

# Propuesta de Tesis en Ingeniería Matemática

## Identificación del proponente

- Nombre: Juan Pablo Borthagaray
- Último título obtenido: Doctor en Ciencias Matemáticas, Universidad de Buenos Aires
- Lugar de trabajo: Departamento de Matemática y Estadística del Litoral, Centro Universitario Regional Norte
- Área de trabajo: Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales
- Información de contacto: [jpborthagaray@unorte.edu.uy](mailto:jpborthagaray@unorte.edu.uy)

## Identificación de la propuesta de proyecto de tesis

- Título del proyecto: Laplaciano fraccionario: aplicaciones a crimen
- Área temática del conocimiento de la propuesta: matemática aplicada, métodos numéricos
- Resumen:

Los modelos estadísticos basados en agentes para el crimen han demostrado que la victimización repetida puede conducir a la formación de zonas predecibles con alto índices de criminalidad (llamados *hotspots*). La dinámica de estos *hotspots* varía de acuerdo a las hipótesis que se realicen acerca de los desplazamientos de los agentes criminales.

Aquí asumiremos que el movimiento de estos agentes sigue un llamado *vuelo de Lévy*, con tamaños de paso distribuidos de acuerdo a una ley potencial. En el límite continuo, estos modelos dan lugar a un sistema de dos ecuaciones parabólicas acopladas. Más precisamente, se llega al sistema

$$\begin{cases} \partial_t A = \eta \Delta A - A + \alpha + A\rho, \\ \partial_t \rho = \left[ -DA(-\Delta)^s \left( \frac{\rho}{A} \right) + \frac{\rho}{A} (-\Delta)^s A \right] - A\rho + \beta, \end{cases}$$

donde las incógnitas  $A$  y  $\rho$  representan el *atractivo* de cada región y la densidad de agentes criminales respectivamente, y  $\eta, \alpha, \beta$  son parámetros del problema. El operador integro-diferencial  $(-\Delta)^s$  es el llamado *laplaciano fraccionario* de orden  $s \in (0, 1)$ . Este operador es el generador infinitesimal de un proceso de Lévy  $2s$ -estable; en la referencia [Valdinoci] se puede encontrar un argumento sencillo que lo vincula con una caminata al azar con saltos.

Es posible también extender el modelo a vuelos de Lévy *truncados*, en los que los pasos no puedan exceder una determinada cota. En dicho caso, en el sistema de arriba aparecen operadores integro-diferenciales con horizonte finito.

Se propone trabajar en la discretización del sistema de ecuaciones. Desde el punto de vista computacional, es posible tratar con el mismo mediante el uso de métodos de Elementos Finitos, de Diferencias Finitas, o incluso espectrales, dependiendo de las hipótesis que se realicen acerca de la geometría del dominio y de las condiciones de borde en el modelo. En cualquier caso, es necesario el diseño de métodos específicos para garantizar la estabilidad de las discretizaciones y la preservación de ciertas cantidades de interés.

Dependiendo de la formación e intereses del estudiante, el énfasis podrá ponerse en aspectos de modelado, de análisis o computacionales del problema.

- Bibliografía relevante

1. Chaturapruek, S., Breslau, J., Yazdi, D., Kolokolnikov, T., McCalla, S.G. (2013). *Crime modeling with Lévy flights*. SIAM Journal on Applied Mathematics, 73(4), 1703–1720.

2. Dulce Rubio, M. (2019). *Predicting criminal behavior with Lévy flights using real data from Bogotá*. Documentos CEDE 017198, Universidad de los Andes – CEDE.
  3. Pan, C., Li, B., Wang, C., Zhang, Y., Geldner, N., Wang, L., Bertozzi, A.L. (2018). *Crime modeling with truncated Lévy flights for residential burglary models*. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 28(09), 1857–1880.
  4. Short, M.B., D’Orsogna, M.R., Pasour, V.B., Tita, G.E., Brantingham, P.J., Bertozzi, A.L., Chayes, L.B. (2008). A statistical model of criminal behavior. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(01), 1249–1267.
  5. Valdinoci, E. (2009). *From the long jump random walk to the fractional Laplacian*. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, 49, 33–44.
- Perfil esperado del estudiante: Es deseable que el estudiante posea conocimientos de programación y tenga alguna formación en ecuaciones en derivadas parciales (por ejemplo, haber aprobado la asignatura Ecuaciones Diferenciales en Facultad de Ciencias o Facultad de Ingeniería).
  - Lugar y Fecha de la propuesta: Salto, 23 de diciembre de 2019