1

Recordar:

1) Si $\dim V = n$ y $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ es l.i $\Rightarrow k \leq n$
2) Si $\dim V = n$ y $B = \{w_1, \dots, w_r\}$ g $V \Rightarrow r \geq n$

Proposición: Sea un e.v V / $\dim V = n$ $(n \geq 1)$
Sea $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto l.i con $\underline{k < n}$
(Obs A no es base de V). Entonces existen $w_1, \dots, w_m$ tales que $B = \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m\}$ es base de V.

dem: Como $k < n \Rightarrow \left.\begin{matrix} A \text{ no es base de } V \\ \text{pero } A \text{ es l.i} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$[A] \neq V \Rightarrow \exists\, w_1 / w_1 \in V,\ w_1 \notin [A]$ *

Afirmación $A_1 = \{v_1, \dots, v_k, w_1\}$ es l.i

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 = 0$

Suponngamos que $\beta_1 \neq 0 \Rightarrow w_1 = \frac{-\alpha_1}{\beta_1} v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta_1} v_2 \dots - \frac{\alpha_k}{\beta_1} v_k$

Abs por *

2

Entonces $\beta_1 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0 \\ \{v_1, \ldots, v_k\} \text{ l.i} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \cdots = \alpha_k = 0$

Resumen: $\left.\begin{array}{l} A \text{ li} \\ w_1 \notin [A] \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\{v_1, \ldots, v_k, w_1\}}_{A_1}$ es l.i

A_1 es l.i

Si A_1 genera $V \longrightarrow$ encontre el conjunto B base de V

Si A_1 no genera $V \longrightarrow \exists\, w_2 \notin [A_1]$ $(w_2 \in V)$

$\Rightarrow A_2 = \{v_1, \ldots, v_k, w_1, w_2\}$ es l.i

afirmación

Razonando inductivamente llego a obtener

$B = \{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_m\} \xrightarrow{\text{base}} V$ $(m + k = n)$

Sea V un e.v tal que $\dim V = n$.

Considere $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V. Entonces

$\forall\, v \in V,\ \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \ /\ v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

Afirmación: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son únicos.

dem: Sea $v \in V \ /\ v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

(Vamos a probar que $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$)

$$v - v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \dots + \alpha_n v_n - \beta_1 v_1 - \dots - \beta_n v_n$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n \\ \{v_1, \dots, v_n\} \text{ es li} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = 0,\ \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0$$

Ejemplo: $V = \mathbb{R}^2$, $A = \{(1,0), (1,1)\}$

$v = (2,1) \qquad \alpha(1,0) + \beta(1,1) = (2,1)$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 2 \\ \beta = 1 \end{array}\right. \leftarrow \text{S.C.D}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Def}}:\ \operatorname{coord}_A v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\ v \longleftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \end{array}}$$

Suma de subespacios:

Sea V un e.v de dimensión n. Sean S_1 y S_2 s.e.v de V.

Def: Llamamos suma de S_1 con S_2 $(S_1 + S_2)$ al conjunto: $\{v \in V / v = s_1 + s_2$ con $s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2\}$

$$\boxed{S_1 + S_2 = \{v \in V / v = s_1 + s_2,\ s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2\}}$$

Prop: $S_1 + S_2$ es un s.e.v de V

dem: ejercicio

<u>Ejemplo</u>: Sean $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $S_1 = \{ p(x) = ax^3 + b : a, b \in \mathbb{R} \}$, $S_2 = \{ a(x^2+1) + b(x-1) : a, b \in \mathbb{R} \}$

Encontrar $S_1 + S_2$ (entiendo que quiero encontrar una base)

$v \in S_1 + S_2$ si $v = s_1 + s_2$, $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$

$$v = ax^3 + b + m(x^2+1) + n(x-1)$$

$$v = ax^3 + mx^2 + nx + b + m - n$$

$$v = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4$$

$$\{x^3, x^2, x, 1\} \xrightarrow{\text{base}} S_1 + S_2$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \mathbb{P}_3(x)$$

$\underline{\mathbb{P}_2(x)}$ $\quad v = ax^2+bx+c$

$v = a(x^2)+b(x)+c(1)$ (6)

$\{x^2, x, 1\}$

Sea $A = \{x^2, x, 1\} \xrightarrow{b} \mathbb{P}_2(x)$

Hallar $\text{coord}_A\ x^2+5$

$x^2+5 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma . 1 \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 5$

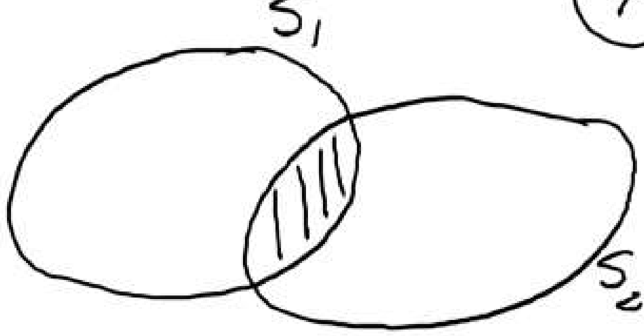
$\text{coord}_A (x^2+5) = (1, 0, 5)$

Teorema de las dimensiones: Sea V un e.v con $\dim V = n$, S_1 y S_2 s.e.v de V con $\dim S_1 = n_1$ y $\dim S_2 = n_2$. Entonces.

$$\boxed{\dim(S_1+S_2) = n_1+n_2 - \dim(S_1 \cap S_2)}$$

Acá entendemos que la dim del subespacio nulo es 0.

<u>dem</u>: Si S_1 o S_2 es el subespacio nulo, la prueba es trivial.



Supongamos que S_1 y S_2 no son el subespacio nulo.

a) $S_1 \cap S_2 = \{0\}$

Sean $\{v_1, \dots, v_{n_1}\} \xrightarrow{b} S_1$

$\{w_1, \dots, w_{n_2}\} \xrightarrow{b} S_2$

<u>Afirmación</u>: $B = \{v_1, \dots, v_{n_1}, w_1, \dots, w_{n_2}\} \xrightarrow{b} S_1 + S_2$

Claramente $B \xrightarrow{g} S_1 + S_2$

Veamos que B es l.i

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n_1} v_{n_1} + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_{n_2} w_{n_2} = 0$$

$$\left.\Rightarrow \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n_1} v_{n_1}}_{S_1} = \underbrace{-\beta_1 w_1 - \dots - \beta_{n_2} w_{n_2}}_{S_2} \quad \text{como } S_1 \cap S_2 = \{0\} \right\}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n_1} v_{n_1} = 0 & \longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0 \\ \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n_2} w_{n_2} = 0 & \longrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \cdots = 0 \end{cases}$$

porque $\{v_1, \ldots, v_{n_1}\}$ es l.i y $\{w_1, \ldots, w_{n_2}\}$ es l.i

Entonces $B \xrightarrow{b} S_1 + S_2$

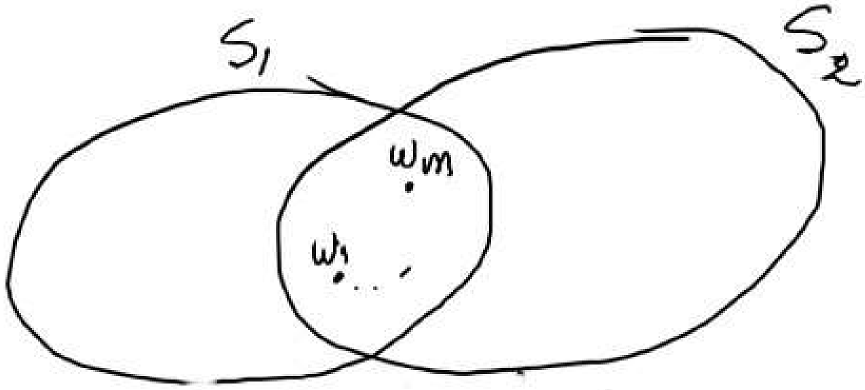
$$\dim(S_1 + S_2) = n_1 + n_2$$

$\dim S_1 = n_1$ $\quad \dim(S_1 \cap S_2) = 0$

$\dim S_2 = n_2$

---

b) $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$ Sea $B = \{w_1, \ldots, w_m\} \xrightarrow{b} S_1 \cap S_2$



Def: Cuando $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ decimos que la suma de S_1 con S_2 es directa

Notación: $S_1 \oplus S_2$

Cuando se tiene $S_1 \oplus S_2$ y $S_1 \neq \{0\}$, $S_2 \neq \{0\}$, la unión de una base S_1 con una base de S_2 es base de $S_1 \oplus S_2$

O sea:

Si $\{v_1, \dots, v_n\} \xrightarrow{b} S_1$ y $\{w_1, \dots, w_m\} \xrightarrow{b} S_2$

entonces $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\} \xrightarrow{b} S_1 \oplus S_2$

(para tener $S_1 \oplus S_2$ tiene que darse que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$)