

BOLETIN DE LA FACULTAD  
DE  
INGENIERIA Y AGRIMENSURA  
DE MONTEVIDEO



Vol. VIII, Nº 3

JULIO 1962

MONTEVIDEO — URUGUAY

AUTORIDADES DE LA FACULTAD DE INGENIERIA Y  
 AGRIMENSURA DE LA UNIVERSIDAD DE LA  
 REPUBLICA ORIENTAL DEL URUGUAY

Decano: Ingeniero Ind. y Agrim. ENRIQUE DE MARTINI

Secretario: DONATO CHIACCHIO

CONSEJO

Presidente. Profesor Ingeniero Ind. y Agrim. ENRIQUE DE MARTINI

Consejeros:	{	Profesor Agrimensor	HERBERT ODDONE
		Profesor	EDELMIRO MAÑE
		Profesor Ing. Civil	JULIO RICARDONI
		Profesor Ing. Industrial	HECTOR FERNANDEZ GUIDO
		Profesor Ing. Industrial	OSCAR J. MAGGIOLO
		Ingeniero Civil	EZEQUIEL SANCHEZ GONZALEZ
		Ingeniero Industrial	J. FELIX CASTILLO
		Agrimensor	FEDERICO AMONTE
		Bachiller	MARIO WSCHEBOR
		Bachiller	RAUL CAPPETTA
Bachiller	LUIS OSIN		

DIRECTORES DE INSTITUTOS

Prof. Agrim. CERVIÑO, Julio H. ..	del Instituto de Topografía, Astronomía Geodésica y Geodesia
Prof. Ing. Ind. PEREZ IRIBARREN, R.	del Instituto de Electrotécnica (Interino)
Prof. Ing. Ind. BOCES, Carlos A. ....	del Instituto de Ensayo de Materiales (Interino)
Prof. Ing. Civil HILL, Walter S. ...	del Instituto de Física
Prof. Ing. Ind. LAGUARDIA, Rafael	del Instituto de Matemática y Estadística
Prof. Ing. Civil de MEDINA, Félix .	del Instituto de Máquinas
Prof. Ing. Civil RICARDONI, Julio .	del Instituto de Estática
Prof. Ing. Civil VILLAR, Germán, E.	del Instituto de Tecnología y Química

BOLETIN DE LA  
FACULTAD DE INGENIERIA Y AGRIMENSURA  
DE MONTEVIDEO

---

*Director: Prof. Ing. GERMAN E. VILLAR*

HERRERA Y REISSIG 565, MONTEVIDEO, URUGUAY

---

AÑO XXVI

JULIO 1962

VOL. VIII, Nº 3

---

S U M A R I O

	<i>Págs.</i>
<i>Agrim. Julio C. Granato Grondona.</i> Utilización de la Computadora Electrónica Mercuri para el cálculo de loteos .....	71
<i>E. M. Cabaña.</i> Cálculo de loteos por medio de una computadora electrónica	101
<i>A. Gandulfo.</i> Parametrización en grande de las soluciones de sistemas de segundo orden de ecuaciones diferenciales .....	113

---



# Utilización de la Computadora Electrónica Mercury para el cálculo de loteos

AGRIM. JULIO C. GRANATO GRONDONA

Instituto de Topografía, Astronomía Geodésica y Geodesia de la  
Facultad de Ingeniería y Agrimensura

Por estar el perfeccionamiento técnico de los procesos topográficos y topométricos estrechamente vinculados a la faz económica de los mismos, el Instituto de Topografía, Astronomía Geodésica y Geodesia de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura, estudió tal aspecto en lo concerniente a la utilización de la computadora electrónica de alta velocidad y gran capacidad de memoria, del tipo Mercury de la casa Ferranti de Manchester, Gran Bretaña, existente en el Instituto de Cálculo de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, en lo relativo al cálculo de loteos de amanzanamiento en casos diversos.

Teniendo en cuenta las facilidades que se podrán obtener, hemos considerado la manzana definida por los ejes y anchos de las calles que la circundan y por los radios de cada ochava, siendo los ejes arcos circulares o segmentos de recta y donde se conocen las coordenadas de los vértices de los ejes mencionados, entendiéndose por vértices cada una de las intersecciones de dos ejes contiguos.

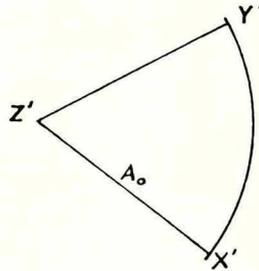
Para estudiar el problema era menester considerar una serie de etapas intermedias que conducirían posteriormente a la redacción de un programa. Las etapas de este trabajo fueron las siguientes:

I) Análisis del problema. — Elección del método de cálculo. Se ha convenido en utilizar el método analítico por coordenadas por considerarlo el más general.

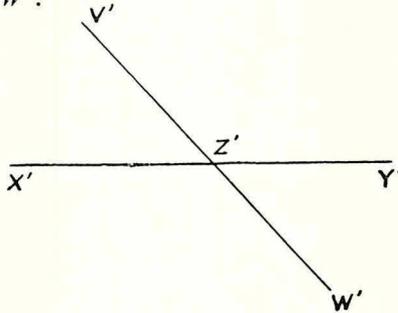
II) Planeamiento del cálculo en base a las operaciones o subrutinas que deberá realizar la computadora.

a) Subrutinas.

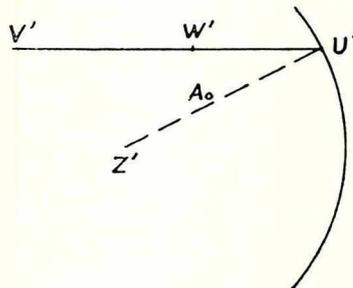
*Subrutina 1.* Hallar las coordenadas del centro  $Z'$  de la circunferencia que pasa por  $X'$ ,  $Y'$  y radio  $A_0$ , considerándose en este caso, como en los siguientes, el signo del radio positivo cuando se recorre la circunferencia en sentido antihorario y negativo en caso contrario.



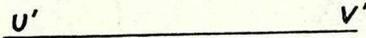
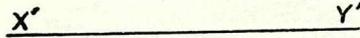
*Subrutina 2.* Hallar las coordenadas de  $Z'$  intersección de las rectas  $X'Y'$  y  $V'W'$ .



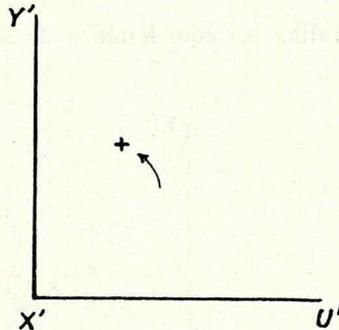
*Subrutina 3.* Hallar las coordenadas de  $U'$  intersección de la circunferencia de centro  $Z'$  y radio  $A_0$  con la recta  $V'W'$ , tomándose  $+1$  para intersección orientada en el sentido en que  $V'$  precede a  $W'$  y  $-1$  para la otra.



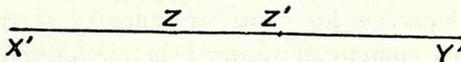
*Subrutina 4.* Hallar las coordenadas de  $Y'$  suma del punto  $X'$  y del vector  $U'V'$ .



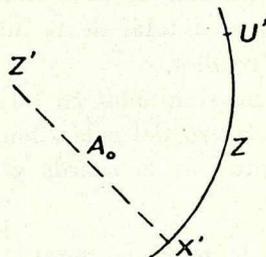
*Subrutina 5.* Hallar las coordenadas de un punto  $Y'$  de la normal orientada en sentido positivo a  $X'U'$ . El punto  $Y'$  está situado de tal manera que  $X'Y' = X'U'$  ( $Y'$  es la imagen de  $U'$  por una rotación positiva de  $90^\circ$  alrededor de  $X'$ ).



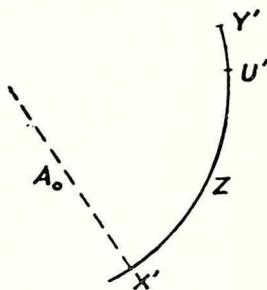
*Subrutina 6.* Hallar las coordenadas de un punto  $Z'$  de  $X'Y'$  a una distancia  $Z$  de  $X'$ .



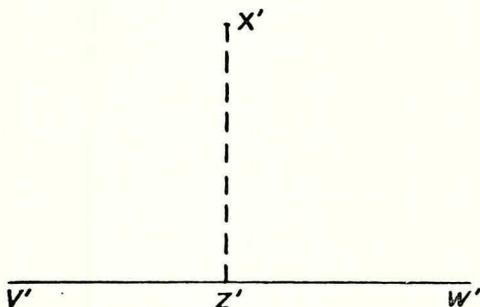
*Subrutina 7.* Hallar las coordenadas de un punto  $U'$  del arco de centro  $Z'$  y radio  $A_0$  que pasa por  $X'$  a una distancia  $Z$  de  $X'$  ( $U'$  es la imagen de  $X'$  por un giro alrededor de  $Z'$ ).



*Subrutina 8.* Hallar las coordenadas de un punto  $U'$  del arco  $X'Y'$  y radio  $A_0$  a una distancia  $Z$  de  $X'$ .



*Subrutina 9.* Hallar las coordenadas de  $Z'$  proyección de  $X'$  sobre  $V'W'$ .



Reiteramos que en los casos precedentes el radio debe considerarse positivo cuando al recorrer la circunferencia en el sentido indicado por las letras lo hace en el sentido antihorario y negativo en caso contrario. Las operaciones precedentes las designaremos con el nombre: subrutinas de "1962 A".

Además se deberá calcular de cada solar, la suma de las áreas de todos los solares, el área total de la manzana, cálculo de distancias, cálculo de desarrollos.

b) Impresión de los resultados en tal forma que aparezca el número de manzana, número del solar, longitud de los lados (en el caso de curvas, longitud de la cuerda y del desarrollo), superficie del solar.

c) Idem b) para la manzana total.

d) Impresión de las coordenadas de *todos* los vértices de los solares.

III) Número de decimales a emplear y control de las operaciones.

Para resolver este punto hubiéramos tenido que encarar los dos problemas que se presentan en el cálculo numérico:

Problema directo: Conocidas las aproximaciones de los datos, hallar la aproximación del resultado.

Problema inverso: Fijada la aproximación que ha de tener el resultado, calcular la aproximación con que habrán de tomarse los datos.

Pero como estos dos problemas dependen evidentemente del número de operaciones que se han de realizar no podemos aplicar las reglas ordinarias de los límites de error en las sumas, productos, cocientes, raíces, etc., dado que desconocemos el número de operaciones a realizar, salvo en casos concretos.

La experiencia nos ha enseñado que para tener un error relativo  $\frac{1}{50.000}$  entre la suma de las áreas de los solares y el área

total de la manzana, tenemos que operar con coordenadas utilizando cuatro decimales (diezmilésimas), y en el caso de rectas con coeficientes angulares con siete cifras decimales y término conocido con cuatro.

En cuanto al control a efectuar habíamos pensado en realizar cierres parciales de superficie, pero el tiempo que emplea la máquina para el cálculo es tan pequeño que no justificaba tomar tal medida.

Nuestro control operacional vendrá dado por:

a) comparación de la suma de las áreas de los solares con el área total de la manzana calculada directamente.

b) comparación de las coordenadas de los centros de las circunferencias que determinan los ejes de las calles dadas por la computadora con los ya calculados de antemano en el trazado de calles.

Y si se quiere además:

c) comparación de las coordenadas de los puntos de tangencia sobre la manzana que determinan las circunferencias de las calles y que es de simple cálculo manual con las obtenidas por el cálculo electrónico.

d) comparación de la suma de los desarrollos dados para los solares con el cálculo directo para la manzana.

De esta manera se garantiza la ausencia de errores casuales que pueden compensarse en los cálculos y además permite apreciar también el acierto de la elección del procedimiento, dado que la obtención de resultados correctos para los valores básicos constituye una garantía suficiente de la corrección de los valores calculados por la computadora.

No obstante debemos señalar que en las vías de experimentación hemos realizado un control de la totalidad de las coordenadas obtenidas por cálculo electrónico con las calculadas por nosotros en la forma habitual, para varias manzanas.

Frente a un planteamiento similar al esquema precedente y a solicitud de nuestro Instituto, el Instituto de Matemática y Estadística de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura, elaboró un programa que comprobamos se adaptaba a las necesidades requeridas. Como consecuencia de tal programa y comprobaciones, el esquema precedente resultó adaptarse a todas las necesidades en los procedimientos, siendo menester para cada manzana en particular confeccionar de una manera muy simple una planilla de datos cuya preparación requiere un tiempo pequeño, teniendo especial cuidado en prepararla correctamente en la forma indicada en las subrutinas ya que el cambio de un número por otro o la simple omisión de un signo produce efectos distintos a los deseados o bien la detención de la máquina por no saber interpretar nuestra sentencia.

De esta manera organizados los cálculos la computadora efectúa las operaciones en un tiempo increíblemente pequeño; para las manzanas que se indicarán empleó en promedio, solamente 3 minutos después de efectuada la lectura del programa para lo cual demoró 2 minutos, el que una vez leído sirve para efectuar el cálculo de un número ilimitado de manzanas siempre que no se altere el cálculo con la lectura de un nuevo programa.

Si bien, como es sabido, la computadora opera en el sistema binario, al usuario no le interesa necesariamente conocer el lenguaje absoluto de la Mercury sino solamente un lenguaje simbólico si es que se desea programar (AUTOCODE, CONVENCIONAL), pero en el presente caso bastará solamente con saber confeccionar la planilla de datos que permitirá la realización de los cálculos propuestos.

Como la computadora Mercury trabaja aproximadamente con ocho cifras significativas exactas en cada operación, a fin de disminuir los errores sistemáticos se ha introducido al comienzo del programa un cambio de coordenadas, restituyéndose finalmente las coordenadas al sistema original antes de la impresión de los resultados.

El error sistemático de cálculo en el cierre obtenido de la comparación de lo expresado en III a) para 14 manzanas calculadas electrónicamente ha sido el siguiente:

MANZANA	Sup. solares	Sup. total de la manzana calculada directamente	Diferencia	Error relativo
A ≡ 1	14.228m <sup>2</sup> 6884	14.228m <sup>2</sup> 7194	0m <sup>2</sup> 0310	$\frac{1}{470.000}$
B ≡ 2	19.129m <sup>2</sup> 3000	19.129m <sup>2</sup> 2862	0m <sup>2</sup> 0138	$\frac{1}{1.900.000}$
D ≡ 4	20.430m <sup>2</sup> 8469	20.430m <sup>2</sup> 7781	0m <sup>2</sup> 0688	$\frac{1}{290.000}$
E ≡ 5	17.141m <sup>2</sup> 4630	17.141m <sup>2</sup> 4885	0m <sup>2</sup> 0255	$\frac{1}{570.000}$
F ≡ 6	10.474m <sup>2</sup> 6911	10.474m <sup>2</sup> 6678	0m <sup>2</sup> 0233	$\frac{1}{520.000}$
G ≡ 7	21.594m <sup>2</sup> 7028	21.594m <sup>2</sup> 7271	0m <sup>2</sup> 0243	$\frac{1}{1.070.000}$

K ≡ 11	5.871m <sup>2</sup> 4171	5.871m <sup>2</sup> 4183	0m <sup>2</sup> 0022	$\frac{1}{4.800.000}$
M ≡ 13	19.580m <sup>2</sup> 4354	19.580m <sup>2</sup> 4431	0m <sup>2</sup> 0077	$\frac{1}{1.900.000}$
O ≡ 15	33.280m <sup>2</sup> 5287	33.280m <sup>2</sup> 5223	0m <sup>2</sup> 0064	$\frac{1}{3.300.000}$
P ≡ 16	24.494m <sup>2</sup> 0848	24.494m <sup>2</sup> 0068	0m <sup>2</sup> 0780	$\frac{1}{300.000}$
R ≡ 18	11.487m <sup>2</sup> 1821	11.487m <sup>2</sup> 2199	0m <sup>2</sup> 0378	$\frac{1}{280.000}$
S ≡ 19	16.770m <sup>2</sup> 8626	16.770m <sup>2</sup> 8437	0m <sup>2</sup> 0189	$\frac{1}{830.000}$
T ≡ 20	26.625m <sup>2</sup> 3587	26.625m <sup>2</sup> 1729	0m <sup>2</sup> 1858	$\frac{1}{140.000}$
U ≡ 21	18.037m <sup>2</sup> 6745	18.037m <sup>2</sup> 6624	0m <sup>2</sup> 0121	$\frac{1}{1.800.000}$

Como se desprende de la planilla anterior, podemos afirmar que el valor medio de las diferencias relativas de cierre en su-

perficie es de un orden inferior a  $\frac{1}{200.000}$ , precisión mejor que

la obtenida con las máquinas de calcular portátiles debido a que con éstas, por razones de orden práctico, trabajamos con menos decimales.

Como dato importante debemos agregar que es posible obtener de la computadora "doble precisión", aunque con aumento del tiempo de máquina, pero ello no tendría objeto en fines topográficos, sino en cálculos geodésicos.

Pasemos ahora a explicar mediante ejemplos la forma de confeccionar la planilla de datos para el cálculo de loteos de manzanas.

Ejemplo N: 1:

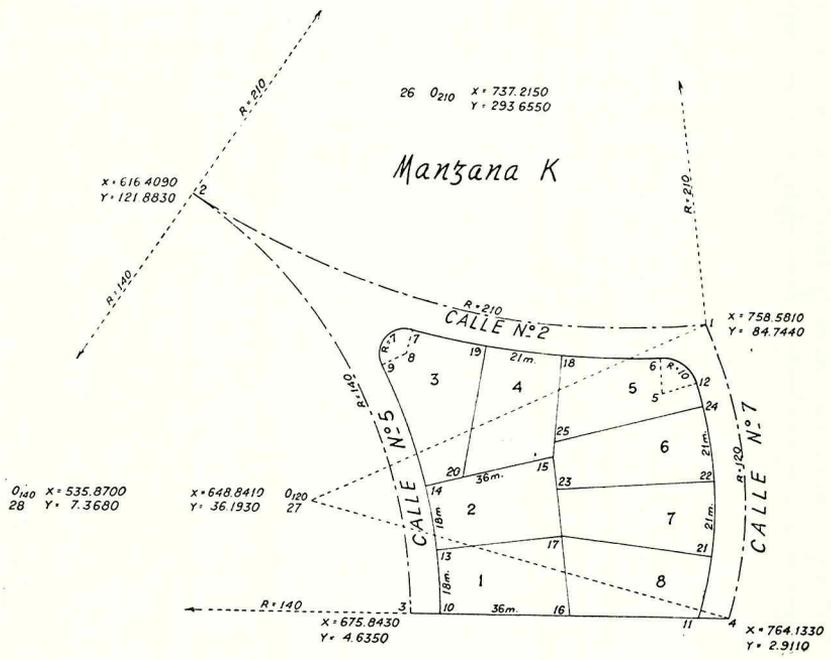
Manzana K  $\equiv$  11 (Indicamos con el N<sup>o</sup> 11 el número de orden de la letra K en el abecedario, con exclusión de la ch.)

En primer término numeramos los  $n$  vértices correspondientes a los ejes de calles (en este caso  $n = 4$ ) haciéndolo en el sentido antihorario a partir de uno cualquiera de ellos. Una vez concluída su numeración pasamos a numerar los puntos correspondientes al perímetro de la manzana a partir del punto de tangencia correspondiente a la ochava en el vértice 2 al que se le asigna el número  $n + 3$  (en este caso 7) ; los números  $n + 4$  y  $n + 5$  se asignan al centro y al otro punto de tangencia. Continuamos luego con la numeración correlativa asignándole a los dos últimos puntos los valores  $n + 1$  y  $n + 2$  respectivamente (5 y 6 en este ejemplo). En el caso de no existir ochava en el vértice 2 (radio que convendremos asignarle el número cero significando la ausencia de curvatura) los tres puntos coincidirían y se les atribuye un único número.

Para determinar los puntos de tangencia y los centros de las ochavas ponemos en la planilla de datos los siguientes números:

$x_0$	donde $x_0$	son las coordenadas del nuevo origen
$y_0$	$y_0$	
$n$	$n$	es el número de vértices
$x_1$	$x_i$	son las coordenadas del vértice $i$
$y_1$	$y_i$	
$c'_1$	$c'_i$	es el radio de la ochava correspondiente al vértice $v_i$ pudiendo ser igual a 0 en el caso de no existir ochava. $c'_i \geq 0$ .
$a_1$		
$r_1$		Si los ejes forman ángulo 0 en $v_i$ tal el caso de dos circunferencias tangentes, o circunferencia y recta tangente se pone $c'_i = -2$ .
$x_2$		
$y_2$	$a_i$	es el semiancho de la calle que sigue $(V_i, V_{i+1})$
	$r_i$	es el radio de la calle que sigue $(V_i, V_{i+1})$ con la convención de signos ya hecha. Es cero si se trata de un segmento de recta.

- $c'_2$
- $a_2$
- $r_2$
- .
- .
- .
- .
- $x_n$
- $y_n$
- $c'_n$
- $a_n$
- $r_n$



## PLANILLA DE DATOS

Nº de la manzana .....	11
Cambio de coordenada .....	700
Cambio de coordenada .....	50
Nº de vértices .....	4
$X_1$ .....	758.581
$Y_1$ .....	84.744
Radio ochava .....	10
Semi ancho calle que sigue .....	8.5
Radio de esa calle .....	-210
$X_2$ .....	616.409
$Y_2$ .....	121.883
Radio ochava .....	7
Semi ancho calle que sigue .....	8.5
Radio de esa calle .....	-140
$X_3$ .....	675.843
$Y_3$ .....	4.635
Radio ochava .....	0
Semi ancho calle que sigue .....	0
Radio de esa calle .....	0
$X_4$ .....	764.133
$Y_4$ .....	2.911
Radio ochava .....	0
Semi ancho calle que sigue .....	8.5
Radio de esa calle .....	120
Ver observac. 1) .....	
Ver observac. 2) .....	-1
Subrutina .....	8
Nº del punto a determ. ....	13
Ver observac. 3) .....	10
.....	9
.....	148.5
.....	18
.....	-1
Subrutina .....	8
Nº del punto a determ. ....	14
Ver observac. 4) .....	13
.....	9
.....	148.5
.....	18

	—1
Subrutina .....	1
Nº del punto a determ. ....	28
Ver observac. 5) .....	3
	2
	140
	—1
Subrutina .....	6
Nº del punto a determ. ....	15
Ver observac. 6) .....	14
	28
	—36
	—1
Subrutina .....	6
Nº del punto a determ. ....	16
	10
	11
	36
	—1
Subrutina .....	2
Nº del punto a determ. ....	17
Ver observac. 7) .....	15
	16
	28
	13
	—1
Subrutina .....	1
Nº del punto a determ. ....	26
	1
	2
	—210
	—1
Subrutina .....	6
Nº del punto a determ. ....	18
	26
	15
	218.5

	—1
Subrutina .....	7
Nº del punto a determ. ....	19
Ver observac. 8) .....	26
	218.5
	18
	—21
	—1
Subrutina .....	2
Nº del punto a determ. ....	20
	14
	15
	26
	19
	—1
Subrutina .....	1
Nº del punto a determ. ....	27
	4
	1
	120
	—1
Subrutina .....	6
Nº del punto a determ. ....	21
	27
	17
	111.5
	—1
Subrutina .....	7
Nº del punto a determ. ....	22
	27
	111.5
	21
	21
	—1
Subrutina .....	2
Nº del punto a determ. ....	23
	27
	22
	15
	16

	—1
Subrutina .....	7
Nº del punto a determ. ....	24
	27
	111.5
	22
	21
	—1
Subrutina .....	2
Nº del punto a determ. ....	25
	24
	27
	15
	18
Ver observac 9) .....	1
Ver observac. 10) .....	—1
Nº del solar .....	1
Nº de vértices .....	4
Vértice .....	16
Radio que sigue .....	0
Vértice .....	17
Radio que sigue .....	0
Vértice .....	13
Radio que sigue .....	—148.5
Vértice .....	10
Radio que sigue .....	0
Se repite el vértice con el cual se inició .....	16
	—1
	2
	4
	17
	0
	15
	0
	14
	—148.5
	13
	0
	17

—1	—1
3	6
5	5
20	22
0	111.5
19	24
—218.5	0
7	25
7	0
9	15
—148.5	0
14	23
0	0
20	22
—1	—1
4	7
4	4
15	21
0	111.5
18	22
—218.5	0
19	23
0	0
20	17
0	0
15	21
—1	—1
5	8
5	4
24	11
111.5	111.5
12	21
10	0
6	17
—218.5	0
18	16
0	0
25	11
0	1
24	

Ver observac. 11)

		—1
Nº de la manzana	.....	11
Ver observac. 12)	.....	6
		11
		111.5
		12
		10
		6
		—218.5
		7
		7
		9
		—148.5
		10
		0
		11
Ver observac. 13)	.....	3
Ver observac. 14)	.....	28

OBSERVACIONES

- 1) en este momento ya se han calculado todos los vértices de la manzana y centros de ochava, a saber: coordenadas de los puntos 7, 8, 9, 10, 11, 12, 5 y 6.
- 2) antes de determinar un punto se pone siempre -1, vale decir el -1 precede a toda determinación de las coordenadas de un punto.

- 3) Obsérvese que:
 

$U'$	es	13
$X'$	"	10
$Y'$	"	9
$A_0$	"	148.5
$Z$	"	18

- 4) se podría poner también:
 

-1
8
14
10
9
148.5
36

Esta última manera de proceder sería mejor pues elimina el error sistemático proveniente de la determinación del punto 13.

- 5) En el presente ejemplo se han numerado primeramente todos los puntos a calcular y después se ha procedido a calcularlos. Entendemos que es mejor numerarlos a medida que se van calculando con lo cual aparecen en la determinación de los mismos escritos en forma correlativa. Así se ha procedido en el otro ejemplo que se pone de modelo.

Obsérvese que:
 

$Z'$	es	28
$X'$	"	3
$Y'$	"	2
$A_0$	"	140

- 6) Obsérvese que:
 

$Z'$	es	15	-1
$X'$	"	14	6
$Y'$	"	28	15
$Z$	"	-36	28
			14
			184.5

 podría también procederse así:

- 7) Obsérvese que:
 

$Z'$	es	17	-1
$X'$	"	15	2
$Y'$	"	16	17
$V'$	"	28	28
$W'$	"	13	13
			16
			15

 podría también obtenerse así:

8) Obsérvese que:	$V'$ es	19		-1		-1
	$Z'$ "	26		7		8
	$A_0$ "	218.5	podría también obte-			o así: 19
	$X'$ "	18	nerse así:	19		18
	$Z$ "	-21		26		7
				-218.5		-218.5
				18		21
				21		

- 9) Una vez concluída la información para el cálculo de coordenadas, se pone 1, que tiene por objeto separar aquélla de la nueva información destinada al cálculo de áreas de lotes, longitudes de lados, impresión de los resultados.
- 10) Para calcular las áreas se inicia siempre la sucesión de datos con un -1. El cálculo correspondiente al solar número  $r$ , de  $j$  vértices numerados  $D_1 D_2 \dots D_j$  en sentido antihorario se expresa por:

-1      $D_i$     indica el número del vértice de rango  $i$  cuyas coordenadas ya han sido obtenidas.

$r$

$j$

$D_1$      $R_i$     es el radio del arco  $D_i D_{i+1}$  con signo positivo si se le recorre en sentido antihorario y negativo en caso contrario o lo que es lo mismo con signo positivo si el área del segmento de círculo respectivo debe sumarse al área del polígono y negativo en caso contrario.

$R_1$

$D_2$

$R_2$

.

.

$R_i$     es 0 si el lado  $D_i D_{i+1}$  es un segmento de recta.

.

.

$D_j$

$R_j$

$D_1$

Los resultados se imprimen en la siguiente manera:

Longitud  $D_1 D_2$             longitud del arco  $D_1 D_2$  si  $R_1 \neq 0$

Longitud  $D_2 D_3$             longitud del arco  $D_2 D_3$  si  $R_2 \neq 0$

.....

longitud  $D_j D_1$             longitud del arco  $D_j D_1$  si  $R_j \neq 0$ .

- 11) Una vez concluída la información para el cálculo de lotes se pone un 1 en la planilla de datos a fin de que se imprima la suma de las áreas. Si se quisiera tener una impresión parcial de la suma pondríamos un 1 al terminar un solar en el lugar que deseáramos.
- 12) se procede en forma análoga para la manzana.
- 13) para terminar ponemos un 3 en la planilla de datos.

14) número total de puntos cuyas coordenadas se quieren imprimir puesto a continuación del 3 ya mencionado.

La impresión se obtiene en la forma:

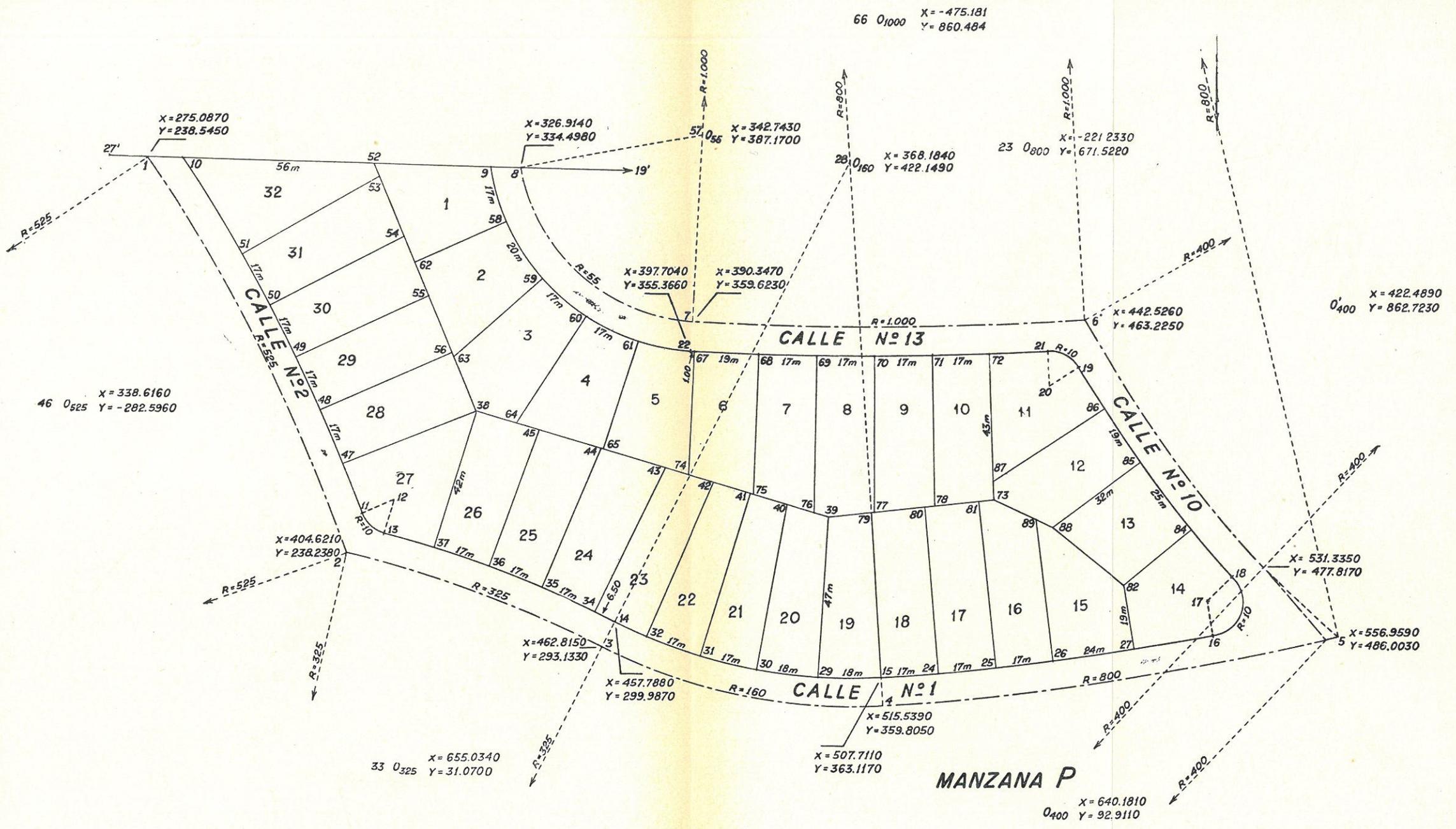
1 abscisa del punto numerado 1	Ordenada del punto numerado 1
2 abscisa del punto numerado 2	Ordenada del punto numerado 2
.....	.....
$n$ abscisa del punto numerado $n$	Ordenada del punto numerado $n$

Hemos hecho notar anteriormente el especial cuidado en preparar en forma correcta la planilla de datos. Es por tal motivo que para evitar la omisión de algún número es posible efectuar un control en base al número total de puntos en cada subrutina. Así tenemos:

<i>Subrutina</i>	<i>Nº total de puntos</i>
1	5
2	6
3	7
4	5
5	4
6	5
7	6
8	6
9	5



	11.00	
	22.3086856	
	34.6463017	
	17.9889838	18.0000000
	36.0000007	
1	706.393.7969	
	22.3089143	
	36.0000002	
	17.9889832	18.0000000
	34.6463015	
2	706.3976001	
	36.9616703	
	21.1143929	21.1226290
	12.8192676	16.2001239
	35.6780028	35.7643769
	10.2593073	
3	817.7897739	
	27.9330147	
	20.9919180	21.0000116
	36.9616703	
	25.740)932	
4	726.3519268	
	6.8223439	6.8234166
	12.2500123	13.1844042
	27.4584254	27.4765218
	24.1275106	
	42.3861172	
5	706.6565837	
	20.9689757	20.9999943
	42.3861172	
	3.8055036	
	9.1826328	
	43.5446181	
6	734.3505687	
	20.9689763	20.9999943
	43.5446181	
	13.1262820	
	41.5185627	
7	725.5543994	
	17.2358732	17.2530748
	41.5185627	
	22.3086856	
	34.9834871	
8	747.9224357	
	5871.4170989	
	65.1138291	66.0764865
	12.2500123	13.1844042
	69.3052778	69.5991609
	12.8192676	16.2001239
	71.0680775	71.7643649
	70.9834866	
11	5871.4182586	
1	758.5809993	84.7440001
2	616.4089984	121.8830001
3	675.8430004	4.6350001
4	764.1330013	2.9109999
5	746.0703868	65.3260352
6	745.6829280	75.3185262
7	676.8802928	83.6503238
8	674.9473094	76.9225027
9	668.6865806	73.7914836
10	684.3413791	4.4690562
11	755.3113384	3.0832566
12	755.6496410	68.1962070
13	683.6026802	22.4428657
14	680.6960887	40.1954776
15	715.8055152	48.1533747
16	720.3345184	3.7662338
17	718.0700283	25.9596903
18	718.2324905	75.9807553
19	697.4317131	78.8071093
20	690.7015991	42.4633251
21	759.1422309	19.8880066
22	760.2446098	40.8279852
23	716.7376174	39.0181721
24	757.4069175	61.6040639
25	716.1361579	51.9444874
26	737.2169723	293.6544542
27	648.8409538	36.1937910
28	535.8696994	7.3691512



## EJEMPLO N° 2

## PLANILLA DE DATOS PARA LA MANZANA P(16)

## Datos

16	326.914	-1
250	334.498	1
250	0	28
8	0	3
275.087	0	4
238.545	-1	160
0	1	-1
8.5	23	8
-525	4	29
404.621	5	15
238.238	800	14
10	-1	-151.5
8.5	8	18
-325	24	-1
462.815	15	8
295.133	16	30
-2	791.5	15
8.5	17	14
160	-1	-151.5
515.539	8	36
359.805	25	-1
-2	15	8
8.5	16	31
800	791.5	15
556.959	34	14
486.003	-1	-151.5
10	8	53
8.5	26	-1
-400	15	8
442.526	16	32
463.225	791.5	15
10	51	14
8.5	-1	-151.5
-1000	8	70
390.347	27	-1
359.623	15	1
-2	16	33
8.5	791.5	2
-55	75	3
		-325

—1	—1	—1
8	6	2
34	39	44
14	29	38
13	28	39
333.5	47	33
6.5	—1	35
—1	2	—1
8	40	2
35	38	45
14	39	38
13	28	39
333.5	30	33
23.5	—1	36
—1	2	—1
8	41	1
36	38	46
14	39	1
13	28	2
333.5	31	—525
40.5	—1	—1
—1	2	6
8	42	47
37	38	46
14	39	38
13	28	533.5
333.5	32	—1
57.5	—1	8
—1	2	48
6	43	47
38	38	10
33	39	533.5
37	33	17
375.5	34	

—1	—1	—1
8	2	8
49	54	59
47	38	9
10	52	22
533.5	46	63.5
34	50	37
—1	—1	—1
8	2	8
50	55	60
47	38	9
10	52	22
533.5	46	63.5
51	49	54
—1	—1	—1
8	2	8
51	56	61
47	38	9
10	52	22
533.5	46	63.5
68	48	71
—1	—1	—1
6	1	2
52	57	62
10	8	38
9	7	52
56	55	57
—1	—1	58
2	8	—1
53	58	2
38	9	63
52	22	38
46	63.5	52
51	17	57
		59

—1	—1	—1
2	8	2
64	70	76
38	22	38
39	21	39
57	1008.5	66
60	54	69
—1	—1	—1
2	8	2
65	71	77
38	22	39
39	21	73
57	1008.5	66
61	71	70
—1	—1	—1
1	8	2
66	72	78
7	22	39
6	21	73
1000	1008.5	66
—1	88	71
8	—1	—1
67	6	2
22	73	79
21	66	39
1008.5	72	73
1	1051.5	28
—1	—1	15
8	2	—1
68	74	2
22	38	80
21	39	39
1008.5	66	73
20	67	23
—1	—1	24
8	2	—1
69	75	2
22	38	81
21	39	39
1008.5	66	73
37	68	23
		25

—1	—1	—1
6	6	3
82	88	5
27	83	59
23	85	0
19	440.5	63
—1	—1	0
1	2	38
83	89	0
5	73	64
6	88	0
—400	23	60
—1	26	—63.5
6	1	59
84	—1Areas	—1
83	1	4
82	4	4
408.5	9	60
—1	0	0
8	52	64
85	0	0
84	62	65
19	0	0
—408.5	58	61
25	—63.5	—63.5
—1	9	60
8	—1	—1
86	2	5
84	4	5
19	58	61
—408.5	0	0
44	62	65
—1	0	0
2	63	74
87	0	0
72	59	67
73	—63.5	—1008.5
83	58	22
86		—63.5
		61

—1	—1	—1
6	9	12
4	4	5
67	70	86
0	0	0
74	77	87
0	0	0
75	78	73
0	0	0
68	71	88
—1008.5	—1008.5	0
67	70	85
—1	—1	—408.5
7	10	86
4	4	—1
88	71	13
0	0	4
75	78	85
0	0	0
76	73	88
0	0	0
69	72	82
—1008.5	—1008.5	0
68	71	84
—1	—1	—408.5
8	11	85
5	5	—1
69	72	14
0	0	5
76	87	84
0	0	0
39	86	82
0	—408.5	0
77	19	27
0	10	791.5
70	21	16
—1008.5	—1008.5	10
69	72	18
		—408.5
		84

—1	—1	—1
15	18	21
5	4	4
27	24	30
0	0	0
82	80	40
0	0	0
88	79	41
0	0	0
89	15	31
0	791.5	151.5
26	24	30
791.5	—1	—1
27	19	22
—1	4	4
16	15	31
5	0	0
26	79	41
0	0	0
89	39	42
0	0	0
73	29	32
0	151.5	151.5
81	15	31
0	—1	—1
25	20	23
791.5	4	5
26	29	32
—1	0	0
17	39	42
4	0	0
25	40	43
0	0	0
81	30	34
0	151.5	333.5
80	29	14
0		151.5
24		32
791.5		
25		

—1	—1	—1
24	27	30
4	5	4
34	37	49
0	0	0
43	38	55
0	0	0
44	47	54
0	—533.5	0
35	11	50
—333.5	10	—533.5
34	13	49
—1	—333.5	—1
25	37	31
4	—1	4
35	28	50
0	4	0
44	47	54
0	0	0
45	38	53
0	0	0
36	56	51
—333.5	0	—533.5
35	48	50
—1	—533.5	—1
26	47	32
4	—1	4
36	29	51
0	4	0
45	48	53
0	0	0
38	56	52
0	0	0
37	55	10
—333.5	0	—533.5
36	49	51
	—533.5	1
	48	

—1manz.  
16  
11  
10  
—533.5  
11  
10  
13  
—333.5  
14  
151.5  
15  
791.5  
16  
10  
18  
—408.5  
19  
10  
21  
—1008.5  
22  
—63.5  
9  
0  
10  
3  
89



	16.00	
	34.0241169	
	31.4045277	
	29.1400486	
	16.9492839	17.0000096
1	725.6658687	
	29.1400486	
	30.4007569	
	34.6145911	
	19.9174389	20.0000091
2	772.8434467	
	34.6145911	
	16.0648972	
	13.2599537	
	36.5379445	
	16.9492750	17.0000006
3	841.0337886	
	36.5379445	
	26.4662142	
	32.5641450	
	16.9492858	17.0000115
4	731.3243350	
	32.5641396	
	25.2494603	
	35.4428999	
	1.0000916	1.0001654
	15.6784925	15.7185942
5	698.3812160	
	35.4428930	
	20.3073626	
	40.3186957	
	18.9997125	18.9999259
6	732.6203308	
	40.3186821	
	18.3369793	
	45.0383503	
	16.9998097	16.9999483
7	740.4306335	
	45.0383477	
	5.0885410	
	12.9182445	
	45.2777254	
	16.9998024	16.9999483
8	796.2382507	
	45.2777144	
	17.7989360	
	43.9880843	
	16.9998168	16.9999634
9	775.1311340	
	43.9880843	
	17.7604880	
	43.0000100	
	16.9998024	16.9999483
10	754.9273986	
	35.8694787	
	38.6851365	
	12.6031583	12.6036451
	10.2270489	10.7351555
	17.8102864	17.8104513
11	777.1846008	
	38.6851429	
	7.1305745	
	18.0270352	
	32.0000038	
	18.9982973	19.0000197
12	758.3721694	
	32.0000190	
	27.6111789	
	25.1313298	
	24.9961179	25.0000495
13	735.0960845	
	25.1313589	
	18.9999806	
	23.2224982	23.2232961
	17.3899931	21.0837694
	18.4883897	18.4899765
14	769.7001113	
	18.9999935	
	27.6112054	
	4.6740824	
	41.2835903	
	23.9990617	23.9999605
15	733.0467224	
	41.2835903	
	13.3529636	
	4.1391064	
	47.5000813	
	16.9996660	16.9999438
16	745.4505767	
	47.5000760	
	15.9795669	
	47.8528463	
	16.9996948	16.9999734
17	785.5278472	
	47.8528463	
	15.9714979	
	47.8624045	
	16.9996463	16.9999262
18	789.4135284	
	47.8624045	
	12.3873119	
	47.0000021	
	17.9894394	18.0000256
19	721.6388015	
	47.0000083	
	12.4745322	
	49.2147686	
	17.9894064	17.9999928
20	730.0143814	
	49.2147591	
	11.4537619	
	49.9331042	
	16.9911036	17.0000251
21	706.1032295	
	49.9331042	
	11.4368570	
	49.3657252	
	16.9911041	17.0000251
22	706.9616127	
	49.3657248	
	15.3870148	
	46.9555575	
	6.4999237	6.5000069
	11.4593736	11.4621199
23	801.0774269	
	46.9555571	
	19.5048564	
	44.3037745	
	16.9981677	17.0000253
24	827.1363449	
	44.3037691	
	19.2845810	
	42.6591186	
	16.9981709	17.0000278
25	785.7833480	
	42.6591210	
	19.1669752	
	41.9999964	
	16.9981606	17.0000204
26	763.7055435	
	41.9999995	
	42.1745839	
	15.0031037	15.0035742
	9.2142108	9.5759115
	14.9340905	14.9353466
27	841.3966445	
	42.1745839	
	18.3467615	
	42.3501291	
	16.9992775	16.9999799
28	746.0279083	
	42.3501276	
	18.3766132	
	43.1113865	
	16.9992886	16.9999958
29	754.6201019	
	43.1113879	
	18.4440174	
	44.4622335	
	16.9992803	16.9999839
30	774.0214080	
	44.4622335	
	18.5495103	
	46.4095914	
	16.9992796	16.9999839
31	804.3871917	
	46.4095904	
	4.1532844	
	56.0000002	
	33.0872242	33.0925750
32	867.8227844	
	24494.0847778	
	115.8671908	116.0961108
	9.2142108	9.5759115
	72.2930531	72.4353404
	80.4842720	81.4620847
	98.1603484	98.2233538
	17.3899931	21.0837694
	74.9879274	75.0935950
	10.2270489	10.7351555
	105.7619662	105.8105237
	80.1352300	86.7186009
	90.0241174	
16	24494.0067749	

1	275.0870008	238.5449995
2	404.6209993	238.2380003
3	462.8149995	293.1330003
4	515.5389995	359.8049993
5	556.9590015	486.0029993
6	442.5260000	463.2249994
7	390.3469991	359.6230001
8	326.9140005	334.4980001
9	322.8012151	326.8835496
10	280.0184402	247.6751165
11	395.8855390	247.8208971
12	396.9589471	257.7631196
13	404.4720306	251.1636066
14	457.7877492	299.9869594
15	507.7108163	363.1170301
16	540.2790908	455.7170457
17	530.6579608	458.4435596
18	528.0732803	468.1037569
19	454.1602754	455.4524335
20	454.9355802	445.4825344
21	445.8033704	449.5571813
22	397.7039775	355.3656692
23	-221.2332744	671.5206012
24	514.1661319	378.8433732
25	520.2822132	394.7047243
26	526.0562343	410.6937685
27	533.6203479	433.4696359
28	368.1849632	422.1491079
29	499.7299604	346.9948406
30	489.8943634	331.9323024
31	479.0268163	318.8711643
32	466.7650823	307.1090726
33	655.0333690	31.0698399
34	452.5842828	296.0917596
35	439.3437356	285.4322395
36	426.6635122	274.1119327
37	414.5765581	262.1602382
38	384.2941446	291.2630777
39	458.9206218	370.3100261
40	450.3570775	361.2392225
41	442.4942922	352.9106884
42	434.6431112	344.5944461
43	424.0802087	333.4058532
44	410.6904716	319.2229824
45	397.4519443	305.2002754
46	338.6192426	-282.5966892
47	380.9479484	249.2214488
48	363.9829206	250.3000469
49	346.9921407	250.8375988
50	329.9928607	250.8335628
51	313.0023393	250.2879352
52	306.6317014	296.9471597
53	310.7739048	296.6439933
54	329.2739324	295.2899837
55	347.6687431	293.9436750
56	365.9963321	292.6022863
57	342.7432842	387.1708936
58	339.4594144	323.7558612
59	359.2656002	325.8580636
60	374.8961162	332.4128293
61	388.2359018	342.8688402
62	337.9524517	294.6548070
63	368.2721080	292.4357233
64	393.3968763	300.9050035
65	411.5654745	320.1498136
66	-475.1799449	860.4853687
67	398.2044162	356.2314434
68	407.5489330	372.7743968
69	415.6443309	387.7228984
70	423.4866161	402.8057270
71	431.0735530	418.0186023
72	438.4029827	433.3571987
73	477.3559551	415.1454906
74	428.8987855	338.5098571
75	442.8394269	353.2762670
76	455.4274311	366.6099157
77	463.8332366	382.2576971
78	470.6019105	398.7193832
79	463.6313276	381.7666473
80	469.7050485	369.5381746
81	475.7818479	411.3171987
82	515.5000457	439.1840620
83	422.4890623	862.7228374
84	510.1095457	463.7304821
85	485.5426111	459.1184597
86	466.7088918	456.6232814
87	470.8965301	418.1654672
88	490.4819364	427.5019550
89	487.0786104	424.2981481

# Cálculo de loteos por medio de una computadora electrónica

E. M. CABAÑA

Instituto de Matemática y Estadística de la Facultad de Ingeniería y Agrimensura de Montevideo

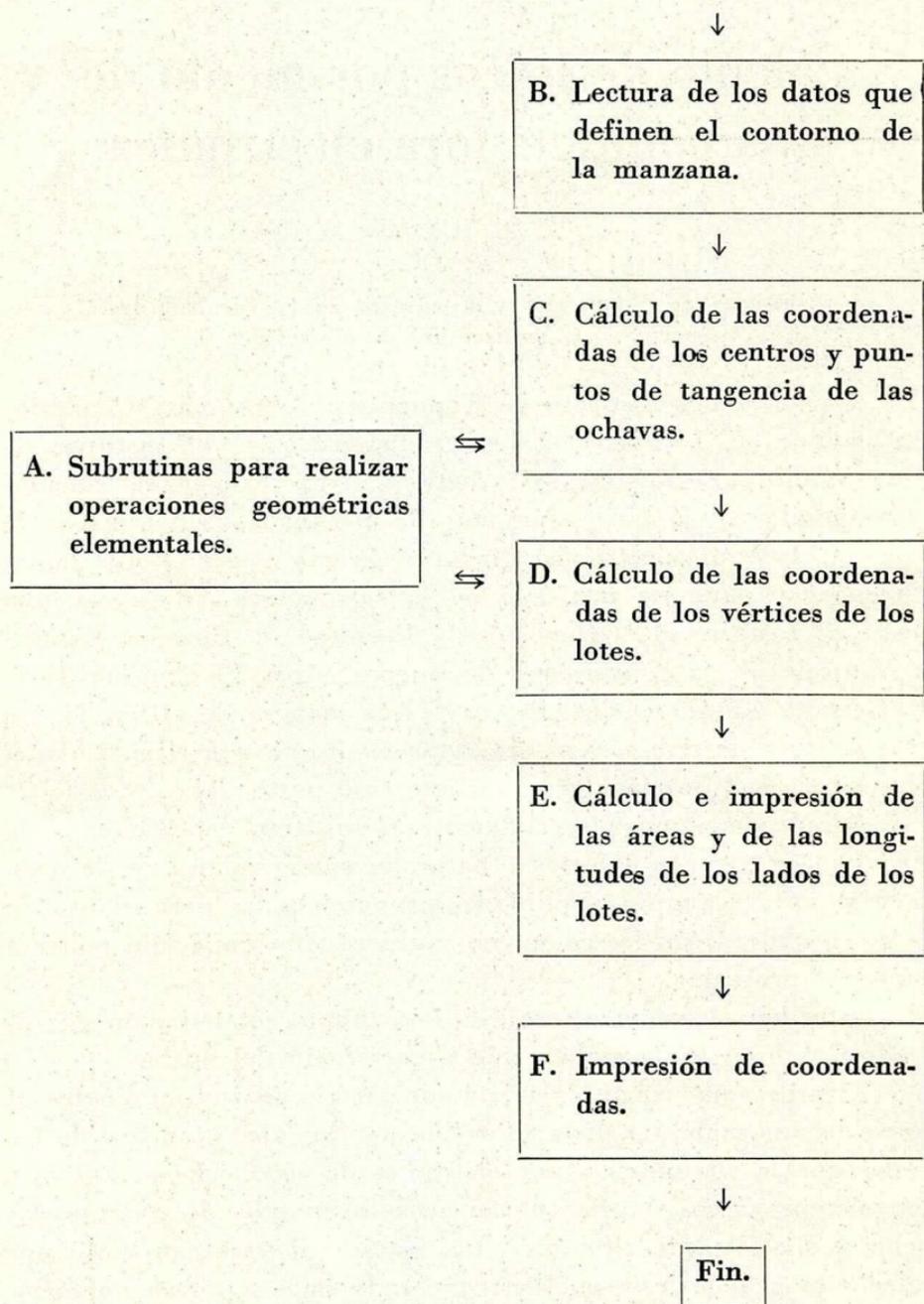
A pedido del Instituto de Topografía, Astronomía Geodésica y Geodesia de la Facultad, hemos elaborado en el Instituto de Matemática y Estadística un programa para realizar los cálculos correspondientes al fraccionamiento de una manzana por medio de una computadora electrónica. Dicho programa ha sido realizado en "Autocode" para ser utilizado en la calculadora "Mercury" que posee el Instituto de Cálculo de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. El Profesor Julio C. Granato Grondona describe en [1] la manera de utilizarlo. En este artículo describimos el programa en forma genérica, sin referirnos a la codificación hecha en este caso particular.

Agradecemos muy especialmente al Instituto de Cálculo de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales por la valiosa ayuda prestada y por las amplias facilidades proporcionadas para el uso de la computadora, sin las cuales nos hubiera sido imposible poner a punto el programa.

Asimismo, hacemos constar la importante colaboración de Alfredo Gandulfo en la elaboración y corrección del mismo.

El programa permite realizar los cálculos correspondientes al loteo de una manzana. Esta se define por los ejes y anchos de las calles que la circundan y por los radios de cada ochava. Los ejes son siempre arcos de circunferencia o segmentos de recta, y las ochavas son siempre circulares. Los lotes se determinan luego por relaciones geométricas sencillas, que reducimos a nueve operaciones elementales.

Para su descripción, dividiremos al programa en los seis bloques indicados en el diagrama 1.



## BLOQUE A.

Describiremos brevemente las operaciones elementales, indicando entre paréntesis los datos con que se entra a cada subrutina. Las indicaciones entre paréntesis identifican lugares de la memoria rápida, en los que deberán almacenarse los datos correspondientes. Cuando estas indicaciones se refieren a puntos, representan el lugar de la memoria rápida donde se almacenará como dato la dirección de dos lugares de la memoria grande, donde a su vez están almacenadas las coordenadas del punto correspondiente (o se almacenarán, si corresponden al punto a calcular). En estos casos, el lugar de la memoria rápida será identificado por una mayúscula con '.

En general, los lugares de la memoria rápida se identificarán por mayúsculas en negrita con o sin subíndices, y los lugares de la memoria grande, por su dirección precedida por una d., o por la letra que represente el lugar de la memoria rápida donde está almacenada la dirección, también precedida por una d. La dirección de cada par de lugares de la memoria grande es un número natural.

## Subrutina 1.

Cálculo de las coordenadas del centro ( $\mathbf{Z}'$ ) de un arco determinado por dos puntos ( $\mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{Y}'$ ) y el radio con signo ( $\mathbf{A}_0$ ). Se atribuye al radio signo positivo si  $\mathbf{Z}'$  (es decir, el punto cuyas coordenadas están almacenadas en los lugares de la memoria grande cuya dirección está almacenada en  $\mathbf{Z}'$ ) está a la izquierda de la recta orientada  $\mathbf{X}' \mathbf{Y}'$ , y signo negativo en caso contrario.

## Subrutina 2.

Cálculo de las coordenadas de la intersección ( $\mathbf{Z}'$ ) de dos rectas, determinadas cada una de ellas por dos puntos ( $\mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{Y}'$ ), ( $\mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{W}'$ ).

## Subrutina 3.

Cálculo de las coordenadas de la intersección ( $\mathbf{U}'$ ) de una

recta determinada por dos puntos ( $V'$ ,  $W'$ ) con una circunferencia determinada por el centro ( $Z'$ ) y el radio ( $A_0$ ). Se indica además un dato complementario ( $Y$ ) que vale 1 si se desea calcular la intersección de mayor abscisa sobre la recta orientada  $V'W'$  y  $-1$  en caso contrario.

#### Subrutina 4.

Cálculo de las coordenadas de la suma ( $Y'$ ) de un punto ( $X'$ ) y un vector determinado por su origen ( $U'$ ) y su extremo ( $V'$ ).

#### Subrutina 5.

Cálculo de las coordenadas de la imagen ( $Y'$ ) de un punto ( $U'$ ) por una rotación en sentido antihorario de un ángulo recto alrededor de un punto ( $X'$ ).

#### Subrutina 6.

Cálculo de las coordenadas del punto ( $Z'$ ) de una recta dada por dos puntos ( $X'$ ,  $Y'$ ), determinado por su abscisa ( $Z$ ) sobre  $X'Y'$  con origen  $X'$  y con el sentido en que  $X'$  precede a  $Y'$ .

#### Subrutina 7.

Cálculo de las coordenadas de la imagen ( $U'$ ) de un punto ( $X'$ ) por una rotación. Para determinar la rotación se indican el centro ( $Z'$ ) y dos datos ( $Z, A_0$ ) que definen el ángulo  $Z/A_0$ .

Frecuentemente  $X'$  dista  $A_0$  de  $Z'$ , y  $U'$  es entonces el punto de la circunferencia de centro  $Z'$  y radio  $A_0$  que dista  $Z$  de  $X'$  a lo largo del arco.

#### Subrutina 8.

Cálculo de las coordenadas del punto ( $U'$ ) de un arco dado por dos puntos ( $X'$ ,  $Y'$ ) y el radio con signo ( $A_0$ ), con la misma convención que en la subrutina 1, determinado por su abscisa ( $Z$ ) medida sobre el arco con origen en  $X'$ , en el sentido dado por  $\text{sg}(ZA_0)$ .

## Subrutina 9.

Cálculo de las coordenadas de la proyección ( $\mathbf{Z}'$ ) de un punto ( $\mathbf{X}'$ ) sobre una recta dada por dos puntos ( $\mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{W}'$ ).

## BLOQUE B.

Se leen los datos:

$$x_0, y_0, n, x_1, y_1, c_1', a_1, r_1, x_2, y_2, c_2', a_2, r_2, \dots, x_n, y_n, c_n', a_n, r_n,$$

que se definen a continuación.

Todos los cálculos se realizan luego de efectuado un cambio de coordenadas para trabajar con números más pequeños. Las coordenadas del nuevo origen son  $x_0, y_0$ .

$n$  es el número de calles que limitan la manzana. Cada calle está determinada por el eje y el ancho, y el eje debe ser siempre un arco de circunferencia o un segmento de recta, de modo que es posible que una calle real se presente en el programa por yuxtaposición de varias calles, si cambia la curvatura.

Llamaremos vértices de la manzana a cada una de las intersecciones de dos ejes contiguos. Sean  $V_1, \dots, V_n$  los vértices, ordenados a partir de uno cualquiera,  $V_1$ , de modo que  $V_i, V_{i+1}$  sean extremos del mismo eje y que  $V_i$  preceda a  $V_{i+1}$  al recorrer el perímetro en sentido antihorario ( $i = 1, \dots, n - 1$ ).

$x_i, y_i$  son las coordenadas del vértice  $V_i$ .

$c_i$  es el radio de la ochava correspondiente al vértice  $V_i$ . ( $c_i \geq 0$ ).

$c_i'$  es  $\begin{cases} -2 & \text{si los ejes con extremo común } V_i \text{ forman ángulo } 0 \text{ en ese punto. En este caso debe cumplirse } a_{i-1} = a_i, c_i = 0. \\ c_i & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

$a_i$  es el semi-ancho de la calle  $V_i, V_{i+1}$  ( $a_i \geq 0$ ).

$r_i$  es  $\begin{cases} 0 & \text{si la calle } V_i, V_{i+1} \text{ un segmento de recta.} \\ \text{el radio con signo de la calle } V_i, V_{i+1} & \text{con la} \end{cases}$

convención de signos de la subrutina 1 en caso contrario.

(Los subíndices se interpretarán módulo  $n$ ).

Se ubican estos datos en las memorias como se indica a continuación; algunos se colocan en más de un lugar para permitir efectuar los cálculos subsiguientes dentro de un lazo.

La notación  $a \rightarrow \mathbf{A}$  indica que el dato  $a$  se almacena en el lugar de la memoria rápida identificado por  $\mathbf{A}$ , y la notación  $(a, b) \rightarrow d.c$  indica que los datos  $a, b$  se almacenan en los lugares de la memoria grande identificados por su dirección  $c$ .

$$x_0 \rightarrow \mathbf{X}_0 ; y_0 \rightarrow \mathbf{X}_1.$$

$$(x_i - x_0, y_i - y_0) \rightarrow d.i ; c_i' \rightarrow \mathbf{B}_i ; a_i \rightarrow \mathbf{A}_i ; r_i \rightarrow \mathbf{G}_i ; n \rightarrow \mathbf{N} \quad (i = 1, \dots, n).$$

$$(x_1 - x_0, x_1 - y_0) \rightarrow d.n + 1 ; (x_2 - x_0, y_2 - y_0) \rightarrow d.n + 2 ; c_1' \rightarrow \mathbf{B}_{n+1} ; a_1 \rightarrow \mathbf{A}_{n+1} ; r_1 \rightarrow \mathbf{G}_{n+1}.$$

### BLOQUE C.

Las operaciones que se realizan en esta parte tienen por resultado colocar las coordenadas de los puntos de tangencia de las ochavas y de los centros de las mismas en las direcciones  $n + 1, n + 2, \dots, n + m$  de la memoria grande, donde  $m$  es el número total de puntos a calcular. Teniendo en cuenta que cuando  $c_i = 0$  el centro de la ochava correspondiente al vértice  $V_i$  coincide con

los puntos de tangencia, resulta  $m = 2n + 1 + 2 \sum_{i=1}^n \text{sg}c_i$ .

La secuenciación de las operaciones se indica en el diagrama 2.

En los bloques i, ii, iii, se calculan las coordenadas de los puntos señalados  $P, Q, R$  en la figura correspondiente y se colocan en los lugares de la memoria grande cuyas direcciones están contenidas en los lugares  $\mathbf{D}' \mathbf{E}' \mathbf{F}'$ , de la memoria rápida, respectivamente. En los bloques iv, v, vi, se calculan las coordenadas del punto  $P$  y se colocan en el lugar cuya dirección está en  $\mathbf{D}'$ .



A título de ejemplo se indican a continuación las operaciones que se realizan por medio del bloque ii:

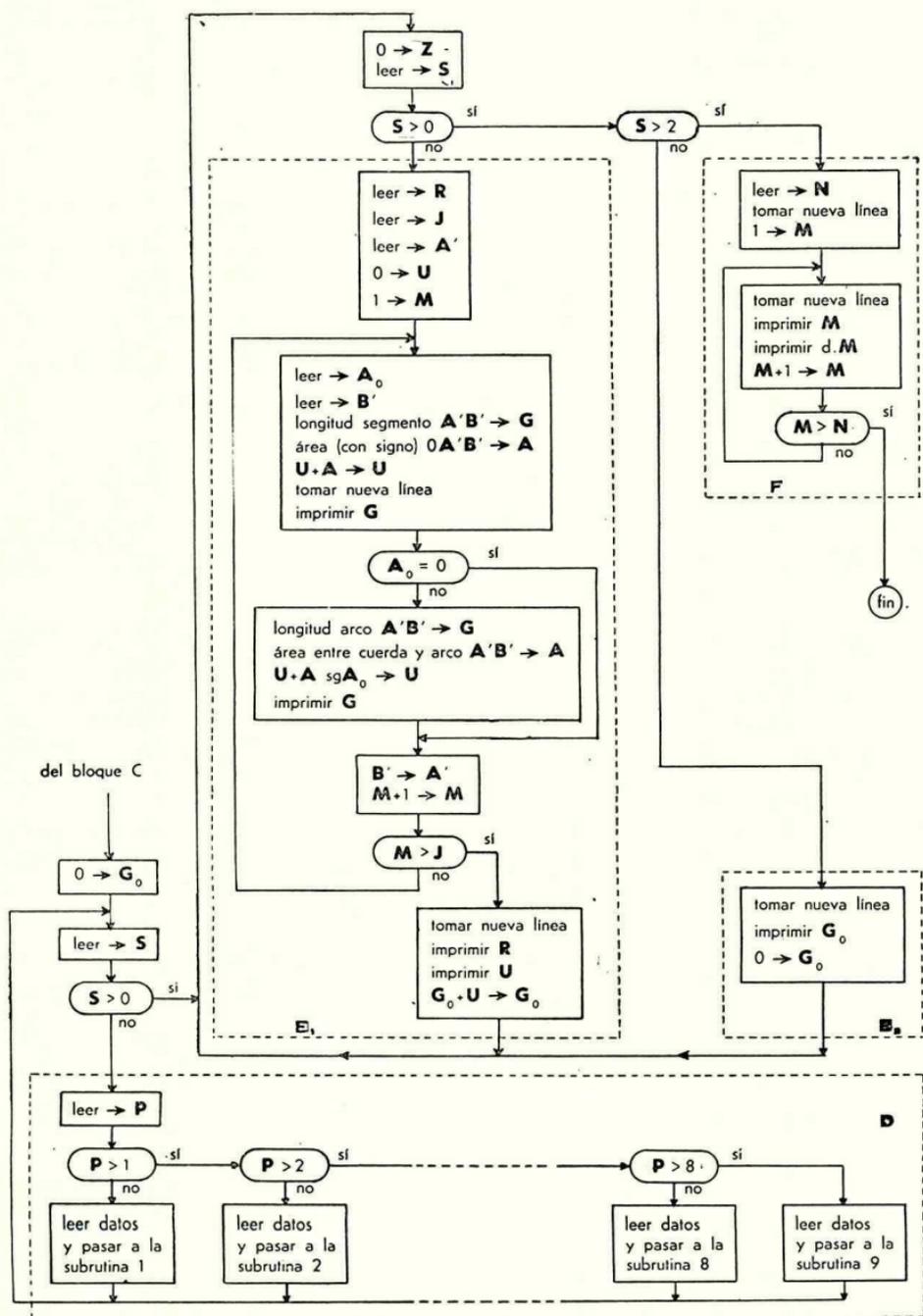
$F' + 3 \rightarrow Z'$	$B' \rightarrow U'$	$E' \rightarrow X'$
$A' \rightarrow X'$	$C' \rightarrow V'$	$B' \rightarrow V'$
$D' \rightarrow Y'$	$F' \rightarrow Y'$	$C' \rightarrow W'$
subrutina 1	subrutina 4	subrutina 9
$B' \rightarrow X'$	$H_{sg}(A_0) \rightarrow Y$	$D' \rightarrow Z'$
$C' \rightarrow U'$	$F' \rightarrow V'$	$F' + 3 \rightarrow Y'$
$D' \rightarrow Y'$	$D' \rightarrow W'$	$-CYH \rightarrow Z$
subrutina 5	$F' + 3 \rightarrow Z'$	subrutina 6
$D' \rightarrow Z'$	$E' \rightarrow U'$	$F' \rightarrow Y'$
$B + C \rightarrow Z$	$A_0 - A - C \rightarrow A_0$	$F' \rightarrow Z'$
subrutina 6	subrutina 3	$CH \rightarrow Z$
$D' \rightarrow X'$	$F' \rightarrow Z'$	subrutina 6

#### BLOQUE D.

En esta parte del programa se calculan las coordenadas de puntos que interesan. Casi siempre se trata de los vértices de lotes aún no calculados. Estos puntos deben estar determinados a partir de los datos leídos en B o de los puntos previamente calculados, en C o en este mismo bloque, por una de las operaciones elementales de A.

Si se desea calcular las coordenadas del punto  $V$  determinado por la subrutina  $p$  en función de los datos de entrada a la misma  $d_1, \dots, d_{m_p}$ , (que incluyen la dirección donde deberán colocarse los resultados), se suministran los siguientes datos:  $-1, p, d_1, \dots, d_{m_p}$ . (Naturalmente, el orden en que deben indicarse los  $d_i$  está determinado por la programación de la subrutina correspondiente, y para nuestro programa en particular está descrito en [1]).

Como puede verse en el diagrama 3, el dato  $-1$  tiene por efecto pasar a la instrucción "leer P". Se continúa de la misma manera para calcular las coordenadas del punto siguiente. Una vez terminado el cálculo de coordenadas, se suministra el dato 1, que tiene por efecto pasar al bloque E.



## BLOQUE E.

Las operaciones del bloque E, descritas en el diagrama 3, conducen al cálculo e impresión de las áreas de los lotes, y de las longitudes de los lados. Cuando un lado es un arco de circunferencia, se calculan las longitudes de la cuerda y del arco. Las áreas calculadas se acumulan; pueden imprimirse las sumas parciales, luego de lo cual las nuevas áreas parciales se acumulan nuevamente desde cero.

Para efectuar los cálculos correspondientes al solar número  $r$  (la numeración es arbitraria, al sólo efecto de la identificación del solar), de  $j$  vértices  $P_1, P_2, \dots, P_j$  (numerados en sentido antihorario), se indican los siguientes datos:  $-1, r, j, d_1, s_1, d_2, s_2, \dots, d_j, s_j, d_1$ , donde:

$d_i$  es la dirección donde están almacenadas las coordenadas de  $P_i$ , y

$s_i$  es  $\begin{cases} 0 & \text{si el lado } P_i, P_{i+1} \text{ es un segmento de recta} \\ \text{el radio del lado } P_i, P_{i+1} & \text{si es un arco de circunferencia, con signo } + \text{ o } - \text{ según el área del segmento de círculo limitado por la cuerda y el arco de extremos } P_i, P_{i+1} \text{ deba sumarse o restarse al área del polígono de vértices } P_i \text{ para obtener el área del lote.} \end{cases}$

El dato  $-1$  tiene por efecto pasar al bloque  $E_1$  (diagrama 3). Para imprimir la suma parcial de áreas se suministra el dato 1, cuyo efecto es pasar al bloque  $E_2$ . Se puede continuar calculando los resultados correspondientes a nuevos solares iniciando cada vez la sucesión de datos con un  $-1$ . Para terminar se suministra el dato 3, cuyo efecto es pasar al bloque F.

## BLOQUE F.

Como se ha visto, las coordenadas se llevan siempre a la memoria grande. Para imprimirlas, se indica como dato el número  $q$  de puntos cuyas coordenadas se desea imprimir. Estas coord-

nadas deben haber sido almacenadas en los lugares de direcciones  $1, 2, \dots, q$ .

## REFERENCIA

[1] Granato Grondona, Julio C. — Utilización de la computadora electrónica Mercury para el cálculo de loteos. Publicado en este mismo boletín.

## ELECTRONIC COMPUTATION OF SUBDIVISIONS OF LAND

ENRIQUE M. CABAÑA

## SUMMARY

A programme for the computation of the parcelling into lots of a block of land is described generically. The following data are required: the definition of the perimeter of the block, given by the centre lines of the streets and their half-widths, and the elementary operations of Block A that correspond to the previously imposed conditions of lot sizes and shapes.

The results obtained are: area of each lot, length of its sides and coordinates of its vertices, total area of the block, and sum of the areas of the lots, to check with the preceding one.

# Parametrización en grande de las soluciones de sistemas de segundo orden de ecuaciones diferenciales

A. GANDULFO

1. Designamos con  $R$  el espacio de los números reales. Sea  $X$  un espacio topológico conexo que es unión de una familia numerable  $\mathbf{B}$  de abiertos, cada uno de los cuales es homeomorfo a  $R$ . Supongamos además que para todo  $x \in X$  resulta  $X - \{x\}$  inconexo.

**TEOREMA 1.** *Existe una función continua  $\varphi: X \rightarrow R$  que es estrictamente monótona sobre cualquier conjunto de  $\mathbf{B}$ .*

Antes de demostrar el teorema empecemos por probar dos lemas.

**LEMA 1.** *El espacio  $X$  cumple con el axioma  $T_1$  de separabilidad ( $\{x\}$  es cerrado para todo  $x \in X$ ).*

En efecto, si  $x$  e  $y$  son dos elementos distintos de  $X$  demostraremos que existe un entorno de  $x$  que no contiene a  $y$ . Para ello tomamos  $B \in \mathbf{B}$  tal que  $x \in B$ . Si  $y \notin B$  está demostrado. Si  $y \in B$ , puesto que  $B$  es homeomorfo a  $R$ , existe un abierto  $A$  en la topología de  $B$ , tal que  $x \in A$ ,  $y \notin A$ . Como los abiertos de  $B$  son también abiertos de  $X$ , resulta demostrado el lema.

*Nota.* En cambio,  $X$  no tiene por qué ser un espacio de Hausdorff.

**LEMA 2.** *Si  $T$  es un abierto conexo de  $X$  y  $B \in \mathbf{B}$ , entonces  $T \cap B$  es también conexo.*

Como  $X$  verifica el axioma  $T_1$  y puesto que la supresión de un punto  $x$  desconecta todo el espacio, entonces la supresión de  $x$  desconectará todo entorno de  $x$ .

Ahora bien, si  $x_1, x_2 \in T \cap B$  y  $x$  "está comprendido entre"  $x_1$  y  $x_2$  en la ordenación de  $B$ , afirmamos que  $x \in T$  lo cual com-

pleta la demostración. Supongamos, por el absurdo, que  $x \in T$ ; entonces  $T \cup (B - \{x\}) = (T \cup B) - \{x\}$ ; el primer miembro de esta igualdad es conexo porque puede ponerse como  $T \cup B_1 \cup B_2$  en que  $B_1$  y  $B_2$  son las componentes de  $B - \{x\}$ ,  $x_i \in T \cap B_i$ ,  $i = 1, 2$ ; pero el segundo miembro debe ser inconexo por lo dicho arriba y esto implica una contradicción, con lo cual la afirmación queda probada.

Entonces  $T \cap B$  es o bien vacío o bien homeomorfo a  $R$ .

*Demostración del Teorema 1.* Empezamos por ordenar  $B$  en una sucesión  $(B_m)$  tal que, siendo  $T_m = \bigcup_{n=1}^m B_n$ , resulte  $T_m \cap B_{m+1} \neq \emptyset$  para todo  $m$ . Para ello se procede así: partimos de cierta ordenación inicial y, suponiendo que ya tenemos seleccionados los  $m$  primeros términos de la nueva ordenación, el  $m + 1$ -ésimo será el primero en la ordenación inicial cuya intersección con  $\bigcup_{n=1}^m B_n$  es no vacía. En virtud de la conexión de  $X$  resulta que de este modo se numeran todos los elementos de  $B$ .

Como  $T_1 = B_1$  es homeomorfo a  $R$  puede elegirse  $\varphi_1(x)$  continua y estrictamente monótona en  $T_1$ , y tal que  $|\varphi_1(x)| < 1$ . Supongamos que tenemos definida  $\varphi_n(x)$  en  $T_n$  de tal modo que  $\varphi_n(x)$  es continua y estrictamente monótona en  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , y satisface  $|\varphi_n(x)| < n$ . Veámos que se puede extenderla a  $\varphi_{n+1}$  en  $T_{n+1}$  en condiciones similares. Efectivamente, en virtud del Lema 2,  $T_n \cap B_{n+1}$  es un segmento topológico contenido en  $B_{n+1}$ . Por otra parte  $\varphi_n(x)$  es estrictamente monótona en  $T_n \cap B_{n+1}$  (basta demostrarlo en un entorno de cada punto de  $T_n \cap B_{n+1}$  y dicha demostración es inmediata). Siendo además  $\varphi_n(x)$  acotada en  $T_n \cap B_{n+1}$  se extenderá a todo  $B_{n+1}$  de la manera usual.

Es obvio ahora que definiendo  $\varphi(x) = \varphi_n(x)$  se satisfacen las condiciones de la tesis del Teorema 1.

2. Consideramos un sistema autónomo de segundo orden de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{z} = f(z) \qquad z \in \Omega \subset R^2 \qquad (1)$$

en que  $\Omega$  es un recinto simplemente conexo del plano. Admita-

mos que  $f$  es continua, que está asegurada la unicidad de las soluciones, y que no hay puntos críticos ( $f \neq 0$ ).

**TEOREMA 2.** *Existe una función continua  $\varphi: \Omega \rightarrow R$  que es constante sobre toda trayectoria de (1) y estrictamente monótona sobre todo arco sin contacto. Si  $f \in C^p$  puede lograrse que  $\varphi \in C^p$ .*

*Observación.* E. Kamke, en su artículo [2], demostró un teorema análogo a nuestro Teorema 2, pero con las siguientes restricciones:

a) la existencia de  $\varphi$  no se demuestra en todo  $\Omega$ , sino sólo en cualquier recinto cuya adherencia está contenida en  $\Omega$  ;

b) en lugar de un sistema general de segundo orden como (1) Kamke considera sólo el caso  $dy/dx = f(x, y)$ .

Nuestro teorema permite pues generalizar las aplicaciones de estos resultados al problema de la existencia en grande de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales de la forma  $z_x \cdot f(x, y) + z_y \cdot g(x, y) = 0$  ; subsisten, sin embargo, las dificultades sugeridas por el mismo Kamke en su libro [3], pp. 318-320.

*Demostración.* Las trayectorias de (1) originan una partición de  $\Omega$ . Llamemos  $X$  al espacio cociente y  $p$  a la proyección canónica de  $\Omega$  en  $X$ .

Por cada punto de  $\Omega$  pasan arcos sin contacto; por ser  $f$  continua, pueden tomarse como tales, inclusive, segmentos rectilíneos abiertos.

Sea  $\sigma$  un arco sin contacto. Toda trayectoria de (1) que corte a  $\sigma$  lo hará en un solo punto. Esto puede demostrarse por el siguiente argumento familiar en la teoría de Poincaré-Bendixson. Siendo  $\Omega$  simplemente conexo y en ausencia de puntos críticos resulta que el sistema (1) no puede tener soluciones periódicas (ver [1], p. 400). Como consecuencia del Teorema de Jordan, si una trayectoria corta dos veces a  $\sigma$  debe mantenerse, ya sea en el pasado o en el futuro, contenida en un compacto de  $\Omega$ . En tales condiciones deben existir trayectorias periódicas o puntos críticos ([1], pp. 391-394) contradiciendo lo que ya hemos visto.

Si  $\sigma$  viene dado por  $z(u)$ ,  $u \in R$ , la función  $p(z(u))$ , como aplicación de  $R$  en  $X$ , es continua, biunívoca y abierta (esto último porque nuestra hipótesis asegura dependencia continua de las soluciones de (1) respecto de las condiciones iniciales). Entonces  $p(\sigma)$  es abierto en  $X$  y homeomorfo a  $R$ . Además los conjuntos  $p(\sigma)$ , al variar  $\sigma$ , constituyen un recubrimiento de  $X$ .

Por otra parte como  $\Omega$  es  $\sigma$ -compacto resulta que  $X$  también lo es y puede entonces ponerse como unión de una familia  $\mathbf{B}$  de abiertos homeomorfos a  $R$ .

Si  $z(t)$ ,  $\alpha < t < \beta$ , es una solución de (1) (corresponde a un punto  $x$  de  $X$ ) y  $K$  un compacto de  $\Omega$ , puesto que no hay puntos críticos y  $\Omega$  es simplemente conexo, existen  $t_1$  y  $t_2$  tales que  $z(t) \notin K$  para  $t > t_2$  y  $t < t_1$ . Así pues, compactificando  $\Omega$  de la manera usual con el agregado de un punto (la frontera), las trayectorias de (1) pasan a ser curvas simples y cerradas. El espacio  $\Omega$  compactificado es homeomorfo a la esfera y en virtud del Teorema de Jordan resulta que  $\Omega - \{z(t) : \alpha < t < \beta\}$  es inconexo y por lo tanto, también lo es  $X - \{x\}$ .

El espacio  $X$  está en las condiciones del Teorema 1 y esto prueba el Teorema 2 para  $f \in C^0$ .

Si  $f \in C^p$  es necesario hacer un pequeño refinamiento en la demostración. Trabajemos con arcos sin contacto  $z(u) \in C^p$ ,  $-\infty < u < +\infty$ , y los restringiremos a un intervalo  $-\infty < u_1 < u < u_2 < +\infty$ . La familia  $\mathbf{B}$  puede formarse con proyecciones de dichos arcos restringidos. La demostración se termina por inducción, como en el Teorema 1, pero con la siguiente hipótesis inductiva:  $\varphi_n(x)$  está definida en  $T_n$  y es tal que si  $z(u) \in C^p$ ,  $u_1 < u < u_2$ , es un arco sin contacto restringido cuya proyección está contenida en  $T_n$ , entonces  $\varphi_n(p(z(u)))$  es estrictamente monótona y admite una extensión  $\varphi_n(u) \in C^p$  en  $u_1 \leq u \leq u_2$ . En estas condiciones es fácil lograr que  $\varphi_{n+1}$  tenga las mismas propiedades que  $\varphi_n$ .

3. El Teorema 2 admite la siguiente generalización. Sea  $\Omega$  un espacio conexo y  $\sigma$ -compacto, y  $\Gamma$  una partición de  $\Omega$  en conjuntos  $\gamma$  cerrados y conexos que llamaremos trayectorias, con las siguientes propiedades:

- a)  $\Omega - \gamma$  es inconexo para todo  $\gamma \in \Gamma$ ;
- b) por cada punto de  $\Omega$  pasa una transversal  $\sigma$ , llamando

trasversal a todo arco de curva simple (homeomorfo a  $R$ ) tal que dos cualesquiera de sus puntos están en distinta trayectoria;

c) las trayectorias dependen continuamente de las condiciones iniciales en el sentido siguiente: si  $z$  y  $z_0$  pertenecen a una trayectoria  $\gamma$ , y  $\sigma$  es una transversal por  $z$ , entonces existe un entorno  $U$  de  $z_0$  tal que una trayectoria que pasa por cualquier punto de  $U$  tiene intersección no vacía con  $\sigma$ .

**TEOREMA 3.** *En tales condiciones existe una función continua  $\varphi : \Omega \rightarrow R$  que es constante sobre las trayectorias y estrictamente monótona sobre cualquier transversal.*

La demostración se hace en forma similar a la del Teorema 2.

#### REFERENCIAS

- [1] E. Coddington and N. Levinson, Theory of ordinary differential equations. New York, McGraw-Hill, 1955.
- [2] E. Kamke, Zur Theorie der Differentialgleichungen. Math. Ann. 99 (1928), 602-615.
- [3] E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen. Berlin, Akademie-Verlag, 1930.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

MONTEVIDEO, URUGUAY

PARAMETRIZATION IN THE LARGE OF THE SOLUTIONS  
OF SECOND-ORDER SYSTEMS OF DIFFERENTIAL  
EQUATIONS

A. GANDULFO

SUMMARY

Consider an autonomous second-order system of ordinary differential equations

$$\dot{z} = f(z) \quad z \in \Omega \quad (1)$$

where  $\Omega$  is a simply connected open domain of the plane  $R^2$ ,  $f$  is continuous, uniqueness of solutions is assured, and there are no critical points.

Generalizing some results of E. Kamke, we prove:

**THEOREM 2.** *There exists a real-valued function  $\varphi: \Omega \rightarrow R$  that is constant on each trajectory of (1) and strictly monotone on each transversal arc. If  $f \in C_p$  the condition  $\varphi \in C_p$  can be satisfied.*

The proof is based on the following topological result:

**THEOREM 1.** *Let  $X$  be a connected topological space such that deletion of any point disconnects it and such that  $X$  has a countable cover of open sets each homeomorphic to  $R$ . There exists then a continuous function  $\varphi: X \rightarrow R$  that is strictly monotone on each set in this cover.*

A topological generalization of Theorem 2 is stated (Theorem 3).





