Propuesta de Tesis en Ingeniería Matemática

Identificación del proponente

- Nombre: Juan Pablo Borthagaray
- Último título obtenido: Doctor en Ciencias Matemáticas, Universidad de Buenos Aires
- Lugar de trabajo: Departamento de Matemática y Estadística del Litoral, Centro Universitario Regional Norte
- Área de trabajo: Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales
- Información de contacto: jpborthagaray@unorte.edu.uy

Identificación de la propuesta de proyecto de tesis

- Título del proyecto: Análisis y discretización de ecuaciones de medios porosos fraccionarias.
- Área temática del conocimiento de la propuesta: Análisis Numérico
- Resumen:

  El modelo más famoso (y sencillo) de difusión está dado por la ecuación del calor, $u_t - \Delta u = 0$. Esta ecuación es lineal, y entre varias características bien conocidas, se destaca la velocidad de propagación infinita de perturbaciones.

En cambio, la *ecuación de medios porosos*, que tiene la forma $u_t - \Delta(|u|^{m-1}u) = 0$, donde $0 < m \neq 1$ es un parámetro, representa un modelo de difusión no lineal y con velocidad de propagación finita. Existen múltiples aplicaciones físicas en las que este modelo aparece de forma natural, por ejemplo para describir el flujo de un gas isentrópico a través de un medio poroso; en el libro de Vázquez mencionado abajo se puede encontrar un buen número de otras aplicaciones.

La presencia del operador laplaciano $(-\Delta)$ implica que tanto la ecuación del calor como la de medios porosos sean *locales*. Esto no es apropiado para modelar procesos de difusión *anómalos*. En términos probabilísticos, la difusión anómala se caracteriza por presentar interacciones a distancia en lugar de la interacción exclusiva con vecinos en las caminatas al azar. El operador matemático más utilizado para describir estos procesos anómalos es el llamado operador de Laplace fraccionario,

$$(-\Delta)^s u(x) = C(d,s) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{d+2s}} \, dy.$$

Arriba, el número $s \in (0,1)$ representa el *orden de diferenciación del operador*: uno tiene $(-\Delta)^s u \to u$ cuando $s \to 0$ y $(-\Delta)^s u \to -\Delta u$ cuando $s \to 1$.

Se propone trabajar con ecuaciones de medios porosos fraccionarias, del tipo $u_t + (-\Delta)^s(|u|^{m-1}u) = 0$. Este modelo interpola entre la ecuación ordinaria $u_t + |u|^{m-1}u = 0$ (con $s \to 0$) y la ecuación de medios porosos clásica (cuando $s \to 1$). Sorprendentemente, las soluciones tienen velocidad de propagación infinita para todo s. Como ejemplo, tomemos el problema

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^s(|u|^{m-1}u) = f & \text{en } \Omega, \\ u(t,\cdot) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^d \setminus \Omega, \ \forall t > 0 \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Proponemos estudiar este problema y otros relacionados mediante el método de elementos finitos. Algunas de las cuestiones esenciales en las que se plantea trabajar incluyen el desarrollo de algoritmos estables, consistentes, en el estudio del orden de convergencia de los métodos, y en las propiedades cualitativas de las soluciones discretas (por ejemplo, la velocidad de propagación de perturbaciones, o la existencia de soluciones discretas autosimilares).

- Bibliografía relevante

1. Bonforte, M., Figalli, A., Ros-Oton, X. (2017). Infinite speed of propagation and regularity of solutions to the fractional porous medium equation in general domains. Communications on Pure and Applied Mathematics, 70(8), 1472–1508.
2. del Teso, F. (2014). Finite difference method for a fractional porous medium equation. Calcolo, 51(4), 615–638.
3. Plociniczak, L. (2019). Numerical method for the time-fractional porous medium equation. SIAM Journal on Numerical Analysis, 57(2), 638-656.
4. Stan, D., del Teso, F., Vázquez, J. L. (2014). Finite and infinite speed of propagation for porous medium equations with fractional pressure. Comptes Rendus Mathematique, 352(2), 123–128.
5. Vázquez, J. L. (2007) The porous medium equation: mathematical theory. Oxford University Press.

- Perfil esperado del estudiante: Es deseable que el estudiante posea conocimientos de programación y tenga alguna formación en ecuaciones en derivadas parciales (por ejemplo, haber aprobado la asignatura Ecuaciones Diferenciales en Facultad de Ciencias o Facultad de Ingeniería).

- Lugar y Fecha de la propuesta: Salto, 23 de diciembre de 2019