1

Recordar: Sea $T: V \to W$ una t.l

a) Si $A = \{v_1, \dots, v_n\} \xrightarrow{b} V$ entonces $\{Tv_1, \dots, Tv_n\} \xrightarrow{g} Im(T)$

b) Para encontrar el $N(T)$ debo estudiar que condición cumplen los vectores $v / Tv = 0$

Proposición: Sea $T: V \to W$ una t.l.
La t.l T es inyectiva $\longleftrightarrow N(T) = \{0\}$

dem:

$(\longrightarrow)$ H T es inyectiva T $N(T) = \{0\}$

Como T es inyectiva $\Rightarrow$ Si $v_1 \neq v_2$ entonces $Tv_1 \neq Tv_2$

Sabemos $0 \in N(T)$ porque $T0 = 0$

Sea $v \in N(T) \to Tv = 0$

$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow N(T) = \{0\}$

$(\longleftarrow)$ H $N(T) = \{0\}$ T T es inyectiva

Quiero probar que si $Tv_1 = Tv_2 \Rightarrow v_1 = v_2$

Sean v_1 y $v_2 / Tv_1 = Tv_2 \Rightarrow Tv_1 - Tv_2 = 0$

$\Rightarrow T(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$

Veamos como se transforma un conjunto l.i (2)

Ejemplo (1): Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, T(x,y) = (0,0)$

$A = \{(1,0), (0,1)\}$ $\quad B = \{T(1,0), T(0,1)\} = \{\sigma, \sigma\}$

$\Rightarrow$ B no es l.i

Proposición: Sea $T: V \to W$ t.l.

Si T es inyectiva entonces para todo

$A = \{v_1, \dots, v_k\}$ l.i se cumple que $\{Tv_1, \dots, Tv_k\}$ es l.i

(H) T inyectiva $\quad$ (T) Si $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ es l.i

entonces $\{Tv_1, \dots, Tv_k\}$ es l.i

dem: Sea $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ l.i

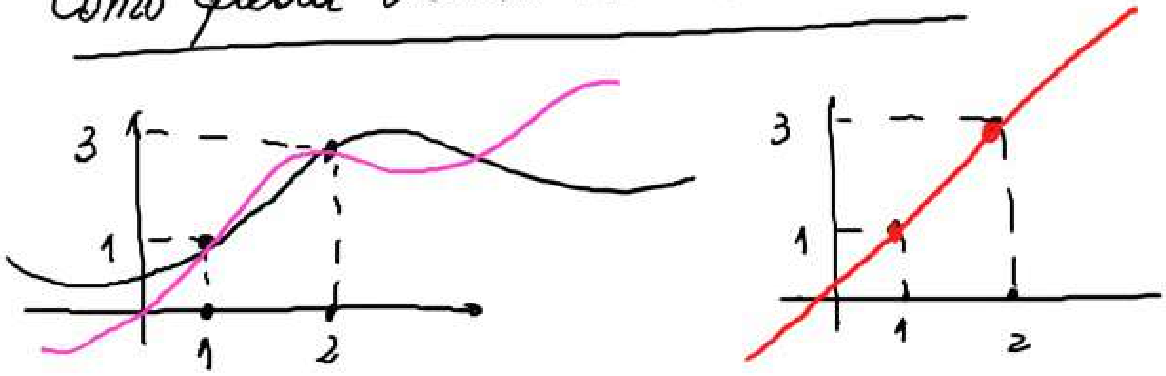
Considero $\alpha_1 Tv_1 + \dots + \alpha_k Tv_k = \sigma_W$

$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \sigma_W \longrightarrow$

$\underset{\text{T inyectiva}}{\longrightarrow}$ $\left.\begin{array}{l} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \sigma_V \\ \text{A es l.i} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

$\Rightarrow \{Tv_1, \dots, Tv_k\}$ es l.i

Cómo queda determinada una t.l



Proposición: Sean V y W e.v / $\dim V = n$.

Si $A = \{v_1, \dots, v_n\} \xrightarrow{b} V$ y $w_1, \dots, w_n$ son vectores de W entonces existe una única t.l.

$$T: V \longrightarrow W \ / \ T(v_i) = w_i \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si existiera } T \text{ y tomo } v \in V \text{ entonces.} \\ v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \text{ y } Tv = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ \quad = \alpha_1 T v_1 + \dots + \alpha_n T v_n \end{array}}$$

dem: Considero $T: V \to W$ que satisface:

si $v \in V$ / $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow Tv = \alpha_1 T v_1 + \dots + \alpha_n T v_n$

Afirmación: T es una t.l (ejercicio)

<u>Unicidad</u>: Sea $\tilde{T}: V \to W$ t.l /

$\tilde{T}(v_i) = w_i$. Entonces si $v \in V$ el vector

$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Entonces $\tilde{T}(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)$

$= \alpha_1 \tilde{T} v_1 + \cdots + \alpha_n \tilde{T} v_n = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n =$

$= \alpha_1 T v_1 + \cdots + \alpha_n T v_n = T(\alpha v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = Tv$

$\Rightarrow \tilde{T} v = T v$

<u>Aplicaciones</u>:

1) Encontrar la fórmula general de $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, t.l tal que

$T(1,0) = (1,1,1)$ y $T(1,1) = (0,1,0)$

<u>Obs</u>: $\{(1,0),(1,1)\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^2$. Entonces existe una única T.

$T(a,b) = ?$ $\quad (a,b) = \alpha(1,0) + \beta(1,1) = (\alpha+\beta, \beta)$

$\Rightarrow \begin{cases} \beta = b \\ \alpha = a-b \end{cases} \Rightarrow T(a,b) = \alpha T(1,0) + \beta T(1,1) = (a-b)(1,1,1) +$

$+ b(0,1,0) = (a-b, a-b+b, a-b)$

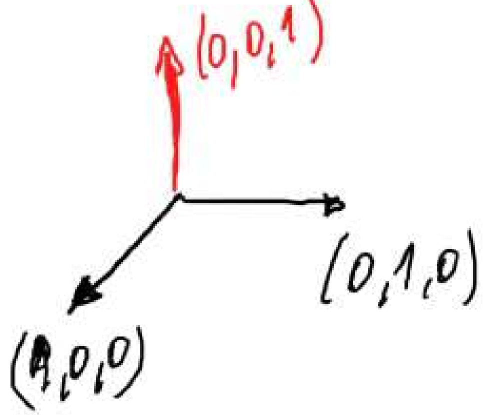
Obs:

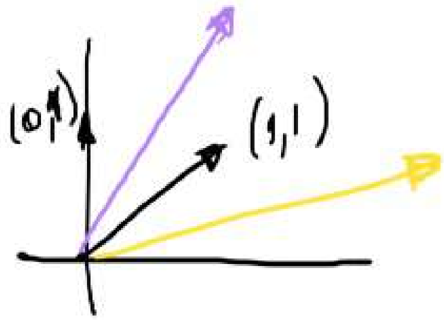
1) Sea $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$

¿Existe una t.l $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$T(1,0,0)=(1,1)$ y $T(0,1,0)=(0,1)$?

$\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ es l.i pero no es base de $\mathbb{R}^3$





Si, hay infinitas t.l que satisfacen el dato del ejercicio