Recordar que al conocer la matriz escalerizada (1)
de un sistema de ecuaciones podemos clasificarlo.
De la forma que trabajamos, consideramos
$(A|B) \to$ matriz ampliada del sistema $\mathcal{J}$,
pasamos a una matriz $(A'|B')$ donde A' está
escalerizado

Casos posibles:

a) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ S.I

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ SCD

c) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ SCI

Obs: 1) Si no estamos en el caso de incompatibilidad, si A' está en su forma escalerizada, entonces $(A'|B')$ también está en su forma escalerizada.

2) Cuando estamos en el caso incompatible, entonces la matriz escalerizada que se obtiene de $(A|B)$ tiene al menos un escalón mas que la matriz escalerizada que se obtiene de la matriz A.

Def: Llamamos rango de una matriz A a la cantidad de escalones de la matriz A', siendo A' una matriz escalerizada de la matriz A.

Teorema de Rouché Frobenius.

Sea S un sistema de m ecuaciones y n incógnitas y consideremos las matriz (A) y (A|B) asociados al sistema de ecuaciones.

1) $\text{rango}(A|B) > \text{rango}(A) \iff$ S.I

2) $\text{rango}(A|B) = \text{rango}(A) = n \iff$ S.C.D

3) $\text{rango}(A|B) = \text{rang}(A) < n \iff$ S.C.I

Sistemas homogeneos:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Un sistema es homogeneo si los coeficientes independientes son nulos, o sea $B = 0$.

Obs: Entonces $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B)$, entonces siempre es compatible

Además, $(0,0,\dots,0) \in S$. O sea el sistema siempre admite la solución trivial. ④

<u>Obs</u>: Si $\underline{m < n}$ (m es la cantidad de ecuaciones) entonces $\text{rango}(A) < n$

$\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \qquad SCI$$

<u>Aplicaciones</u>:

Discutir:

$$\begin{cases} (\lambda-1)x + y + (\lambda+1)z = 1 \\ (1-\lambda)x - y + (\lambda^2-1)z = 2\lambda-1 \\ (\lambda^2-1)x + \lambda y + (\lambda^2-1)z = \lambda-1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1-\lambda & -1 & \lambda^2-1 & 2\lambda-1 \\ \lambda^2-1 & \lambda & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{array}\right)$$

Si $\underline{\lambda \neq 1} \rightarrow \underline{\lambda - 1 \neq 0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda & 2\lambda \\ 0 & -1 & -2\lambda-2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2 \leftarrow F_2 + F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - (\lambda+1)F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & -1 & -2\lambda-2 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda & 2\lambda \end{array}\right)$$

Si $\underline{\lambda^2+\lambda \neq 0} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{rango}(A) = 3 \\ \text{rango}(A/B) = 3 \\ n = 3 \end{array}\right\}$ S.C.D

Si $\lambda^2+\lambda = 0 \longrightarrow \lambda(\lambda+1) = 0 \left\{\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{array}\right.$

Falta estudiar los casos: $\lambda=1$, $\lambda=0$, $\lambda=-1$

$\underline{\lambda=1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow F_2 \leftarrow F_2+F_1 \\ \leftarrow F_3 \leftarrow F_3-F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow F_3 \leftarrow F_3+F_2$$

SI

$\lambda=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

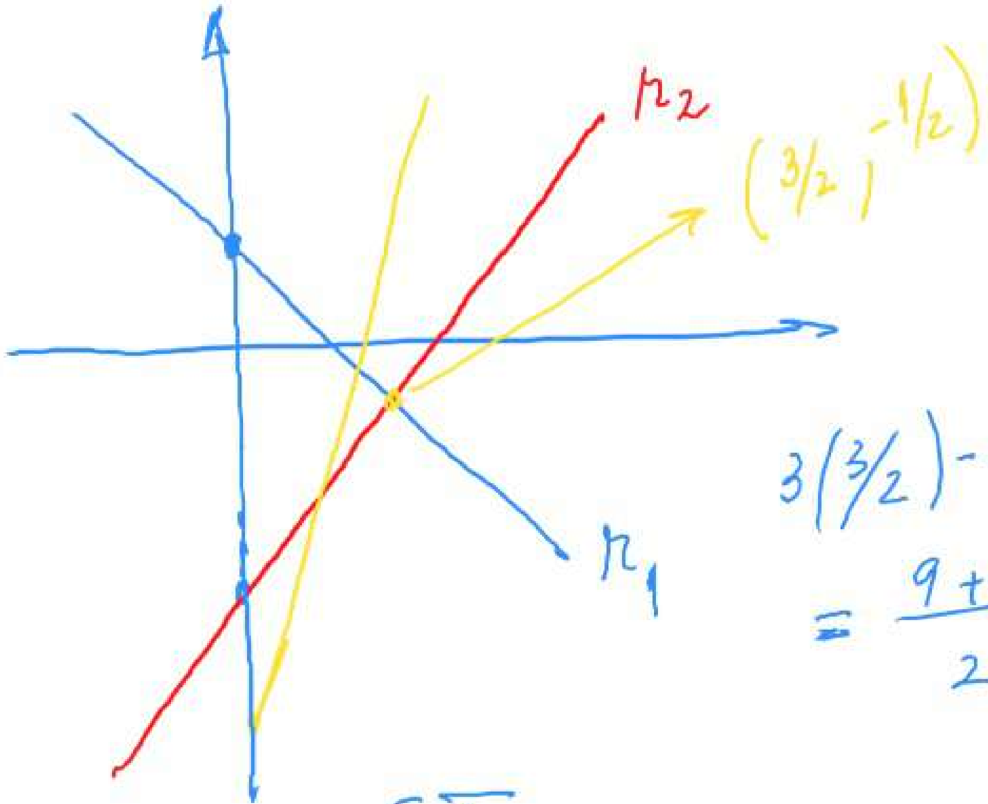
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ $\underline{SCI}$

Hacer como ejercicio $\underline{\lambda = -1}$

Interpretación geométrica

$\underline{n=2}$

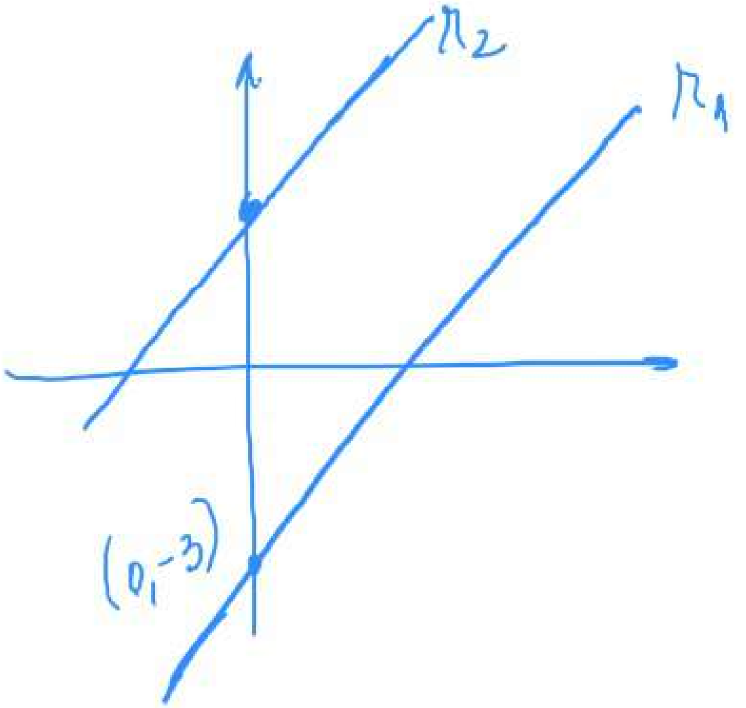
$$\begin{cases} x + y = 1 & (r_1) \quad m_1 = -1 \\ x - y = 2 & (r_2) \quad m_2 = 1 \\ 3x - 2y = 5 & (r_3) \quad m_3 = 3/2 \end{cases}$$



$$3\left(3/2\right) - 2\left(-1/2\right) = \frac{9+2}{2} = \frac{11}{2}$$

$\underline{SI}$

$$\begin{cases} x - y = 3 & \rightarrow m_1 = 1 \\ -2x + 2y = 5 & \rightarrow m_2 = 1 \\ 3x + 7y = 8 & \rightarrow m_3 = -3/7 \end{cases}$$



S.I