Intercambiar filas podemos considerarlo ①
como operación elemental.

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

matriz ampliada del sistema I

②

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y=2 \\ z=3 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Obs: para resolver un sistema de ecuaciones puedo trabajar solamente con los coeficientes.

Supongamos que no todos los a_{ij} son 0, o sea existe algun $a_{pq} \neq 0$

$(A|B)$ matriz ampliada

$A = (C_1\ C_2 \dots C_n)$. Para el ejemplo $C_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$C_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Considero j_0 tal que C_{j_0} no es nula y C_i es nula si $i < j_0$.

En otras palabras, C_{j_0} es la 1ª columna no nula. Ahora identificamos el 1er elemento de la columna C_{j_0} no nulo. Dicho elemento estará en una fila que llamo i_0, entonces el elemento encontrado es el $a_{i_0 j_0}$

Ahora pasamos a una matriz $(A'|B')$ que se obtiene de la matriz $(A|B)$ intercambiando la fila F_{i_0} con F_1

Entonces $a'_{1j_0} \neq 0$.

Luego vamos a aplicar operaciones elementales sobre la $(A'|B')$ para obtener $(A''|B'')$ tal que

$a''_{ij_0} = 0$ para $i \geq 2$

Ahora volvemos a aplicar el procedimiento a la submatriz que se obtiene de $(A''|B'')$ sin considerar la 1er fila

El algoritmo acaba cuando no puedo aplicar el procedimiento. (pensando en la matriz sin los coeficientes independientes

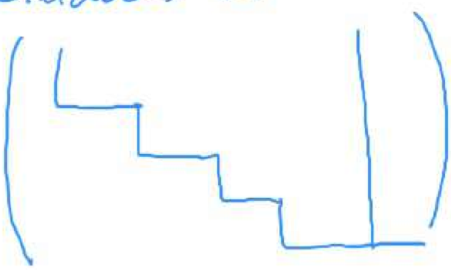
Ejemplos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

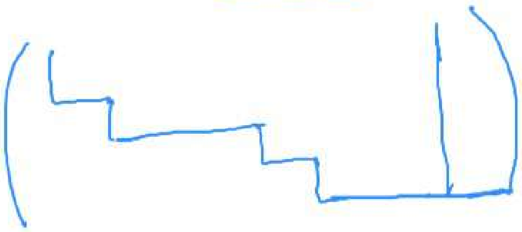
$$\xleftrightarrow[F_4 \leftarrow F_4 - 2F_1]{F_3 \leftarrow F_3 + F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow{F_4 \leftarrow F_4 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 & x = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \\ \quad y + 0z - t = 1 & y = 1 - \tfrac{1}{2} \\ \qquad 2z = 1 & z = \tfrac{1}{2} \\ \qquad -2t = 1 & \rightarrow \quad t = -\tfrac{1}{2} \end{cases}$$

Posibilidades de la matriz escalerizada

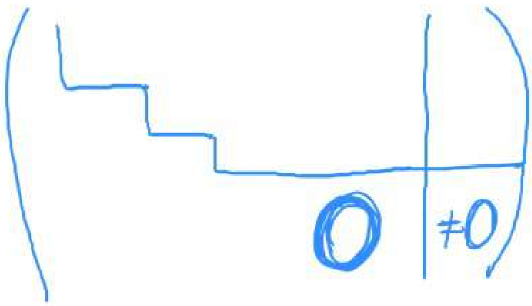
a)  → el largo de cada escalón es 1.

El sistema es C.D

b)  → hay algún escalón de largo más que 1

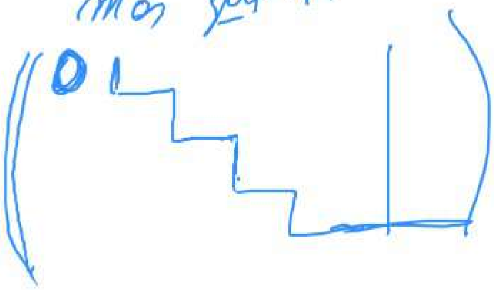
El sistema es C.I

c)



S.I

Aclaración: Para el caso (b) si empieza con una columna de cero entiendo que hay un escalón de largo mas que 1.



S.C.I

Ejemplos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad SI$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad SCI$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad S.C.I$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0x + y + z + t = 1 \\ 0x + 2z + 3t = 2 \\ \underline{t = 3} \end{array}}$$