Observaciones *

1) Si E_1 es la matriz que se obtiene de Id intercambiando dos filas entonces $\det E_1 = -1$

2) Si E_2 es la matriz que se obtiene de Id. multiplicando una fila por α entonces $\det E_2 = \alpha$

3) Si E_3 se obtiene de la matriz Id sumándole a una fila una combinación lineal de los restantes filas entonces $\det E_3 = 1$

Teorema: Sea E una matriz elemental y A una matriz cualquiera. Entonces $\boxed{\det(E.A) = = \det E . \det A}$

dem: Como E es una matriz elemental, se obtiene de I haciendo una operación elemental que llamaremos β. (1, 2 o 3 de la observación *)

Sabemos que $E.A \rightarrow$ Es la matriz que se obtiene de A aplicando la operación β

Si $\beta = 1$ $\quad \det(E.A) = -\det A$

$\det E = -1 \Rightarrow \det E . \det A = -\det A$

Si $\beta = 2$ $\det(E.A) = \alpha . \det A$

$\det E = \alpha \rightarrow \det E . \det A = \alpha . \det A$

Si $\beta = 3$ $\det(E.A) = \det A$

$\det E = 1 \rightarrow \det E . \det A = \det A$

Corolario: Sean $E_1, \ldots, E_n$ matriz elementales y A cualquiera.

Entonces $\boxed{\det(E_1 . E_2 . \ldots . E_n . A) = \det E_1 . \det E_2 \ldots . \det E_n . \det A}$

dem $E_1 . E_2 \ldots E_n . A = E_1 (E_2 \ldots E_n A)$

$\Rightarrow \det(E_1 \ldots E_n . A) = \det E_1 . \det(E_2 \ldots E_n . A)$

$E_2 \ldots A = E_2 . (E_3 \ldots E_n . A) \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(E_2 \ldots E_n . A) = \det E_2 . \det(E_3 . \ldots . E_n . A)$

Razonando inductivamente obtenemos la tesis.

$\boxed{\text{Teorema: } A \text{ no es invertible si y sólo si } \det A = 0}$

dem: $\underset{n\times n}{A}$ no es invertible $\longleftrightarrow$ rango $A < n$

$\longleftrightarrow$ toda matriz escalerizada de la A tiene una fila de ceros (llamémosle $\bar{A}$)

$\longleftrightarrow \det \bar{A} = 0$

En resumen A no invertible $\longleftrightarrow \det \bar{A} = 0$

Sabemos que $\bar{A} = E_1 \dots E_n . A$ donde E_i son matrices elementales. Además $\det E_i \neq 0$

Entonces $\det \bar{A} = \det(E_1 \dots E_n . A) =$

$= \underbrace{\det E_1}_{\neq 0} . \underbrace{\det E_2}_{\neq 0} \dots . \underbrace{\det E_n}_{\neq 0} . \det A = 0 \longleftrightarrow$

$\det A = 0$

$\boxed{\text{Corolario: } A \text{ invertible} \longleftrightarrow \det A \neq 0}$

Veremos más delante que:
$A.B$ invertible $\leftrightarrow$ A y B invertibles.

Teorema: Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.
Entonces $\det(A.B) = \det A . \det B$

dem: 1) Si $A.B$ no es invertible.
Entonces A o B no es invertible.

$\left.\begin{array}{l} \det(A.B) = 0 \\ \det A . \det B = 0 \end{array}\right\}$ $\underline{\det(A.B) = \det A . \det B}$

2) Si $A.B$ invertible
Entonces A y B invertibles
. Entonces $A = E_1 . \dots E_n I$ ← prod de matrices elementales
$B = \bar{E}_1 \dots \bar{E}_m I$

$\det(A.B) = \det(E_1 \dots E_n . \bar{E}_1 \dots \bar{E}_m) =$
$= \underbrace{\det E_1 . \dots \det E_n}_{\det A} . \underbrace{\det \bar{E}_1 \dots \det \bar{E}_m}_{\det B} = \det A . \det B$

Aplicaciones:

1) Supongamos A invertible $\rightarrow A \cdot A^{-1} = Id$.

$$\Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \rightarrow \boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

2) $\det(A^n) = \det(A \cdot A \ldots A) = (\det A)^n$

Propiedad: Sea $M = \begin{pmatrix} A_{n\times n} & C_{n\times m} \\ 0 & B_{m\times m} \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\det M = \det A \cdot \det B}$$

Ej: Sabiendo que $\det A = 2$ y $\det B = 3$, calcular $\det(A^2 \cdot B^{-1})$ (6)

$$\det(A^2 \cdot B^{-1}) = (\det A)^2 \cdot (\det B^{-1}) = \frac{(\det A)^2}{\det B} = 4/3$$

Ej: Calcule $\det(A-B)$ sabiendo que

$\det A = 3$, $\det(A^2+AB) = 6$,

$\det(A^2+AB-BA-B^2) = 4$

$$A^2+AB-BA-B^2 = A(A+B) - B(A+B) =$$

$$= (A-B)(A+B)$$

$$\underbrace{\det(A^2+AB-BA-B^2)}_{4} = \det(A-B)\det(A+B)$$

$$4 = \det(A-B)\det(A+B)$$

$$\det(\underbrace{A^2+AB}_{A(A+B)}) = \det A \det(A+B) = 6 \rightarrow \det(A+B) = 2$$

Entonces $\boxed{\det(A-B) = 2}$