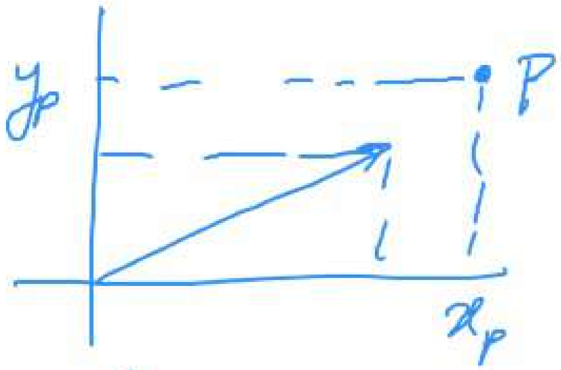
$$F = \Big(a_1 + \underset{a_2}{\underset{\|}{m}}\,,\ b_2 + \underset{b_1}{\underset{\|}{n}}\Big) = (a_1 + a_2\,,\ b_1 + b_2)$$

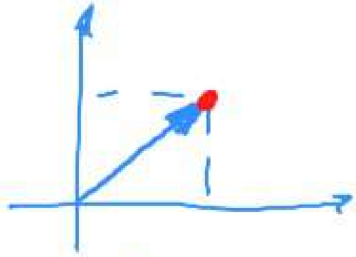
$\underline{\mathbb{R}^2} \longrightarrow v$ vector

$v = (a, b)$

$\underline{\mathbb{R}^2} \longrightarrow P$ punto

$P = (x_p, y_p)$



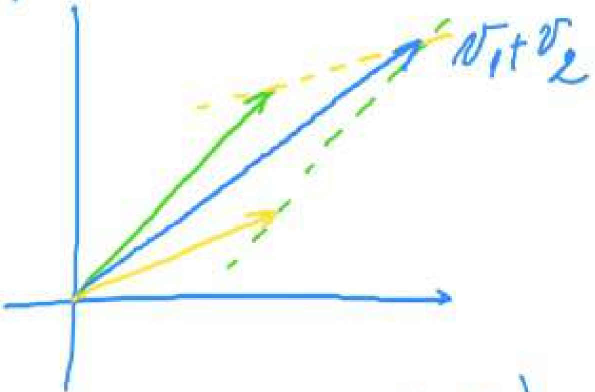


$\underline{\mathbb{R}^2} \to$ puntos, vectores

1) Vamos a definir suma de vectores.
2) Suma de punto con vector
3) Resta de puntos.

1) Sean $v_1 = (a,b)$ y $v_2 = (c,d)$ dos vectores. ③

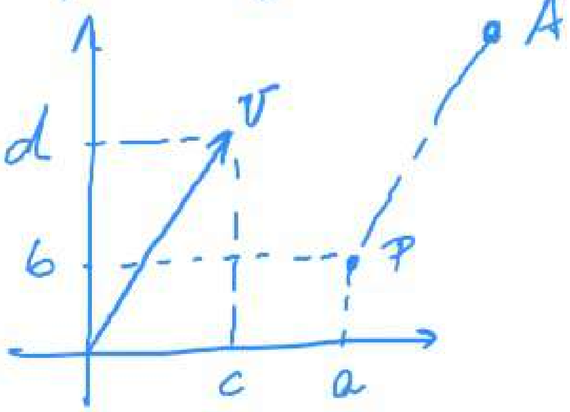
Definimos $v_1 + v_2$ como: $v_1 + v_2 = (a+c, b+d)$



2) Sean $P = (a,b)$ un punto y $v = (c,d)$ un vector, definimos

$P + v = A$

$A = (a+c, b+d)$

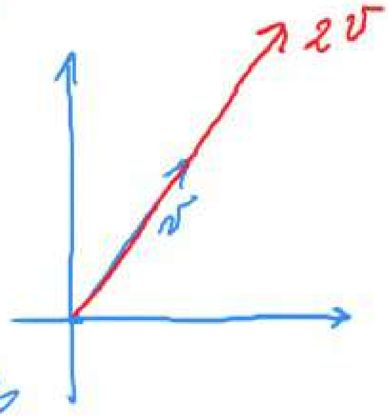


Podemos pensar la suma de P con v como que trasladamos a P según el vector v.

3) Dado los punto A y B, definimos $A - B$ como el vector v tal que

$$\boxed{A = B + v}$$

Def: Dado el vector $v = (a,b)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos $\alpha . v = (\alpha a, \alpha b)$



Al vector $-1.v$ lo llamamos el opuesto de v

Por ejemplo si $v = (a,b)$ entonces

$-1 v = (-a, -b)$

Entonces $v + (-1.v) = (0,0)$

Podemos definir resta de vectores como sigue:

$v - w = v + (-1. w)$

Ejemplos:

Sean $A = (1,2)$, $v = (-3,5)$, $w = (2,3)$

$B = (-1,3)$

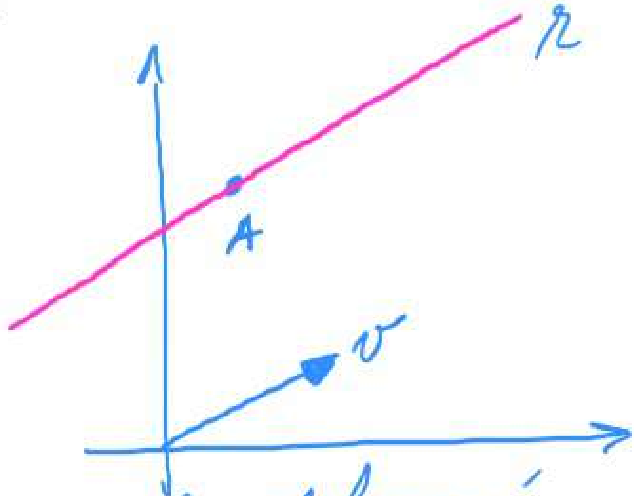
Entonces $A + v = (-2,7)$ punto

$A + w = (3,5)$ punto

$v - w = (-5,2)$ vector

$A - v = A + (-1.v) = (4,-3)$ punto

Ecuación de la recta



r) $X = A + \alpha . v$

$\alpha \in \mathbb{R}$

Ecuación de la recta que pasa por A y tiene dirección v. Para que esta definición tenga sentido v no puede ser el (0,0)

1) Encontrar la recta que pasa por $A = (1,2)$ y tiene dirección $v = (-2, 1)$

$$\boxed{r)\ X = (1,2) + \alpha(-2,1)} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boxed{\begin{aligned} x &= 1 - 2\alpha \\ y &= 2 + \alpha \end{aligned}}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - 2\alpha \\ y &= 2 + \alpha \longrightarrow \alpha = y - 2 \end{aligned}\right\} \ x = 1 - 2(y-2)$$

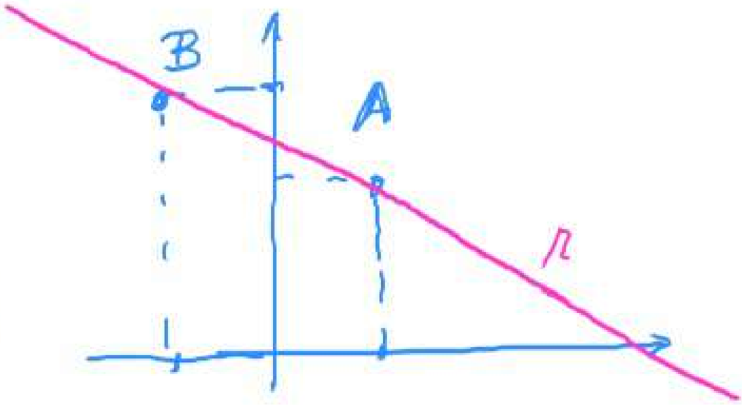
$$\boxed{r)\ 2y + x = 5}$$

⑥

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $A=(1,2)$ y $B=(-1,3)$

tomo $v = A - B$

$v = (2,-1)$



$X = (1,2) + \alpha(2,-1)$

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \end{cases}} \longrightarrow \alpha = 2 - y$$

$x = 1 + 2(2-y)$

$$\boxed{2y + x = 5}$$

Intersección de rectas

Sean las rectas:

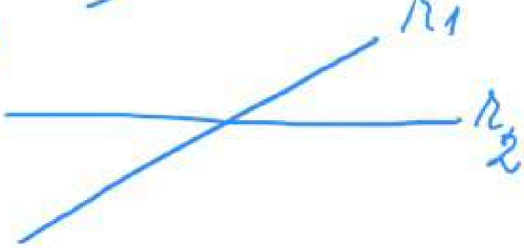
$r_1)\ X = (2,1) + \alpha(2,2)$

$r_2)\ X = (1,0) + \beta(4,2)$

$$\begin{cases} x = 2 + 2\alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ x = 1 + 4\beta \\ y = 0 + 2\beta \end{cases}$$

1. Si el sistema es incompatible

2. Si el sistema es C.D



3. Si el sistema es C.I

En el ejercicio queda

$$\begin{cases} x - 2\alpha = 2 \\ y - 2\alpha = 1 \\ x - 4\beta = 1 \\ y - 2\beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2\alpha = 2 \\ y - 2\alpha = 1 \\ 2\alpha - 4\beta = -1 \\ y - 2\beta = 0 \end{cases}$$

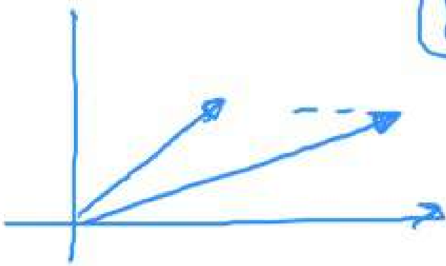
$$\begin{cases} x - 2\alpha = 2 \\ y - 2\alpha = 1 \\ 2\alpha - 4\beta = -1 \\ 2\alpha - 2\beta = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2\alpha = 2 \\ y - 2\alpha = 1 \\ 2\alpha - 4\beta = -1 \\ 2\beta = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \beta = 0, \ \alpha = -1/2, \ y = 0, \ x = 1$

$(1, 0)$

$r_1 \to v_1 = (2,2)$

$r_2 \to v_2 = (4,2)$



$r_1 \not\parallel r_2 \Longrightarrow r_1 \cap r_2 = \{A\}$

Ya sabíamos que el sistema es C.D

$x = 2 + 2\alpha \to 2\alpha = x - 2$

$y = 1 + 2\alpha \qquad y = 1 + x - 2 \qquad \boxed{y - x = -1}$

$x = 1 + 4\beta$

$y = 2\beta \longrightarrow 2\beta = y \longrightarrow x = 1 + 2y \quad \boxed{2y - x = -1}$

$\begin{cases} -x + y = -1 \\ -x + 2y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

$\to y = 0 \qquad x = +1 \to \boxed{A = (+1, 0)}$