# Biálgebras, funtores duoidales y álgebras de cohomología conmutativas

Javier Cóppola - Andrea Solotar

8º Coloquio Uruguayo de Matemática
21 de diciembre de 2023

# Índice

# Biálgebras

# Álgebras de grupo

## Definición

Sea $G$ un grupo. Su álgebra de grupo es el $\Bbbk$-espacio vectorial de base $G$, con la multiplicación de $G$ extendida linealmente.

$$\Bbbk G = \left\{ \sum_{g \in F} \lambda_g g \colon \lambda_g \in \Bbbk,\ F \subseteq G \text{ finito} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{combinaciones } \Bbbk\text{-lineales} \\ \text{de elementos de } G \end{array} \right\}.$$

## Ejemplo

Si $G = \mathbb{Z} = \{t^n \colon n \in \mathbb{Z}\}$, su álgebra de grupo es

$$\Bbbk\mathbb{Z} = \left\{ \begin{array}{c} \text{combinaciones } \Bbbk\text{-lineales} \\ \text{de potencias enteras de } t \end{array} \right\} = \Bbbk\left[t, t^{-1}\right],$$

con la multiplicación habitual de polinomios.

# Módulos sobre un álgebra de grupo

Los $\Bbbk G$-módulos son $\Bbbk$-espacios vectoriales con una acción de $G$ que es $\Bbbk$-lineal.

## Observaciones

- Si $V$ y $W$ son $\Bbbk G$-módulos, su producto $V \otimes W$ es un $\Bbbk G$-módulo definiendo $g \cdot (v \otimes w) = g \cdot v \otimes g \cdot w$.
- El cuerpo $\Bbbk$ es un $\Bbbk G$-módulo definiendo $g \cdot \lambda = \lambda$.

Las biálgebras son una generalización de las álgebras de grupo en este sentido.

# Coálgebras y biálgebras

## Definiciones

- Una coálgebra es un $\Bbbk$-espacio vectorial $H$ con una comultiplicación $\Delta\colon H \to H \otimes H$ y una counidad $\varepsilon\colon H \to \Bbbk$, tales que conmutan los diagramas: (coasociatividad y counitalidades)
- Una coálgebra $H$ es una biálgebra, si tiene estructura de álgebra y $\Delta$ y $\varepsilon$ son morfismos de álgebras.
- Una biálgebra $H$ es un álgebra de Hopf, si $\mathrm{id}_A$ es invertible por convolución en $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H)$. Su inversa $s\colon H \to H$ se llama antípoda.

## Ejemplo

Si $G$ es un grupo, $H = \Bbbk G$ es una biálgebra definiendo

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1.$$

**Ejemplo**

$\Bbbk[x]$ = álgebra de polinomios en la variable $x$.

Estructura de coálgebra:

$$\Delta(x^n) = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^j$$

$$\varepsilon(1) = 1, \quad \varepsilon(x^i) = 0, \ \forall i > 0.$$

Alcanza con definir $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \ \varepsilon(x) = 0$ y extender como morfismo de álgebras.

### Ejemplo

$\Bbbk[x,y]$ = álgebra de polinomios en las variables $x, y$.

Estructura de biálgebra:

Alcanza con definir $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x,\ \varepsilon(x) = 0$,
$\Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y,\ \varepsilon(y) = 0$ y extender como morfismo de álgebras
pero cuidado:

$$\Bbbk[x,y] = \frac{\Bbbk\langle x,y\rangle}{\langle yx - xy\rangle},$$

Entonces tiene que verificarse

$$\Delta(y)\Delta(x) = \Delta(yx) = \Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y),$$

$$\varepsilon(y)\varepsilon(x) = \varepsilon(yx) = \varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y).$$

### Ejemplo

El plano de Jordan es el álgebra

$$A = \frac{\Bbbk\langle x, y\rangle}{\left\langle yx - xy + \frac{1}{2}\, x^2 \right\rangle}.$$

Estructura de biálgebra:

Alcanza con definir $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x,\ \varepsilon(x) = 0,$
$\Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y,\ \varepsilon(y) = 0$ y extender como morfismo de álgebras
pero cuidado: tiene que verificarse que

$$\Delta(y)\Delta(x) = \Delta(yx) = \Delta\left(xy - \frac{1}{2}x^2\right) = \Delta(x)\Delta(y) - \frac{1}{2}\Delta(x)^2,$$

$$\varepsilon(y)\varepsilon(x) = \varepsilon(yx) = \varepsilon\left(xy - \frac{1}{2}x^2\right) = \varepsilon(x)\varepsilon(y) - \frac{1}{2}\varepsilon(x)^2.$$

Ah pero no da, entonces no es biálgebra… por ahora.

# Categorías monoidales trenzadas

### Definición

Una categoría consiste en

- Una colección de objetos $\mathcal{C}$,
- Para cada $X, Y \in \mathcal{C}$, un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$,
- Para cada $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, una función llamada composición $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $\left[(f, g) \mapsto g \circ f\right]$, tal que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ siempre que se puedan componer,
- Para cada $X \in \mathcal{C}$, un elemento llamado identidad $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ tal que $\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X$, $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

### Ejemplos

$Set$, $\mathsf{Vect}_{\Bbbk}$, ${}_A\mathsf{Mod}$, ${}_A\mathsf{Mod}_A$, $Grp$, $Alg_{\Bbbk}$, $Top, \ldots$

**Definición**

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un funtor de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ consiste en

- Una función $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$,
- Para cada $X, Y \in \mathcal{C}$, una función
  $F\colon \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$,
  tal que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \quad F(id_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.

## Ejemplos

- Funtor de olvido, $U\colon Top \to Set$, $U(X) = X, U(f) = f$.
- Funtor de linealización, $\Bbbk(-)\colon Set \to \mathsf{Vect}_{\Bbbk}$

$$\Bbbk(X) = \left\{ \sum_{x \in F} \lambda_x x \colon \lambda_x \in \Bbbk,\ F \subseteq X \text{ finito} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{combinaciones } \Bbbk\text{-lineales} \\ \text{de elementos de } X \end{array} \right\},$$

$$\Bbbk(f)\colon \Bbbk(X) \to \Bbbk(Y) = \begin{array}{l} \text{La transformación lineal dada por } f \\ \text{en la base } X. \end{array}$$

- Tomar el álgebra opuesta,
  $op\colon Alg_{\Bbbk} \to Alg_{\Bbbk}$, $op(A) = A^{op}$, $op(f) = f$,
- etc...

**Definición**

Una categoría monoidal es una terna $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ donde

- $\mathcal{C}$ es una categoría,
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor en cada variable, llamado *producto*,
- $I$ es un objeto de $\mathcal{C}$, llamado *neutro* o *unidad*
- $(X \otimes Y) \otimes Z \simeq X \otimes (Y \otimes Z)$ para todos los $X, Y, Z$,
- $I \otimes X \simeq X \simeq X \otimes I$ para todos los $X$,

Los isomorfismos son naturales y cumplen con dos condiciones de compatibilidad.

## Ejemplo

Si $V$ y $W$ son $\Bbbk G$-módulos, su producto $V \otimes W$ es un $\Bbbk G$-módulo definiendo $g \cdot (v \otimes w) = g \cdot v \otimes g \cdot w$.

El cuerpo $\Bbbk$ es un $\Bbbk G$-módulo definiendo $g \cdot \lambda = \lambda$.

## Ejemplo

Los espacios $G$-graduados son $\Bbbk$-espacios vectoriales con una descomposición en suma directa

$$V = \bigoplus_{g \in G} V_g$$

Si $V$ y $W$ son dos espacios $G$-graduados, su producto se define mediante

$$(V \otimes W)_g = \bigoplus_{st=g} V_s \otimes W_t$$

Su neutro es el espacio $\Bbbk$ concentrado en el grado del neutro de $G$.

# Monoides

**Idea:** expresar categóricamente nociones como álgebra con una acción de $G$, álgebra graduada, etc.

## Definición

Sea $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ una categoría monoidal. Un monoide en $\mathcal{C}$ es un objeto $A \in \mathcal{C}$ junto con una multiplicación $\mu\colon A \otimes A \to A$ y una unidad $\eta\colon I \to A$, tales que conmutan estos diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes \eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & I \otimes A \arrow[l, "\eta \otimes \mathrm{id}_A"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"] \\ & A. & \end{tikzcd}$$

La noción de comonoide es dual a la de monoide:

**Definición**

Sea $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ una categoría monoidal. Un comonoide en $\mathcal{C}$ es un objeto $C \in \mathcal{C}$ junto con una comultiplicación $\Delta \colon C \to C \otimes C$ y una counidad $\varepsilon \colon C \to I$, tales que conmutan estos diagramas:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] \\ C \otimes C \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes \Delta"'] & & C \otimes C \otimes C, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[d, "\Delta"'] & \\ C \otimes I \arrow[ur, "\mathrm{id}"] & C \otimes C \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] \arrow[r, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}"'] & I \otimes C. \arrow[ul, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

# Categorías monoidales trenzadas

**Idea:** Expresar categóricamente nociones como la de biálgebra.
Si $H$ es un álgebra, la condición "$\Delta \colon H \to H \otimes H$ es morfismo de álgebras" depende de dar una estructura de álgebra a $H \otimes H$. La estructura usual viene dada por $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$,

**Definición**

Una categoría monoidal trenzada es una cuaterna $(\mathcal{C}, \otimes, I, c)$ donde

- $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ es una categoría monoidal,
- $c_{X,Y} \colon X \otimes Y \to Y \otimes X$ definen un isomorfismo natural llamado *trenza*, tal que

$$c_{X,Y\otimes Z} = (\mathrm{id}_Y \otimes c_{X,Z}) \circ (c_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z),$$

$$c_{Y\otimes Z,X} = (c_{Y,X} \otimes \mathrm{id}_Z) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes c_{X,Z})$$

# Bimonoides

### Observación

Si $(A, \mu_A, \eta_A)$ y $(B, \mu_B, \eta_B)$ son monoides en $(\mathcal{C}, \otimes, I, c)$, $A \otimes B$ es un monoide definiendo

$$\mu_{A\otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (\mathrm{id}_A \otimes c_{B,A} \otimes \mathrm{id}_B) \colon A \otimes B \otimes A \otimes B \to A \otimes B,$$

$$\eta_{A\otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B \colon I \to A \otimes B$$

El neutro $I$ es un monoide trivialmente. La categoría $Mon(\mathcal{C})$, de monoides en $\mathcal{C}$, es monoidal con el mismo producto y unidad que $\mathcal{C}$.

### Definición

Sea $(\mathcal{C}, \otimes, I, c)$ una categoría monoidal trenzada. Un bimonoide en $\mathcal{C}$ es un comonoide en la categoría de monoides en $\mathcal{C}$.

¿Y qué es un monoide en la categoría de monoides?

Argumento de Eckmann-Hilton: es un monoide conmutativo.

## Definición

Sea $G$ un grupo. Un módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk G$ es un $\Bbbk G$-módulo $V$ con estructura de espacio $G$-graduado, tal que

$$g \cdot V_h \subseteq V_{ghg^{-1}}, \quad \forall\, g, h \in G.$$

Si $G$ es abeliano, la condición queda

$$g \cdot V_h \subseteq V_h, \quad \forall\, g, h \in G.$$

## Ejemplo

Un módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{Z} = \Bbbk\left[t, t^{-1}\right]$ es un espacio $\mathbb{Z}$-graduado, que en cada componente tiene un automorfismo $\Bbbk$-lineal distinguido (correspondiente a la acción del elemento $t$).

# Módulos de Yetter-Drinfeld

La categoría de los $\Bbbk G$-módulos de Yetter-Drinfeld ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ es monoidal trenzada:

- Producto: tensor sobre $\Bbbk$,

$$g \cdot (v \otimes w) = g \cdot v \otimes g \cdot w, \qquad (V \otimes W)_g = \bigoplus_{st=g} V_s \otimes W_t.$$

- Neutro: $\Bbbk$ concentrado en el neutro del grupo, con $g \cdot \lambda = \lambda$.
- Trenza: Para $v \in V_g$, $w \in W_h$,

$$c_{V,W}(v \otimes w) = g \cdot w \otimes v.$$

La trenza preserva la graduación:
$\operatorname{grado}(v \otimes w) = gh, \qquad \operatorname{grado}(g \cdot w \otimes v) = \left(ghg^{-1}\right) g = gh.$

# Módulos de Yetter-Drinfeld

El plano de Jordan es el álgebra $$A = \frac{\Bbbk\langle x, y\rangle}{\left\langle yx - xy + \frac{1}{2}\, x^2 \right\rangle}$$

- Acción de $\Bbbk\mathbb{Z}$: $t \cdot x = x, \quad t \cdot y = x + y.$
- Graduación por $\mathbb{Z}$: $x, y \in A_1.$

Las extendemos multiplicativamente $\Longrightarrow$ A es monoide en ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}}_{\Bbbk\mathbb{Z}}\mathcal{YD}$.

- Comultiplicación: $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1, \qquad \Delta(y) = 1 \otimes y + y \otimes 1.$
- Counidad: $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 0.$

Las extendemos multiplicativamente $\Longrightarrow$ A es bimonoide en ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}}_{\Bbbk\mathbb{Z}}\mathcal{YD}$.

# Cohomología de Hochschild

# Cohomología de Hochschild

Una $\Bbbk$-álgebra $A$ es un bimódulo sobre sí misma, con su multiplicación. Además tomamos $M$ otro $A$-bimódulo cualquiera. La cohomología de Hochschild de $A$ con coeficientes en $M$ es

$$\mathrm{H}^\bullet(A, M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{AA}(A, M).$$

Esto es, dada una resolución proyectiva de $A$-bimódulos

$$\cdots \xrightarrow{d_3} P_3 \xrightarrow{d_2} P_2 \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

esta cohomología es

$$\mathrm{H}^\bullet(A, M) = H\left(\mathrm{Hom}_{AA}(P_\bullet, M), d_\bullet^*\right).$$

# Producto cup

- $A, R$ $\Bbbk$-álgebras, $\rho\colon A \to R$ morfismo de $\Bbbk$-álgebras hace de $R$ un $A$-bimódulo con $a \cdot r = \rho(a)\, r$, $r \cdot a = r\, \rho(a)$. Asociatividad: $(r\,\rho(a))\, r' = r\,(\rho(a)\, r')$. Implica que la multiplicación de $R$ se factoriza por $\nu\colon R \otimes_A R \to R$.
- Sea $P_\bullet$ una resolución proyectiva de $A$ como $A$-bimódulo $\implies$ el isomorfismo $A \simeq A \otimes_A A$ se levanta a $\omega\colon P_\bullet : (P \otimes_A P)_\bullet$

**Definición**

Sean $\varphi \in \mathrm{Hom}_{AA}(P_p, R)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{AA}(P_q, R)$. Su producto cup $\varphi \cup \psi$ es la composición

$$P_{p+q} \xrightarrow{\omega_{p,q}} P_p \otimes_A P_q \xrightarrow{\varphi \otimes_A \psi} R \otimes_A R \xrightarrow{\nu} R.$$

Está bien definido salvo homotopía, entonces está bien definido en cohomología

$$\cup\colon\ \mathrm{H}^p(A,R) \otimes \mathrm{H}^q(A,R) \to \mathrm{H}^{p+q}(A,R)$$

# Resolución bar

La resolución bar de $A$ es:

$$\cdots \xrightarrow{b'_3} B_3(A) \xrightarrow{b'_2} B_2(A) \xrightarrow{b'_1} B_1(A) \xrightarrow{b'_0} B_0(A) \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0.$$

$B_n(A) = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A, \quad \mu \colon A \otimes A \to A$ es la multiplicación,

$$b'_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+2}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \, a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+2}.$$

Producto cup:

$$\varphi \cup \psi \, (1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p+q} \otimes 1) = \varphi(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes 1) \, \psi(1 \otimes a_{p+1} \otimes \cdots \otimes a_{p+q} \otimes 1).$$

**Ventaja:** Definición sencilla y “regular”. Puede hacerse siempre.

Es útil para resultados teóricos / generales.

**Desventaja:** Su tamaño crece exponencialmente.

Grandes dificultades para cálculos explícitos.

# Una resolución de $\mathbb{k}[x, y]$

El álgebra $\mathbb{k}[x, y]$ es $\qquad A = \dfrac{\mathbb{k}\langle x, y\rangle}{\langle yx - xy\rangle}$

Tiene la siguiente resolución::

$$0 \longrightarrow A \otimes \mathbb{k}r \otimes A \xrightarrow{d_1} A \otimes \mathbb{k}\{x, y\} \otimes A \xrightarrow{d_0} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} d_0(1 \otimes x \otimes 1) &= x \otimes 1 - 1 \otimes x, \quad d_0(1 \otimes y \otimes 1) = y \otimes 1 - 1 \otimes y, \\ d_1(1 \otimes r \otimes 1) &= y \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes x - x \otimes y \otimes 1 - 1 \otimes x \otimes y. \end{aligned}$$

Los diferenciales se anulan al aplicar $\mathrm{Hom}_{AA}(-, \mathbb{k})$,

entonces $\mathrm{H}^n(A, \mathbb{k}) = \mathrm{Hom}_{AA}(P_n, \mathbb{k})$.

# Cohomología de $\Bbbk[x, y]$

Los grupos de cohomología son:

- $\mathrm{H}^0(A, \Bbbk) = \Bbbk e$, donde $e\ (1 \otimes 1) = 1$,
- $\mathrm{H}^1(A, \Bbbk) = \Bbbk\{x^*, y^*\}$, donde

$$\begin{array}{ll} x^*\ (1 \otimes x \otimes 1) = 1 & x^*\ (1 \otimes y \otimes 1) = 0 \\ y^*\ (1 \otimes x \otimes 1) = 0 & y^*\ (1 \otimes y \otimes 1) = 1, \end{array}$$

- $\mathrm{H}^2(A, \Bbbk) = \Bbbk r^*$, donde $r^*\ (1 \otimes r \otimes 1) = 1$.

**Producto cup (ejemplo):**

$$\begin{aligned} \omega(1 \otimes r \otimes 1) &= (1 \otimes r \otimes 1) \otimes_A (1 \otimes 1) \\ &+ (1 \otimes y \otimes 1) \otimes_A (1 \otimes x \otimes 1) \\ &- (1 \otimes x \otimes 1) \otimes_A (1 \otimes y \otimes 1) \\ &+ (1 \otimes 1) \otimes_A (1 \otimes r \otimes 1). \\ x^* \cup x^*(1 \otimes r \otimes 1) &= 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0. \\ x^* \cup x^* &= 0. \end{aligned}$$

# Una resolución del plano de Jordan

El plano de Jordan es el álgebra $$A = \frac{\Bbbk\langle x, y\rangle}{\langle yx - xy + \frac{1}{2}\, x^2\rangle}$$

Tiene la siguiente resolución (Lopes - Solotar):

$$0 \longrightarrow A \otimes \Bbbk r \otimes A \xrightarrow{d_1} A \otimes \Bbbk\{x, y\} \otimes A \xrightarrow{d_0} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} d_0(1 \otimes x \otimes 1) &= x \otimes 1 - 1 \otimes x, \quad d_0(1 \otimes y \otimes 1) = y \otimes 1 - 1 \otimes y, \\ d_1(1 \otimes r \otimes 1) &= y \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes x - x \otimes y \otimes 1 - 1 \otimes x \otimes y \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\, x \otimes x \otimes 1 + \tfrac{1}{2}\, 1 \otimes x \otimes x, \end{aligned}$$

Los diferenciales se anulan al aplicar $\mathrm{Hom}_{AA}(-, \Bbbk)$,

entonces $\mathrm{H}^n(A, \Bbbk) = \mathrm{Hom}_{AA}(P_n, \Bbbk)$.

## Cohomología del plano de Jordan

Los grupos de cohomología son:

- $\mathrm{H}^0(A,\mathbb{k}) = \mathbb{k}e$, donde $e\,(1\otimes 1) = 1$,
- $\mathrm{H}^1(A,\mathbb{k}) = \mathbb{k}\{x^*, y^*\}$, donde

$$\begin{array}{ll} x^*\,(1\otimes x\otimes 1) = 1 & x^*\,(1\otimes y\otimes 1) = 0 \\ y^*\,(1\otimes x\otimes 1) = 0 & y^*\,(1\otimes y\otimes 1) = 1, \end{array}$$

- $\mathrm{H}^2(A,\mathbb{k}) = \mathbb{k}r^*$, donde $r^*\,(1\otimes r\otimes 1) = 1$.

**Producto cup (ejemplo):**

$$\begin{aligned} \omega(1\otimes r\otimes 1) &= (1\otimes r\otimes 1)\otimes_A(1\otimes 1) \\ &+ (1\otimes y\otimes 1)\otimes_A(1\otimes x\otimes 1) \\ &- (1\otimes x\otimes 1)\otimes_A(1\otimes y\otimes 1) \\ &+ \tfrac{1}{2}\,(1\otimes x\otimes 1)\otimes_A(1\otimes x\otimes 1) \\ &+ (1\otimes 1)\otimes_A(1\otimes r\otimes 1). \\ x^*\cup x^*(1\otimes r\otimes 1) &= 0\cdot 1 - 1\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\,1\cdot 1. \\ x^*\cup x^* &= \tfrac{1}{2}\,r^*. \end{aligned}$$

# Conmutatividad graduada

El álgebra de cohomología $\mathrm{H}^\bullet(A,R)$ es conmutativa graduada si

$$\varphi \cup \psi = (-1)^{pq}\ \psi \cup \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathrm{H}^p(A,R),\ \psi \in \mathrm{H}^q(A,R).$$

- $\mathrm{H}^\bullet(A,A)$ es conmutativa graduada siempre (Gerstenhaber, 1963).
- $\mathrm{H}^\bullet(A,\Bbbk)$ es conmutativa graduada si $A$ es un álgebra de Hopf (Farinati - Solotar / Suárez Álvarez / Taillefer, 2004).
- $\mathrm{H}^\bullet(A,\Bbbk)$ no es conmutativa graduada si $A$ es el plano de Jordan.
- **Idea:** son bimonoides pero con una trenza no trivial, tiene sentido pensar si podemos involucrarla en la cohomología.

# Conmutatividad graduada trenzada y hom internos

# Cómo trenzar espacios de cohomología

Idea:

- Intentar ver los espacios de cohomología dentro de alguna categoría trenzada (por ejemplo, dar estructura de módulo de Yetter-Drinfeld).
- Pasar a lenguaje de categorías trenzadas la construcción de la cohomología de Hochschild.

Supongamos que $\mathrm{H}^q(A, R)$ tiene estructura El álgebra de cohomología $\mathrm{H}^\bullet(A, R)$ es conmutativa graduada trenzada si

$$\cup(\varphi \otimes \psi) = (-1)^{pq} \cup \circ c_{\mathrm{H}^p(A,R), \mathrm{H}^q(A,R)}(\varphi \otimes \psi), \quad \forall \varphi \in \mathrm{H}^p(A, R),\ \psi \in \mathrm{H}^q(A, R).$$

**Teorema (Mastnak - Pevtsova - Schauenburg - Witherspoon)**

*Si la dimensión de $A$ es finita o $G$ es finito, $H^\bullet(A, \Bbbk)$ es un objeto $\mathbb{Z}$-graduado en ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$, y el opuesto de su producto cup es conmutativo graduado trenzado.*

# El complejo de Hochschild

La adjunción

$$\mathrm{Hom}_{AA}(A \otimes A^{\otimes n} \otimes A, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A^{\otimes n}, M)$$

Implica el siguiente isomorfismo de complejos:

$$(\mathrm{Hom}_{AA}(B_\bullet(A), M), (b'_\bullet)^*) \simeq (C^\bullet(A), d^\bullet),$$

donde $C^n(A) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A^{\otimes n}, M)$ y $d^n : C^n(A) \to C^{n+1}(A)$ es:

$$\begin{aligned} d^n f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \quad = \quad & a_1 \cdot f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ & + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ & + (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \cdot a_{n+1}. \end{aligned}$$

El producto cup queda así:

$$(\alpha \cup \beta)\,(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p+q}) = \alpha(a_1 \otimes \cdots \otimes a_p)\ \beta(a_{p+1} \otimes \cdots \otimes a_{p+q}).$$

**Idea**: Buscar un “análogo a $\mathsf{Hom}_{\Bbbk}$ dentro de la categoría monoidal $\mathcal{C}$”.

**Definición**

Sean $V, Y$ objetos de una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ Un hom interno es un objeto de $\mathcal{C}$, llamado $\mathsf{hom}(V, Y)$, con un isomorfismo natural

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(- \otimes V, Y) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathsf{hom}(V, Y)).$$

Si $\mathsf{hom}(V, Y)$ existe, es único salvo isomorfismo, y es funtorial en ambas variables (Lema de Yoneda).

# Hom internos

## Ejemplos

- En espacios vectoriales: $\mathsf{hom}(V, Y) = \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(V, Y)$.
- En $\Bbbk G$-módulos: $\mathsf{hom}(V, Y) = \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(V, Y)$, con la acción de $G$

$$(g \cdot f)(v) = g \cdot f(g^{-1} \cdot v).$$

- En espacios $G$-graduados: $\mathsf{hom}(V, Y) = \bigoplus_{h \in G} \mathsf{hom}(V, Y)_h$, donde

$$\mathsf{hom}(V, Y)_h = \prod_{s \in G} \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(V_s, Y_{hs}) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{Vect}^G}(V, Y[h]).$$

  Coincide con $\mathsf{Hom}_{\Bbbk}(V, Y)$ cuando $\Bbbk G$ o $V$ son de dim finita.
- En ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$:
    - Definición como espacios $G$-graduados.
    - Acción de $G$ como en $\Bbbk G$-módulos.

  Coincide con $\mathsf{Hom}_{\Bbbk}(V, Y)$ cuando $\Bbbk G$ o $V$ son de dim finita.

# Funtores monoidales laxos

**Definición**

Sean $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ y $(\mathcal{D}, \times, J)$ categorías monoidales. Un funtor monoidal laxo de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es una terna $(F, \varphi, \varphi_0)$, donde

- $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor,
- $\varphi_{X,Y} : F(X) \times F(Y) \to F(X \otimes Y)$ definen una transformación natural,
- $\varphi_0 : J \to F(I)$,

que verifican condiciones de asociatividad y unitalidad.

Asociatividad:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \times F(Y) \times F(Z) \arrow[r, "\varphi_{X,Y} \times \mathrm{id}_Z"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X \times \varphi_{Y,Z}"'] & F(X \otimes Y) \times F(Z) \arrow[d, "\varphi_{X \otimes Y, Z}"] \\
F(X) \times F(Y \otimes Z) \arrow[r, "\varphi_{X, Y \otimes Z}"'] & F(X \otimes Y \otimes Z),
\end{tikzcd}$$

### Definición

Sean $(\mathcal{C}, \otimes, I, c^{\mathcal{C}})$ y $(\mathcal{D}, \times, J, c^{\mathcal{D}})$ categorías monoidales trenzadas. Un funtor monoidal laxo $(F, \varphi, \varphi_0)$ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es trenzado si conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \times F(Y) \arrow[r, "c^{\mathcal{D}}_{F(X),F(Y)}"] \arrow[d, "\varphi_{X,Y}"'] & F(Y) \times F(X) \arrow[d, "\varphi_{Y,X}"] \\
F(X \otimes Y) \arrow[r, "F\left(c^{\mathcal{C}}_{X,Y}\right)"'] & F(Y \otimes X).
\end{tikzcd}$$

# Funtores monoidales laxos

Proposición (Aguiar - Mahajan)

- *Si $F$ es un funtor monoidal laxo, manda monoides en monoides.*
- *Si además $F$ es trenzado, manda monoides conmutativos en monoides conmutativos.*

Resumen de la demostración de [MPSW]:

- Hay un comonoide diferencial $\mathbb{Z}$-graduado $\left(S_\bullet(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A^{\otimes} n, \mathsf{dec}\right)$, que resulta ser coconmutativo graduado trenzado a menos de homotopía.
- Si $A$ es de dimensión finita o $G$ es finito, el funtor monoidal trenzado $\mathsf{hom}(-,\Bbbk)$ coincide con $\mathsf{Hom}_\Bbbk$, entonces manda este comonoide en el complejo cuya álgebra de cohomología es la opuesta de $(\mathsf{H}^\bullet(A), \smile)$.
- Al ser $(\mathsf{H}^\bullet(A), \smile)$ imagen de un comonoide coconmutativo graduado trenzado por un funtor monoidal trenzado, este es conmutativo graduado trenzado.

# Conmutatividad graduada trenzada y categorías duoidales

# Motivación

- Las condiciones de finitud sobre los objetos de la forma $A^{\otimes n}$. Ya vimos que el plano de Jordan verifica una finitud "más relajada", a nivel de su resolución minimal.
- Al usar otras resoluciones, el producto cup está definido a nivel del producto $\otimes_A$, que no admite estructura trenzada.
- En bimódulos sobre biálgebras está también el producto $\otimes$, que en general tampoco admite estructura trenzada.
- Pero entre ellos son compatibles, y es lo que vamos a aprovechar.

**Definición**

Una categoría duoidal es una 9-upla $(\mathcal{C}, \diamond, I, \star, J, \zeta, \Delta_I, \mu_J, \zeta_0)$, donde

- $(\mathcal{C}, \diamond, I)$ y $(\mathcal{C}, \star, J)$ son categorías monoidales.
- $(I, \Delta_I, \zeta_0)$ es un comonoide en $(\mathcal{C}, \star, J)$.
- $(J, \mu_J, \zeta_0)$ es un monoide en $(\mathcal{C}, \diamond)$
- $\zeta_{X,Y,Z,T} : (X \star Y) \diamond (Z \star T) \to (X \diamond Z) \star (Y \diamond T)$ definen una transformación natural, llamada ley de intercambio,

con compatibilidades entre estas estructuras.

Ley de intercambio y asociatividad de $\diamond$:

$$\begin{tikzcd}
(X \star T) \diamond (Y \star U) \diamond (Z \star V) \arrow[r, "\mathrm{id}_{X\star T} \diamond \zeta_{Y,U,Z,V}"] \arrow[d, "\zeta_{X,T,Y,U} \diamond \mathrm{id}_{Z\star V}"'] & (X \star T) \diamond ((Y \diamond Z) \star (U \diamond V)) \arrow[d, "\zeta_{X,T,Y\diamond Z,U\diamond V}"] \\
((X \diamond Y) \star (T \diamond U)) \diamond (Z \star V) \arrow[r, "\zeta_{X\diamond Y,T\diamond U,Z,V}"'] & (X \diamond Y \diamond Z) \star (T \diamond U \diamond V).
\end{tikzcd}$$

## Ejemplo

Una categoría monoidal trenzada $(\mathcal{C}, \otimes, I, c)$ permite definir la categoría duoidal $(\mathcal{C}, \otimes, I, \otimes, I, \zeta^c, \mathrm{id}_I, \mathrm{id}_I, \mathrm{id}_I)$, donde

$$\zeta^c_{X,Y,Z,T} = \mathrm{id}_X \otimes c_{Y,X} \otimes \mathrm{id}_T\,.$$

De forma análoga a la definición de monoide y comonoide, se puede definir módulo a izquierda, a derecha y bimódulo sobre un monoide $A$ en una categoría monoidal $\mathcal{C}$, escribiendo diagramáticamente las condiciones en $\mathbf{Vect}_{\Bbbk}$ e interpretándolas en $\mathcal{C}$.Algunas de ellas:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes M \otimes A \arrow[r, "\chi_\ell \otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \chi_r"'] & M \otimes A \arrow[d, "\chi_r"] \\
A \otimes M \arrow[r, "\chi_\ell"'] & M,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes M \arrow[r, "\eta \otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\chi_\ell"] \\
& M.
\end{tikzcd}
$$

También se define la noción de morfismo de bimódulos, dando lugar a la categoría de $A$-bimódulos, que denotamos ${}_A\mathcal{C}_A$.

# Bimódulos sobre un bimonoide

**Definición**

Sean $(M, \chi_\ell, \chi_r)$ y $(M', \chi'_\ell, \chi'_r)$ dos $A$-bimódulos. El producto de $M$ y $M'$ sobre $A$ es el coigualador $\pi_{M,M'} : M \otimes M' \to M \otimes_A M'$ de los mapas $\chi_r \otimes_{M'}$ y $\mathrm{id}_M \otimes \chi'_\ell : M \otimes A \otimes M' \longrightarrow M \otimes M'$. Sus acciones izquierda y derecha son dadas por $\chi_\ell$ and $\chi'_r$ respectivamente.

El producto $\otimes_A$ da una estructura monoidal en ${}_A\mathcal{C}_A$, cuyo neutro es $A$.

### Definición

Sea $(\mathcal{C}, \otimes, I, c)$ una categoría monoidal trenzada, sea $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ un bimonoide en $\mathcal{C}$, y sean $(M, \chi_\ell, \chi_r)$ y $(M', \chi'_\ell, \chi'_r)$ dos $A$-bimódulos. Se define el $A$-bimódulo $M \odot M'$ como $\left(M \otimes M', \chi_\ell^{\odot}, \chi_r^{\odot}\right)$, con las acciones

$$\begin{aligned}
\chi_\ell^{\odot} &= (\chi_\ell \otimes \chi'_\ell) \circ (\mathrm{id}_A \otimes c_{A,M} \otimes \mathrm{id}_{M'}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_{M'}), \\
\chi_r^{\odot} &= (\chi_r \otimes \chi'_r) \circ (\mathrm{id}_M \otimes c_{M',A} \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_{M'} \otimes \Delta).
\end{aligned}$$

El producto $\odot$ da una estructura monoidal en ${}_A\mathcal{C}_A$, cuyo neutro es $I$.

# Bimódulos sobre un bimonoide

**Proposición (Garner - López Franco)**

*Sea* $(\mathcal{C}, \otimes, I, c)$ *una categoría monoidal trenzada y sea* $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *un bimonoide en* $\mathcal{C}$. *La 9-upla* $\left({}_A\mathcal{C}_A, \otimes_A, A, \odot, I, \zeta^A, \Delta, \mathrm{id}_I, \varepsilon\right)$ *es una categoría duoidal, donde*

$$\zeta^A_{M,N,K,L} : (M \odot N) \otimes_A (K \odot L) \longrightarrow (M \otimes_A K) \odot (N \otimes_A L)$$

*es la proyección canónica del mapa* $\zeta^c_{M,N,K,L} = \mathrm{id}_M \otimes c_{N,K} \otimes \mathrm{id}_L$.

# Duoides y coduoides

## Definición

Sea $(\mathcal{C}, \diamond, I, \star, J, \zeta, \Delta_I, \mu_J, \zeta_0)$ una categoría duoidal. Un duoide en $\mathcal{C}$ es una quíntupla $(A, \mu, \eta, \nu, \iota)$, donde

- $(A, \mu, \eta)$ es un monoide en $(\mathcal{C}, \diamond, I)$,
- $(A, \nu, \iota)$ es un monoide en $(\mathcal{C}, \star, I)$,
- los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
(A \star A) \diamond (A \star A) \arrow[rr, "\zeta_{A,A,A,A}"] \arrow[d, "\nu \diamond \nu"'] & & (A \diamond A) \star (A \diamond A) \arrow[d, "\mu \star \mu"] \\
A \diamond A \arrow[r, "\mu"'] & A & A \star A, \arrow[l, "\nu"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\Delta_I"] \arrow[d, "\eta"'] & I \star I \arrow[d, "\eta \star \eta"] \\
A & A \star A, \arrow[l, "\nu"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
J \diamond J \arrow[r, "\mu_J"] \arrow[d, "\iota \diamond \iota"'] & J \arrow[d, "\iota"] \\
A \diamond A \arrow[r, "\mu"'] & A,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[rr, "\zeta_0"] \arrow[dr, "\eta"'] & & J \arrow[dl, "\iota"] \\
& A. &
\end{tikzcd}$$

# Duoides y coduoides

**Definición**

Sea $(\mathcal{C}, \diamond, I, \star, J, \zeta, \Delta_I, \mu_J, \zeta_0)$ una categoría duoidal. Un coduoide en $\mathcal{C}$ es una quíntupla $(A, \mu, \eta, \nu, \iota)$, donde

- $(A, \mu, \eta)$ es un comonoide en $(\mathcal{C}, \diamond, I)$,
- $(A, \nu, \iota)$ es un comonoide en $(\mathcal{C}, \star, I)$,
- conmutan los diagramas inversos de los de duoide.

**Proposición (Argumento de Eckmann - Hilton)**

- *Los duoides en una categoría monoidal trenzada son los monoides conmutativos.*
- *Los coduoides en una categoría monoidal trenzada son los comonoides coconmutativos.*

# Resoluciones proyectivas como coduoides

**Teorema**

*Sea $A$ un bimonoide en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre el álgebra de grupo $\Bbbk G$, con $G$ abeliano. Sea $P_\bullet \xrightarrow{f} A$ un complejo de cadenas en ${}_A\left({}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}\right)_A$, que al pasar a ${}_A\mathsf{Mod}_A$ sea una resolución proyectiva de $A$.*
*Sean*

- $\omega\colon P_\bullet \to (P \otimes_A P)_\bullet$ *el mapa que levanta $A \simeq A \otimes_A A$,*
- $\delta : P_\bullet \to (P \odot P)_\bullet$ *el mapa que levanta $\Delta\colon A \to A \odot A$*

*Entonces $(P_\bullet, \omega, f, \delta, \varepsilon \circ f)$ es un coduoide diferencial graduado, a menos de homotopía $\Bbbk$-lineal.*

# Resolución proyectiva del plano de Jordan

Recordemos la resolución del plano de Jordan $A = \dfrac{\Bbbk\langle x, y\rangle}{\left\langle yx - xy + \frac{1}{2}\, x^2 \right\rangle}$

$$0 \longrightarrow A \otimes \Bbbk r \otimes A \xrightarrow{d_1} A \otimes \Bbbk\{x, y\} \otimes A \xrightarrow{d_0} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0,$$

Damos a los términos de la resolución estructura de $\Bbbk G$-módulo de Yetter Drinfeld: Sean $a, b \in A$ homogéneos.

$$P_0: \quad t \cdot (a \otimes b) = t \cdot a \otimes t \cdot b, \quad \text{grado}(a \otimes b) = \text{grado}(a) + \text{grado}(b).$$

$$P_1: \quad t \cdot (a \otimes x \otimes b) = t \cdot a \otimes x \otimes t \cdot b, \quad t \cdot (a \otimes y \otimes b) = t \cdot a \otimes (x + y) \otimes t \cdot b,$$
$$\text{grado}(a \otimes x \otimes b) = \text{grado}(a \otimes y \otimes b) = \text{grado}(a) + 1 + \text{grado}(b).$$

$$P_2: \quad t \cdot (a \otimes r \otimes b) = t \cdot a \otimes r \otimes t \cdot b, \quad \text{grado}(a \otimes b) = \text{grado}(a) + 2 + \text{grado}(b).$$

# Funtores monoidales laxos dobles

## Definición

Sean $(\mathcal{C}, \diamond, I, \star, J, \zeta)$ y $(\mathcal{C}', \diamond', I', \star', J', \zeta')$ dos categorías duoidales. un funtor monoidal laxo doble de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ es una quíntupla $(F, \varphi, \varphi_0, \gamma, \gamma_0)$, donde

- $(F, \varphi, \varphi_0)$ es un funtor monoidal laxo de $(\mathcal{C}, \diamond, I)$ a $(\mathcal{C}', \diamond', I')$.
- $(F, \gamma, \gamma_0)$ es un funtor monoidal laxo de $(\mathcal{C}, \star, J)$ a $(\mathcal{C}', \star', J')$.

Una de las condiciones de compatibilidad:

$$
\begin{tikzcd}
(F(X) \star' F(Y)) \diamond' (F(Z) \star' F(T)) \arrow[r, "\zeta'_{F(X),F(Y),F(Z),F(T)}"] \arrow[d, "\gamma_{X,Y} \diamond' \gamma_{Z,T}"'] & (F(X) \diamond' F(Z)) \star' (F(Y) \diamond' F(T)) \arrow[d, "\varphi_{X,Z} \star' \varphi_{Y,T}"] \\
F(X \star Y) \diamond' F(Z \star T) \arrow[d, "\varphi_{X \star Y, Z \star T}"'] & F(X \diamond Z) \star' F(Y \diamond T) \arrow[d, "\gamma_{X \diamond Z, Y \diamond T}"] \\
F((X \star Y) \diamond (Z \star T)) \arrow[r, "F(\zeta_{X,Y,Z,T})"'] & F((X \diamond Z) \star (Y \diamond T)),
\end{tikzcd}
$$

**Proposición (Aguiar - Mahajan)**

*Un funtor monoidal laxo doble manda duoides en duoides.*

**Definición**

Sea $A$ un álgebra aumentada en ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$, para un grupo $G$ abeliano. Sean $M, N$ dos $A$-bimódulos. Se define el módulo de Yetter-Drinfeld $\hom_{AA}(M, N)$ en componentes:

$$\hom_{AA}(M,N)_h = \mathrm{Hom}_{{}_A(\mathrm{Vect}^G)_A}(M, N[h]) = \mathrm{Hom}_{AA}(M,N) \cap \hom(M,N)_h,$$

con la siguiente acción de $G$:

$$(g \cdot f)(x) = g \cdot f(g^{-1} \cdot x),\ \forall x \in M.$$

**Proposición**

*Si* $M \simeq_{\mathrm{Vect}^G} A \otimes V \otimes A$ *con* $\dim V < \infty$, $\mathrm{Hom}_{AA}(M,N) = \hom_{AA}(M,N)$.

**Teorema**

*El funtor* $\mathsf{hom}_{AA}(-,\Bbbk)$ *es monoidal doble laxo*

**Teorema**

*Sea* $A$ *un bimonoide en la categoría* ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$*, para un grupo abeliano* $G$*. Sea* $P_\bullet \to A$ *un complejo de cadenas en* ${}_A\big({}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}\big)_A$ *tal que*

1. *al pasar a* ${}_A\mathsf{Mod}_A$ *sea una resolución proyectiva de* $A$*,*
2. *cada bimódulo* $P_n$ *sea isomorfo como espacio* $G$*-graduado a un producto* $A \otimes V_n \otimes A$*, con* $V_n$ *de dimensión finita.*

*Entonces, el complejo de cocadenas* $\mathsf{Hom}_{AA}(P_\bullet,\Bbbk)$*, con el opuesto del producto cup, es conmutativo graduado trenzado a menos de una homotopía* $\Bbbk$*-lineal. En particular, su cohomología* $\mathsf{H}^\bullet(A,\Bbbk)$ *es conmutativa graduada trenzada.*

# El teorema final

**Pasos de la demostración:**

- El producto en $\mathrm{Hom}_{AA}(P_\bullet, \Bbbk)$ inducido por $\omega$ es el opuesto del producto cup.
- Por la condición 1, la resolución $P_\bullet$ es un coduoide con $\omega$ y $\delta$.
- La condición 2 permite sustituir el funtor $\mathrm{Hom}_{AA}(-, \Bbbk)$ por el funtor $\mathrm{hom}_{AA}(-, \Bbbk)$, que es monoidal laxo doble.
- La imagen del coduoide $P_\bullet$ es un duoide.
- Por el argumento de Eckmann - Hilton, es un monoide conmutativo.

# ¡Muchas gracias!