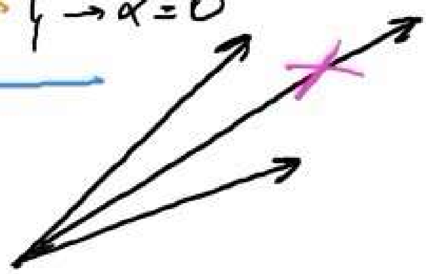
<u>Proposición</u> Sea $(V, K, +, \cdot)$ un e.v. Sea $A \subset V$
$A \neq \emptyset$, $0 \notin A$ y A es l.d $\left(A = \{v_1, \dots, v_k\}\right)$
Existe $A' \subset A$ tal que A' es l.i y
$[A] = [A']$.

<u>dem</u>: <u>Obs</u>: Sea $v \in A$. Entonces $\{v\}$ es l.i

$$\alpha v = 0 \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = 0 \leftarrow \times \\ \alpha = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha = 0$$



Como A es l.d

$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_k v_k = 0$$

tiene soluciones no triviales $\rightarrow \exists$ una solución $(\alpha_1 \dots \alpha_j, \dots \alpha_k)$ con $\alpha_j \neq 0$

$$\Rightarrow \alpha_j v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \alpha_i v_i$$

$$\rightarrow v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} v_i$$

$$\left(\begin{array}{l} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \\ \alpha_2 \neq 0 \\ \alpha_2 v_2 = -\alpha_1 v_1 - \alpha_3 v_3 \end{array} \right)$$

$$v_2 = \frac{-\alpha_1}{\alpha_2} v_1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} v_2$$

Sea $A_1 = \{v_1 \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k\}$

$A_1 = A \setminus \{v_j\}$

Afirmación: $[A] = [A_1]$

Claramente si $v \in [A_1]$ entonces $v \in [A]$

$\mathbb{R}^2 \quad A = \{(1,0), (0,1)\}$

$[A] = \mathbb{R}^2, \ (\alpha, \beta) = \alpha(1,0) + \beta(0,1)$

$A_1 = \{(1,0)\} \quad \alpha(1,0) = (\alpha, 0)$

$[A_1] \neq [A]$

Sea $w \in [A] \Rightarrow w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_j v_j + \dots \beta_k v_k$

$$\Rightarrow w = \underbrace{\beta_1 v_1 + \dots + \beta_{j-1} v_{j-1} + \beta_j \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \gamma_i v_i \right) + \dots + \beta_k v_k}_{\text{no está } v_j}$$

$\Rightarrow w \in [A_1]$. Entonces $[A] = [A_1]$

$A = \{(1,0), (0,1), (1,2)\}$ $\quad$ A es l.d

$\alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(1,2) = (0,0)$

Sistema homogeneo de 3 variables y 2 ecuaciones $\longrightarrow$ SCI

$A_1 = \{(1,0), (0,1)\}$

Si A_1 es l.i tengo probado la proposición (3)

Si A_1 es l.d, razonando de forma análoga,

$\exists\ A_2\ /\ A_2 \subset A_1 \quad [A_2] = [A_1] = [A]$
$\# A_2 = \# A_1 - 1$

Razonando inductivamente tenemos que

$\exists\ A' \subset A\ /\ [A'] = [A]$ y A' es l.i

Ejemplo: $A = \{(1,2,0), (-1,1,0), (0,1,1), (3,-1,2)\}$

a) El conjunto A es l.d porque:

$\alpha(1,2,0) + \beta(-1,1,0) + \gamma(0,1,1) + \delta(3,-1,2) = (0,0,0)$

S.C.I $\begin{cases} \alpha - \beta + 0\gamma + 3\delta = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma - \delta = 0 \\ \gamma + 2\delta = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \alpha - \beta \quad + 3\delta &= 0 \\ 3\beta + \gamma - 7\delta &= 0 \\ \gamma + 2\delta &= 0 \end{aligned}$$

Sol no trivial por ejemplo $\delta = 1$, -----

4

$\Rightarrow A_1 = \{(1,2,0), (-1,1,0), (0,1,1)\}$ es

tal que $[A] = [A_1]$

¿ A_1 es li ? $\alpha(1,2,0) + \beta(-1,1,0) + \gamma(0,1,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad SCD$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A_1 es l.i

<u>Proposición</u> Sean A_1 y A_2 conjuntos l i

$A_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$

$A_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$

Si los elementos de A_2 son combinación lineal de los elementos de A_1 entonces

$m \leq k$

dem: $w_1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i1} v_i$

$\vdots$

$w_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} v_i$

$\vdots$

$w_m = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{im} v_i$

$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_m w_m = 0$ S.C.D

$\beta_1 \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_{i1} v_i\right) + \cdots + \beta_m \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_{im} v_i\right) = 0$

$v_1 \quad (\beta_1 \alpha_{11} + \cdots + \beta_m \alpha_{1m})\, v_1$

$v_2 \quad + (\beta_1 \alpha_{21} + \cdots + \beta_m \alpha_{2m})\, v_2$

$\vdots \qquad \vdots$

$v_k \quad + (\beta_1 \alpha_{k1} + \cdots + \beta_m \alpha_{km})\, v_k = 0$

$\rightarrow$ A_1 es l.i $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} \beta_1 + \cdots + \alpha_{1m} \beta_m = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{k1} \beta_1 + \cdots + \alpha_{km} \beta_m = 0 \end{array} \right.$ $\rightarrow$ k ecuaciones, m incognitas (β_i)

$\rightarrow m \leq k$

Sea $(V, K, +, \cdot)$ un e.v que tiene un generador finito

Def: Decimos que $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$ es una base de V si $[A] = V$ y A es l.i.

Teorema: Las bases de un mismo espacio siempre tienen la misma cantidad de elementos. (lo vamos a probar)

Def: Llamamos dimensión de V a la cantidad de elementos de una base.