

BOLETIN DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

SUMARIO

A manera de presentación.	Pág. 1 ✓
VI Conferencia sobre Historia de las Matemáticas. - Edad Media	
Cristiana, Ing. E. García de Zúñiga.	» 2 ✓
Nota sobre Fotoelasticimetría, Ing. Julio Ricaldoni.	» 11
Rafael Barrett, Matemático, Ing. E. García de Zúñiga.	» 30
El Neutrón, Ing. G. E. Villar.	» 33
Características dinámicas de las Células Fotoeléctricas, Ing.	
Arturo Ferenczi.	» 36
El Nuevo Edificio para la Facultad de Ingeniería	» 43



Boletín de la Facultad de Ingeniería

PUBLICACION OFICIAL

N.º 1

MONTEVIDEO, DICIEMBRE DE 1935

AÑO I.



A manera de presentación y con el objeto de precisar la finalidad de este "Boletín" se hace indispensable decir algunas palabras. Fué aspiración largamente acariciada por las autoridades, personal docente y alumnos de nuestra Facultad, poseer una publicación periódica que pudiera recoger toda producción de interés para su vida docente o administrativa.

Venciendo las dificultades de orden financiero y pretendiendo vencer la apatía o la modestia, puesto que ambas cosas existen, de nuestro ambiente, aparece el primer número del "Boletín". Sus páginas estarán abiertas para recoger la producción, la sugestión, o la simple noticia, proceda ella de autoridades, personal docente o alumnos, que se refieran a la actividad a que nuestro Instituto presta atención.

Del tesón con que los futuros colaboradores pongan en la obra dependerá la vida y el éxito de este Boletín, vida y éxito que reflejará honor para nuestra Facultad y para su profesorado y alumnado.

Debemos esperar con optimismo ese éxito. Nuestra Facultad posee un excelente cuerpo de profesores en el que se destacan ya figuras de fuerte personalidad científica o técnica capaces de producir y de producir obra de real valor. Ese profesorado está encauzado por los caminos del análisis y de la investigación en forma que se puede esperar de él, y de sus discípulos, la producción original que da personalidad a los institutos de enseñanza. Pero ese género de producción, sin duda alguna la más estimable y la que más debe ser estimulada, no quitará lugar, en las páginas del Boletín, a toda otra que, aún sin alcanzar las características de originalidad que adornan a la primera, presente alguna utilidad. Tal será el caso de los apuntes de clase, a manera de texto viviente y remozado permanentemente; de las notas aclaratorias sobre determinados temas o asuntos de interés docente, técnico, científico o profesional; de las consideraciones sobre planes de estudios, programas, etc., y en general de toda información, comentario o análisis sobre las actividades de la Facultad. Nada que a ésta pueda interesar, cualquier sea el grado de interés, dejará de tener acogida en las páginas de este Boletín. A crearle vida próspera y lozana; a conseguirle lugar destacado entre las publicaciones universitarias de América; a difundirlo para que pueda anunciar con orgullo y altivez la existencia de una institución docente que trabaja y se afana por superarse en todo instante, debemos dedicarnos, autoridades, profesores y alumnos.

VI Conferencia sobre Historia de las Matemáticas

EDAD MEDIA CRISTIANA

ING. E. GARCIA DE ZUÑIGA

La historia parece confirmar en las andanzas de los pueblos y las razas la ley biológica según la cual los órganos que han agotado su rol en la evolución de cada especie desaparecen o se atrofian; y es así cómo la cultura musulmana en España decayó y se extinguió cuando el progreso cultural de los otros países de Europa logró independizarse de las escuelas árabes de la Península.

Curioso fenómeno de una civilización que resplandece durante cuatro siglos y se apaga para siempre.

Fué principalmente el Emperador Federico II (1194-1250) quien provocó o aceleró el resurgimiento de nuestra ciencia fuera de España, haciendo traducir al latín, entre otras obras matemáticas, las que habían sido traducidas del griego por los árabes (Euclides, Arquímedes, Apolonio, Ptolomeo, etc.). Los sabios de la Europa cristiana occidental pudieron luego reanudar el curso de los descubrimientos matemáticos desde el punto a que habían llegado aquellos geniales representantes del pensamiento heleno y sus diligentes divulgadores y continuadores. Hasta entonces el logro de ese objeto exigía toda la abnegación necesaria para aprender a leer los textos árabes en el original o para ir a instruirse directamente en las Universidades de Córdoba, Toledo, Sevilla, Granada; y como el mundo cristiano de la Edad Media reservaba sus entusiasmos para muy distintos fines, él ha dejado pocos nombres famosos (todos ellos posteriores al siglo XII) en la historia de las Matemáticas.

En cuanto a los cristianos de Oriente, las controversias teológicas y gramaticales absorbían su actividad intelectual. "Si no fuera, dice Cantor, por la obligación imperiosa de ser completos (*das Gebot der Vollständigkeit*) terminaríamos de buena gana con Diofanto la consideración de las obras matemáticas escritas en lengua griega." La pobre cultura bizantina, que la religión y los acontecimientos políticos habían, por lo demás, encerrado en un estrecho aislamiento, no nos ocupará, pues, mucho rato.

Quédanos, en suma, como exclusiva o casi exclusiva materia de esta conferencia: primero—en el período que va desde la caída de Roma hasta el reinado de Federico II—la producción matemática en lengua latina, es decir, la obra insignificante de los rarísimos autores romanos de libros elementales de Aritmética y Geometría, a la que se agrega (producción de escaso valor también) la que tuvo su origen en los claustros, únicos focos del saber en aquellas épocas oscuras. Una segunda etapa, ya más interesante, nos llevará desde el reinado de Federico II hasta la era moderna.

Entre los romanos que escribieron sobre las Matemáticas, ya citamos en una conferencia anterior a *Boethio* o *Boecio* (Anius Manlius Severinus Boethius), nacido hacia el año 480. Su padre había sido cónsul, él mismo lo fué bajo el reinado de Teodorico el Ostrogodo, y sus dos hijos fueron también simultáneamente cónsules en 522. Su renombre le viene más bien de las tristes vicisitudes de su vida pública y de la gran nobleza de su carácter, que de las obras que legó a la posteridad. Su larga disertación titulada *De Consolatione Philosophiae*, escrita en la cárcel de Pavia, en la que fué, tras un largo encierro, brutalmente ejecutado en 524, lo consagra, sin embargo, junto con sus opúsculos sagrados, como el último de los filósofos romanos y el primero de los teólogos escolásticos. Muy leído durante la Edad Media y aún después, especialmente en Inglaterra, donde se le tradujo en anglosajón por el Rey Alfredo, en el viejo inglés del siglo XIV por Chaucer, y, más tarde, en inglés moderno repetidas veces, hasta su inclusión en el Biblioteca Clásica de Loeb (1926) ⁽¹⁾, la popularidad de este libro, que Gibbon llama en su estilo pomposo "a golden volume not unworthy of the leisure of Plato or of Tully", se contagió a las otras obras de Boethio: a su tratado de Música, usado hasta época no muy lejana como texto en las Universidades de Oxford y Cambridge, y a

(1) La última edición, y la mejor sin duda, es la de 1934 en el *Corpus* de Viena.

su Aritmética y su Geometría, constantemente consultadas en la Edad Media.

La Aritmética de Boethio es una traducción de la de Nicómaco y ni siquiera puede gloriarse de ser la primera. Apuleyo, el autor de la célebre novela satírica *El Asno de Oro*, había traducido ya, en efecto, la Aritmética de Nicómaco algunos siglos antes. Es además una mala traducción, pues si Boethio dominaba suficientemente el griego, en cambio la indigencia de sus conocimientos matemáticos era tal, que lo obligaba a omitir las partes un poco difíciles del original, que son, naturalmente, las más importantes.

La Geometría, cuya paternidad le ha sido discutida, injustamente según parece, no vale mucho más. Es una colección de las primeras definiciones y teoremas de Euclides, sin ninguna demostración. Una digresión aritmética, bastante inoportuna en un tratado de Geometría, es, sin embargo, lo que hay en él de más interesante como documento histórico. He aquí en qué términos empieza Boethio esa curiosa digresión:

“Los Pitagóricos (entiéndase los Neo-pitagóricos), para no equivocarse al efectuar multiplicaciones, divisiones y medidas —sutiles y llenos de inventiva como eran—, se sirvieron de un dispositivo al que, para honrar a su maestro, dieron el nombre de Mesa Pitagórica, Mensa Pythagorea, y que más tarde fué llamada Ábaco.”

La Mesa Pitagórica se distinguía en un detalle esencial de los ábacos usuales. En estos últimos, un número se representaba colocando en las ranuras o hilos paralelos del cuadro tantos pequeños guijarros o bolillas o fichas como unidades del orden correspondiente a la ranura tuviera el número en cuestión. En la Mesa Pitagórica se colocaba en cada ranura una sola ficha, que llevaba escrito un carácter especial, representativo de uno de los números que van de uno a nueve. Toda ranura correspondiente a un orden de unidades que no figurase en el número propuesto, quedaba vacía. Los nueve caracteres, designados con la palabra *apices*, de no fácil interpretación, eran generalmente, salvo algunas variantes sin importancia, como sigue:

I 7 3 2 4 5 6 8 9

Quiere decir, pues, que en la época de Boethio ya se aplicaba, siquiera en el ábaco, el principio básico de nuestro sistema de numeración deci-

mal: el valor de posición. Hubiera bastado agregar a los nueve ápices un signo que representase el cero, para tener realizada la moderna escritura, la cual, sin embargo, no se generalizó del todo en Europa, como veremos más adelante, hasta después del siglo XIV. Nada quizás traduce mejor la lentitud del progreso matemático de la Edad Media, que esa incapacidad de dar el último paso hacia la reforma de la numeración, a pesar de las ventajas evidentes del nuevo sistema y del hecho de haber sido claramente expuesto, según lo hicimos notar en nuestra última conferencia, desde principios del siglo IX (Aritmética de Mohámed ibn Musa al-Khowarizmi).

Después de Boethio pueden citarse: *Isidoro de Sevilla*, *Beda*, *Alcuino*, *Gerberto*, aunque ninguno de ellos hizo adelantar sensiblemente las Matemáticas.

San Isidoro, Obispo de Sevilla (570-636), hombre de extraordinaria erudición y elocuencia, es autor de una muy vasta y muy indigesta enciclopedia, a la que puso por títulos “Orígenes” o “Etimologías”. Hay poco en ella que se refiera a nuestra ciencia, y eso mismo sin interés, cuando no incomprensible o absurdo. “El carácter de la Geometría, es la multiplicación, dice, mientras que la Aritmética tiene por fundamento la adición.” (?) Las etimologías son inverosímilmente fantasistas. Las que da para los números, por ejemplo, “parecerían, al decir de Cantor, una broma al lector, si no estuviéramos convencidos de la perfecta seriedad de Isidoro.” En esta Enciclopedia aparece, pero no por primera vez, la clasificación de la enseñanza en siete ramas. Las tres primeras (Gramática, Lógica y Retórica) formaban el ciclo más elemental, llamado *trivium*; en tanto que las cuatro restantes constituían un grado superior, con el nombre de *quadrivium*; en este último entraban la Aritmética, la Geometría, la Música y la Astronomía.

Beda (672-735), apodado el Venerable y considerado el hombre más sabio de su tiempo, nació y pasó toda su vida en la región próxima a las desembocaduras del Tyne y del Were, en la frontera de Inglaterra y de Escocia, donde existían los dos monasterios de la regla de San Benito, dedicados a San Pedro y a San Pablo.

De sus obras, la única que le sobrevive es la Historia de la Iglesia, que todavía se lee con gran interés. Toda su producción matemática un poco original, se limita casi exclusivamente al cómputo de las fiestas movibles.

El año de la muerte de Beda fué el del nacimiento de Alcuino, cuyo nombre anglosajón de Alh-Win él latinizaba en la forma de Albinus. Fué algo así como el Ministro de Instrucción Pública de Carlomagno, desde 782. En 796, ya viejo y enfermo, se retiró al Monasterio de San Martín de Tours en calidad de abate. Allí fundó una escuela, que no tardó en hacerse famosa, y allí también murió, en 804.

Aunque su actividad consistió siempre en organizar y enseñar, se le atribuye una colección o más bien recopilación de temas prácticos *ad acuendos juvenes*, "para aguzar el ingenio de los jóvenes", que debían tenerlo muy obtuso en verdad para necesitar de tales ejercicios, los cuales antes parecen acertijos de almanaque popular que problemas de Matemáticas. Uno de ellos bastará para mostrar el carácter de la obra:

" Dos hombres compran doscientos cincuenta cerdos por cien sueldos, a razón de dos sueldos por cinco cerdos. Dividen su propiedad común en dos tropas de ciento veinticinco animales cada una, la primera compuesta de los mejores o más gordos, y la otra de los inferiores o de menos peso. Luego revenden los cerdos, cobrando un sueldo por cada dos de la primera tropa y un sueldo también por cada tres de la segunda, es decir, siempre a razón de cinco cerdos por dos sueldos. ¿Cómo se explica que los revendedores obtuvieran así y todo una buena ganancia? "

Tenemos que saltar dos siglos para llegar, no a un matemático propiamente dicho, pero sí a un personaje de gran relieve histórico, el cual, entre otras muy variadas aptitudes y vocaciones, demostró una ardiente curiosidad por los problemas de la Aritmética y la Geometría, adquiriendo en estas disciplinas un saber que llenó de asombro a sus contemporáneos.

Nacido en Auvernia a mediados del siglo X, nuestro personaje cambió su nombre de Gilberto (Gerbertus) por el de Silvestre II, al ser electo Papa en 999, cuatro años antes de su muerte. Fué el primer francés que ocupó la silla de San Pedro. No relataremos sus raras aventuras, sus viajes y sus intrigas políticas, ya que sólo debe interesarnos su obra matemática.

Perfeccionó el ábaco y explicó el modo de

usarlo en su *Regula de abaco computi*, donde se incluye también el cálculo de los números fraccionarios con denominadores múltiplos de doce. Este sistema duodecimal aplicado a los quebrados es, como se sabe, antiquísimo y parece haber sido sugerido por la división del año en doce meses lunares, o por la comodidad que ofrece el gran número de divisores del número doce, o por algún otro motivo ignorado.

El *Libellus de numerorum divisione* es un tradito de Aritmética impreso primeramente entre las obras de Beda, pero restituido a Gerberto por Chasles, que lo tradujo y comentó. Se cree que igualmente le pertenece, y figura en la edición de sus obras completas publicada por Olleiro (Clermont Ferrand y París, 1867) y en la de sus obras matemáticas debida a Bubnow (Berlín, 1897), una Geometría que reproduce los problemas prácticos de aplicación, en especial de Agrimensura (medida de alturas y distancias de objetos inaccesibles, determinación de áreas y otros, que sin duda fueron tomados fielmente de los autores romanos para quienes se ha consagrado el nombre de Agrimensores), y contiene además otras enseñanzas, inspiradas probablemente en fuentes griegas más directas.

Es quizá original, y vale la pena mencionarlo por la dificultad que entonces presentaba, el problema incluído en esta Geometría, consistente en hallar los catetos de un triángulo rectángulo del que se dan el área y la hipotenusa. Gerberto llegó a la solución exacta dependiente de una ecuación de segundo grado.

Los historiadores han dado con entera justicia el nombre de Renacimiento al movimiento de renovación cultural, social y filosófica que se produjo en Europa occidental hacia fines de la Edad Media. En los siglos XI a XIII, las Cruzadas, que abren las relaciones científicas y comerciales con el Oriente; en los siglos XIII y XIV, la creación de las grandes Universidades, que organizan la Enseñanza Media y algunas ramas de la Enseñanza Superior; la invención de la imprenta, poco después, divulgadora incomparable del saber; la introducción de las armas de fuego, que aniquilan el feudalismo; la erudición bizantina, refugiándose en Italia tras la caída de Constantinopla; y, en fin, los grandes viajes y descubrimientos geográficos de los portugueses

y españoles,— fueron, con otras causas menos eficaces o aparentes, los factores principales de esta profunda revolución espiritual.

En el dominio de las ciencias exactas, el resurgimiento se muestra ya con evidencia desde los tiempos del Emperador Federico II, aunque seguido de una nueva caída en la inacción.

Leonardo de Pisa o Leonardo Fibonacci (es decir, *filius Bonacci*) nació por el año 1175. Cuenta él mismo en el prefacio de su primera obra, publicada en 1202 y conocida bajo el título de *Liber abaci*, que su padre, notario de los negociantes pisanos de Bugía, lo hizo conducir, niño aún, a esta ciudad de Argelia, donde aprendió a calcular por medio del ábaco. Sus tareas lo obligaron pronto a viajar por el Egipto, la Siria, Grecia, Sicilia y Provenza, lo que le permitió instruirse en otros procedimientos de numeración y cálculo aritmético y particularmente en el que, originario de la India, había sido generalmente adoptado por los árabes.

El *Liber abaci* es una vastísima y (en parte) original colección de operaciones sobre números enteros y fraccionarios, progresiones aritméticas y geométricas, sumas de sucesiones, extracción de raíces cuadradas y cúbicas, variadísimos problemas aritmológicos, ecuaciones determinadas de 2.º grado, aplicaciones comerciales, etc., etc. Las demostraciones son con frecuencia geométricas e inspiradas, sin duda, en los trabajos de la escuela árabe de al-Karchi y abu-Ramil, rivales de al-Khowarizmi. El empleo de la numeración inda, constante en el *Liber abaci*, revela empero la influencia de la Aritmética del último de los tres matemáticos árabes citados. Por eso, a pesar de su título, el *Liber abaci* contribuyó al abandono del ábaco en toda Europa, aunque de modo tan lento que, hasta el año 1666, en Inglaterra, los empleados del Tesoro (*Exchequer*) continuaban sirviéndose de él, y que más o menos lo mismo sucedía en otros países civilizados.

Hoy, ya casi no se recuerda a Fibonacci más que por la sucesión infinita de números que lleva su nombre:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,

primer ejemplo de serie recurrente conocido y origen de curiosísimas e imprevistas aplicaciones al análisis superior.

La identidad

$$(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (ap + bq)^2 + (aq - bp)^2 = (aq + bp)^2 + (ap - bq)^2$$

fué probablemente inventada por Fibonacci. En efecto: después de afirmar que un producto de la forma $(a^2 + b^2)(p^2 + q^2)$ puede siempre convertirse, de dos modos diferentes, en la suma de dos cuadrados exactos, Fibonacci agrega las condiciones $ap \neq bq$ y $aq \neq bp$, de donde parece evidenciarse que aquella identidad no debía serle desconocida. Si algunas de estas condiciones deja de cumplirse, la suma del segundo miembro se transforma en un solo cuadrado. Si, por ejemplo, $ap = bq$, $(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (aq + bp)^2$. La descomposición en la suma de dos cuadrados puede todavía entonces efectuarse por el procedimiento de Diofanto (libro II, problemas 8 y 9), como lo explicamos en nuestra penúltima conferencia. Así se obtiene

$$(aq + bq)^2 = \left[\frac{2m(aq + bp)}{m^2 + 1} \right]^2 + \left[\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} (aq + bp) \right]^2$$

(siendo m un entero cualquiera superior a la unidad), con la salvedad de que los sumandos ya no son entonces números enteros. Euler ha generalizado la identidad de Fibonacci, demostrando que

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = (ap - bq + cr - ds)^2 + (aq + bp - cs - dr)^2 + (ar - bs - cp + dq)^2 + (as + br + cq + dp)^2.$$

y las variantes en el segundo miembro que se consiguen cambiando los signos de cualquiera de las ocho letras. Tanto a la identidad de Fibonacci como a la de Euler, se llega por la aplicación de fórmulas elementales de la teoría de los determinantes.

También puede atribuírsele, con un poco de buena voluntad, la demostración del gran teorema de Fermat (imposibilidad, para números enteros mayores que 2, de la igualdad $x^n + y^n = z^n$) en el caso particular de $n = 4$, por cuanto esta proposición fluye fácilmente de las consideraciones que hace al ocuparse del problema propuesto por Johannes Panormitanus —personaje de la Corte de Federico II—, a saber: *hallar un cuadrado que, aumentado o disminuido en cinco*

unidades, dé dos cuadrados [solución de Fibonacci]:

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2, \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2$$

Su *Practica Geometriae* (1220) contiene los conocimientos de Geometría y Trigonometría de origen árabe y griego asequibles ya en las traducciones latinas de *Gerardo de Cremona* y *Platón de Tivoli*, matemáticos italianos muy anteriores a Fibonacci. Todo ese material disponible está expuesto en la *Practica Geometriae* con método y rigor demostrativo.

En resumen: un gran vulgarizador y un hábil matemático, original a veces, pero que sería exagerado catalogar entre los genios innovadores.

Murió en 1520, o alrededor de esa fecha. Sus obras, tanto las que hemos mencionado expresamente, como otras que dejó inéditas, entre ellas el interesante *Liber quadratorum*, han sido publicadas en Roma, de 1857 a 1862, por el eruditísimo y meritisimo bibliófilo Baltasar Boncompagni.

Desde Leonardo de Pisa hasta los últimos años de la Edad Media, apenas pueden citarse cuatro o seis nombres dignos de recordación en la Historia de las Matemáticas.

Jordano Nemorario, muerto en 1237, fué General de la Orden de los Dominicos. En su trabajo, *De numeris datis*, designa invariablemente con letras los números arbitrarios, pero sin ir hasta el cálculo literal; de modo que, si representa por a y b dos factores, empleará una tercera letra para indicar el producto, y no ab u otra notación análoga.

Contemporáneo de Jordano Nemorario fué *Juan de Hollywood* o *Hollybush* (en latín, generalmente transformado en *Johannes de Sacrobosco*), así llamado por el probable lugar de su nacimiento, que, según parece, no es otro que la ciudad de Yorkshire, cuyo nombre actual es Halifax. Se ignora cuándo nació, pero se sabe que murió, ya viejo, en 1256. Su Aritmética: *Tractatus de arte numerandi*, es una colección de reglas sin demostración, de escaso valor científico, por consiguiente, pero de gran interés práctico; lo que le permitió gozar, por varios siglos, de extraordinaria popularidad. A esta obra y a otras de aquellos tiempos, puede aplicarse el juicio de R. Wolf sobre el *De sphaera mundi*,

del mismo Sacrobosco: "ein gutes Buch für eine schlechte Zeit".

Alberto Magno, *Tomás de Aquino*, *Rogelio Bacon*, son grandes hombres de la ciencia del siglo XIII, pero ajenos casi por completo al progreso de las Matemáticas.

Nicolás Oresme, que fué Obispo de Lisieux, en Normandía, pertenece al siglo siguiente (1323-1382, más o menos). Sus principales contribuciones originales a la Aritmética consisten: 1.º) En haber concebido las potencias fraccionarias. Con notaciones menos cómodas, generales y expresivas que las introducidas definitivamente por Newton, señalan, con todo, un sensible adelanto. 2.º) En el estudio de la serie recurrente

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots$$

cuya suma calculó. Sus otras actividades científicas se desarrollan en dominios menos interesantes de nuestro punto de vista.

Dijimos ya que, durante la Edad Media, la Matemática griega, que Cicerón ponía —con justicia— tan por encima de la romana, había descendido al mismo nivel miserable que esta última nunca logró superar.

No obstante, en el siglo XIV, se pueden citar, en medio de la general ignorancia, los nombres del monje *Máximo Planudes* —cuyas obras demuestran que la numeración inda era conocida en Grecia— y de *Manuel Moscópulo*, que introdujo en Europa los llamados cuadros mágicos, curiosidad recreativa conocida ya de los japoneses y de los árabes y que fué inventada por los chinos hace cuatro o cinco mil años, como lo probaría el siguiente ejemplo:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

cuyo origen se pretende hacer remontar a esa época.

Dos obras más importantes de ese mismo siglo XIV, son la Aritmética, escrita en 1321 por

el judío francés *Levy ben Gerson* (1288-1344), en la cual figuran ya algunas fórmulas de la Teoría combinatoria, nuevas entonces, y la *Geometria Speculativa* de *Tomás Bradwardino*, fraile inglés nacido a fines del siglo XIII y nombrado Arzobispo de Canterbury poco antes de su muerte, ocurrida en 1349. Mereció el título de *doctor profundus*, tan grande era la fama de su saber. Escrita en 1344 e impresa en 1495, la *Geometria Speculativa* es su principal producción matemática. Contiene, entre otras cosas de menos enjundia, una teoría de las figuras isoperímetras y algunas consideraciones sobre los polígonos *egredientes* o estrellados.

Con respecto al primer tema, enuncia las cuatro proposiciones siguientes: 1.ª) De dos figuras isoperímetras, la que tenga más ángulos encerrará mayor superficie. 2.ª) A igualdad del número de ángulos, la figura en que éstos sean iguales entre sí contendrá mayor superficie. 3.ª) Entre dos polígonos cerrados, del mismo número de vértices y cuyos ángulos sean iguales entre sí, el polígono regular supera al otro en superficie. 4.ª) La circunferencia es, de todas las figuras isoperímetras, la que abarca la máxima área. — Estas proposiciones fueron seguramente imitadas del libro de *Zenodoro* (matemático griego que vivió probablemente uno o dos siglos antes de nuestra era) sobre esta clase de figuras, libro traducido al árabe y del árabe al latín (en el siglo XIV). *Pappus* había también expuesto, ampliándola, en el libro V de su *Colección*, la teoría de *Zenodoro*, después de comprobar que el instinto de las abejas en la construcción hexagonal de las celdas de sus panales, se había adelantado a la ciencia de los geómetras.

En cuanto a los polígonos estrellados, cuyo descubrimiento se atribuye a los Pitagóricos, *Bradwardino* observa que un polígono estrellado de primer orden se forma prolongando los lados de un polígono convexo ordinario hasta que se encuentren cada dos subcontiguos. El pentágono estrellado es el primer polígono de primer orden. La suma de sus ángulos es igual a $2R$. Para el de n lados, dicha suma es $(2n - 8)R$. Los polígonos estrellados de segundo orden se obtienen prolongando los lados de los de primer orden, etc. El primer polígono estrellado de segundo orden es el heptágono.

Bradwardino se abstiene de llevar mucho más lejos sus investigaciones. Enuncia tímidamente

un teorema sobre la suma de los ángulos del primer polígono de cada orden, la cual es igual a $2R$, y aumenta en $2R$ para cada uno de los sucesivos polígonos del mismo orden. La fórmula que da el total de la suma de los ángulos de un polígono estrellado de orden n y de $2n + k + 2$ vértices, es $2kR$, y ha sido demostrada con todo rigor por *Poinsot*, quien probablemente ignoraba la *Geometria Speculativa*, ni hubiera ganado mucho con conocerla. La historia de los polígonos estrellados, en la Antigüedad y en la Edad Media, ha sido materia de un notable estudio de *Günther*, publicado por *Boncompagni* en su *Boletín* (t. VI, pág. 313).

**

El ejemplo de la civilización árabe se dejó también sentir en la fundación de las universidades, que fueron diseminándose por toda Europa en los siglos XII-XV. Fué en ese período que tuvieron sus modestísimos comienzos los futuros grandes centros de estudios superiores. Nacidas—puede decirse—al pie de los claustros, estas primeras universidades sólo brillaron al principio de la enseñanza de la Teología y la Filosofía escolástica. Por mucho tiempo las iniciativas de reforma de los estudios cayeron en el vacío. Entre los autores de estas iniciativas, prematuras pero no por eso menos meritorias, hay que citar a *Rogelio Bacon*, el monje inglés (1214 (?) - 1294), que luchó con vano entusiasmo por introducir en las universidades el cultivo serio de las Matemáticas. Su apología de las “divinas Matemáticas”, que debían ser el fundamento de una instrucción liberal, porque “sólo ellas pueden purificar la inteligencia y preparar al estudiante para adquirir todos los demás conocimientos”, no logró triunfar de las influencias ambientales. Podemos apreciar la mezquindad de las nociones matemáticas que brindaban por aquellos tiempos las más célebres universidades a sus alumnos del *quadrivium*, cuando el mismo Bacon nos dice que en la de Oxford eran pocos los que estudiaban la Geometría más allá de la quinta proposición del libro I de Euclides: “En los triángulos isósceles, los ángulos de la base son iguales entre sí.”

La importancia de las universidades fué mucha, sin embargo, ya que la penuria de libros hacía entonces poco menos que imposible ins-

truirse de otro modo que oyendo a los grandes maestros. Esa penuria era tal, que en los claustros solían atarse con cadena, por temor de que fueran robadas, las raras copias de los libros más leídos, cuyo precio era a veces fabuloso. Giner de los Ríos (*Pedagogía Universitaria*) cuenta que, en 1044, el Obispo y Canónigos de la Catedral de Barcelona compraron un ejemplar del *Ars Prisciani*, dando por él una casa y un viñedo.

Historiemos brevemente el origen de las principales universidades fundadas en la Edad Media.

Junto a las escuelas dependientes de los monasterios y catedrales, fueron formándose asociaciones o corporaciones de maestros y estudiantes, germen de las universidades medievales (*Universitates Magistrorum et Scholarium*), cuyas fechas de fundación es generalmente difícil precisar. Cuando una de estas *universitates*, después de cierto tiempo de existencia, conseguía reunir un número considerable de alumnos, reclamaba algunos privilegios legales, como el de exigir (en teoría, por lo menos) el pago de los cursos que organizaba y el de poder otorgar títulos o grados que conferían a sus poseedores el derecho de enseñar a su vez. La creación oficial de la Universidad se hace coincidir generalmente con la concesión de esos privilegios.

Una de las más antiguas universidades de Europa así constituidas fué, según se cree, la de París, en 1200, aunque no se la conocía con el nombre de Universidad hasta 1250. Después de la de París, las universidades más antiguas e ilustres de Francia fueron las de Montpellier y Orleans. En Inglaterra, las universidades de Oxford y Cambridge recibieron sus privilegios legales en 1214 y 1231, respectivamente. Todas las grandes universidades italianas surgieron, puede decirse que a la vez, en el siglo XIII; pero la de Bolonia había precedido a las otras: en ella se expedían ya grados universitarios desde mediados del siglo XII. España se enorgullece todavía de su Universidad de Salamanca, fundada hacia el año 1239, y que, si no es la más antigua de las universidades españolas, llegó a ser la más famosa de España y una de las más famosas del mundo, en la época de su pleno florecimiento (en el siglo XVI), cuando 6 a 8 mil estudiantes la frecuentaban. La portuguesa de Coimbra (año

1290) tiene para nosotros el alto prestigio de haberse formado en ella el más grande de los matemáticos ibéricos: Francisco Gomes Teixeira (1851-1933). Siguiendo el modelo de la Universidad de París, se fundaron las universidades alemanas más renombradas: Praga (1348); Viena (1365), donde se cultivaban las matemáticas con especial dedicación; Heidelberg (1386), Colonia (1388), Erfurt (1392), Leipzig (1409).

Los alumnos solían ser admitidos muy jóvenes —aun antes de completar los doce años— a empezar los estudios del *trivium* (Gramática latina, Lógica y Retórica). El título de Bachiller en Artes, *Baccalaureus Artium*, se obtenía al final de este período y habilitaba para iniciar el *quadrivium* y para ejercer la enseñanza con ciertas limitaciones. Algunos bachilleres se dedicaban inmediatamente a aprender el Derecho civil o canónico; otros seguían por tres años más los cursos del *quadrivium* (Aritmética, Música, Geometría y Astronomía). El título de *Magister Artium*, todavía hoy corriente en las universidades de los países anglosajones, se acordaba al final de este segundo período. Al principio, este título de *Magister Artium* era un simple permiso para enseñar, y bastaba para conseguirlo haber asistido regularmente a los cursos y observado una conducta irreprochable. Pero las exigencias fueron creciendo a medida que los grados académicos de Maestro en Artes o el Doctorado o la *Licentia docendi* adquirían para su poseedor más valor práctico. Se introdujo así, además de la obligación de residir y enseñar en la misma universidad durante el plazo mínimo de un año, la de rendir pruebas de suficiencia.

Este privilegio de sólo conceder grados a los que justificaran sus conocimientos mediante examen, fué obtenido por la Universidad de París después de una incidencia que W. W. Rouse Ball relata en su *Historia de las Matemáticas*. En 1426 aquella Universidad negó la concesión de un título a cierto estudiante —un esclavo, llamado Pablo Nicolás— que no había podido pasar con éxito las pruebas requeridas, y perdía luego el pleito iniciado contra la Universidad para que le concediera, a pesar de su fracaso, el ambicionado título. Rouse Ball hace notar que a este Pablo Nicolás le cabe el honor de haber sido el primer estudiante *bochado* que menciona la Historia.

Lo que más llama la atención en la organiza-

ción original de las universidades medievales es el predominio de la influencia estudiantil. La explicación del hecho está en el interés material de las ciudades universitarias (pequeñas ciudades provinciales, muchas veces) por atraer con toda clase de franquicias y derechos a los estudiantes forasteros, que enriquecían su comercio, y también, sin duda, en la noble emulación que las llevaba a consentir los mayores sacrificios para superar a sus rivales, no sólo en la fama de los profesores, sino a la vez en el número de los alumnos. La ciudad de Bolonia, por ejemplo, llegó a gastar por año 20.000 ducados, suma equivalente a la mitad del total de sus rentas, para hacer de su Universidad —como lo fué por muchos siglos, y es todavía— una de las más ilustres del mundo. Algunas ciudades concedían a los estudiantes extranjeros la ciudadanía, la exoneración de impuestos, la liberación de ciertas penas, el derecho de ir armados. La ciudad de Padua, por los estatutos de su Universidad, se comprometía a prestar el dinero necesario a los estudiantes pobres. La gratuidad de los estudios era de regla en Italia, según Libri, y probablemente, de un modo más o menos completo, en todos los otros países. En principio, los profesores podían, es cierto, hacerse pagar los cursos *extraordinarios*, pero en la práctica, aun éstos resultaban gratuitos. El historiador de las Ciencias Matemáticas en Italia reproduce las quejas de un profesor del siglo XIII cuyos discípulos eludían el pago correspondiente a sus lecciones extraordinarias. “*Et dico vobis*”, les advertía terminando su discurso de fin de año, “*quod in anno sequenti intendo docere ordinarie bene et legaliter sicut unquam feci; extraordinarie non credo legere, quia scholares non sunt boni pagatores: volunt scire, sed nolunt solvere. Non habeo vobis plura dicere: eatis cum benedictione Domini.*”

¿Qué influencia tuvieron estas universidades en la evolución de la ciencia que nos interesa? O, para ser más concretos, ¿en que consistía la enseñanza matemática en las universidades de la Edad Media? Sería difícil, para contestar a esta pregunta, recurrir a mejor fuente que la magistral *Historia de las Matemáticas en la Antigüedad y en la Edad Media*, de Hermann Hankel. Limitémonos a traducir, corrigiendo al pasar alguna pequeña inadvertencia:

“Agregándose a la producción escrita de los matemáticos de entonces, ha de considerarse también su actividad docente en las universidades, pues la historia de estos numerosos centros orgánicos de la vida científica que al comenzar el siglo XIII surgieron en todos los países neolatinos, es indispensable para la comprensión del período siguiente.

“La enseñanza en las universidades, ampliando el horizonte intelectual hasta abarcar la literatura científica de los árabes y todos los escritos de Aristóteles, “il maestro di color che sanno”, ya no podía caber en el marco estrecho dentro del cual el siglo XI había encerrado sus modestos conocimientos. El “trivium” y el “quadrivium” perdieron su antiguo significado, o sólo servían para obtener, con el grado de bachiller, la preparación necesaria a fin de consagrarse a estudios propiamente científicos, es a saber: las obras de Aristóteles y sus comentarios.

“París, la reina de las universidades, que gozaba en todas las cuestiones científicas de una segura y decisiva autoridad, parece haber concedido durante la Edad Media, poca importancia a los estudios matemáticos. Por lo menos, es un hecho que en pleno siglo XVI son todavía frecuentes las quejas de los matemáticos que comprobaban en la enseñanza de su ciencia la incuria de la universidad. En la reforma universitaria de 1366, la única disposición referente a la enseñanza de las Matemáticas es la de que nadie podrá ser admitido “ad licentiam” si no ha asistido a la lectura de algunos libros matemáticos, “aliquos libros mathematicos audiverit”. La misma exigencia reaparece en 1452 y en 1600. Además, podemos deducir del prefacio de una obra de comentarios sobre los seis primeros libros de Euclides, publicada en 1536, que no podía conferirse la dignidad de “Magister Artium” a quien no hubiera declarado antes, bajo estricto juramento, “jurejurando arctissimo sese prænominatos Euclidis libros audivisse” (sin entenderlos quizás, pues de ello se hubiera juzgado mejor con un examen, el cual, si alguna vez tenía lugar, no iba más allá del Libro I, como lo prueba el apodo que solía aplicarse al teorema de Pitágoras con que dicho libro termina: “Magister Matheseos”). Y aún parece dudoso que se cumpliera regularmente la disposición relativa a la lectura o audición obligatoria de los primeros libros de Euclides. Obsérvase, en efecto, que un programa de cursos realmente dictados durante los años 1437 y 1438 en la Universidad de Leipzig, cuyo reglamento contenía aquella misma prescripción, no menciona al geómetra alejandrino. Tampoco parecen haberse ocupado mucho los señores profesores de este autor difícil; en todo caso no conozco ningún comentario, ninguna paráfrasis de los elementos anterior al siglo XVI, y hasta en el año 1534 el miserable extracto de Euclides hecho por Boethio se vendía a los estudiantes de París con el nombre de “Geometria Euclidis Megarensis”, pues así llamaban entonces al gran geómetra, confundiéndolo con su homónimo el discípulo de Sócrates y fundador de la escuela megárica, el cual debía, en su calidad de sofista, ser, a los ojos de los estudiantes y profesores de la Edad Media, el hombre a propósito para escribir una obra matemática.

“Mejor sitio reservó a las Matemáticas la Universidad de Praga. En ella se exigía a los futuros bachilleres asistir al curso dictado sobre la base del “Tractatus de Sphæra”, escrito por Sacrobosco en 1250. Este tratado, que sirvió de texto por más de cuatro siglos en todas las universidades, a través de innumerables comentarios, explicaba los principios de la Astronomía esférica y de la Geografía matemática, así como los fenómenos más sencillos de la bóveda celeste; todo ello, es verdad, sin aplicar proposiciones matemáticas, desde que su lectura figuraba al comienzo de los estudios. Pero al “Magister Artium” no sólo se exigía la asis-

tencia al curso en que se explicaban los seis primeros libros de Euclides, sino también, de acuerdo con la extensión del antiguo "quadriuvium", Música teórica y otros conocimientos de Matemática aplicada. Para adquirir éstos, debían oír lecciones de "Theorica Planetarum" en el texto vastamente comentado, ampliamente divulgado y detestable de Gerardo de Cremona, texto que ya había sido objeto de vehementes ataques por parte de Regiomontano (1436-1476); y debían además seguir un curso de Perspectiva común, que era como llamaban entonces a la Óptica. Esta ciencia, después de conocida por sus traducciones al latín y al italiano la Óptica de Alhazen (siglo XI), escrita originariamente en árabe, atraía vivamente el interés de muchos sabios, entre otros Rogelio Bacon (muerto poco antes de 1300); Witelo (latinizado en Vitellius), nacido en el siglo XIII en Polonia de padre turingio, y John Pechham (disparatadamente latinizado en Pisanus), muerto en 1292 y cuyo tratado sobre esta materia era el más difundido de todos. También se dictaban en Praga, en el siglo XIV, cursos de Calendario, de Cálculo digital a la manera antigua, de Algoritmo y Aritmética; pero, sobre todo, se explicaba el *Almagesto* de Ptolomeo, en una larga serie de lecciones, lo que constituía la gran distinción de esta Universidad. Con excepción de la enseñanza de la Astronomía, las circunstancias eran las mismas en la Universidad de Leipzig, hija espiritual de la de Praga, y en la de Colonia, fundada en 1388 sobre el modelo de la de París; y para que se juzgue de cuán pequeñas eran las variaciones que sufría la enseñanza universitaria en el espacio y en el tiempo, baste citar el hecho de que, en los primeros decenios del siglo XVI, en Leipzig se daban las mismas lecciones y se usaban los mismos textos que en Praga al fin del siglo XIV.

"Las Matemáticas ocupaban en las universidades italianas de Bolonia, Parma, Pisa, el mismo rango que en las de Francia y Alemania; sólo que en Italia, donde la Astrología gozaba de más crédito que en ningún otro país, esta pretendida ciencia era materia de cursos especiales. Así vemos al profesor de Matemáticas de la Universidad de Pisa, todavía en el año 1598, explicar, no el *Almagest*, sino una obra astrológica, también atribuida al autor del *Almagesto* con el título de "Quadrupartitum".

"Los hombres de la Edad Media se interesaban preferentemente por las cuestiones escolástico-teológicas y estético-literarias. A cada facultad le llega el período propicio para su desarrollo, que suele alcanzar su apogeo independientemente de las causas exteriores. Sería ridículo achacar a la influencia "clerical" o a la "grosera superstición" reinantes en la Edad Media, la penuria de la producción matemática. Que se nos muestre, si se quiere aducir un argumento serio, a un solo hombre de aquellos tiempos con pasta de gran matemático.

"Después de cuanto dejamos dicho, concluye Hankel, la incapacidad de toda la Edad Media para el trabajo matemático no necesita de más demostración."

Permítasenos, antes de dar fin a esta conferencia, agregar algunas palabras destinadas a completar la exposición de Hankel.

No sería exacto ni razonable creer que la Edad Media haya sido, como todavía lo suponen algunos retardados, una especie de noche milenaria, durante la cual el espíritu humano duerme un torpe sueño, que no interrumpen ni el resplandor de las hogueras encendidas por el fa-

natismo, ni el estrépito de las guerras de religión o de rapiña.

Desde hace algunos años, el estudio imparcial y penetrante de los hombres y las cosas de la Edad Media va destruyendo el exagerado des crédito que pesaba sobre ella.

La escuela neo-tomista ha rehecho el concepto que se tenía de la Filosofía medieval. La Historia literaria ha rehabilitado la obra de los pro-sistas y más aún de los poetas cristianos, que lograron crear (antes de que las lenguas romances empezaran a producir, dentro todavía de la Edad Media, sus primeras obras maestras) un latín apenas diferente del clásico, pero bastante evolucionado sin embargo para poder expresar —con singular encanto muchas veces— los delicados matices de una sensibilidad nueva.

¿Y qué decir de aquella original arquitectura gótica, sublime concretización del fervor religioso, que en el siglo XI "cubrió el suelo de Europa de un blanco manto de catedrales"; o del canto litúrgico inventando el contrapunto, "cuna de la armonía y de todo el arte musical moderno"?

En la técnica de las más diversas profesiones y oficios, la lista de los descubrimientos correspondientes a esta época, es tan larga como importante. Un sabio escritor francés, M. Lefebvre de Noëttes, publicaba recientemente un inventario de estos descubrimientos. Entre ellos figuran los siguientes: el sistema moderno de tiro para los vehículos a tracción de sangre; el adoquinado de las calles y carreteras; los molinos de agua y de viento; el aserradero mecánico; la fragua de martinete; el fuelle de válvula; el timón de codaste; la esclusa; la pólvora; el reloj de pesas; las gafas; el cepillo de carpintero; la imprenta.

Completamente estéril en frutos matemáticos, la Edad Media abunda en otras producciones de la inteligencia.

Así pues como el florecimiento de las Matemáticas alejandrinas coincide con una decadencia completa de la Filosofía, la Literatura, las Bellas Artes,— en la Edad Media la inercia matemática coexiste con una actividad bastante intensa y eficaz en otros dominios.

La Historia de los adelantos de nuestra ciencia aparece, en verdad, como lo dice Hankel, independiente de las circunstancias exteriores, y, lo que es más raro, agregaríamos nosotros, *incluso del estado contemporáneo de la cultura general.*

Nota sobre Fotoelasticimetría

ING. J U L I O R I C A L D O N I

Las experiencias que detallamos a continuación son los primeros trabajos que se han ejecutado en el Laboratorio de Fotoelasticidad de la Facultad de Ingeniería, creado por resolución de su Consejo Directivo en la sesión del día 20 de diciembre de 1932, por iniciativa del Decano Ing. Vicente I. García ⁽¹⁾.

Este Laboratorio fué dotado de un Fotoelasticímetro construido por la casa A. Jobin et G. Iyon (de París), de acuerdo con las indicaciones del Prof. Mesnager, aparato que, de acuerdo con referencias que tenemos, es superior a la mayor parte de los similares, por la perfección de su construcción. El Fotoelasticímetro fué armado e instalado en enero de 1934, procediéndose de inmediato a su ajuste y a estudiar su funcionamiento, por otra parte muy sencillo; su constitución es.

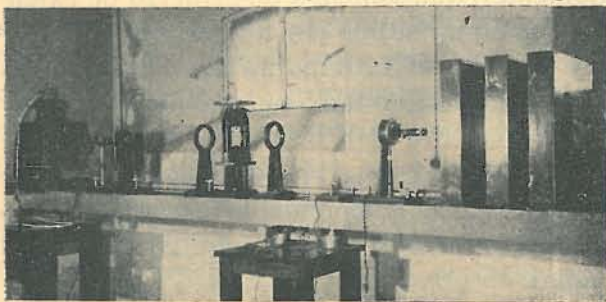


Fig. 1

en general, semejante a la de todos los aparatos para el estudio de las tensiones internas, con excepción del medidor de la birefringencia (Fig. 1).

Consta de un banco de fundición de 4 mts. de largo provisto de dos ranuras fresadas que permiten el desplazamiento sin juego de todos los elementos de que se compone el aparato.

En la Fig. 2 damos un esquema en que indicamos dichos elementos con las siguientes letras:

A—Linterna para iluminación de gran intensidad, destinada a la fotografía, dibujo o proyección.

B—Lámpara de cinta de tungsteno para observación visual.

C—Prisma de reflexión total, movable, que permite la utilización de uno u otro de los sistemas de iluminación citados.

D—Prisma de Nicol polarizador, *écran* para luz monocromática y lámina cuarto de onda.

E—Lentes.

F—Lugar de un patín destinado al uso de un compensador (Babinet, Bravais, etc.), no adquirido todavía.

G—Prisma de Nicol analizador, lámina cuarto de onda y dispositivo de medida de la birefringencia con anteojo de observación.

H—Árbol longitudinal que hace girar los prismas de Nicol, manteniéndolos cruzados o en cualquier otra posición relativa.

I—Cámara para fotografía y dibujo.

S—Espacio destinado al modelo a estudiar.

Como vemos, con excepción de la falta de compensador, el aparato no tiene diferencias con el

ESQUEMA DEL FOTOELASTICÍMETRO MESNAGER

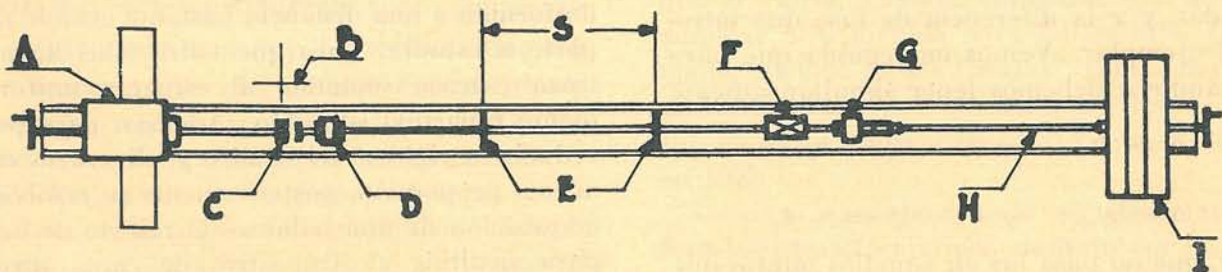


Fig. 2

(1) Actualmente este Laboratorio se ha transformado en el Laboratorio de Estática Experimental, de acuerdo con lo dispuesto por el Consejo Directivo el 12 de febrero de este año, a propuesta del Decano Ing. Luis Giorgi.

de Coker, Zeiss, etc.; en efecto, aquél es sustituido, en el aparato fabricado por Jobin et Yvon, por un dispositivo de H. Tardy creado en 1929

para medir la birefringencia de los cristales usados en óptica. Este dispositivo, que hace innecesario el uso del compensador exceptuando ciertos casos especiales, es de una extrema sencillez y tiene la enorme ventaja de que no agrega ningún elemento óptico al fotoelasticómetro en sí mismo. Dicho sistema consiste en un mecanismo que permite girar al prisma analizador con respecto al resto del sistema, teniendo un limbo graduado para medir ese ángulo, que está dividido en centésimas de longitud de onda para la luz verde utilizada ($\lambda = 0.546 \mu$) y que nos da directamente la birefringencia en el punto observado. Para proceder a una medida se orienta primero el fotoelasticómetro con sus ejes de polarización paralelos a las tensiones principales, lo que se consigue utilizando luz polarizada rectilíneamente (para lo que no hay más que poner las láminas cuarto de onda de manera que sus ejes coincidan con los de los prismas) y entonces girando el conjunto hasta que se produzca extinción. Se giran entonces los cuarto de onda para tener luz circular y se gira el goniómetro, es decir, el prisma analizador, hasta que vuelve a producirse la oscuridad que había desaparecido al usar la luz circular: el doble del ángulo que forma el prisma en este momento es igual a la birefringencia expresada por la diferencia de fase. En efecto, la intensidad de la luz que pasa del sistema al observador está dada por la expresión o, mejor dicho, es proporcional al factor:

$$K = \sin^2 \left(\frac{x}{2} - \theta \right) + \sin x \cdot \sin 2\theta \cdot \sin^2 \alpha \quad (1)$$

en donde α es el ángulo que forman las tensiones principales con un eje origen inclinado 45° respecto al eje de la segunda lámina cuarto de onda; θ el ángulo, con ese mismo origen, que forma la vibración luminosa que deja pasar el analizador, y x la diferencia de fase que introduce el ejemplar. Vemos en seguida que para que se anule K debemos tener simultáneamente

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 & y & \quad x/2 = \theta_1 \\ \alpha &= \pi/2 & y & \quad x/2 = -\theta_1 \end{aligned}$$

es decir, que no pasa luz en aquellos puntos que además de tener sus tensiones principales como dijimos anteriormente, introducen una diferencia de fase igual a 2θ o sea un retardo relativo de los dos rayos emergentes del ejemplar igual a:

$$\delta_s = \frac{x}{2} \frac{\lambda}{\pi} = \frac{\theta_1 \lambda}{\pi} \quad (2)$$

siendo λ la longitud de onda de la luz utilizada.

Para la verificación de métodos y material hemos estudiado dos ejemplares cuyas tensiones ya son conocidas por los trabajos de Heymans ⁽¹⁾ y Coker, de manera de poder comprobar nuestros resultados; esos dos tipos hubo necesidad de tomarlos dentro de una misma clase de sollicitación, para evitar la fabricación de dos cuadros dinamométricos distintos, lo que hubiera retardado y encarecido las experiencias, puesto que era fácil imaginarse que, por falta de documentación al respecto, dichos cuadros tuvieran fallas que recién se pueden apreciar después de ejecutar algún trabajo, como sucedió efectivamente. El cuadro dinamométrico utilizado en estas experiencias es en definitiva una simple balanza con brazos desiguales (relación de $1/10$ aproximadamente), que somete a un esfuerzo de extensión al ejemplar sujeto por un perno fijo al cuadro, y por otro al extremo menor del brazo; en el cuadro construido hubo necesidad de sustituir las articulaciones del brazo por cuchillos de balanza, debido a que el frotamiento era muy grande cuando se aumentaba la carga, que como máximo la hemos llevado hasta 120 kgs. en el ejemplar.

Entre otros defectos de detalle se encontró que para casos semejantes a los tratados en este artículo, en que se supone la pieza sometida a un esfuerzo normal uniformemente repartido sobre su sección transversal, la distancia entre pernos es muy pequeña en relación a la mayor dimensión transversal, por lo que los esfuerzos debidos a la aplicación de la carga en forma concentrada por el perno en un orificio del ejemplar, no se uniforman a una distancia bastante grande de la parte a estudiar para que entre ellas haya un trozo extenso sometido al esfuerzo uniformemente repartido supuesto. Además, para poder reducir la rigidez del cuadro y aligerarlo en la misma proporción, posteriormente se resolvió la adquisición de una balanza de resorte de Coker para sustituir al dispositivo de carga directa, pues su exactitud es suficiente; esta balanza se ha montado en un cuadro dinamométrico cuyo esfuerzo se aplica por medio de un tornillo.

(1) P. Heymans, *La Photoélasticité*.

Los ejemplares estudiados son piezas prismáticas rectas en las que se ha practicado, o bien dos entalladuras semicirculares laterales formando un estrechamiento de la sección (ejemplar N.º 1) o bien un orificio con centro en el eje longitudinal (ejemplar N.º 2). Para cada tipo se estudió un solo ejemplar, por tratarse de un trabajo de verificación; pero, sin embargo, hemos creído conveniente agregar los resultados provenientes de los diversos elementos (diámetros de entalladuras y orificios en relación al ancho de la pieza) y que se justifican en los estudios de Coker, que han sido hechos sobre 3 ó 4 ejemplares de proporciones diferentes.

II

De las tres magnitudes que nos definen las tensiones en un estado elástico doble:

1) y 2), intensidad y sentido de las dos tensiones principales, y

3), dirección de dichas tensiones, podemos determinar directamente con los elementos de que disponemos, solamente la dirección de las tensiones principales y una relación lineal entre las intensidades de las dos tensiones principales: su diferencia.

En efecto, la dirección de las tensiones en todos los puntos del ejemplar la tenemos trazando las líneas "*isoclinas*", que son el lugar de los puntos en los que las direcciones principales (direcciones de las tensiones principales) son paralelas a direcciones fijas. A su vez, las isoclinas las obtenemos observando el ejemplar con luz polarizada rectilíneamente, puesto que, como sabemos, la luz se extingue en todos los puntos en los cuales sus direcciones principales coinciden con los ejes del polariscopio. Haciendo recorrer a éstos, girando el conjunto analizador-polarizador, todo un cuadrante (por ejemplo, de 0 a $\pi/2$) tenemos una red de isoclinas que nos cubre forzosamente el ejemplar entero; prácticamente se registrarán las isoclinas correspondientes a un cierto número de ángulos con la dirección fija, más o menos numeroso según sea la complicación de dicha red, pudiéndose deducir el ángulo correspondiente a cualquier punto intermedio por interpolación ⁽¹⁾.

El registro de las isoclinas se puede hacer dibujándolas directamente sobre un calco o por fotografía; en el ejemplar N.º 1 utilizamos el primer método para todas las isoclinas, mientras que en el N.º 2 se utilizó el segundo para las isoclinas de parámetros 0º y 4º, pues se necesitaba mayor exactitud, como después veremos.

El otro parámetro que podemos hallar con el fotoelasticímetro es la birefringencia artificial, o sea la diferencia de marcha introducida entre los dos rayos propagados según las tensiones principales, al someter a esfuerzos al ejemplar; la diferencia de las tensiones principales podemos tenerla a partir de este valor aplicando la ley de Wertheim, expresada por:

$$\delta_3 = c \cdot e (P - Q) \quad (3)$$

en que P y Q son las tensiones principales, e el espesor del ejemplar, y c una constante que depende solamente del material utilizado y de la longitud de onda. Luego, pues, podemos hallar $(P - Q)$ por intermedio de δ_3 , utilizando un compensador, o el goniómetro de Tardy, como en nuestro caso, midiendo esa diferencia de marcha en una serie de puntos fijados de antemano en las secciones que nos interesen o distribuídos por todo el ejemplar, según sea el caso; es necesario recordar que hay que conocer para ello el ángulo α de las tensiones en cada punto que se quiera estudiar y esa determinación convendrá hacerla generalmente punto por punto (por su mayor precisión respecto al uso de isoclinas), salvo el caso, muy general, en que los puntos elegidos sean tales que se conozca α previamente, como sucede en los bordes libres del ejemplar y en sus ejes de simetría. Pero, si se emplea la Bakelita o sustancias análogas, que tienen, como veremos, un coeficiente c mucho mayor que el vidrio, xilonita, celuloide, etc., se puede emplear otro método para hallar $(P - Q)$, llamado "*método de las franjas*", usado ahora casi exclusivamente por los norteamericanos y que fué empleado por primera vez por el Dr. Tuzi en 1927.

Sabemos que observando un ejemplar en el fotoelasticímetro aparece cubierto por una serie de bandas de diferente color (cuando se usa luz

(1) El método expresado es el que se utiliza comunmente como más práctico y de acuerdo con los fotoelasticímetros de nuestro tipo. Favre recomienda, en cambio, determinar la incli-

nación de las direcciones principales en una serie de puntos establecidos de antemano por observación individual; esta manera no es más que la consecuencia del aparato y método usados para toda la investigación.

blanca) llamadas "isocromáticas" y que corresponden, según lo establece la ley de Wertheim, al "lugar de los puntos en que la diferencia de tensiones ($P - Q$) es constante" o también al "lugar de los puntos en que el esfuerzo tangencial máximo es constante", ya que se tiene la ecuación conocida de elasticidad plana:

$$P - Q = \sqrt{(R_x - R_y)^2 + 4S^2} = 2S_{\max} \quad (4)$$

Ahora bien: si usamos en cambio luz monocromática, las isocromáticas se reducirán a una serie de líneas oscuras correspondientes a los puntos en que δ_3 es igual a un número entero las longitudes de onda; además de la (3) deducimos, siendo n un número entero, para cualquier franja oscura:

$$(P - Q)_n = \frac{n\lambda}{c \cdot e} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Es decir, que para un material cuya constante c sea muy grande (en relación a los materiales usados anteriormente), vemos que el incremento que sufre ($P - Q$) al pasar de una franja a otra y que es igual a $\frac{\lambda}{ce}$ es pequeño; de manera que

la red de isocromáticas estará formada por líneas bastante cercanas unas de otras, lo que nos dará con una exactitud suficiente el valor de ($P - Q$) en cualquier punto de la lámina. El método de las franjas consiste en fotografiar el ejemplar observado en luz circular e interpretar la imagen como un plano de curvas de nivel cuyas alturas son iguales a ($P - Q$); para acotar dichas curvas no hay más que tener en cuenta la continuidad de los esfuerzos, auxiliándose en todo caso con la observación en luz blanca o variando algo la carga.

El método del Dr. Tuzi tiene la ventaja de la economía de tiempo y también que anula el efecto de la variación de c con el tiempo que veremos más adelante, lo que compensa en mucho su algo menor exactitud; es claro que en el caso de existencia de fuertes tensiones iniciales, este método pierde todas sus ventajas y no hay más remedio que recurrir a la doble observación visual.

Estas dos propiedades fundamentales que acabamos de ver y que son la base de la fotoelasticidad, pueden agruparse en una sola ecuación, o, mejor dicho, se puede establecer una ecuación, partiendo del estudio de las láminas cristalinas y agregándole la ley de Wertheim, de la que se deducen en seguida esas dos propiedades.

Sabemos que un ejemplar de vidrio, celuloide, etc., cuando se le somete a fuerzas exteriores pierde su isotropía primitiva y se convierte en un material dotado de una estructura igual que la de los cristales con doble refracción, es decir, que tendrá entonces sus dos ejes de polarización y dos índices de refracción, n_e y n_o correspondientes al rayo extraordinario y ordinario, respectivamente. Podremos entonces aplicarle las ecuaciones que da la óptica física para el estudio de las láminas cristalinas.

Así tenemos que para el caso de una lámina cristalina observada en un polariscopio plano, con nicols cruzados como es el fotoelasticómetro cuando se emplea luz rectilínea, con luz monocromática, la intensidad de la luz analizada está dada por la expresión:

$$I = I_0 \cdot 4 \sin^2 2\Phi \left[\frac{n_1^2}{(n_1 + 1)^4} + \frac{n_2^2}{(n_2 + 1)^4} - \frac{2n_1n_2}{(n_1 + 1)^2 (n_2 + 1)^2} \cos 2\pi\varrho \right] \quad (6)$$

en la que se indica con Φ el ángulo que forma el eje de la lámina con la dirección de polarización del polarizador; con n_1 y n_2 los índices de refracción correspondientes a los dos rayos que la atraviesan; con I_0 la intensidad de la luz analizada, y siendo ϱ igual a

$$\varrho = \frac{c}{\lambda} (n_1 - n_2) \quad (7)$$

Ahora bien; para las investigaciones de fotoelasticidad, en que siempre se obtiene una doble refracción *extremadamente pequeña* comparada con los índices de refracción, podemos escribir, *aproximadamente*, que:

$$\frac{n_1}{(n_1 + 1)^2} \cong \frac{n_2}{(n_2 + 1)^2} \cong \frac{n}{n + 1}$$

y la expresión anterior puede escribirse:

$$I = I_0 \cdot \sin^2 2\Phi \cdot \frac{16 n^2}{(n + 1)^4} \sin^2 \pi\varrho$$

Además, por la ley de Wertheim tenemos que:

$$\delta_3 = c \cdot e \cdot (P - Q)$$

y por otra parte:

$$\delta_3 = (n_1 - n_2) e = \varrho \lambda$$

sustituyendo en la anterior, nos queda:

$$I = I_0 \cdot \sin^2 2\Phi \cdot \frac{16 n^2}{(n + 1)^4} \cdot \sin^2 \left[\pi \frac{ce}{\lambda} (P - Q) \right]$$

o también:

$$I = I_0 \cdot \sin^2 2\Phi \cdot \frac{16 n^2}{(n+1)^4} \cdot \sin^2 \pi \frac{\delta_3}{\lambda} \quad (18)$$

Vemos en seguida aquí que la luz se extinguirá cuando se tenga uno de estos casos:

a) Que sea $2\Phi = 0$, es decir, que coincidan los ejes de la lámina con los de los nicols, lo que sucede para las isoclinas.

b) Que se tenga $\delta_3 = k\lambda$ o $(P-Q) = k \frac{\lambda}{ce}$ precisamente la ec. (3) que nos daba las isocromáticas.

No es necesario hacer notar que si usamos luz blanca en cambio de luz monocromática, la condición a) no queda influida en nada, pero que, en cambio, en la b) vemos que esa condición se cumplirá, en cada punto de la lámina, con un valor dado de $(P-Q)$, para una sola radiación a la vez, con excepción del caso en que se anule $(P-Q)$ debido a que existan los valores siguientes:

$P=Q$ o bien $(P-Q) = 0$ con P y $Q \neq 0$ casos que constituyen puntos singulares de la lámina. Eso significa que en el caso general, aparecerá en cada punto el color complementario del extinguido, dando la imagen coloreada, comúnmente conocida, con las verdaderas isocromáticas.

Finalmente, en el caso en que se quiere evitar el efecto a) se sustituye el polariscopio plano por uno circular, como ya lo dijimos; entonces la expresión de la intensidad recibida por el observador es:

$$I = I_0 \sin^2 \frac{X}{2} = I_0 \cdot \sin^2 \pi \varphi$$

o sea:

$$I = I_0 \cdot \sin^2 \pi \frac{\delta_3}{\lambda} \quad (9)$$

Hemos hallado, por lo tanto, para cualquier punto de la lámina, los valores de $(P-Q)$ y α ; para resolver completamente el problema nos falta separar esas dos tensiones. En ausencia de un latómetro o extensómetro que nos permita hallar $(P+Q)$ por medio de la expresión de la contracción transversal

$$\Delta e = \frac{E}{\eta} (P+Q) \quad (10)$$

ecuación que, empleada por primera vez por Mesnager en 1900, permitió la aplicación práctica de la fotoelasticidad, o por medio de cual-

quier otro sistema de los hallados posteriormente, hemos debido recurrir al empleo de la integración gráfica a lo largo de las isostáticas, determinadas a partir de las isoclinas por la construcción gráfica conocida.

Las expresiones respectivas, obtenidas por Filon en 1923 a partir del teorema de Mesnager sobre equilibrio de un elemento limitado por superficies isostáticas, son:

$$P = P_0 - \delta \Phi \int_0^{s_1} \frac{P-Q}{y} ds_1 \quad (11)$$

$$P = P_0 + \int_0^{s_1} (P-Q) \cot \beta \cdot d\phi$$

la primera para el caso de que la isostática empleada coincida con una isoclina, lo que sucede generalmente en los ejes de simetría, y la segunda para los demás casos. En ellas se indica con y el segmento interceptado normalmente a la isoclina coincidente con la isostática sobre la que se efectúa la integración, entre ésta y otra isoclina cuyo parámetro α difiere en $d\phi$; con ds un elemento diferencial de aquella misma isostática, y finalmente con $d\phi$ el incremento que sufre α en las diversas isoclinas que cortan la isostática, formando con ésta un ángulo β . Haremos notar que la isostática sobre la que se integra es la correspondiente al esfuerzo P y que P_0 es la tensión que se toma como punto de partida, que es cero si se parte normalmente al contorno libre del cuerpo, o conocida con anterioridad.

Estas expresiones no dan en la práctica resultados tan exactos en la búsqueda de P y Q , como cuando se utiliza otra determinación independiente, debido a que las isoclinas no aparecen como líneas sino como bandas de un cierto espesor, lo que dificulta su representación exacta, especialmente, nos parece, para la aplicación de la segunda ecuación; se mejora este trazado substituyendo, para las isoclinas utilizadas en la integración gráfica, el dibujo por la fotografía con luz monocromática.

Por otra parte, las isostáticas nos pueden dar por sí solas, y sin llegar a la determinación de P y Q por separado, ciertas indicaciones sobre sus intensidades, deducidas también por Mesna-

ger del ya citado teorema de las isostáticas y que es interesante recordar:

1) Cuando las líneas isostáticas son paralelas, los esfuerzos son uniformes; las isostáticas convergentes corresponden a esfuerzos crecientes y las divergentes a esfuerzos decrecientes.

2) Los incrementos de las tensiones principales son del mismo signo cuando, al seguir a lo largo de las isostáticas, uno se dirige de un mismo lado de una isoclina.

3) Todo punto en que la isostática de una familia presenta un punto de inflexión, es un punto de máximo o de mínimo para la tensión paralela a la otra familia.

4) Para la tensión paralela al contorno, el máximo se produce en el lugar en que la isoclina es normal al contorno. Además, cuando se aleja del centro de curvatura de una isostática, la tensión principal paralela al desplazamiento se aproxima a cero si ella es la más grande en valor absoluto. Si es la más pequeña en valor absoluto, el aumento de esta tensión tiene el signo de la tensión perpendicular. En particular en la superficie, la tensión normal es nula.

Luego, si la superficie es cóncava, penetrando en el sólido se encuentran tensiones principales normales a la dirección de la superficie que tienen el signo de la tensión paralela a esta superficie, y el signo contrario si la superficie es convexa. Si el radio es muy pequeño, la variación de esas tensiones es muy rápida.

De manera que si empezamos a trazar las isostáticas en una región de esfuerzos uniformes, dándoles una separación constante, podremos luego tener una idea de los lugares en que las tensiones sean mayores o menores, observando dónde esa separación haya aumentado o disminuido, respectivamente.

Pasaremos ahora a exponer los resultados de las experiencias efectuadas (1), pero antes nos parece útil decir algunas palabras sobre el valor relativo que, para el cálculo de estructuras o piezas de máquinas, tienen los valores de $(P-Q)$ observados directamente, respecto a los valores aislados P y Q de dichas tensiones principales. Ese valor, en efecto, depende exclusivamente del criterio que se tenga para establecer si una pieza está trabajando o no en forma segura, es decir, de saber si hay peligro o no de que su resistencia

no esté de acuerdo con los esfuerzos que debe soportar o con la energía que va a almacenar.

Pues bien; ese problema no tiene una contestación categórica. Los criterios de rotura o de *falta de la elasticidad perfecta* (failure of perfect elasticity), que es lo que en rigor se ha establecido en esos criterios, son muchos y completamente diferentes uno de otros. A estos podemos reunirlos, siguiendo a Coker, en dos grandes grupos, según que tenga como base un solo parámetro (esfuerzo o deformación) o bien que esa sea una función de varios de ellos.

a) Criterios simples:

1. — Esfuerzo principal máximo P constante. (Navier, Lamé, Clebsch, Rankine.)

2. — Deformación principal máxima s constante. (Mariotte, St. Venant, Bach.)

3. — Esfuerzo tangencial máximo S constante. (Coulomb.)

4. — Diferencia de los esfuerzos principales máximo y mínimo $(P-Q)$ constante. (Tresca, Guest.)

b) Criterios múltiples:

1. — Energía de deformación unitaria máxima W constante. (Haigh, Beltrami, von Mises.)

2. — Cualquier esfuerzo representado por el círculo de Mohr cuando toque la curva $S=f(R)$. (Mohr, Mesnager.)

De estos criterios, sólo ha sido unánimemente reconocido como inexacto el de Rankine; sobre los demás no hay todavía opinión uniforme, especialmente en lo que se refiere al criterio de Mohr, que es muy moderno y no puede haber sido suficientemente verificado. Y ahora, en lo que respecta a nuestro objeto, podemos agruparlos, uniéndolos por un lado los criterios a-3 y a-4, que tanto uno como el otro dependen del valor de $(P-Q)$ (aunque difieren en el plano de rotura y en la forma que se produce), y por otro los restantes, que exigen, en forma explícita o no, el conocimiento independiente de P y Q (o de los tres esfuerzos principales, en el caso de elasticidad a tres dimensiones).

De manera que el valor de $(P-Q)$ es algo más que un simple pasaje en la determinación de P y Q , sino que además es un resultado que tiene un valor por sí mismo y que podría ser fundamental para juzgar de la seguridad de una estructura. Tanto es así que, adoptando la teoría de Guest como la más apropiada para los metales, Solakian y Karelitz, en un trabajo muy com-

(1) La experiencia N.º 1 la eliminamos, porque se trata de una simple verificación.

pleto sobre chavetas y chaveteros, limitan su estudio al trazado de las isocromáticas, deduciendo de ellas los efectos de sus formas por el cálculo del mayor esfuerzo cortante. Al final del trabajo, uno de cuyos autores haremos notar que es Ingeniero de la Westinghouse, dicen: "Como en general la mayor parte de las fallas de órganos de máquinas y miembros de estructuras se deben al efecto del esfuerzo tangencial máximo, el conocimiento de su dirección así como el de su magnitud es de gran importancia para el proyectista, para la predeterminación de la probable sección de ruptura debido a un esfuerzo mayor".

De acuerdo con esto, dice también Heymans: "La tensión media relativa a una sección de área finita no es un elemento que permita determinar el grado de seguridad de una pieza. La mayor tensión principal es un elemento que permite, en general, una mejor apreciación de las condiciones de resistencia, pero se admite actualmente que es necesario completarla por la limitación de la mayor diferencia (en un mismo punto) de las tensiones principales (teorías de Tresca y Coulomb). Notemos que los valores de estas diferencias ($P - Q$) de las tensiones elásticas principales son obtenidas directamente por las medidas hechas con ayuda de la luz polarizada."

III

La mayor dificultad, casi diríamos la única que se nos presentó al comenzar nuestros trabajos, fué la elección del material a usarse para la ejecución de los ejemplares. El primero que utilizamos fué xilonita (creemos que de fabricación alemana), en chapas de 3.75 mm. de espesor, que aunque posee tensiones iniciales pequeñas, tiene el gran defecto de ser muy poco ho-

gica). Puede verse que las isoclinas carecen completamente de nitidez, tanto por sus irregularidades, como también por el espesor, lo que impide su dibujo, y que toda su superficie está llena de manchas y además aparece una especie de trama interna. Su superficie es también difícil de pulir y de poca transparencia. La observación de la birrefringencia da valores irregulares y desconcertantes, que no pueden atribuirse completamente a las tensiones iniciales, puesto que hicimos para el ejemplar de la experiencia N.º 1 una observación doble, es decir, hallamos los valores de la inclinación α de las tensiones y su diferencia ($P - Q$), para dos estados de carga diferentes (y que repetimos para diversos pares de valores), deduciendo después los valores correspondientes a la diferencia de las cargas por medio de las expresiones:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{r_1 \operatorname{sen} 2\alpha_1 - r_0 \operatorname{sen} 2\alpha_0}{r_1 \cos 2\alpha_1 - r_0 \cos 2\alpha_0}$$

$$r^2 = r_1^2 + r_0^2 - 2 r_1 r_0 \cos (\alpha_1 - \alpha_0)$$

Pues bien; aun los valores de α y $r = ce (P - Q)$ que hemos hallado en esta forma, presentan innumerables variaciones bruscas, que demuestran con toda probabilidad una variación de la constante óptica c de un punto a otro del ejemplar.

En vista de estos inconvenientes y de la imposibilidad de conseguir aquí otro material análogo, pensamos en utilizar el vidrio, que fué el primer material utilizado para investigaciones fotoelásticas por Mesnager. Este material tiene en su favor la ausencia casi absoluta de tensiones iniciales y su homogeneidad, pero en cambio, para obtenerse el efecto coloreado, es decir, para que la birrefringencia accidental alcance cierto valor, deben aplicarse cargas muy grandes y emplear cristales de mucho espesor, debido a que c es muy pequeño; sin embargo,



Fig. 3

mogénea, como se ve claramente en la fig. 3, que es la fotografía de un ejemplar de xilonita en luz polarizada rectilíneamente (luz monocromá-

nuestra prueba no fué de larga duración, pues fué imposible encontrar quien fabricara los ejemplares en forma suficientemente exacta: los



bordes no se pudieron hacer en ángulo recto y sin roturas que hicieron imposible las medidas en la periferia del cuerpo, generalmente las más importantes, y los cortes no seguían tampoco las líneas marcadas. Por todas estas causas hubo que eliminar completamente este material, cuyas cualidades y defectos pueden apreciarse exactamente en la fotografía reproducida en la fig. 4, que ha sido sacada en las mismas condi-



Fig. 4

ciones que la fig. 3, haciendo notar que las sombras de la parte superior e inferior son debidas a la forma de sujeción de la pieza.

Posteriormente, en un número de *Proceedings* encontramos referencias sobre la bakelita, preparada especialmente para la fotoelasticidad por la Bakelite Corp. de Estados Unidos de América. Este material, que adoptamos para nuestras primeras experiencias, presentó al principio no pocos problemas, que aún no consideramos resueltos completamente. El primero es el pulido, pues las caras vienen en bruto completamente. A falta de dispositivos mecánicos apropiados se encontró que el mejor procedimiento es emplear sucesivamente papel de lija hasta sacar los surcos más profundos y luego papel de esmeril muy fino y trípoli aplicado con una gamuza hasta eliminar completamente todas las rayas, lo que exige de siete a ocho horas de trabajo por ejemplar, pues hay que cuidar al mismo tiempo de mantener el paralelismo de sus caras. Este asunto se complicó cuando procedimos a recocer, como indicaremos más adelante, los ejemplares pulidos: piezas que aparecían completamente desprovistas de rayas, presentaban, después de re-

cocerlas, unas líneas circulares que tenían la superficie en bruto antes de pulirla. Comprobado que aparecían por más adelante que se llevara el pulido propiamente dicho, como si el material estuviera afectado más profundamente que hasta donde llegaban los surcos, vimos la necesidad de gastar hasta 0.25 mm. de profundidad cada cara con el papel de lija, para luego proceder al pulido; en esa forma pudimos evitar ese inconveniente, como puede apreciarse en las fotografías de la experiencia N.º 2 ⁽¹⁾.

El segundo problema a resolver fué la eliminación de las tensiones iniciales que presenta la bakelita, que son mucho mayores que las de cualquier otro material, y a las que se suman las tensiones producidas por el corte y pulido de los ejemplares. Al principio probamos a hacerlo calentando el ejemplar en una estufa de aire hasta 80° u 85° centígrados rápidamente, dejándolo luego a esa temperatura durante una hora y enfriando hasta la temperatura ambiente a razón de 5° a 6° por hora, siguiendo las indicaciones dadas por Solakian, Karelitz y Frocht en artículos aparecidos en las *Transactions* de la A. S. M. E. El resultado fué mediocre, y aun después de repetir el tratamiento quedaban tensiones de relativa importancia en lo que se refiere al trazado de las isoclinas, cuya determinación debe hacerse con cargas pequeñas.

Este procedimiento —muy rápido desde luego— tuvo que ser sustituido entonces por otro que indican los fabricantes de la bakelita y que consiste en colocar el ejemplar en un recipiente con aceite mineral y calentarlo, también en una estufa de aire, hasta 130° a razón de 1° por hora, dejarlo a esa temperatura durante una hora, más o menos, y luego volver hasta la temperatura ambiente a la misma velocidad, tratamiento que dura, por lo tanto, de 8 a 9 días. Este procedimiento, que exigió aplicar un movimiento de relojería al regulador de temperatura de la estufa (que era de temperatura constante), puesto que la pérdida de calor propia alcanza a 15° ó 20° por hora, dió resultados mucho mejores que el anterior, y se obtuvo, mediante un segundo recocido, una eliminación momentánea casi absoluta de todas las tensiones iniciales en los ejemplares que necesitaban poco trabajo de

(1) Este inconveniente apareció recién cuando se utilizó el recocido a 120° que se empleó por primera vez para el ejemplar destinado a la segunda experiencia.

corte, como los ejemplares números 1 y 2; lo que permitió hacer las observaciones correspondientes a este último con toda exactitud. Pero cuando se trató de cortar los ejemplares de experiencias posteriores, de formas más complicadas y que exigían mucho retoque en la superficie dejada por la sierra, las tensiones fueron de tal magnitud que no se pudieron eliminar; debido a esto es que será necesario cambiar las herramientas. Hemos dicho que el resultado es momentáneo puesto que, en efecto, las tensiones vuelven a aparecer después de cierto tiempo y exigen un nuevo recocido; este fenómeno, que es contrario a lo que lógicamente se puede esperar, porque parecería que las tensiones latentes deben provenir de un estado de equilibrio inestable semejante al temple de un metal, merece ser estudiado más detenidamente, observando la magnitud del fenómeno y si es debido a la aplicación de fuerzas exteriores o si se produce por el solo transcurso del tiempo, aunque por lo observado hasta ahora parece que fuera suficiente esta última causa.

Para terminar con la preparación de ejemplares, haremos notar que es de gran importancia la herramienta usada para cortarlos y terminarlos, puesto que estas operaciones no sólo introducen tensiones, las que se eliminan como hemos dicho, sino que también destruyen definitivamente sus propiedades ópticas, produciendo deformaciones permanentes que lo hacen insensible; para apreciar la importancia de este hecho basta hacer notar que hacen imposible toda observación a menos de 1 mm. de la periferia del ejemplar. Para los primeros ejemplares, como aún no hemos podido conseguir una sierra mecánica ni máquina fresadora de velocidad adecuada, nos ha resultado mejor utilizar velocidades de corte muy bajas, con sierras muy pequeñas, trabajando a mano, y terminar pasando muy liviano en las caras laterales un papel de esmeril colocado en un útil perfectamente plano; los orificios circulares se hacen con mecha bien afilada y de diámetro un poco menor, llevándolos luego a la medida con el papel de esmeril.

Las cualidades de la bakelita son su homogeneidad y su gran sensibilidad; la primera propiedad la podemos apreciar en seguida comparando la fig. 5, que es un ejemplar de bakelita en idénticas condiciones que los de xilonita y vidrio de las figs. 3 y 4 y notando la nitidez de las

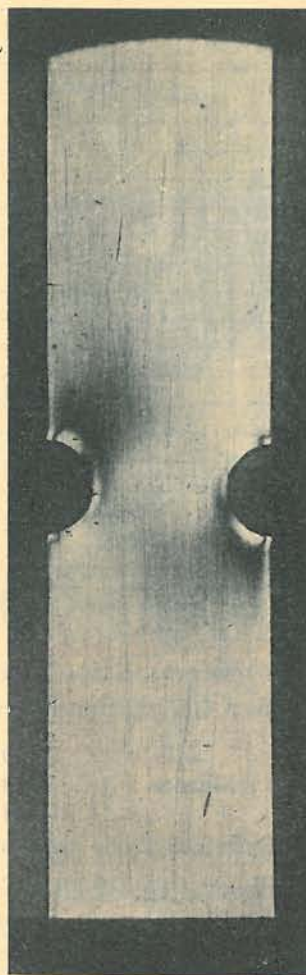


Fig. 5

isoclinas, igual o superior a la del vidrio, y la ausencia completa de manchas como las que presentaba la xilonita.

Por otra parte, la sensibilidad es mucho mayor que la de los materiales mencionados anteriormente, como es fácil apreciar en el gráfico de la fig. 6, que representa la birrefringencia en función de los esfuerzos. Para ello se utilizaron ejemplares rectangulares de sección uniforme sometidos a extensión, de manera que se produjera en su parte central un esfuerzo uniforme y calculable, para poder así deducir, aplicando la ley Wertheim, el valor del coeficiente c . Tenemos que, siendo a el ancho del ejemplar, dicha ley la podemos expresar:

$$\delta_3 = ce T = ce \frac{F}{ac} = c F/a$$

siendo F la carga aplicada, eliminando así la influencia del espesor en las lecturas de la birrefringencia; de manera que la constante c estará dada en dicho gráfico por la tangente del ángulo

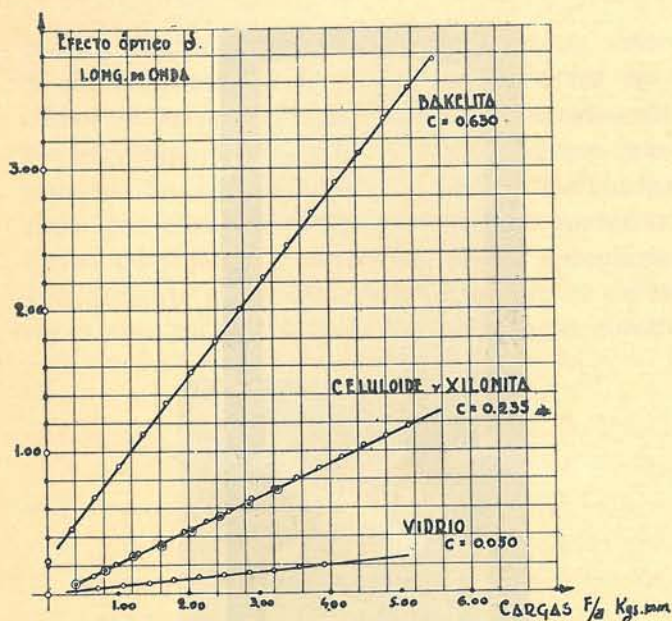


Fig. 6

formado por cada diagrama con el eje de F/a , tangentes que tienen los siguientes valores:

Bakelita	$C_B = 0.630$
Celuloide y Xilonita	$C_C = 0.235$
Vidrio	$C_V = 0.050$

es decir, que la bakelita tiene una sensibilidad 13 veces mayor que la del vidrio y casi 3 veces mayor que el celuloide ⁽¹⁾ y la xilonita, lo que confirma todo lo expuesto anteriormente. Es interesante además observar que estos gráficos son una verificación de la ley de Wertheim, puesto que vemos que las observaciones hechas coinci-

dicha recta pasa sensiblemente por el origen, la recta correspondiente a la bakelita presenta una ordenada al origen, debida al recocido imperfecto del ejemplar que había dejado tensiones iniciales. El sistema empleado fué el expuesto en primer término, que, como ya lo dijimos, fué dejado de lado para ejemplares sucesivos.

Para terminar, reproducimos en la fig. 7 un gráfico en que hemos representado unas curvas de la birrefringencia en función del tiempo, puesto que, en efecto, si bien el coeficiente c es constante para variaciones de carga, como recién vimos, ya no lo es en relación al tiempo; es decir, que si cargamos un ejemplar con una fuerza dada, la lectura que hagamos inmediatamente de cargar el ejemplar diferirá de la que se haga unos minutos o unas horas más tarde.

En dicho gráfico (que hemos trazado para la bakelita y xilonita solamente) vemos que la variación es más rápida inmediatamente de efectuada la carga del ejemplar y que luego disminuye rápidamente hasta tener una variación casi nula al cabo de 100 minutos aproximadamente. La magnitud de las tensiones vemos que influye desfavorablemente, puesto que cuando las tensiones pasan de 40 a 100 kg./cm², el efecto Δ varía del simple al doble en la bakelita y un poco menos en la xilonita, y además en la bakelita parece que alargara también el período de tiempo durante el cual es apreciable dicha variación; sin embargo, mientras que no hagamos

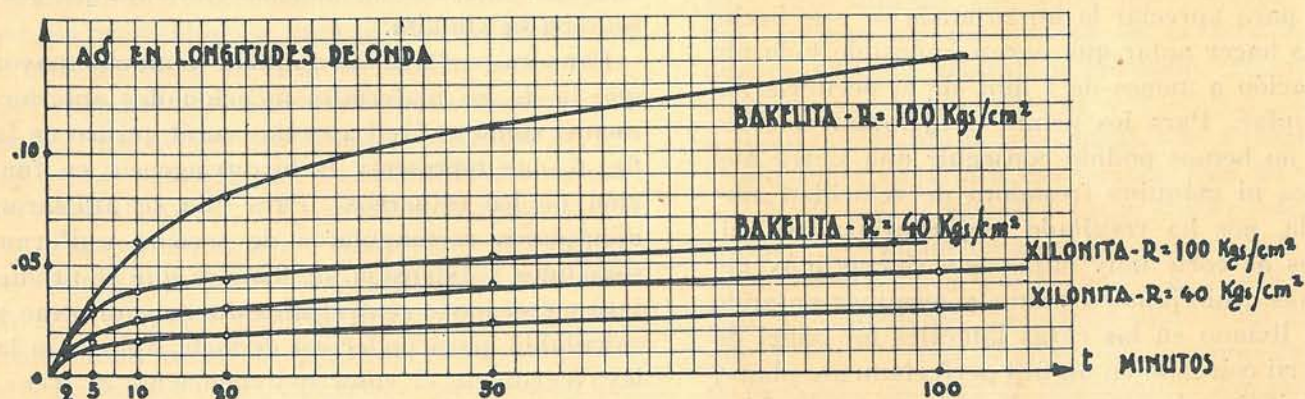


Fig. 7

den en forma evidente con una línea recta, sobre todo para la bakelita; finalmente haremos notar que mientras que para el vidrio y la xilonita,

(1) En este estudio hemos agregado un ejemplar del celuloide empleado en el Laboratorio de Fotoelasticidad de la Facultad de Ciencias Exactas de Buenos Aires, que nos fué cedido amablemente por el Ing. Galloni.

ensayos más numerosos, no se puede saber con seguridad si esta última consecuencia es exacta, ni tampoco fijar números con mucha aproximación.

Es conveniente hacer notar que, si bien los valores absolutos de Δ indican que la variación

es mucho mayor en la bakelita que en la xilonita, lo que sería desfavorable para aquel material, en la realidad la importancia es igual, puesto que si tomamos los $\Delta\delta$ en relación a los coeficientes ópticos c , que es lo que nos interesa (puesto que para un mismo esfuerzo la birrefringencia aumenta con c), esos valores son prácticamente iguales. De cualquier manera, este fenómeno no hace más que demostrar las ventajas del método de las franjas en la medida de $(P - Q)$, por lo menos como plano de base, digamos así, para medidas más numerosas y precisas, y, por lo tanto, dado que sólo la bakelita y materiales análogos permiten el empleo de dicho método, las ventajas del empleo de la bakelita.

IV

Experiencia N.º 2

Fuerza aplicada	50 kg
Espesor del ejemplar	6.40 mm
Ancho del ejemplar	24.0 mm
Ancho de la sección mínima...	12.0 mm
Diámetro orificio	12.0 mm
Relación ancho/diámetro	2.

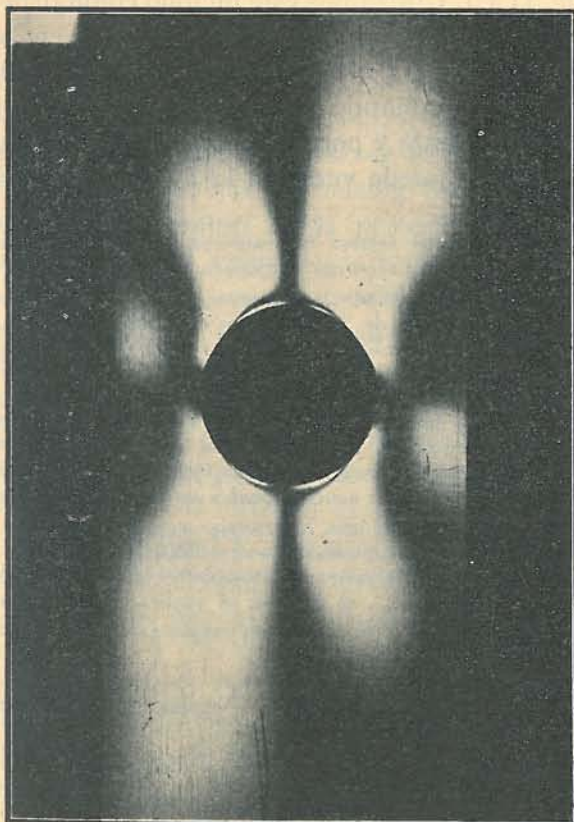


Fig. 8

ISOCLINAS.

ISOSTÁTICAS

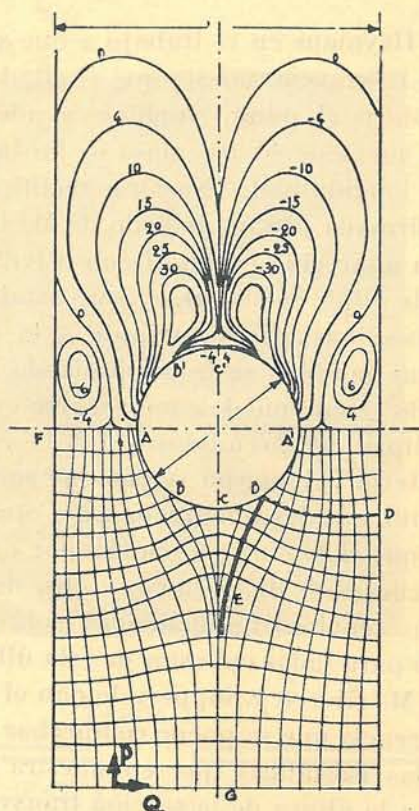


Fig. 9

Tensión media del ejemplar.... 0.325 kg/mm²

Tensión media en la sección

transversal mínima 0.650 kg/mm²

Hemos comenzado con el trazado de las isoclinas; en general se dibujaron directamente, exceptuando las 0° y 4° (grados centesimales) copiadas por medio de fotografías, pudiendo verse en la fig. 8 la correspondiente a 4°. Puede verse allí la claridad con que se dibujan las isoclinas (a pesar de que tienen un poco de falta de exposición), lo que es indispensable para la utilización del método de Coker y Filon y cuya exactitud se ha podido comprobar en la determinación de Q a lo largo de la sección transversal mínima, en que su valor se anula casi exactamente en el borde; de manera que hemos resuelto utilizar siempre la fotografía para el dibujo de las isoclinas, aun para las no necesarias a la integración.

El trazado respectivo lo damos en la fig. 9.

Este es un caso muy interesante, pues tenemos en B' y sus simétricos un punto singular, es decir, un punto por el que pasan todas las isoclinas, lo que significa, dado que está sobre la periferia libre del cuerpo, que en ese punto las tensiones son nulas. Las isoclinas obtenidas por nosotros difieren fundamentalmente de las establecidas

por Heymans en el trabajo a que siempre hacemos referencia, puesto que el citado profesor no encontró el punto singular, y además aparece una curva de 45° que pasa de un lado a otro del eje longitudinal. Nuestra rectificación se vio confirmada por un artículo de Mc Givern y Supper aparecido en "Le Génie Civil" (noviembre 18 de 1933, pág. 495), el que establece una red de isoclinas muy semejante a la nuestra, pero al que también se le ha deslizado un error. En efecto: como puede comprobarse en la fig. 8, las isoclinas comprendidas entre la curva 0° y la periferia del cuerpo vemos que son de signo diferente que las que quedan del otro lado, es decir, que dos puntos situados, por ejemplo, sobre las curvas 4° de un lado y otro de la curva 0° , están igualmente inclinados sobre la vertical, pero para lados opuestos de esta última; en cambio, Mc Givern y Supper le dan el mismo signo, diferencia que se puede comprobar en el trazado de las isostáticas que en nuestra fig. 9 vemos que a la altura de la sección transversal mínima la curvatura de la familia de isostáticas de andamamiento general vertical cambia de signo, mientras que en la dada por aquéllos todas tienen misma curvatura, de mismo signo, como es natural, a la del orificio. La curva representativa de la tensión transversal Q nos ratifica, como veremos más adelante, en nuestro trazado.

También haremos notar la influencia que tiene el punto singular en la disposición de las isostáticas, detalle muy bien estudiado en el artículo citado de Mc Givern y Supper. Vemos que la familia de isostáticos que atraviesan transversalmente la pieza parten del borde libre del ejemplar normal a éste y terminan normalmente en el orificio, tienen este aspecto desde A' a B ; pero, si tomamos una isostática de la misma familia que viniera a terminar en el trozo BC , vemos que después de llegar, por ejemplo, a la isoclina 30° , empieza a encontrar la serie de isoclinas que terminan en B con parámetros sucesivamente decrecientes y luego de pasar por cero con valores negativos crecientes que la hacen tangente al orificio en cambio de ser normal a él, de donde vemos que el punto singular es un punto en que cambia la clase de isostática. Así tenemos que la isostática correspondiente a la tensión P indicada con trazo más fuerte, al llegar a B sigue confundida con la periferia en el trozo BA' , mientras que la isostática Q (indicada con línea

cortada en DB) la sustituye en el trozo BC .

Finalmente observaremos que la red de isostáticas nos indica desde ya un aumento de P hacia el borde del orificio en la sección transversal mínima y que el Q a lo largo del eje longitudinal es grande en el punto C , luego disminuye hasta la altura del punto E , más o menos, en que las curvas están muy separadas, y después volver a aumentar algo; el esfuerzo a lo largo de este mismo eje vemos que va disminuyendo progresivamente hacia el orificio, como lo muestran las isostáticas divergentes, y por las curvaturas de las isostáticas de la familia P al cruzar la sección transversal mínima vemos que en ésta, Q tiene signo positivo y que crece desde los dos bordes (donde es naturalmente nula) hacia el centro.

En la determinación de la diferencia de tensiones ($P - Q$) fueron utilizados los dos métodos: en el borde exterior del ejemplar, en la sección transversal mínima y en el eje longitudinal se hicieron las observaciones punto por punto, mientras que para hallar las tensiones en la periferia del orificio se prefirió usar las isocromáticas obtenidas de la fotografía que damos en la fig. 10 y cuyo trazado puede verse en la fig. 11 ⁽¹⁾. Utilizamos este método como prueba y también como simplificación, ya que en este caso, al hacer la observación por puntos había que estar cambiando la inclinación de los ejes para cada punto y porque la medida no era muy clara; como puede verse en la fig. 12, en que hi-

(1) En esta red figuran las isocromáticas correspondientes a $(n + \frac{1}{2})\lambda$ porque se cargó el ejemplar con una fuerza doble a la usada en el resto de las observaciones (120 k); sin embargo, con el sistema de Tardy hemos encontrado la forma de fotografiar (con una misma carga) a las isocromáticas de orden entero por un lado y las de orden fraccionario por otro. En efecto: sabemos que para que un trazado de isocromáticas sea válido, la intensidad de la luz en cada punto debe ser independiente de la inclinación de las tensiones, que es lo que sucede en las fotografías de isocromáticas de orden entero, en que la luz se anula solamente en aquellos puntos en que $\delta_3 = n\lambda$ (puesto que las isoclinas se eliminan al trabajar con luz circular), dejando sin efecto el compensador usado, cualquiera que sea.

Usando, en cambio, el sistema Tardy, vemos en la ecuación (1) que si hacemos $\theta = \pi/2$, es decir, si el analizador lo colocamos paralelo al polarizador, en cambio de quedar normal, la ecuación queda:

$$I = I_0 \cdot \sin^2 \left(\frac{x}{2} - 90^\circ \right) = I_0 \cos^2 \frac{x}{2} \text{ expresión independiente}$$

de α y que se anula para:

$\frac{x}{2} = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ es decir para $\delta_3 = \lambda/2, 3\lambda/2, \dots$ como queríamos demostrar.

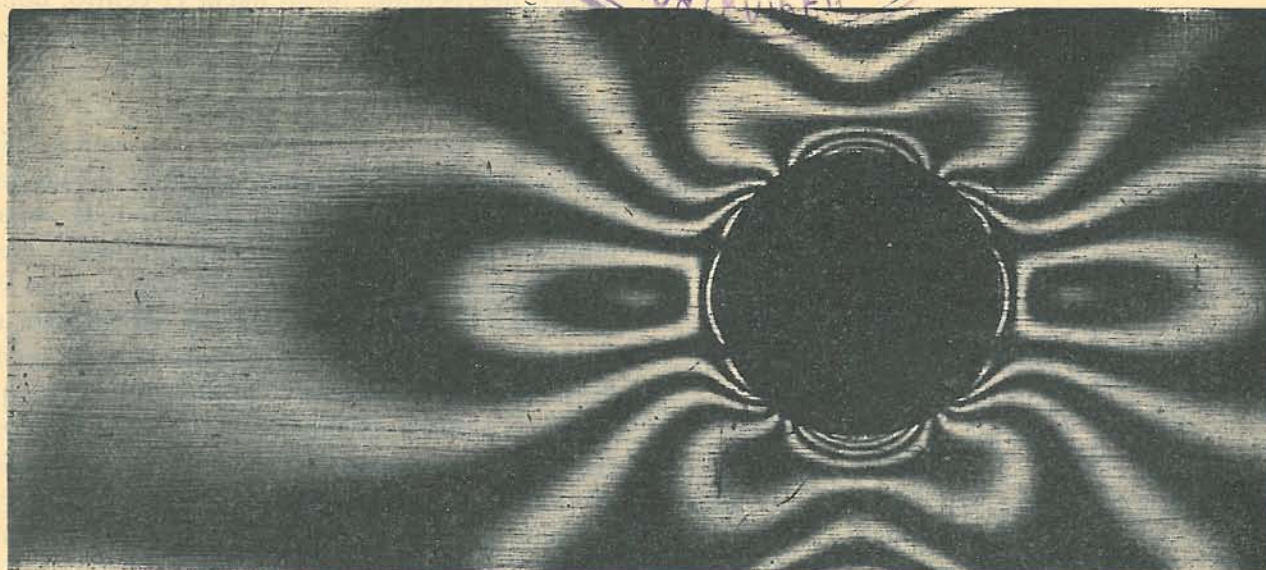


Fig. 10

cimos los diagramas de los valores observados, la precisión de dicho método es muy buena, puesto que los puntos replanteados caen sensiblemente sobre una curva continua. Los valores de P y Q según el eje longitudinal y sobre la sección transversal mínima se dedujeron también por integración gráfica en las tablas números 2 y 3 y sus valores fueron replanteados en la fig. 13.

A lo largo del eje longitudinal el esfuerzo P, que a una distancia suficientemente grande del orificio es igual a la tensión uniforme, disminuye gradualmente hasta anularse en la periferia del orificio, mientras que la tensión transversal Q, que aparece a causa de la perturbación introducida por aquél, crece desde cero (en donde P es uniforme) con valores positivos (extensión) hasta un máximo pequeño, igual, más o menos, a $1/6$ ó $1/7$ del esfuerzo uniforme, para luego anularse nuevamente y llegar rápidamente a un máximo negativo en la periferia del orificio igual a 1.13 veces la tensión media. Hallando la superficie encerrada entre el diagrama de Q sobre el eje longitudinal y este mismo eje, que debe ser igual a las fuerzas exteriores normales al eje, es decir, nula, hemos verificado la exactitud de los valores; en efecto: el área comprendida entre la curva de Q y el eje longitudinal está compuesta de una parte negativa y otra positiva, que difieren solamente en 2 %.

En el borde rectilíneo exterior la curva de tensiones P nos muestra (fig. 12) que a partir del punto en que esa tensión es uniforme (punto

TABLA I.

Cordenadas m m.		(P-Q)	Cordenadas m m.		(P-Q)
x	y	λ	x	y	λ
C) 0	0	+ 1.35	0	22	1.48
1	»	1.69	»	24	1.43
2	»	1.93	»	26	1.38
3	»	2.18	»	28	1.34
4	»	2.67	»	30	1.34
5	»	3.62			
D) 6	»	4.63	A) 1.25	6	1.50
			»	7	0.86
0	1	1.38	»	8	0.57
»	2	1.58	»	9	0.29
»	3	1.74	»	10	0.23
»	4	2.00	»	11	0.29
»	5	2.20	»	12	0.39
»	6	2.35	»	13	0.46
»	7	2.40	»	14	0.56
»	8	2.44	»	16	0.72
»	9	2.40	»	18	0.87
»	10	2.35	»	20	1.00
»	12	2.15	»	22	1.11
»	14	2.00	»	24	1.19
»	16	1.84	»	26	1.26
»	18	1.70	»	28	1.31
»	20	1.59	B) »	30	1.34
			»	32	1.34

ISOCROMÁTICAS

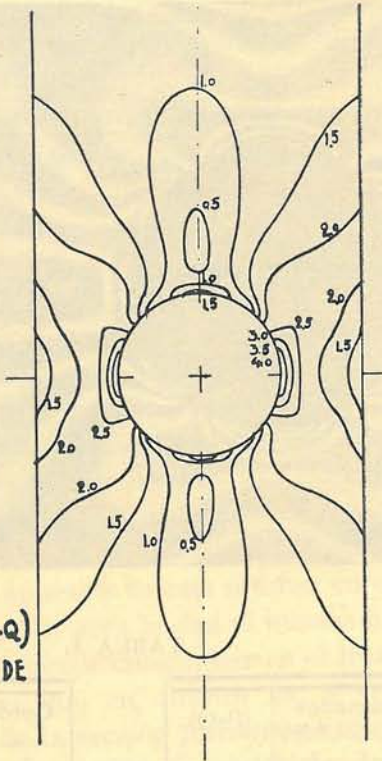
VALORES DE (P-Q)
EN LONGITUDES DE
ONDA

Fig. 11

que dista de la sección transversal mínima una longitud igual a un poco más del ancho del ejemplar, más o menos) crece hasta un máximo igual a 1.8 veces la tensión media (de la sección com-

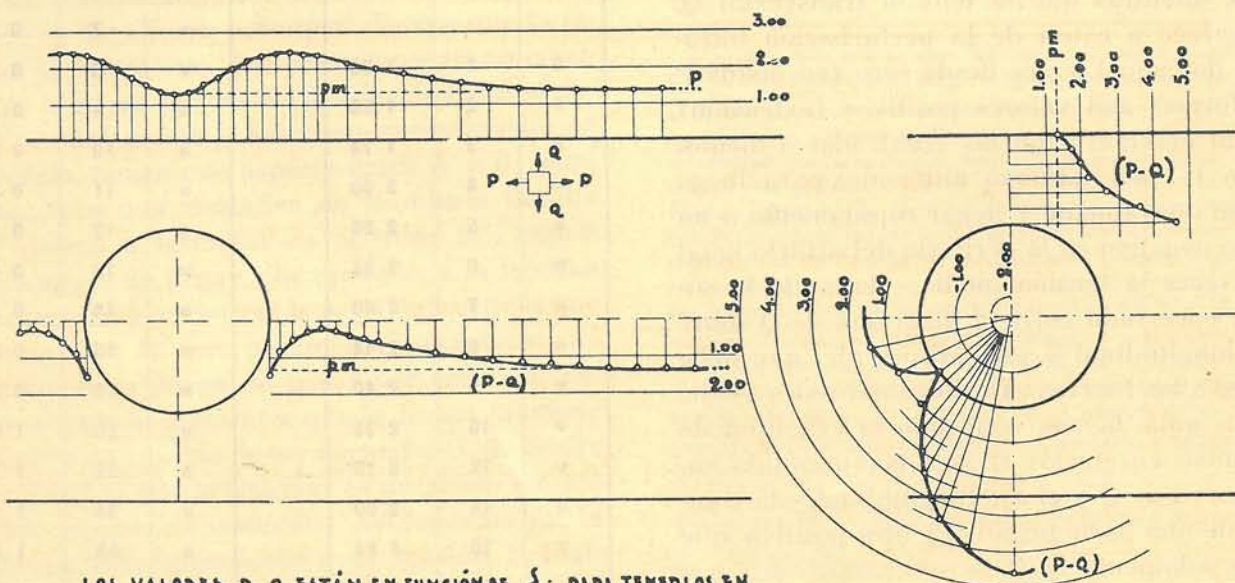
pleta), decreciendo luego hacia el centro, donde presenta un mínimo igual a esta última y, por lo tanto, igual a la mitad de la tensión media de la sección transversal mínima.

Por último anotaremos que es en esta sección que se produce el máximo absoluto de las tensiones, como era fácil ver en la red de isocromáticas: la curva del esfuerzo longitudinal crece desde el borde exterior hacia el orificio cada vez más rápidamente, alcanzando a ser en este último borde, igual a 1.73 veces la tensión media de la sección transversal mínima, es decir, que el error cometido al calcular la pieza en la forma corriente alcanza al 73 %; como comprobación diremos que la integral de la tensión a lo largo de toda la sección es igual a la carga aplicada, con una aproximación de 1.2 %.

La tensión Q en esta misma sección, nula en los extremos, y positiva siempre, tiene un máximo situado a los $2/3$ de la distancia entre el orificio y el borde libre, y a partir de este último, igual a $1/9$ de la tensión media en la sección mínima. Como vemos, todos estos resultados numéricos confirman lo que, en líneas generales, pudimos deducir de las isostáticas.

La curva de tensiones en la periferia del orificio dada en la fig. 13, tiene los mismos valores

DIAGRAMA DE LOS VALORES OBSERVADOS.



LOS VALORES P, Q ESTÁN EN FUNCIÓN DE δ ; PARA TENERLOS EN Kg/mm^2 . HAY QUE MULTIPLICARLOS POR $k = 0.2425$.

Fig. 12

TABLA II.

Determinación de los esfuerzos P y Q a lo largo del eje longitudinal.

N.º	Δs mm.	$\Delta \Phi$ rad.	Δy_n mm.	$(P-Q)_n$ λ	$\frac{(P-Q)}{\Delta y} \Delta s, \Delta \Phi$	$(P-Q)_{n+1/2}$	P	Q
A) 1.						+ 1.50	0	- 1.50
1.2	2.63	0.0628	5.920	1.15				
2					0.0325	+ 0.92	+ 0.03	- 0.89
2.3	2.63	»	1.315	0.75				
3					0.0945	0.60	+ 0.13	- 0.47
3.4	2.63	»	0.647	0.50				
4					0.1275	0.42	+ 0.25	- 0.17
4.5	7.89	»	0.647	0.27				
5					0.2070	0.35	+ 0.46	+ 0.11
5.6	7.89	»	0.790	0.35				
6					0.2200	0.45	+ 0.68	+ 0.23
6.7	7.89	»	1.315	0.57				
7					0.2160	0.65	+ 0.90	+ 0.25
7.8	7.89	»	2.900	0.70				
8					0.1200	0.82	+ 1.02	+ 0.20
8.9	7.89	»	5.82	0.85				
9					0.0725	0.92	+ 1.09	+ 0.17
9.10	7.89	»	7.90	1.00				
10					0.0627	1.05	+ 1.15	+ 0.10
10.11	7.89	»	11.20	1.10				
11					0.0490	1.17	+ 1.20	+ 0.03
11.12	13.15	»	23.70	1.20				
12					0.0418	1.22	+ 1.24	+ 0.02
12.13	17.10	0.0314	23.70	1.30				
B) 13					0.0294	1.32	+ 1.28	- 0.04

TABLA III.

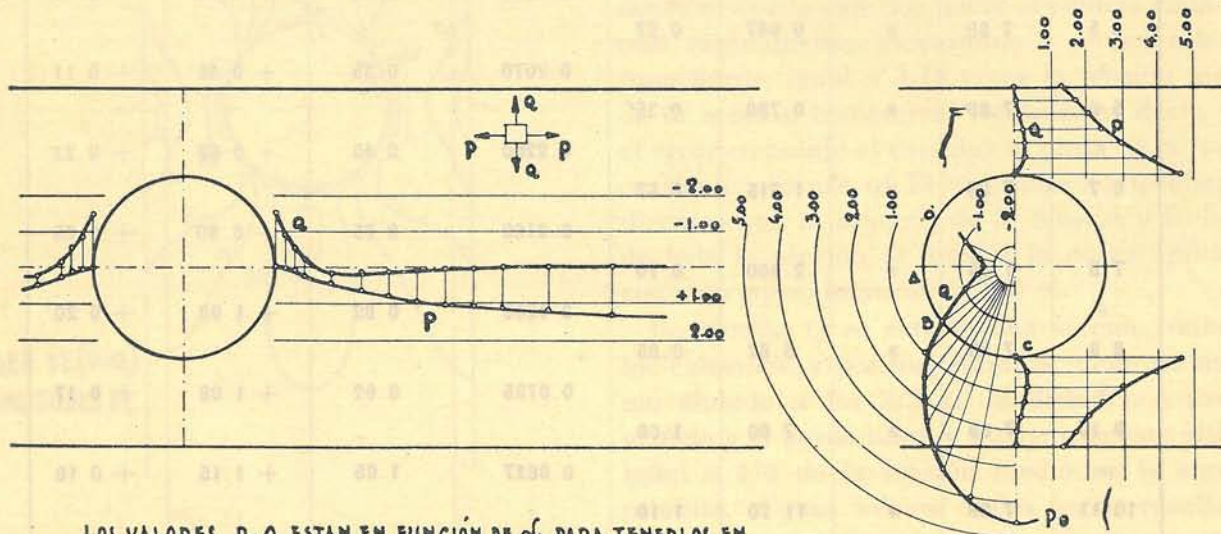
Determinación de los esfuerzos P y Q a lo largo de la sección transversal mínima

N.º	Δs mm.	$\Delta \Phi$ rad.	Δy_n mm.	$(P-Q)_n$ λ	$\frac{P-Q}{\Delta y} \Delta s, \Delta \Phi$	$(P-Q)_{n+1/2}$	Q	P
D) 1						+ 4.65	0	+ 4.65
1.2	4.16	-0.0628	3.55	4.10				
2					- 0.302	3.62	- 0.30	+ 3.92
2.3	»	-0.0678	27.60	3.10				
3					- 0.029	2.67	- 0.33	+ 3.00
3.4	»	+0.0628	11.80	2.55				
4					+ 0.056	2.18	- 0.27	+ 2.45
4.5	»	»	5.91	2.15				
5					+ 0.095	1.93	- 0.18	+ 2.11
5.6	»	»	5.91	1.85				
6					+ 0.082	1.69	- 0.10	+ 1.79
6.7	»	»	7.90	1.55				
C) 7					+ 0.051	1.35	- 0.05	+ 1.40

numéricos que la de (P—Q) de la lámina 12, como es lógico, pero haremos notar que mientras este último valor es siempre positivo (anulándose en el punto singular), la tensión en el borde es positiva en el trozo BC, en que perte-

Para terminar el trabajo hemos formado una tabla de los valores obtenidos por Heymans, Givern y Supper, comparando con nuestros valores y los deducidos por cálculo en la forma que indicamos más adelante:

DIAGRAMA DE LAS TENSIONES PRINCIPALES DEDUCIDAS POR INTEGRACIÓN GRÁFICA



LOS VALORES P, Q ESTÁN EN FUNCIÓN DE ϕ ; PARA TENERLOS EN Kg/mm^2 HAY QUE MULTIPLICARLOS POR $K = 0.2425$

Fig. 15

nece a la isostática P, se anula también en aquel punto y se separa entonces del borde, siendo sustituido por una tensión Q, que crece desde 0 al máximo en el punto A con valores negativos.

Resolución analítica aproximada ⁽¹⁾

Las tensiones internas en elasticidad plana y para el caso en que no haya fuerzas de masa, están dadas por las expresiones

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \\ R_y &= \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \\ S &= - \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (12)$$

donde x representa la función de esfuerzos de Airy, la cual debe satisfacer a su vez la ecuación diferencial:

$$\nabla^4 x = 0 \quad (13)$$

en el que representamos con ∇^4 la expresión

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \text{ es decir } \nabla^2 (\nabla^2).$$

Podemos obtener en seguida, en forma general, las soluciones de la ecuación de esfuer-

Puntos	Tensión	L. E. Exp.	Heymans	Givern	Teóricos
A	P	1.130	1.170	1.110	1.150
C	Q	0.365	0.410	0.350	0.380
F	P	0.330	0.350	0.310	---
G	P	0.325	0.325	0.325	0.325
secc. tr.	Qmáx.	0.073	0.076	0.116	0.149

(Los puntos son los que se indican en la figura 9.)

⁽¹⁾ E. G. Coker, *A treatise on Photo-Elasticity* (Cap. IV); J. Prescott, *Applied Elasticity*; P. Heymans, *La Photoélasticité*.

zos (13). Para ello consideremos una función ϕ que sea solución de la ecuación

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (14)$$

y por consiguiente de $\nabla^4 \phi = \nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0$

Tendremos entonces

$$\nabla^2(x\phi) = \phi \nabla^2 x + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + x \nabla^2 \phi = 2 \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

y, por lo tanto,

$$\nabla^4(x\phi) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi = 0$$

de manera que $x = x, \phi$ (15)

y análogamente $x = y, \phi$ (16)

son soluciones de la ecuación (13). — Por otra parte se puede demostrar fácilmente que el valor más general de dicha función es:

$$\phi = f_1(x+iy) + f_2(x-iy) \quad (17)$$

en donde se indica con f_1 y f_2 dos funciones cualesquiera y siendo $i = \sqrt{-1}$.

Utilizando la expresión encontrada de ϕ y con transformaciones elementales, obtenemos para $r^2 (= x^2 + y^2)$ una solución x análoga a las (15) y (16) dada por

$$x = r^2 \phi \quad (18)$$

Vamos a establecer ahora una expresión de ϕ suficientemente completa como para resolver la mayor parte de los problemas planos, y esta solución la obtendremos sumando una serie de soluciones parciales. Estableciendo la expresión del operador de Laplace en cordenadas polares:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (19)$$

encontramos en seguida como soluciones de la ecuación $\nabla^2 x = 0$ (y por lo tanto de la $\nabla^4 x = 0$) las expresiones simples:

$$\begin{aligned} x &= \log_e r \\ x &= \theta \end{aligned} \quad (20)$$

Ahora notando que $\phi = \text{constante} = 1$, es también solución de $\nabla^2 \phi$, obtenemos de inmediato, aplicando la (18), las nuevas soluciones:

$$\begin{aligned} x &= r^2 \\ x &= r^2 \log_e r \\ x &= r^{2\theta} \end{aligned} \quad (21)$$

y también aplicando (15) y (16):

$$\begin{aligned} x &= x\theta = r\theta \cos \theta \\ x &= y\theta = r\theta \sin \theta \end{aligned} \quad (22)$$

y

$$x = x \log_e r = r \log_e r \cos \theta \quad (23)$$

$$x = y \log_e r = r \log_e r \sin \theta$$

Finalmente tomaremos una solución de la forma general dada en (17) con

$$f_1(x+iy) = a_n (x+iy)^n + a'_n (x+iy)^{-n}$$

$$f_2(x-iy) = b_n (x-iy)^n + b'_n (x-iy)^{-n}$$

expresiones que después de una serie de operaciones elementales, y tomando para las constantes valores adecuados, se transforman en

$$x = \cos n\theta (c_n r^n + c'_n r^{-n}) + \sin n\theta (f'_n r^n - f_n r^{-n}) \quad (26)$$

$$x = \cos n\theta (c_n r^{n+2} + c'_n r^{-n+2}) + \sin n\theta (f'_n r^{n+2} - f_n r^{-n+2}) \quad (27)$$

Sumando por último las soluciones (20), (21), (22), (23), (26) y (27), obtendremos la expresión de una solución completa (en lo que puede interesar para estos problemas) de la ecuación (13) y eliminando los términos en $r \cos \theta$ y $r \sin \theta$ que dan esfuerzos nulos:

$$\begin{aligned} x &= A_0 r^2 + B_0 \log_e r + c_0 r^2 \log_e r + D_0 \theta + \\ &+ E_0 r^2 \theta + F_0 r \theta \cos n\theta + G_0 r \theta \sin n\theta + \\ &+ A_1 r \log_e r \cos \theta + B_1 r \log_e r \sin \theta \\ &+ A_2 \frac{\cos \theta}{r} + B_2 r^3 \cos \theta + C_2 \frac{\sin \theta}{r} + D_2 r^3 \sin \theta \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &A_n r^n \cos n\theta + B_n r^{-n} \cos n\theta + \\ &+ C_n r^{n+2} \cos n\theta + D_n r^{-n+2} \cos n\theta \\ &+ A'_n r^n \sin n\theta + B'_n r^{-n} \sin n\theta + \\ &+ C'_n r^{n+2} \sin n\theta + D'_n r^{-n+2} \sin n\theta \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

Las tensiones que corresponden a esta función las obtenemos a partir de las expresiones (12) transformadas para utilizar coordenadas polares:

$$\begin{aligned} Rr &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial r} \\ R\theta &= \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} \\ Sr\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial x}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (29)$$

lo que no hacemos para no alargar demasiado esta exposición y considerando que no consiste más que en una serie de operaciones elementales

Pasaremos ahora a aplicar estas expresiones al estudio aproximado de un miembro rectangular sometido a un esfuerzo de extensión y con un orificio circular simétricamente colocado; es decir, la solución será hallada para una lámina que se extiende infinitamente en cualquier dirección y cuyas tensiones se reducen a un esfuerzo normal uniforme a distancia infinita del orificio.

Tomaremos como centro de coordenadas el centro del orificio y dos ejes rectangulares tales que el eje x tenga la dirección del esfuerzo de tracción al infinito. En esas condiciones, si suponemos momentáneamente que no existe orificio ni discontinuidad alguna, el esfuerzo será igual y constante en toda la extensión de la placa; la función de tensiones será, por lo tanto, si indicamos con T la tensión uniforme

$$\chi_0 = \frac{1}{2} T y^2$$

de donde $R_y=0$; $S=0$; $R_x=T$ resultados que responden a la hipótesis hecha. Utilizando coordenadas polares, estos resultados se expresan, en cambio:

$$\chi_0 = \frac{1}{4} T r^2 (1 - \cos 2\theta) \quad (33)$$

y de (29):

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{1}{2} T (1 + \cos 2\theta) \\ R_\theta &= \frac{1}{2} T (1 - \cos 2\theta) \\ S_{r\theta} &= -\frac{1}{2} T \sin 2\theta \end{aligned} \quad (34)$$

Por lo tanto, existiendo el orificio, el sistema de tensiones definido por la (33) introduce en la periferia de aquél los esfuerzos (34); como la realidad no es esta, sino que en dicha periferia libre sólo puede existir una tensión dirigida según la tangente, hay que hallar una segunda función χ_1 que superpuesta a la χ_0 y para $r=a$ (radio del orificio) anule las tensiones R_r y $S_{r\theta}$ y a su vez produzca esfuerzos nulos en el infinito.

Para ello, considerando la expresión (28) de χ y sus derivados y teniendo en cuenta las condiciones expuestas:

Para $r=\infty$, y con cualquier valor de θ debe tenerse $R_r=R_\theta=S_{r\theta}=0$, lo que nos indica que deben sacarse todos los términos de χ_1 que en las expresiones de las tensiones dan origen a otros que no sean nulos para $r=\infty$.

Por otra parte, la primera condición exige que para $r=a$ tengamos por superposición de χ_0 y χ_1 $R_r=S_{r\theta}=0$, para cualquier θ . Luego, pues debemos mantener en χ_1 los términos que en R_r son independientes de θ o que contienen $\cos 2\theta$ y a los que en la expresión de $S_{r\theta}$ contienen $\sin 2\theta$.

Nos queda, por lo tanto, definitivamente:

$$\chi_1 = B_0 \log_e r + \frac{B_n}{r^2} \cos 2\theta + D_n \cos 2\theta \quad (35)$$

siendo los esfuerzos correspondientes:

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{B_0}{r^2} - 6 B_n \frac{\cos 2\theta}{r^4} - 4 D_n \frac{\cos 2\theta}{r^2} \\ R_\theta &= -\frac{B_0}{r^2} + 6 B_n \frac{\cos 2\theta}{r^4} \\ S_{r\theta} &= -6 B_n \frac{\sin 2\theta}{r^4} - 2 D_n \frac{\sin 2\theta}{r^2} \end{aligned} \quad (36)$$

Los esfuerzos resultantes de la superposición de funciones serán entonces de (34) y (36):

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{T}{2} (1 + \cos 2\theta) + \frac{B_0}{r^2} - 6 B_n \frac{\cos 2\theta}{r^4} - 4 D_n \cos 2\theta \\ R_\theta &= \frac{T}{2} (1 - \cos 2\theta) - \frac{B_0}{r^2} + 6 B_n \frac{\cos 2\theta}{r^4} \\ S_{r\theta} &= -\frac{1}{2} T \sin 2\theta - 6 B_n \frac{\sin 2\theta}{r^4} - 2 D_n \frac{\sin 2\theta}{r^2} \end{aligned}$$

de los cuales el primero y último deben anularse para $r=a$; igualando a cero los coeficientes del término independiente de θ y de los términos en $\cos 2\theta$ y $\sin 2\theta$:

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} + \frac{B_0}{a^2} &= 0 \\ \frac{T}{2} - 6 \frac{B_n}{a^4} - 4 \frac{D_n}{a^2} &= 0 \\ -\frac{T}{2} - 6 \frac{B_n}{a^4} - 2 \frac{D_n}{a^2} &= 0 \end{aligned}$$

De aquí deducimos los valores de

B_0, B_n y D_n :

$$B_0 = -\frac{a^2}{2} T$$

$$B_n = -\frac{a^4}{4} T$$

$$D_n = \frac{a^2}{2} T$$

de donde tenemos como resultados del problema:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{4} T r^2 (1 - \cos 2\theta) - \frac{a^2}{2} T \log_e r + \\ &+ \left(\frac{a^2}{2} T - \frac{a^4}{4} \frac{T}{r^2} \right) \cos 2\theta \end{aligned} \quad (37)$$

y

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{1}{2} T \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left[1 + \cos 2\theta \left(1 - \frac{3a^2}{r^2} \right) \right] \\ R_\theta &= \frac{1}{2} T \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ S_{r\theta} &= -\frac{1}{2} T \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (38)$$

de donde en la periferia del orificio:

$$Rr = 0$$

$$Sr\theta = 0$$

$$R\theta = T(1 - 2 \cos 2\theta) \quad (39)$$

según la sección transversal mínima:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$Rr = \frac{3T}{2} \left(\frac{a^2 r^2 - a^4}{r^4} \right)$$

$$R\theta = \frac{T}{2} \left(2 + \frac{a^2 r^2 + 3a^4}{r^4} \right) \quad (40)$$

$$Sr\theta = 0$$

y según el eje longitudinal:

$$\theta = 0$$

$$Rr = \frac{T}{2} \left(2 - \frac{5a^2 r^2 - 3a^4}{r^4} \right)$$

$$R\theta = \frac{T}{2} \left(\frac{a^2 r^2 - 3a^4}{r^4} \right)$$

$$Sr\theta = 0 \quad (41)$$

El valor de T dijimos que era la tensión uniforme en una pieza de dimensiones infinitamente grandes; de manera que en el caso práctico que tratamos no la podemos asimilar a la tensión uniforme que existe a una distancia suficientemente grande del orificio, sino que debemos hallar un valor práctico que tenga una significación análoga a la definición teórica.

Ese valor lo obtenemos estableciendo que la integral de $R\theta$ a lo largo de la sección transversal mínima debe ser igual a la fuerza aplicada a la pieza.

Así, pues, tendremos, indicando con p la tensión media en dicha sección, con $2c.a$ el ancho de la pieza y con a el radio del orificio:

$$p \cdot a(c-1) = \int_a^{ca} R\theta \, dr = T \int_a^{ca} \frac{dr}{a} + \frac{a^2 r^2 + 3a^4}{r^4} \, dr$$

de donde:

$$T = \frac{p}{1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{2c^2} + \frac{1}{2c^3}} \quad (42)$$

Para el caso particular que nos ocupa y de acuerdo con las dimensiones del ejemplar, tenemos:

$$p = 0.650 \text{ Kg/mm}^2 \text{ y } c = \frac{24}{12} = 2$$

de donde:

$$T = \frac{0.650}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = 0.385 \text{ Kg/mm}^2$$

valor que sustituido en las ecuaciones (39) a (41) nos da los valores que hemos indicado en la tabla anterior.

Rafael Barrett, Matemático

ING. E. GARCIA DE ZUÑIGA

La adquisición —hecha recientemente por la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería— de algunos manuscritos de Rafael Barrett, permite ahora valorar concretamente su producción, o por lo menos, su vocación matemática, a la que suele aludirse con demasiada vaguedad y sin ningún conocimiento directo de los hechos.

Lo primero que revelan estos manuscritos es el ardor estudioso y la tenacidad pacientísima con que sigue Barrett, página a página, renglón a renglón, los textos que utiliza para refrescar y ampliar una fuerte formación matemática, sin duda preexistente. De esos textos, que nunca menciona, sólo he podido identificar: 1.º, las lecciones de Cálculo Infinitesimal de Cauchy, recogidas y redactadas por el Abate Moigno (1840), obra rarísima, que es difícil contebir cómo pudo llegar a manos de Barrett; 2.º, el curso de Análisis de Picard (en la primera edición, de 1891, o en la segunda, de 1901, que muy poco difiere de la primera); 3.º, el Cálculo de los Cuaterniones del matemático argentino Valentín Balbín (Buenos Aires, 1887). Estas y otras obras de Análisis Superior han sido leídas con incansable atención y copiosamente comentadas y explicadas, sin perdonar la más sencilla transformación o desarrollo algebraico.

Pero lo que más parece interesar a Barrett es la Teoría de las Funciones, base del Análisis. La única nota original y completa que he podido hallar entre estos revueltos papeles se refiere justamente al concepto mismo de la función.

La definición de este concepto dada por Euler no parece aplicable a ciertas relaciones de dependencia entre variables. La nueva definición de Lejeune-Dirichlet permite extender el significado de la palabra y hablar de *funciones* tan extraordinarias como la de Kronecker y la del mismo Lejeune-Dirichlet; sólo que muchas de estas funciones también pueden ser definidas analíticamente (a la manera de Euler) como resultado de un número de operaciones algebraicas fundamentales efectuadas sobre la variable independiente, ya sea ese número de operaciones finito, ya sea infinito (con introducción de la idea de límite). La cuestión no es, por lo demás, de

simple curiosidad teórica, pues algunas de las funciones aludidas, que uno llamaría de buena gana pseudo-funciones, para no ocuparse más de ellas, tienen sin embargo importante aplicación a la Física matemática. Ahora bien, aunque muchas expresiones analíticas de tales funciones pueden hallarse en cualquier tratado (Cesàro, págs. 9 y 354; Pierpont, I, págs. 202 y siguientes, etc.), yo no sé que se haya intentado nunca, antes de hacerlo Barrett, traducir analíticamente la función aritmética $y = \lambda(L)$ (número de los números primos inferiores a L).

A este objeto se refiere aquel único trabajo llevado a término por Barrett y sometido a Poincaré en una carta cuya copia (o quizá original nunca remitido a su destinatario) figura entre los manuscritos que guarda nuestra Biblioteca. La reproducimos a continuación:

A M. H. Poincaré, de l'Académie des Sciences.

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous communiquer une formule relative au nombre λ des nombres premiers inférieurs à une limite donnée L .

La fraction

$$\frac{1. 2. 3. \dots (n-1)}{n} \quad (n \text{ entier} > 4)$$

est égale à un nombre entier pour n composé, et égale à un nombre entier moins $1/n$ pour n premier.

Donc,

$$\sin \frac{1. 2. 3. \dots (n-1) \pi}{n} \quad (n \text{ entier} > 4)$$

sera égal à 0 ou à 1, suivant que n sera composé ou premier.

Alors, si λ est le nombre entier immédiatement inférieur à la limite donnée L , le nombre λ des nombres premiers inférieurs à L sera donné par la série

$$3 + \sum_{n=5}^{n=1} \sin \frac{(n-1)! \pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$$

RAFAEL BARRETT.

6 Oct., 1903.

A los que no se ocupan ya de la Matemática y la tienen más o menos olvidada, podrá interesarles la siguiente demostración elementalísima de esta bella fórmula de Barrett.

Empecemos por recordar algunas nociones previas.

Se dice que los números a y b son congruos con relación al módulo n cuando $a - b$ es divisible por n . La notación (debida a Gauss) con que se expresa este hecho, es la siguiente:

$$a \equiv b \pmod{n},$$

y se lee: a congrua a b con respecto a n .

Las únicas proposiciones de la teoría de las congruencias que nos interesan para llegar al teorema de Wilson, en que se basa la fórmula de Barrett, son estas dos: 1.ª, los dos miembros de una congruencia pueden multiplicarse por un entero cualquiera, y 2.ª, dos o más congruencias de igual módulo pueden multiplicarse miembro a miembro. Ambas resultan evidentemente de la definición de congruencia.

Enunciado del TEOREMA DE WILSON:

Si p designa un número primo, $(p-1)! - 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Demostración:

Sea a uno cualquiera de los números $1, 2, 3, \dots, (p-1)$. Formemos la sucesión finita de los múltiplos de a : $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$. En esta última sucesión hay un término, y sólo un término, congruo a 1 con respecto a p .

En efecto, ninguno de esos números (ma , por ejemplo) es divisible por p , desde que p es primo y mayor que m y que a . Lo mismo ocurre con la diferencia $ma - m'a$ de dos términos de dicha sucesión, porque esta diferencia es también un término de la sucesión; luego, los residuos de la división de ma y de $m'a$ por p son diferentes entre sí, y, como estos números ma y $m'a$ representan dos términos cualesquiera de la sucesión $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$, los residuos de la división de los términos de esta sucesión por p serán (prescindiendo del orden): $1, 2, 3, \dots, (p-1)$. Llamemos a al término al cual corresponde el residuo 1, y podremos escribir $a \equiv 1 \pmod{p}$.

Es fácil ver que $a \neq a$, a menos que a sea igual a 1 ó a $p-1$. En efecto, si se tuviera $a = a$, $a \equiv a - 1$, igual a $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$, sería divisible por p ; siendo p primo, habría de dividir entonces a $a-1$ ó a $a+1$. Pero $a < p$; luego $a-1 = 0$ ó $a+1 = p$, es decir: $a = 1$ ó $a = p-1$.

Resulta de esto que los números

$$2, 3, 4, \dots, (p-2)$$

pueden asociarse dos a dos, de manera que el producto de dos asociados sea congruo a la unidad. Multiplicando después miembro a miembro

las $\frac{p-3}{2}$ congruencias así obtenidas, resultará

$$2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (p-2) \equiv 1 \pmod{p};$$

y finalmente, multiplicando por $p-1$ los dos miembros:

$$(p-1)! \equiv p-1 \pmod{p} \text{ o sea } (p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

Recíprocamente: si un número p es tal que $(p-1)! \equiv 0 \pmod{p}$, puede afirmarse que ese número p es primo; porque si fuera compuesto, uno de sus factores δ dividiría a $(p-1)! + 1$, lo cual es imposible, desde que δ (menor que p y mayor que 1) divide seguramente a $(p-1)!$ y no divide a 1.

Demostremos ahora la fórmula de Barrett que da el número λ de números primos (comprendida la unidad) inferiores a un número dado L .

Llamando l al entero que precede inmediatamente a L , la fórmula propuesta por Barrett es:

$$\lambda(L) = 3 + \sum_{n=5}^{n=l} \frac{\text{sen } \frac{(n-1)!}{n} \cdot \pi}{\text{sen } \frac{\pi}{n}}.$$

De acuerdo con el teorema de Wilson, recién demostrado, si n es primo, $\frac{(n-1)! + 1}{n}$ es un entero impar, de donde

$$\text{sen } \frac{(n-1)!}{n} \pi = \text{sen } \left[(2m+1) \pi - \frac{\pi}{n} \right] = \text{sen } \frac{\pi}{n}$$

Si n es compuesto y sólo contiene factores primos a la primera potencia, es evidente que todos ellos se encontrarán en $(n-1)!$. Si, al contrario,

figuran entre los factores de n algunos de la forma s^t (s primo diferente de la unidad), hallaremos en $(n-1)!$, s y s^{t-1} , que multiplicados entre sí dan s^t , salvo cuando $s = s^{t-1}$, es decir, cuando $t = 2$; pero aun entonces $(n-1)!$ contendría s y $2s$, cuyo producto es divisible por s^2 , menos en el caso de ser $2s > n-1$; pero si n contiene a s^2 , $n-1 \geq s^2-1$, de donde $2s > s^2$, $2 \geq s$, $s = 2$ y, por consiguiente, $n-1 < 4$ ó $n < 4$, es decir, $n = 4$, ya que estamos en la hipótesis de que n es compuesto. ⁽¹⁾

Cada uno de los sumandos de

$$\sum_{n=5}^{n=l} \frac{\text{sen } \frac{(n-1)!}{n} \cdot \pi}{\text{sen } \frac{\pi}{n}}$$

se hará, pues, igual a la unidad, si el valor de n que le corresponde es primo, y se anulará en caso contrario. Si a la sumación agregamos 3, que es el número de los números primos que

preceden a 5, la fórmula de Barreitt nos dará efectivamente el número de todos los números primos desde 1 hasta l inclusive.

Lo escrito bastará para formarse una opinión aproximativa del talento matemático de Barreitt. Yo lo estimo altamente, y creo que, si la brevedad de su vida, sus enfermedades, su pobreza y la intensa producción literaria de sus últimos años no le hubieran impedido consagrar más tiempo a la investigación matemática, Rafael Barreitt hubiera ilustrado también su nombre en esta ciencia, que amaba tanto, con valiosos descubrimientos.

(1) En efecto: $(4-1)! = 6$ no es divisible por 4. Véase error a este respecto en U. SCARPI, *Teoria dei Numeri*, pág. 41.

E L N E U T R Ó N

I N G . G . E . V I L L A R

Descubrimiento del neutrón.

Las transmutaciones artificiales de los elementos fueron realizadas por primera vez por Rutherford en 1919, quien provocó la desintegración de los núcleos atómicos mediante la acción de los rayos alfa.

Las investigaciones de Rutherford iniciaron una serie de múltiples y laboriosos trabajos experimentales que ocupan un lugar destacadísimo dentro de la actividad brillante y fecunda que se observa actualmente en el campo de la Física Atómica.

Efectuando Bothe y Becker en 1930 aquella clase de transmutaciones, observaron que al excitar el berilio y otros elementos livianos por medio de los rayos alfa del polonio, se producía la emisión de una radiación semejante a los rayos gamma, pero de un poder penetrante muy superior (1).

El efecto Bothe-Becker tuvo una repercusión muy honda, pues vino a poner de manifiesto que por desintegración de un núcleo atómico no sólo era posible obtener la expulsión de protones rápidos, sino también la emisión de rayos gamma de poder penetrante mayor que el de las radiaciones emitidas por los elementos radioactivos.

El estudio detenido de este fenómeno trajo consecuencias interesantísimas. En 1932 madame Irene Joliot Curie y F. Joliot observaron que la radiación producida en el efecto Bothe-Becker tenía la particularidad de proyectar con gran velocidad los núcleos atómicos que encontraba en su camino (2).

Inmediatamente Chadwick confirmó los resultados experimentales obtenidos por los esposos Joliot Curie, y al mismo tiempo destacó el carácter corpuscular de la radiación, la que estaría constituida por partículas que denominó *neutrones* por la circunstancia de ser eléctricamente neutras (3).

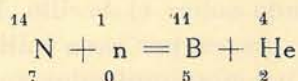
Los trabajos realizados por F. Joliot, I. Curie Joliot y Chadwick han sido el origen de numerosas investigaciones que han permitido conocer dentro de un brevísimo plazo de tiempo las principales características de la nueva radiación,

confirmando además la existencia del neutrón (4).

Características del neutrón.

El neutrón atraviesa la materia sin revelar su presencia, salvo el caso excepcional en que pasa suficientemente cerca de un núcleo como para comunicarle por choque una energía suficiente para proyectarlo (5) o para producir su desintegración.

La ausencia de carga eléctrica en el neutrón hace que la radiación no tenga poder ionizante, por lo cual no es posible poner en evidencia su trayectoria en la cámara de Wilson; sin embargo, se pueden observar por este procedimiento las perturbaciones producidas por el neutrón en los núcleos atómicos que encuentra en su recorrido. Así, por ejemplo, se han observado las trayectorias de las partículas alfa proyectadas por la desintegración de un núcleo de nitrógeno, producida de acuerdo con la siguiente ecuación nuclear (6):



El choque de un neutrón con un núcleo atómico se produce solamente cuando la distancia entre centros es inferior a 10^{-13} cm; en tales circunstancias el neutrón sufre una desviación en su trayectoria y el núcleo es impulsado con una elevada energía cinética que le confiere un gran poder ionizante (7).

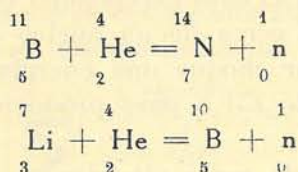
La masa del neutrón es sensiblemente igual a la del protón y ha sido calculada mediante la medida de las cantidades de movimiento comunicadas por el neutrón a diferentes núcleos atómicos.

En vista de las dificultades y causas de error que se presentan en estas medidas, Chadwick ha deducido la masa exacta del neutrón partiendo de las relaciones energéticas correspondientes a una transmutación determinada en la que se produce la emisión de un neutrón desde un núcleo conocido, con formación de otro núcleo también conocido (8).

En estas condiciones, admitiendo la conservación de la energía y la conservación de la canti-

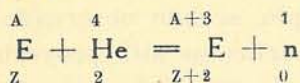
dad de movimiento durante la transmutación, es posible calcular la masa del neutrón mediante la medida de la energía cinética de los neutrones producidos por la excitación de partículas alfa de energía conocida.

Las medidas de la masa del neutrón se han realizado provocando la desintegración del boro y del litio de acuerdo con las siguientes ecuaciones nucleares, que cumplen con las condiciones anteriormente mencionadas:



La producción de neutrones.

Los neutrones se obtienen excitando por medio de partículas alfa los elementos livianos que sufren una transformación captando sus núcleos una partícula alfa y produciéndose la emisión de un neutrón:



El rendimiento obtenido en esta transmutación es sumamente bajo, el mayor ha sido encontrado operando sobre el berilio, habiéndose producido 30 neutrones por cada millón de partículas alfa de polonio empleadas en la excitación.

Por el momento sólo ha sido posible extraer neutrones del litio, berilio, boro, fluor, neón, magnesio y aluminio, habiéndose tenido resultados negativos operando sobre el hidrógeno, helio, carbono, nitrógeno y oxígeno. La explicación de esta particularidad parece residir en el hecho de que todos los núcleos atómicos conocidos cumplen con la condición de que su masa es mayor o igual al doble de su número atómico:

$$A \geq 2Z$$

En dichas transmutaciones la masa nuclear sufre un aumento de 3 unidades y el número atómico se incrementa en 2; por consiguiente, las características del núcleo obtenido en la transformación serán:

$$A + 3 \quad \text{y} \quad Z + 2$$

Estas características deben cumplir con la condición anteriormente expuesta y, por lo tanto, se tendrá:

$$A + 3 \geq 2(Z + 2)$$

o sea:

$$A \geq 2Z + 1$$

Esta última condición no es satisfecha por los núcleos de hidrógeno, helio, carbono, neón y oxígeno, por lo cual no es posible prever que por desintegración de sus núcleos se produzca una emisión de neutrones (9).

La estructura del neutrón.

Según Rutherford, el neutrón estaría constituido por la unión íntima de un protón y de un electrón, estando justificado su extraordinario poder penetrante por la ausencia de carga eléctrica.

La demostración experimental de esta hipótesis podría surgir de la desintegración de un neutrón en sus constituyentes elementales como consecuencia de una colisión nuclear; sin embargo, el cálculo demuestra que la probabilidad de que se produzca tal acontecimiento es extraordinariamente remota.

La hipótesis de Rutherford, que tuvo una aceptación general, es en estos momentos muy discutida, pues la configuración prevista por el neutrón no se concilia con las actuales concepciones de la mecánica cuántica, en las que el átomo de hidrógeno constituye la única combinación posible entre un protón y un electrón.

Según Chadwick (10), el conjunto de los hechos parece sugerir la idea de que tanto el protón como el electrón fueran partículas elementales.

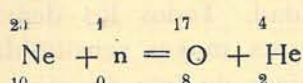
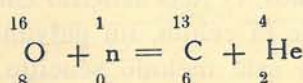
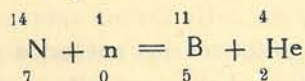
En efecto: si se considera al neutrón como un complejo formado por un protón y un electrón, es imprescindible atribuir al electrón un spin cero y aplicarle la estadística de Bose, condiciones que no admite el electrón al estado libre. Por otra parte, si se admite aquella estructura para el neutrón, debería admitirse la transmutación con emisión de energía, del átomo de hidrógeno en un neutrón, transformación que, de acuerdo con los resultados experimentales, es extraordinariamente rara.

Las transmutaciones artificiales provocadas por el neutrón.

La ausencia de carga confiere al neutrón propiedades muy particulares, desde que las barreras de potencial que defienden los núcleos atómicos parecen ser poco eficaces contra estas partículas dotadas de grandes energías que pene-

trando en su interior pueden provocar su desintegración parcial.

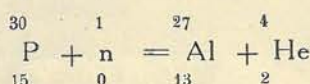
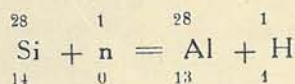
Las colisiones entre neutrones y núcleos atómicos se producen en una gran mayoría de casos con emisión de una partícula alfa, habiéndose observado las siguientes transmutaciones (11):



Las desintegraciones por medio del neutrón han sido estudiadas particularmente por Fermi, quien ha encontrado en ellas la emisión de partículas alfa y de protones, con formación de núcleos radioactivos (12).

Fermi y sus colaboradores han obtenido efectos intensos y prolongados de radioactividad en el fósforo, hierro, aluminio, cromo, silicio y plata, habiendo obtenido además la formación de un radioelemento al que se atribuye el número 93, obtenido excitando al urano por una radiación de neutrones (13).

Las experiencias de Fermi han sido proseguidas también por Joliot, Joliot Curie y Preiswerk, quienes, excitando por medio de neutrones al silicio y al fósforo, han obtenido dos tipos de transmutaciones, en el primer caso se produce emisión de protones y en el segundo hay emisión de partículas alfa, formándose en ambas el mismo elemento radioactivo, cuya vida es de 2,5 a 3 minutos y que parece estar constituido por un núcleo de aluminio (14):



La desintegración de estos radioelementos parece producirse con una liberación de energía extraordinariamente grande, habiéndose obser-

vado en el transcurso de estas experiencias la presencia de electrones transversales cuyas trayectorias son apenas desviadas por la acción de un campo magnético de 900 gauss y cuya energía, del orden de 7×10^6 eV hace suponer la existencia de rayos gamma de una energía cuántica considerable, a no ser que la presencia de aquellos electrones sea producida por un mecanismo aún desconocido (15).

La propiedad del neutrón de provocar la radioactividad artificial es uno de los elementos más utilizados para poner de manifiesto su presencia en una radiación. Los trabajos realizados últimamente sobre esta clase de transmutaciones han alcanzado una fecundidad tal, que en el breve plazo de ocho meses se han descubierto alrededor de setenta elementos radioactivos nuevos.

G. E. VILLAR.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- (1) Bothe & Becker. *Naturwiss.* Pág. 731. 1931.
- (2) I. Curie et F. Joliot. *C. R. Acad. Sc.*, 194. Pág. 273. Año 1932.
- (3) Chadwick. *Proc. Roy. Soc. A* 136. Pág. 692. 1932.
- (4) L. Leprince-Ringuet. *Les Transmutations Artificielles*. 1933. Hermann et Cie., Paris.
- (5) I. Curie et F. Joliot. *Rayonnement pénétrant des atomes sous l'action des rayons alpha*. Comunicación presentada al 7e. Conseil de Physique, Institut International de Physique Solvay. Bruxelles.
- (6) Mme. P. Curie. *Les rayons alpha, bêta et gamma des corps radioactifs en relation avec la structure nucléaire*. 1933. Hermann et Cie., Paris.
- (7) Chadwick. *Diffusion anormale des particules alpha. Transmutation des éléments par des particules alpha. Le neutron*. Comunicación presentada al 7e. Conseil de Physique.
- (8) Chadwick. — Comunicación mencionada anteriormente.
- (9) Chadwick. — Idem idem.
- (10) Chadwick. — Idem idem.
- (11) Chadwick. — Idem idem.
- (12) E. Fermi. *La Ricerca Scientifica*. 1934. Núms. 6 y 7.
- (13) E. Fermi, Arnaldi, D'Agostino, Rasetti y Segré. *Proc. Roy. Soc.*, 146. Pág. 483. 1934.
- (14) I. Curie et F. Joliot. *Radioactivité Artificielle*. 1935. Hermann et Cie., Paris.
- (15) I. Curie et F. Joliot. Obra mencionada anteriormente.

Características dinámicas de las células foto-eléctricas

TRABAJO EFECTUADO EN EL AULA DE 'INVESTIGACIONES' POR EL ING. ARTURO FERENCZI

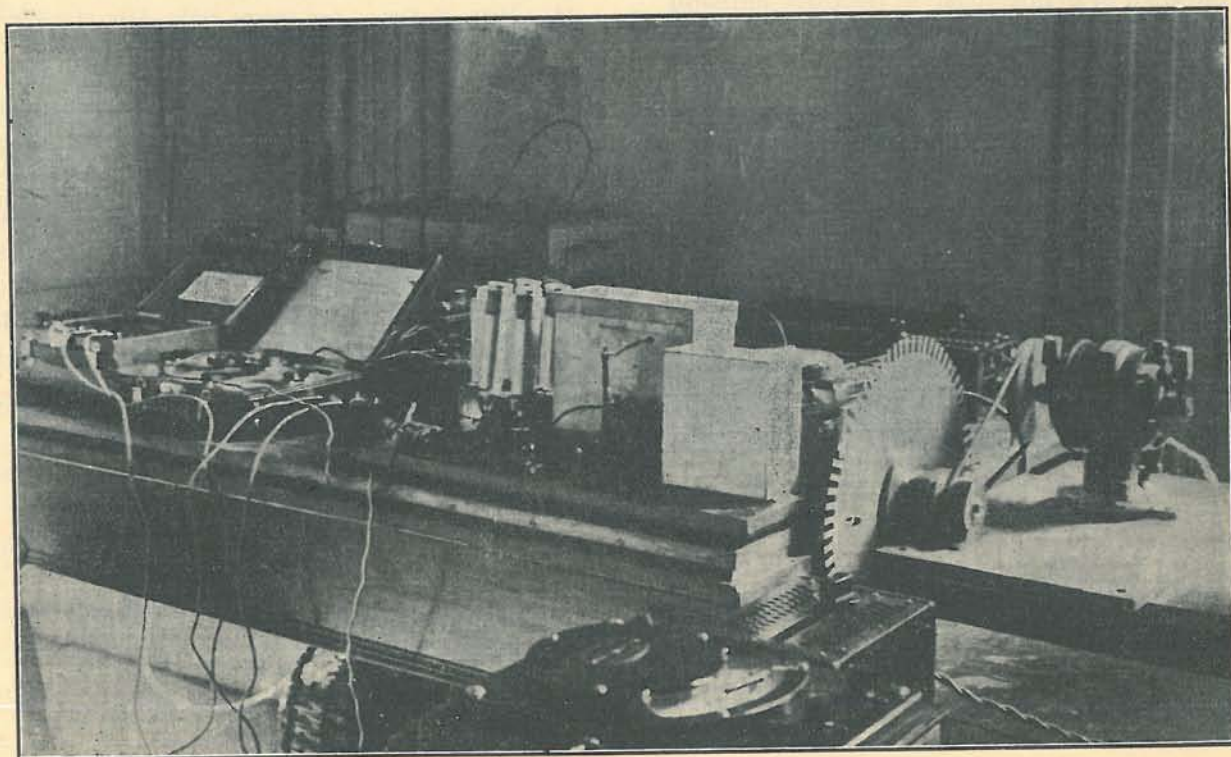
Tratándose de cualquiera de las múltiples aplicaciones prácticas de las células fotoeléctricas, las características que más interesan son: la sensibilidad, expresada en $\mu\text{Amp/lumen}$, y la variación de la corriente en función de la tensión aplicada ($\mu\text{Amp/volts}$). Como se sabe, las células no tienen la misma sensibilidad para todas las radiaciones, de manera que influye en estas medidas la naturaleza de la luz con la cual se ilumina la célula. Para eliminar esta variable en todas las experiencias se usó una lámpara de incandescencia común, marca "Philips", de 75 watts, alimentada con corriente continua de una batería de acumuladores y a una tensión de 200 voltios. Se ha determinado la intensidad luminosa de esta lámpara con un fotómetro Weber.

En todas las experiencias en las que se trate de medir corrientes fotoeléctricas hay que tener en cuenta que son corrientes de un valor pequesísimo. De los métodos conocidos para medir estas corrientes, citaré en primer lugar los procedimientos electrostáticos (B. 1, págs. 120 y siguientes). Si bien los diferentes métodos basados en este procedimiento permiten medir corrientes debilísimas, hasta del orden de 10^{-15} Amperes,

requieren todos ellos el empleo de un electrómetro, aparato del cual no dispone nuestro Laboratorio.

Nos quedan entonces los métodos electromagnéticos. De éstos, el más sencillo consiste en conectar en serie la célula, un galvanómetro y la batería. Pero este método sencillo es de muy poca sensibilidad. Todos los demás métodos, para obtener una mayor sensibilidad emplean tubos electrónicos de tres (o más) electrodos. Por su sencillez y sensibilidad hemos elegido un sistema con compensación en el circuito anódico. El esquema de este circuito puede verse en la fig. 1. La compensación en el circuito anódico fué indicada por varios autores, como Rosenberg (en *Naturwissenschaft*), Du Prel y Schein (en *Annalen der Physik*, 1928). A la compensación anódica se ha agregado la compensación en el circuito de grilla. De esta manera se trabaja siempre sobre un mismo punto de la característica de la válvula y no hay necesidad de tenerla en cuenta al efectuar las medidas.

Los terminales de los conductores se han soldado directamente a la válvula, evitando el uso de zócalos-soportes. De esta manera la aislación



entre grilla y cátodo llegó a valer 10^8 ohms. La gran sensibilidad a cualquier alteración de los componentes del circuito (baterías, tensión del acumulador, etc.) es el inconveniente de este método. Para obtener una mayor estabilidad, el filamento se hizo trabajar a 3,8 volts (5 % por debajo del valor nominal) y se utilizó una tensión anódica baja (aprox. 90 V.).

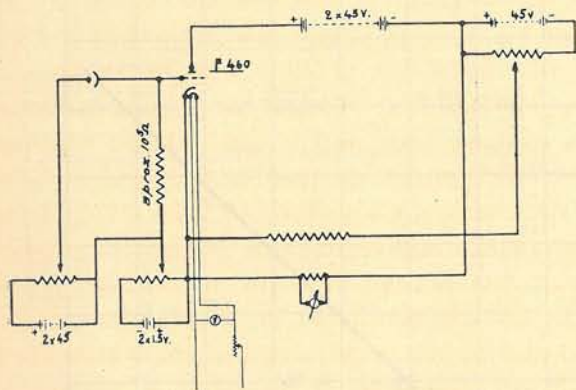


Fig. 1

Para efectuar una medida se procede de la siguiente manera: dejando de lado por el momento el circuito de la célula fotoeléctrica, se da a la grilla una tensión negativa (aproximadamente $1 \frac{1}{2}$ V.), tal de asegurarse que no hay corriente de grilla. La corriente anódica que circula en estas condiciones se compensa con la segunda batería, de manera que el galvanómetro no se desvía. En estas condiciones se ilumina la célula, la corriente que circula por la resistencia de grilla modifica la tensión de la misma, y el circuito anódico se desequilibra. Se vuelve a llevar a cero el galvanómetro, compensando la caída de tensión mencionada con la batería de grilla. Restando esta tensión de compensación de la tensión primitiva de grilla se conoce la caída en la resistencia de grilla. Y como se conoce el valor de ésta, por una simple división se calcula la corriente que se quiso medir. Utilizando una resistencia de aproximadamente 100000 ohms se tiene una sensibilidad del orden de 10^{-10} Amp. Sería falso extremar aún más la sensibilidad, aumentando la resistencia porque las imprevistas variaciones mencionadas podrían introducir errores importantes y hasta del mismo orden que la cantidad a medirse.

La sensibilidad del circuito descripto ha permitido no sólo trazar con facilidad la curva de aceleración de una célula "Philips" al vacío (figura 2), sino también medir la corriente debili-

sima (del orden de 10^{-8} Amp.) que se establece para el potencial cero. Al hacer estas medidas hubo que tomar precauciones especiales en lo que se refiere a la aislación de la célula (lim-

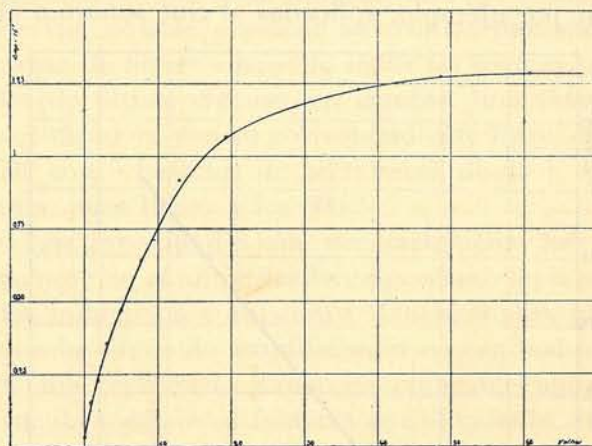


Fig. 2

pieza y secado con alcohol, empleo de conductores rígidos para evitar en lo posible puntos de apoyo, etc.). Se determinó también la curva de aceleración de una célula a gas (marca "Visi-tron"). Esta es una célula sumamente sensible y, como puede verse en la gráfica (fig. 3), en el primer tramo la curva es semejante a la anterior, pero aumentando la tensión no se produce el fenómeno de la saturación, sino al contrario: debido a la ionización del gas, hay un fuerte au-

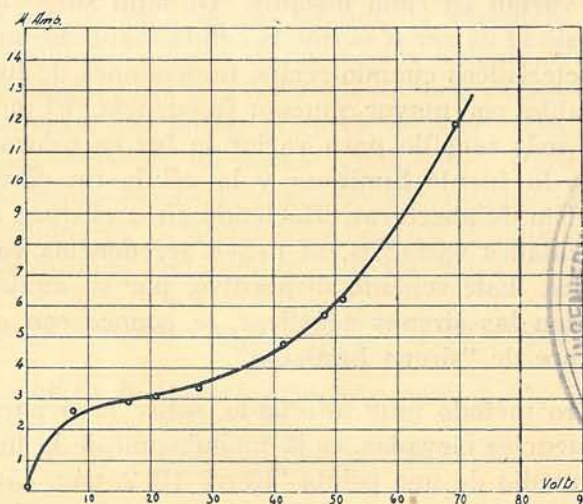


Fig. 3

mento de la corriente fotoeléctrica. En las figuras 4 y 5 pueden verse las curvas de iluminación de ambas células. Son prácticamente rectas y no hay que decir nada de particular sobre estas gráficas.

Las curvas de las cuales hablamos hasta ahora se llaman curvas estáticas, porque todos los fac-

tores varían lentamente y las medidas respectivas se hacen siempre en un perfecto estado de equilibrio. Pero las células, por lo general, no trabajan en estas condiciones, sino al contrario, como, por ejemplo, aplicadas al cine sonoro o al

directamente y es imprescindible amplificarlas. Para poder emplear el miliamperímetro disponible es necesario hacer amplificación de dos etapas.

Es evidente que para el diseño del amplifica-

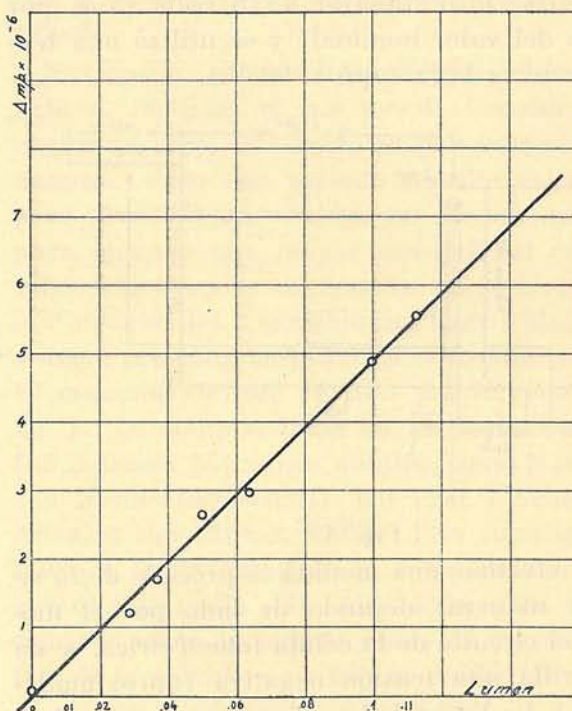
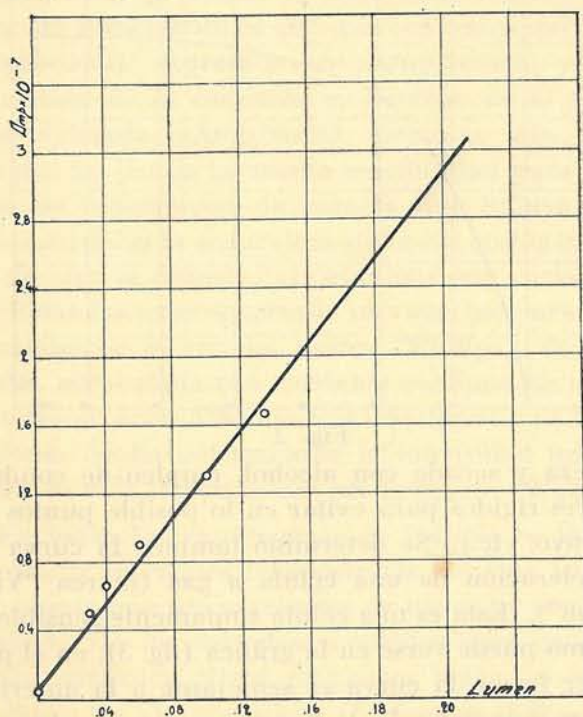


Fig. 4 y 5

televisor, están sometidas a impresiones de luz que varían en cada instante. De aquí surge la necesidad de ver si es que la célula mantiene sus características cuando recibe impresiones de luz variables con mayor o menor frecuencia. El método más sencillo para variar la luz es colocar entre la fuente luminosa y la célula un disco provisto de aberturas. Haciendo girar el disco a velocidades variables, se tienen frecuencias variables. Este sencillo dispositivo, por su analogía con las sirenas acústicas, se conoce con el nombre de "sirena luminosa".

Otro método muy adecuado, sobre todo para frecuencias elevadas, es la modulación de la luz por medio de una célula "Kerr" (B. 2, pág. 45). Se ha elegido el primer método, por su sencillez y por no disponerse de la célula de Kerr. De esta manera no hubo necesidad más que de hacer una pequeña transmisión para reducir, respectivamente elevar, el número de revoluciones del motor eléctrico.

Evidentemente las corrientes obtenidas son tan pequeñas (10^{-7} A.), que no es posible medirlas

dor, la condición primordial en el presente caso es una amplificación uniforme de todas las frecuencias. Por esta razón, y también porque su construcción fué posible casi exclusivamente con materiales disponibles en el Laboratorio, se eligió de los diferentes sistemas posibles, el conocido con el nombre de "amplificación directa". Como puede verse en el esquema 6, es el sistema "Loftin-White", con la modificación de que las tensiones para las dos lámparas se obtienen de dos grupos de resistencias, en vez de uno solo. Se hizo esta modificación para facilitar el ajuste del amplificador. En cuanto a las válvulas, para la primera etapa se eligió una de gran factor de amplificación, como lo es la E446 (Philips). Se han determinado las curvas características de esta lámpara para diferentes tensiones de la grilla-pantalla. Evidentemente se tiene amplificación máxima cuando la expresión $\frac{\mu R_e}{R_e + R_i}$ es máxima. Pero, tanto μ como R_i y R_e varían con la tensión de la grilla-pantalla (variando la corriente de placa y siendo la tensión total disponible constante, es necesario variar también R_e).

Despreciando el valor de R_e frente a R_i , resulta:

$$\frac{\mu}{R_i} R_e = G. R_e = G \frac{V}{I_A} \sim G \frac{336}{I_A}$$

Hallando una serie de estos valores, se llegó, por tanteos, a la conclusión de que para una

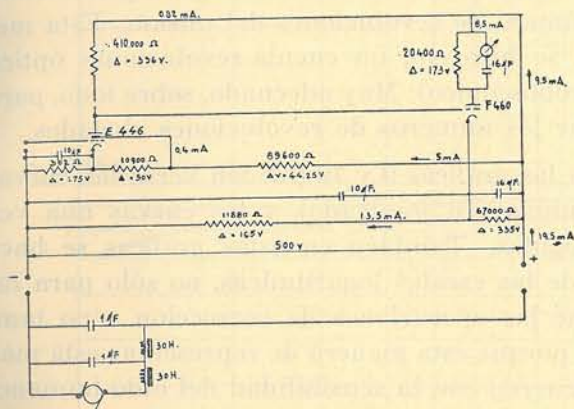


Fig. 6

tensión de la grilla-pantalla de 50 V. y tensión de grilla $-1,75$ V., resulta un consumo en placa de 0,82 mA. y una resistencia externa de 0,41 Mohm, que no es todavía un valor excesivo. En estas condiciones se tiene un factor de amplificación (teórico) de unas 800 x. Si se tiene en cuenta las condiciones en que trabaja la segunda válvula, es evidente que es conveniente el empleo de una válvula de gran inclinación y de una resistencia interna no excesivamente baja. Cumple muy bien con estas condiciones la válvula F 460 (Philips), que tiene inclinación de 4,8 mA/V. y una resistencia interna de 11600 ohms.

Elegidas las válvulas y su punto de funcionamiento, se han calculado las resistencias para obtener las tensiones necesarias. Valores que están indicados en el esquema 6, que está algo simplificado, porque en realidad hubo necesidad de emplear en muchas partes dos y tres resistencias en paralelo, para evitar su calentamiento excesivo. Naturalmente, no fué posible obtener todas las resistencias exactamente del mismo valor que el calculado; pero, con todo, fué posible acercarse bastante a los valores calculados y a los puntos de funcionamiento previstos. Para la medida de las tensiones se utilizó un voltímetro electrostático Hartmann & Braun. El ajuste resultó bastante laborioso, más si se tiene en cuenta que la segunda válvula trabaja con una tensión negativa de grilla de aproximadamente -1 V: tensión que se obtiene como diferencia de dos

tensiones del orden de 300 V.

Para evitar oscilaciones hubo necesidad de blindar cada etapa del amplificador. Además se tuvo que cambiar de fuente de corriente de alta tensión, porque de la suministrada por el dínamo no fué posible eliminar los ruidos parásitos, a pesar de haber ensayado todas las formas usuales de filtros. Se usó, en cambio, una lámpara rectificadora con su correspondiente filtro, en serie con 5 baterías de pilas secas de 45 V. cada una, para llegar a los 500 V.

Las capacidades que necesariamente hay que colocar en el amplificador, como los acoplamientos inductivos y capacitivos accidentales, hacen que la curva de amplificación no sea completamente rectilínea. Como es imposible tener en cuenta todos estos factores por el cálculo, es necesario hacer un calibrado del amplificador.

El calibrado se efectuó con un oscilador de baja frecuencia, marca "RCA-Victor", tipo TMV-52-E. Como este oscilador se obtuvo sólo en calidad de préstamo, se hizo un pequeño oscilador para un ensayo preliminar.

El oscilador suministra una corriente prácticamente sinusoidal (contenido de armónicas menor del 2 %). Pero en este caso, dada la pequeña dimensión de la abertura de iluminación de la célula con respecto a las dimensiones de los dientes de la rueda, la corriente puede considerarse como una de ondas rectangulares. Entonces, partiendo de la curva de corrección obtenida con el oscilador para una corriente de forma sinusoidal, tenemos que hallar la curva de corrección para esta corriente de forma rectangular. Para esto descomponemos la corriente rectangular en sus armónicas. Si designamos con 100 el valor eficaz de la onda rectangular, el valor eficaz de la pri-

mera armónica será: $\frac{4 \times 100}{\pi \times \sqrt{2}} = 90$ y el mismo valor de la tercera armónica será:

$$\frac{4 \times 100}{3 \times \pi \times \sqrt{2}} = 30$$

Ahora bien; el valor eficaz de la corriente resultante de las dos armónicas es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores de los componentes, como puede verse fácilmente:

El valor eficaz es por definición:

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

pero

$$\begin{aligned}
 i &= \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{2n-1} \sin(2n-1)t \\
 i^2 &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} a_{2n-1} a_{2m-1} (\sin 2n-1)t \sin(2m-1)t \\
 \int_0^T i^2 dt &= \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} a_{2n-1} a_{2m-1} \int_0^T \sin(2n-1)t \sin(2m-1)t dt \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 0 & \text{si } m = n = 0 \\ \pi & \text{si } m = n > 0 \end{cases} \\
 \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt &= \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{a_{2h-1}^2}{T} \int_0^T \sin^2(2h-1)t^2 dt \\
 I^2 &= \sum_{h=1}^{h=\infty} I_{2h-1}^2
 \end{aligned}$$

De acuerdo con lo dicho se procedió en la gráfica de la fig. 7. Empezando por abajo, la primera curva es la que se ha obtenido con el oscilador "RCA-Víctor". Considerando ésta como fundamental (90) se elevó al cuadrado y se tiene la curva I^2 . En vez de dibujar la curva I , se ha tomado la novena parte (3^2) de la curva I^2 . Se ha elegido la escala logarítmica, porque de esta manera, todas estas operaciones pueden hacerse fácilmente. La operación siguiente es la obtención de la curva $I_1^2 + I_3^2$. Esto se tiene sumando (no gráficamente) las ordenadas de la curva I^2 correspondientes a una determinada frecuencia, con las ordenadas de la curva I^2 correspondientes a una frecuencia triple. Extra- yendo la raíz cuadrada de la curva $I^2 + I_3^2$ tenemos la curva de corrección buscada.

Ahora ya estamos en condiciones de trazar las características dinámicas. La disposición de los aparatos puede verse en la fotografía. A la derecha se ve la rueda accionada a correa por el electromotor. Detrás de la rueda está la caja que contiene la célula fotoeléctrica. Luego viene el amplificador, el par termoeléctrico con su milivoltímetro. En el fondo, a la izquierda, se ven las baterías y los condensadores del rectificador, y a la derecha las resistencias para regular la tensión del filamento de las válvulas y la tensión

del motor. En primer plano se ve el voltímetro y la resistencia reguladora de la lámpara con la cual se iluminó la célula. Es una pequeña lámpara de filamento concentrado, que no aparece en la fotografía.

La frecuencia se determina fácilmente sabiendo que el disco tiene 70 dientes y midiendo el número de revoluciones del mismo. Esta medida se hizo con un cuenta-revoluciones óptico (estroboscópico). Muy adecuado, sobre todo, para medir los números de revoluciones elevados.

En las gráficas 9 y 10 pueden verse las curvas obtenidas (en punteado) y las curvas una vez corregidas. También en estas gráficas se hace uso de las escalas logarítmicas, no sólo para facilitar las operaciones de corrección, sino también porque esta manera de representar está más de acuerdo con la sensibilidad del oído humano. Se usa actualmente como unidad de amplificación el *decibel* (dB). Esta unidad se define como el logaritmo de la relación de dos potencias:

$$dB = 10 \log. \frac{P_1}{P_2}$$

pero si la resistencia es una misma, entonces:

$$dB = 10 \log. \frac{I_1^2}{I_2^2} = 20 \log. \frac{I_1}{I_2}$$

De manera que la disminución de amplitud puede leerse (a una escala diferente) en la misma gráfica. La escala de dB está indicada punteada. El oído humano puede distinguir diferencias de 3 dB en las bajas frecuencias y de 1 dB en las altas. Estos valores varían naturalmente mucho de un individuo a otro y se refieren a notas aisladas en un ambiente tranquilo. Prácticamente puede decirse que la variación mínima que se percibe es de unos 3 dB. Según puede verse en las gráficas, la disminución es menos de 3 dB para la célula a gas y sólo de 1 dB para la célula al vacío. De manera que para los usos prácticos, éstos son valores completamente despreciables. Además, pueden ser fácilmente corregidos por un diseño adecuado del amplificador que necesariamente sigue a la célula.

La disminución de amplitud a frecuencias elevadas puede explicarse fácilmente: la célula puede representarse esquemáticamente por dos resistencias (interna y externa) y un condensador (capacidad de la célula) en paralelo. Si bien este último valor se llega a hacer muy pe-

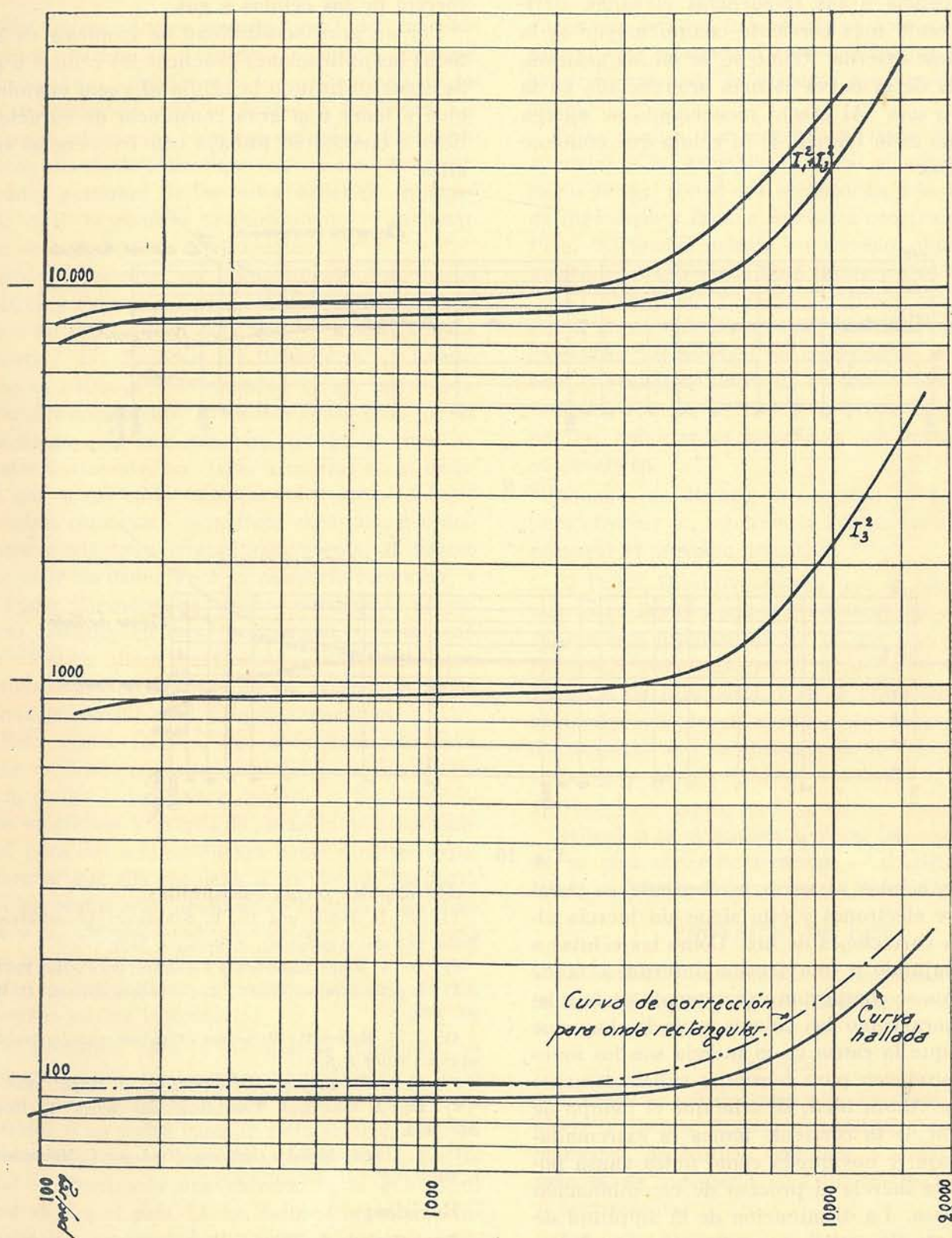


Fig. 7

queño (del orden de 1 a 10 cm.), hace sentir su influencia a las frecuencias elevadas, derivando tanto más corriente cuanto mayor es la resistencia externa. Como se ve en las gráficas, la caída de la curva es más pronunciada en la célula a gas. Al efecto mencionado se agrega otro, que es la inercia de la célula que contiene algún gas.

sió convenientes, puede disminuirse mucho la inercia de las células a gas.

Por su gran sensibilidad se emplean en casi todas las aplicaciones prácticas las células a gas. Se sigue utilizando la célula al vacío cuando se quiere tener una gran constancia de características o cuando se trabaja con frecuencias muy altas.

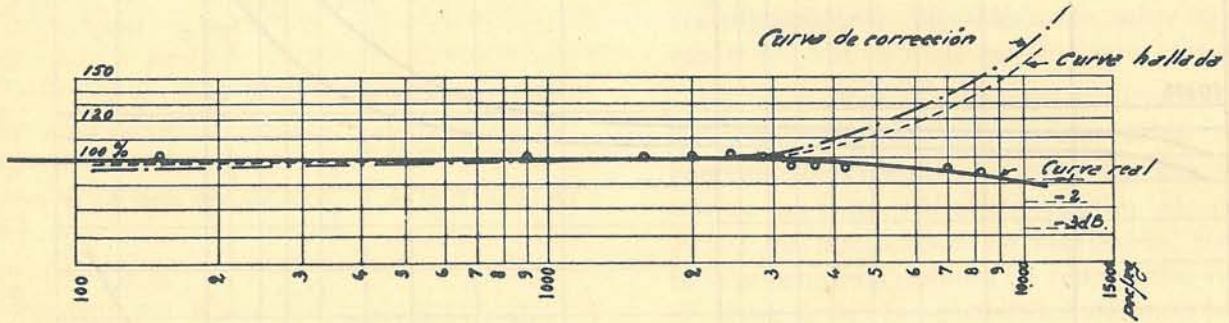


Fig. 9

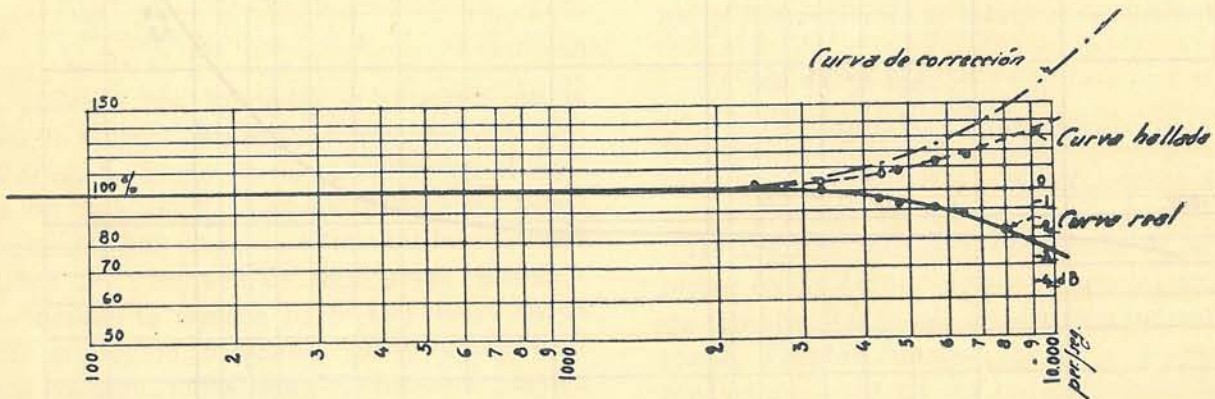


Fig. 10

En las células al vacío la corriente es puramente de electrones y ésta sigue sin inercia alguna las variaciones de luz. Como las células a gas trabajando a una tensión inferior a la de ionización, se comportan exactamente de la misma manera como las células al vacío, hay que admitir que la causa de la inercia son los iones que se producen para tensiones suficientemente elevadas. Ahora bien; se sabe que el tiempo de formación de la corriente iónica es extremadamente baja, y nos queda como única causa posible de la inercia el proceso de recombinación de los iones. La disminución de la amplitud de la corriente se explica por esta misma tardanza de la recombinación. Es decir, que a las frecuencias elevadas los iones todavía no han tenido tiempo de recombinarse cuando la célula ya se ilumina de nuevo. Eligiendo un gas y una pre-

Principales obras consultadas:

- 1) Dr. H. Simon und Dr. R. Suhrmann: *Lichtelektrische Zellen und ihre Anwendung*. J. Springer. 1932.
- 2) Dr. A. Korn: *Elektrisches Fernsehen*. Otto Salle. 1930.
- 3) Ing. Dr. Ernesto Montú: *Radio*. Octava edición. U. Høpli. 1932.
- 4) J. E. Morecraft: *Principles of radiocommunication*. 2th edition. Wiley & S.
- 5) U. Ruelle: *Principii di radiotecnica*. U. Høpli. 1928.
- 6) Ing. A. Castellani: *Televisione, radiovisione*. U. Høpli. Año 1932.
- 7) A. Linker: *Medidas eléctricas*. Trad. por C. Meisterhans. L. Gili. 1927.

Revistas:

Revue Générale de l'Electricité.
L'Elettrotecnica.
Electrical Engineering.
Telefunken Zeitung.

NOTA. — Los números como (B. 1.), (B. 2), etc. en el texto, se refieren a las obras más arriba mencionadas.

El Nuevo Edificio para la Facultad de Ingeniería

Fué aspiración mantenida por todos los elementos vinculados a nuestra Facultad, durante muchos años, obtener una ley que autorizara la construcción de edificio propio y facilitara los recursos necesarios para esa empresa. Esa aspiración acaba de cristalizar felizmente. Ante reiteradas gestiones de las autoridades de Ingeniería, el P. E. remitió al Parlamento el mensaje que se transcribe a continuación:

Poder Ejecutivo. — Ministerio de Instrucción Pública y Previsión Social. — Montevideo, setiembre 6 de 1935. — N.º 2398/935. — A la Asamblea General: La Facultad de Ingeniería y Ramas Anexas necesita, imperiosamente, un nuevo edificio funcionalmente adecuado a los fines de la enseñanza que debe impartir. Desde su creación, hasta el presente, ha vivido y crecido en el edificio que ocupa en la calle Cerrito y Juan Lindolfo Cuestas, construido para fines esencialmente distintos y adaptado, circunstancialmente, al destino que se le ha dado. Pero es necesario reconocer, y el Poder Ejecutivo ha tenido oportunidad de hacerlo presente en otra oportunidad, que tal edificio resulta ahora insuficiente e inadecuado para atender las necesidades que la carrera de ingeniería industrial creó a aquella Facultad.

Esta nueva carrera, que debe desarrollarse a base de trabajos experimentales y de investigación, obliga a dar mayor amplitud a los laboratorios existentes y exigirá la creación de otros nuevos, para dar a la enseñanza aquel carácter experimental que ella requiere, a fin de que los futuros egresados sean hombres de trabajo y de ciencia y no simples eruditos teóricos. No hay más que un procedimiento para llegar a tal fin y consiste en intensificar el trabajo personal de los alumnos en los laboratorios.

El problema, para la Facultad de Ingeniería, se presenta, pues, en términos angustiosos: o se le construye edificio apto para sus funciones y cometidos o no podrá cumplir satisfactoriamente su deber de preparar ingenieros industriales, con lo cual se frustraría una carrera de la que tanto bien espera el país. A los futuros ingenieros industriales corresponderá impulsar nuestra incipiente industria, guiándola por camino de mayor seguridad técnica y científica; ellos habrán de investigar nuestro suelo y nuestro subsuelo en procura de combustibles y de minerales que nos ase-

guren una relativa independencia económica y serán quienes establezcan sobre sólidas bases la explotación razonada de nuestros productos primordiales.

Estas razones han decidido al Poder Ejecutivo a enviar a la Asamblea General el adjunto proyecto de ley, por el que se autoriza a la Facultad de Ingeniería y Ramas Anexas a construir su edificio. El tendrá asiento en terrenos municipales ubicados en el Parque José Batlle y Ordóñez.

La fórmula de financiación proyectada, significará un servicio anual de \$ 45.000.00, aproximadamente. Tal servicio no comenzaría, en ningún caso, a realizarse antes de un año, a partir de la fecha de sanción de la ley, y estará compensado por los importantes beneficios que emanarán de su inversión.

Además, se dispone la cantidad de \$ 5.000.00 para efectuar un concurso de anteproyectos y para preparar el proyecto definitivo.

El Poder Ejecutivo piensa que el mejor régimen para llevar a cabo la construcción a que se refiere este proyecto de ley es que una Comisión honoraria designada por el propio Consejo de la Facultad de Ingeniería, y en la cual tenga representación el Poder Ejecutivo, administre los fondos respectivos y se encargue de la referida construcción, y así lo establece el artículo 4.º del proyecto.

Reitero a la Asamblea General las seguridades de mi más alta consideración. — GABRIEL TERRA. — Martín Echegoyen. — César Charlone.

PROYECTO DE LEY

El Senado y la Cámara de Representantes de la República Oriental del Uruguay, reunidos en Asamblea General,

DECRETAN:

Artículo 1.º—Autorízase a la Facultad de Ingeniería y Ramas Anexas a construir, en terreno municipal, un edificio destinado a atender la enseñanza de ingeniería civil, ingeniería industrial y agrimensura.

Art. 2.º—Autorízase al Banco Hipotecario del Uruguay para conceder a esa Facultad un préstamo hipotecario, para los fines estipulados en el artículo anterior, por la suma de \$ 650.000.00, valor nominal, afectando en garantía el edificio que

actualmente ocupa esa institución de enseñanza, emplazado entre las calles Juan Lindolfo Cuestas, Piedras, Ingeniero Monteverde y Cerrito, y el nuevo edificio a construirse.

Art. 3.º—El servicio de intereses y amortización de tal préstamo se incluirá en el presupuesto respectivo.

Art. 4.º—Créase una Comisión honoraria para entender en todo lo que se refiere al proyecto y construcción de tal edificio, y la administración de fondos acordados para dicha construcción. Estará constituida por tres miembros designados por el Consejo Directivo de la Facultad de Ingeniería y Ramas Anexas, uno por el Ministerio de Obras Públicas y otro por el Ministerio de Hacienda.

La Comisión deberá informar trimestralmente al Poder Ejecutivo sobre la forma en que se desarrolla su gestión.

Art. 5.º—La Comisión no podrá comenzar la venta de los títulos hipotecarios cuya administración se le encomienda, antes de un año de la fecha de promulgación de esta ley.

Art. 6.º—Destínase de Rentas Generales la suma de \$ 5.000.00 para efectuar, entre técnicos nacionales, un concurso de anteproyectos y para preparar el proyecto definitivo destinado al edificio a construirse.

Art. 7.º—Comuníquese, etc. — **Martín Echegoyen.** — **César Charlone.**

El proyecto de ley fué informado, en la Cámara de Diputados, por el Ing. Raúl Regules, quien prestó amplia dedicación al asunto, haciendo ambiente, con calor e inteligencia, a la tesis sostenida por la Facultad de Ingeniería.

He aquí el discurso pronunciado por el Ingeniero Regules en ocasión de tratarse en Diputados el referido proyecto:

Cuando por primera vez llegó a mi poder este proyecto de ley y leí el mensaje del Poder Ejecutivo, hube de pensar, señor Presidente, si era oportuna esta inversión de dinero, en la estricta economía fijada en la hora actual, para los gastos públicos, y si fuera necesario, además, realizar este desembolso, en las posibilidades que para la enseñanza admitía el viejo edificio de la calle Juan Lindolfo Cuestas y Cerrito.

Bajo este primer examen, recogí la iniciativa concretada en el proyecto de ley, que obedece principalmente a la inspiración del Ing. Giorgi, actual Decano de la Facultad de Ingeniería, y

me incliné decididamente a apoyarla con el informe que adhirió luego, unánimemente, la Comisión de Obras Públicas. Porque en síntesis afirmábamos esta conclusión: de que aún a riesgo de los sacrificios económicos enunciados, era necesario y urgente para la enseñanza superior proceder a la ejecución de un edificio aparente, tal cual se proyecta en el mensaje del Poder Ejecutivo.

La iniciativa se debería llevar a cabo por el sistema corriente de la afectación hipotecaria, admitiendo que el gravámen de intereses y amortización fuera servido por Rentas Generales en la proporción de \$ 42.000 anual.

El segundo examen que hube de formular fué el referente a lo que debe ser, a mi juicio, el estudio de la profesión, integrada, como es sabido, por un capítulo fecundo de ciencias físicas y de ciencias exactas. Y no es necesario urgir en reflexiones, para comprender —por la índole de esos estudios— el cuidado preferente que deben merecer los planes de enseñanza, los medios de aplicarlos y la extensión de los cursos, de modo que salga del claustro el alumno con una cultura integral en aptitud de afrontar la realidad social contemporánea.

Mis observaciones sobre este aspecto, las resumo en estos puntos de vista:

1.º—La base de las ciencias es el método llamado deductivo. Sobre esta disciplina organiza y forma su conciencia intelectual el estudiante de matemáticas. Por fuerza de la costumbre de los axiomas llega por vía del razonamiento a las conclusiones o principios absolutos. La carrera del ingeniero tiene, por decirlo así, esta norma trazada, esta inclinación natural para el descubrimiento de la verdad. Las otras profesiones siguen más bien el método inductivo de la observación, y, por vía de reflexión, a las conclusiones, y si los primeros parten de un error axiomático, el razonamiento resulta falso y, como tal, nos presentan sus conclusiones. Señalo con esto el peligro de una enseñanza excluyente y que no permita eludir por una cultura más generalizada el espíritu absorbente de las matemáticas.

2.º—No sería de temer, si este signo de cultura quedara en la discusión para la doctrina en los laboratorios y en las aulas, pero es que, surge o surgirá a los puestos dirigentes de nuestra actividad profesional, y entonces los errores serán

ya irreparables, porque vienen respaldados en la garantía de un título académico.

3.º—Tenemos que contribuir, y en ese sentido tiende este proyecto de ley, a la formación de una cultura matemática superior, dando al alumno los métodos de asimilación que no mutilen su espíritu por el firme dogmatismo de los números y que pueden crearle una concepción de la vida hermética para otras fuentes de información y de útil y necesaria madurez intelectual.

4.º—Emplazada así la orientación de la enseñanza, concluimos con que esta profesión no se aprende en las bibliotecas, en los claustros limitados, en las plazas, en las calles, sino en un conjunto armónico de valores, que relacione con elevada erudición sus fines primordiales y que tenga por asiento una casa de estudios apropiada y digna de nuestra Universidad. Señalo ahora la virtud de este proyecto que contempla las necesidades de una Facultad que tiene ya cuatro institutos de investigación y experimentación: el de máquinas, el de electrotécnica, el de química y el de ensayo de materiales; dos laboratorios: de física y tecnología, y todos los anexos docentes.

El tercer examen que explica mi decisión, es el referente a lo que contiene esa casa de estudios, en cuanto a lo que ha sido, a lo que ha devuelto al país, como compensación del esfuerzo realizado, y lo que será como resultante del pensamiento que domina el claustro universitario.

Si tuviera que detener mi juicio sobre la primera etapa, ya recorrida, diría que hemos culminado el capítulo de las exigencias, brindando al país un caudal abundante de ingenieros que han sabido afrontar las obras públicas con el acierto de la más alta competencia técnica, y tendría que evocar el recuerdo de privilegiados esfuerzos, en el nombre de sus más esclarecidos profesores, de esos profesores que actuaron con dificultades de ambiente, de información, de bibliografía y que, sin embargo, crearon una cultura que ha servido de base para la formación de una carrera perfectamente orientada con el interés del país.

Puedo hablar de los que fueron mis profesores, muchos de ellos desaparecidos. Permitidme que lo haga. Citaré a Juan Monteverde, en la sencillez de su vida y la extensión de su obra; a Nicolás Piaggio, por aquel impecable fervor do-

cente; a Federico N. Abadie, por la huella que dejó su rasgo de maestro, noble y promisor, en el alma estudiantil; a Juan Casterés, por su consagración en una cátedra de especialización; a Carlos M. Maggiolo, por lo que tenía de selecto y de sincero, y entre los que actualmente siguen con la misma vigilante inquietud por el estudio y la investigación, permitidme que pronuncie dos nombres ejemplares: el de Víctor Sudriers, por su erudición y por lo que es su cátedra en la elevada concepción académica, y el de E. García Zúñiga, el maestro de todas las generaciones y, acaso, la figura más respetada, por la jerarquía intelectual, de todo el cuerpo de profesionales.

Si fuera del caso augurar las perspectivas futuras, aliento las más sugestivas esperanzas; pero las vinculo a la orientación activa que se le dé a la enseñanza por la incorporación de los estudios para ingeniero industrial.

Las industrias que se han implantado en nuestro medio lo han hecho sobre la base de privilegios y de concesiones cuya revisión es urgente examinar, y hemos abordado sólo las de fácil y accesible solución, sin que intervinieran ni la especulación científica ni los riesgos de una experiencia movida por el desinterés.

Y ésta ha de ser, señor Presidente, la obra de la futura Facultad de Ingeniería: consagrar a la juventud en la disciplina del estudio de nuestras riquezas y de nuestras materias primas, para ir acumulando las enseñanzas necesarias que fortalezcan la economía nacional, por la vía directa del trabajo especializado en la implantación científica de las industrias, que así lo reclama nuestra cultura y el progreso del país.

Con estas palabras dejo fundado mi voto en favor del proyecto de ley.

El proyecto quedó después aprobado en general y en particular, sin originar discusiones, pasando al Senado con el siguiente texto:

TEXTO DEL PROYECTO

Artículo 1.º—Autorízase a la Facultad de Ingeniería y Ramas Anexas a construir, en terreno municipal, un edificio destinado a atender la enseñanza de ingeniería civil, ingeniería industrial y agrimensura.

Art. 2.º—Autorízase al Banco Hipotecario del Uruguay para conceder a esa Facultad un prés-

tamo hipotecario, para los fines estipulados en el artículo anterior, por la suma de \$ 650.000.00, valor nominal, afectando en garantía el edificio que actualmente ocupa esta institución de enseñanza, emplazado entre las calles Juan Lindolfo Cuestas, Piedras, Ingeniero Monteverde y Cerrito, y el nuevo edificio a construirse.

Art. 3.º—El servicio de intereses y amortización de tal préstamo se incluirá en el Presupuesto General de Gastos.

Art. 4.º—Créase una Comisión Honoraria que entenderá en todo lo que se refiere:

- a) Al proyecto;
- b) a la adjudicación total o parcial de la obra, que se hará en todos los casos previa licitación pública;
- c) al control de la construcción;
- d) a la administración de los fondos.

Art. 5.º—La Comisión Honoraria, estará constituida por el Decano y dos miembros designados por el Consejo Directivo de la Facultad de Ingeniería y Ramas Anexas, por el Director de Arquitectura del Ministerio de Obras Públicas y por un Delegado del Ministerio de Hacienda.

Art. 6.º—La Dirección de Arquitectura del Ministerio de Obras Públicas facilitará el personal técnico y administrativo, que sea necesario y que solicite la Comisión Honoraria, para el control de la obra y ejecución de los planos o estudio que hubiere lugar.

Se excluirían los sobrestantes, que serán designados por la Comisión Honoraria y abonados sus sueldos con cargo a los fondos votados por esta ley.

Art. 7.º—La Comisión Honoraria no podrá proceder a la venta o caución de los títulos Hipotecarios, cuya administración se encomienda, hasta tanto no corresponda hacer efectivas las obligaciones por obra ejecutada que derivan

del cumplimiento de la ley o las compensaciones por el predio adquirido al Municipio, y sólo dispondrá de la proporción equivalente a esas erogaciones.

La Comisión Honoraria deberá informar trimestralmente al Poder Ejecutivo sobre la forma en que se desarrolla su gestión.

Art. 8.º—Las economías que se obtengan desde la fecha de la sanción de esta ley, hasta la habilitación del edificio, en la partida fijada, para el pago de interés, la Comisión Honoraria la reservará en una cuenta especial a la orden de la Facultad de Ingeniería para los gastos de instalación, trabajos de laboratorio y premios de estímulos para concurso de la investigación científica.

Art. 9.º—Destínase de Rentas Generales la suma de \$ 5.0000 para efectuar, entre técnicos nacionales, un concurso de anteproyectos y para preparar el proyecto definitivo destinado al edificio a construirse.

Art. 10.—Comuníquese, etc.

En el Senado fué aprobado, sin discusión, ni modificaciones, el proyecto de ley, con el texto remitido por la Cámara de Diputados, el día 27 de diciembre de 1935.

El Consejo Directivo de la Facultad tomó nota de la sanción de la ley en su sesión del lunes 30 de diciembre ppdo., y en la misma sesión designó a los Sres. Consejero Ing. Eduardo Terra Arocena e Ing. Vicente I. García para integrar la Comisión a que se refiere el artículo 5.º de la ley sancionada.

De un momento a otro la Intendencia de Montevideo acordará una parcela de terreno, en uno de los más hermosos jardines del Parque José Batlle y Ordóñez, en donde se levantará el futuro edificio de la Facultad.