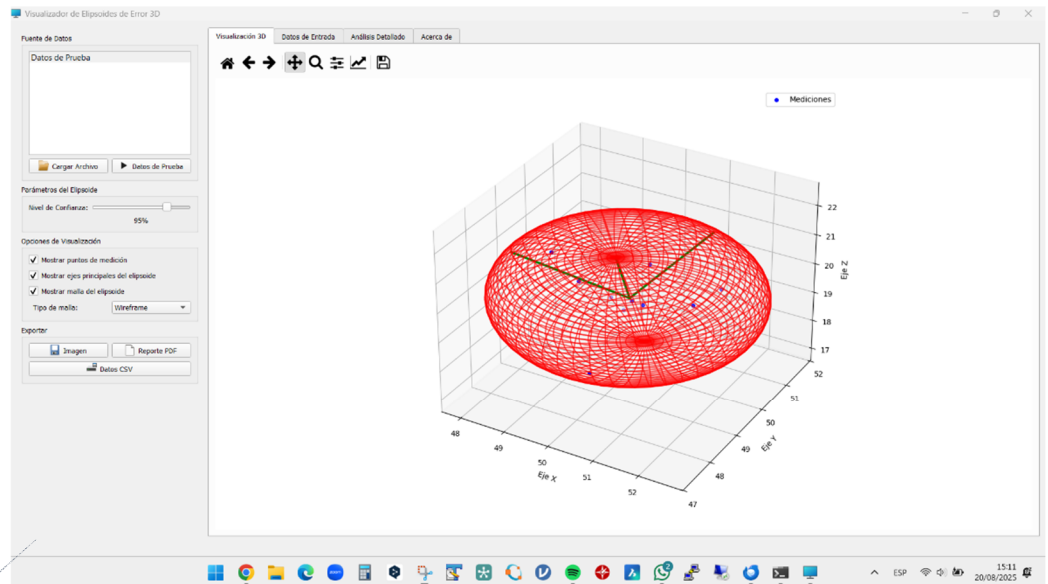


ELIPSOIDE DE ERROR EN GEODESIA TOPOGRAFIA Y GEOMATICA



Reporte de Elipsoide de Error 3D

Generado: 2025-08-20 15:09:11

Nivel de confianza: 95% ($\chi^2=7.814728$, $gl=3$)

Parámetro	X / 1	Y / 2	Z / 3
Centroide	50.251871	49.517100	19.666589
Semiejes (s1,s2,s3)	2.983668	2.480657	1.649857
Eigenvalores (lambda1,lambda2,lambda3)	1.139166	0.787444	0.348320
Azimut (°)	-139.9978		
Inclinación (°)	41.2856		



Prof.Ing.Fabián Barbato - Prof.Ing.Danilo Blanco
DEPARTAMENTO DE GEODESIA
EDICIÓN V7 2025

ELIPSOIDE DE ERROR

En Geodesia, el **elipsoide de error** (también llamado **elipsoide de confianza**) representa gráficamente la **incertidumbre** de la posición estimada de un punto en el espacio (X, Y, Z).

Se trata de un **elipsoide tridimensional centrado en la posición estimada**, cuyas dimensiones y orientación dependen de las **varianzas y covarianzas** asociadas.

DISTRIBUCIONES CONJUNTAS (N) DIMENSIONALES

Estas distribuciones aparecen cuando el resultado de cierto experimento aleatorio se expresa por medio de n cantidades variables observadas simultáneamente, con sus correspondientes incertidumbres.

Consideremos una variable n-dimensional:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Donde cada una de ellas tiene asociada una distribución de probabilidad Normal:

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$$

Definiendo:

$$M = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \text{ vector de las medias } \text{ y } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{2n} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \text{ matriz covarianza}$$

La función $f(x)$ de densidad de probabilidad normal de una variable multivariante n-dimensional es:

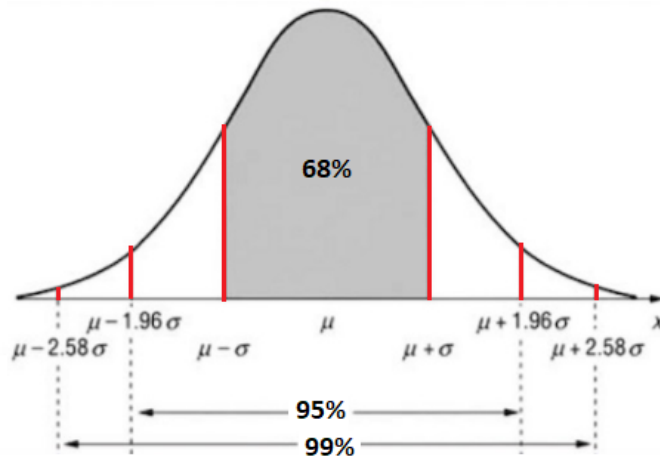
$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \cdot e^{-1/2 \cdot K(X)}$$

donde $K(X) = (X - M)^T \Sigma^{-1} (X - M)$

Si cada una de las componentes de X toma una probabilidad determinada $\rightarrow f(x) = \text{cte}$, entonces:

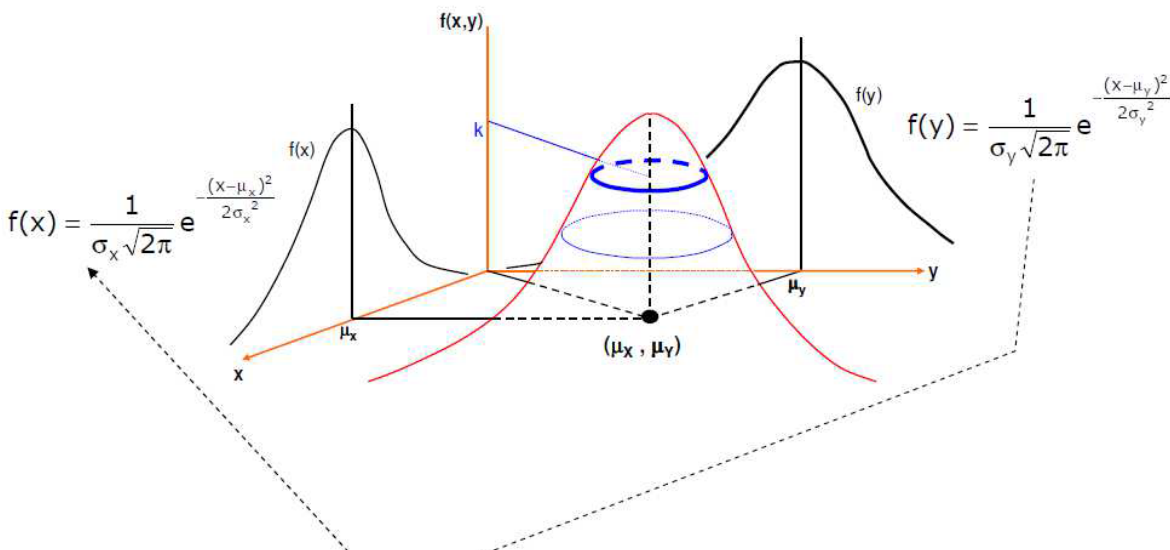
- Si X es de una dimensión $\rightarrow f(x)$ es un número (la probabilidad).

Ya vimos que este es el modelo que se aplica a las mediciones realizadas en el caso de una variable.

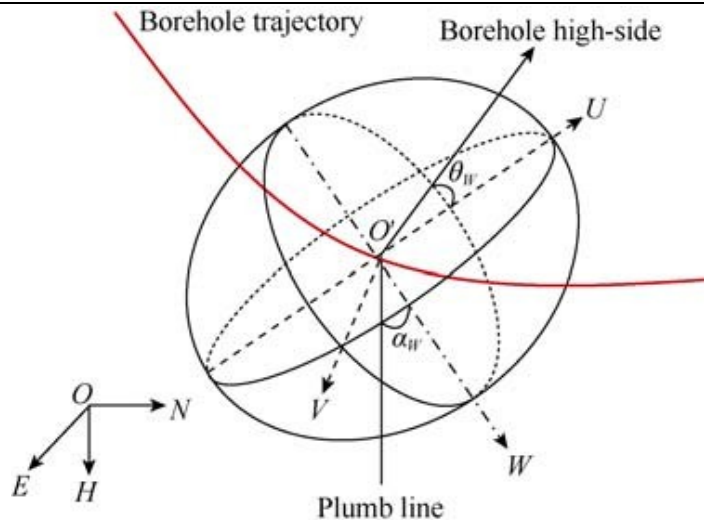


- Si X es de dos dimensiones $\rightarrow f(x)$ es una curva en el plano (una figura).

Si consideramos los puntos en el plano como resultado de observaciones realizadas entonces el modelo de distribución normal bidimensional es el que se aplica a las mediciones realizadas. Describe la región bidimensional de incertidumbre para la posición estimada.



Si consideramos los puntos en el espacio como resultado de observaciones realizadas, entonces el modelo de distribución normal tridimensional es el que se aplica a las mediciones realizadas; el mismo describe la región tridimensional de incertidumbre para la posición estimada.



La formulación de la expresión $f(x) = cte$ es compleja para poder trabajar con ella y sacar conclusiones de la misma. Por ello se hace conveniente desarrollarla para lograra una expresión mas sencilla en las variables.

Dejando el término en e de un lado de la igualdad, aplicando el logaritmo y desarrollando se logra una ecuación mas sencilla:

$$\left(\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}\right) \cdot cte = e^{-1/2 \cdot K(X)} \rightarrow \log \left(cte \cdot \sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}\right) = -1/2 \cdot K(X)$$

$$K(X) = -2\log \left(cte \cdot \sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}\right)$$

Definiendo: $c^2 = -2\log \left(cte \cdot \sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}\right) \rightarrow K(X) = c^2$

$$(X - M)^T \Sigma^{-1} (X - M) = c^2 \text{ (Ecuación 1)}$$

Si X representa las coordenadas cartesianas de un punto, podemos considerarlo en 2 o 3 dimensiones.

En el plano $\rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ En el espacio $\rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

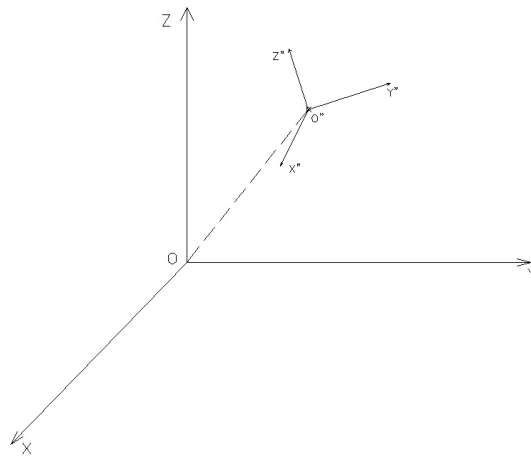
En estos casos la ecuación (1) define una cónica (en 2 D) o una cuádrica (en 3 D), debemos clasificarla y encontrar sus elementos (centros y ejes).

El determinar los ejes es definir sus dimensiones y orientación y esto proporciona información sobre las direcciones en las que la incertidumbre es mayor o menor.

Para ello hay que transformarla a una expresión más sencilla, la expresión canónica (solo términos de 2º grado en las variables).

Lo podemos realizar a través de movimientos en dos etapas: Traslación y Rotación.

Esto nos permite pasar de un sistema correlacionado (X,Y,Z) a un sistema en el cual las direcciones de incertidumbre están independientemente orientadas, transformando el espacio a uno donde el nuevo sistema está alineado con los ejes (X'',Y'',Z'').



1) Traslación (X,Y,Z) → (X',Y',Z')

En esta etapa se hace coincidir el centro del nuevo sistema con el origen de coordenadas.

Llamando h a un vector de traslación, la relación entre los vectores X e X', será:

$$X = X' + h$$

Escribiendo la ec. (1) como una función (P(X)):

$$P(X) = (X - M)^T \Sigma^{-1} (X - M) - c^2$$

Tendremos:

$$P(X' + h) = (X' + h - M)^T \Sigma^{-1} (X' + h - M) - c^2$$

$$P(X' + h) = (X'^T \Sigma^{-1} + (h - M)^T \Sigma^{-1}) (X' + (h - M)) - c^2$$

$$P(X' + h) = X'^T \Sigma^{-1} X' + (h - M)^T \Sigma^{-1} X' + X'^T \Sigma^{-1} (h - M) + (h - M)^T \Sigma^{-1} (h - M) - c^2$$

Observando que $X'^T \Sigma^{-1} (h - M)$ es un escalar y que $(h - M)^T \Sigma^{-1} (h - M) - c^2 = P(h)$, entonces:

$$X'^T \Sigma^{-1} (h - M) = (X'^T \Sigma^{-1} (h - M))^T = (h - M)^T \Sigma^{-1} X'$$

$$P(X' + h) = X'^T \Sigma^{-1} X' + 2(h - M)^T \Sigma^{-1} X' + P(h)$$

Para que esta expresión no contenga término en $X' \rightarrow h=M$

Por lo tanto el centro de la cónica/cuádrica debe ser M.

$$X'^T \Sigma^{-1} X' - c^2 = 0$$

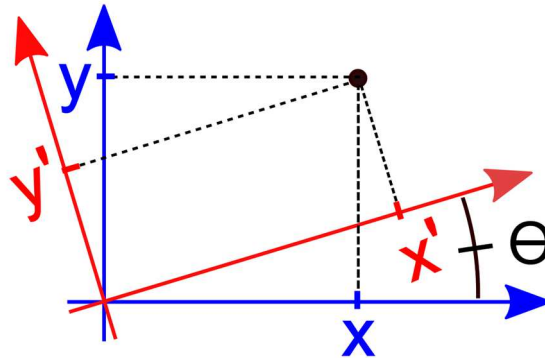
2) Rotación

Se busca aquella rotación que tenga como resultado del movimiento una coincidencia entre los ejes de los sistemas X' y X'' . De esta manera la ecuación (1) no tendrá término mixto, es decir productos entre las componentes de la variable X (términos xy o xz por ejemplo).

La relación entre dos vectores referidos a los sistemas X' y X'' , es:

$$X' = GX'' \quad \text{donde } G \text{ es la matriz de rotación.}$$

Para dos dimensiones:



$$\begin{cases} X' = \cos\theta \cdot X'' - \sin\theta \cdot Y'' \\ Y' = \sin\theta \cdot X'' + \cos\theta \cdot Y'' \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \end{bmatrix} \rightarrow G = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ rotación en el eje Z un ángulo } \theta$$

Para tres dimensiones:

$G = R_Z R_X R_Y$ donde:

$$R_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \text{ rotación en el eje X un ángulo } \alpha$$

$$R_Y = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \text{ rotación en el eje Y un ángulo } \beta$$

$$R_Z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ rotación en el eje Z un ángulo } \theta$$

En cualquiera caso:

$$P(X') = X'^T \Sigma^{-1} X' - c^2$$

$$P(GX'') = (GX'')^T \Sigma^{-1} (GX'') - c^2$$

$$X''^T G^T \Sigma^{-1} G X'' - c^2 = 0 \rightarrow \text{llamando } A = G^T \Sigma^{-1} G \rightarrow X''^T A X'' - c^2 = 0$$

Como Σ es simétrica $\rightarrow \Sigma^{-1}$ también es simétrica $\rightarrow$ existe una rotación G tal que $G^T \Sigma^{-1} G$ es diagonal de tal forma que :

$$G^T \Sigma^{-1} G = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix} \text{ donde } c_1, c_2, \dots, c_n \text{ son los valores propios de } \Sigma^{-1} \text{ y } G$$

es la matriz de cambio de base ortogonal conformada por los vectores propios ortonormales. G no es otra que la matriz de rotación ya descrita.

Recordando que los valores propios de una matriz inversa H^{-1} son los inversos de los valores propios de la matriz H y que los vectores propios son los mismos, es decir:

Si, los valores propios de Σ^{-1} son $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$ siendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ valores propios de Σ .

Entonces, los vectores propios de Σ^{-1} son $v_1, v_2, \dots, v_n$ siendo $v_1, v_2, \dots, v_n$ valores propios de Σ .

Tendremos para dos dimensiones:

$$X''^T A X'' = c^2 \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} X'' & Y'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \end{bmatrix} = c^2$$

Desarrollando: $\frac{X''^2}{c^2 \lambda_1} + \frac{Y''^2}{c^2 \lambda_2} = 1$ ecuación canónica de una elipse.

Para tres dimensiones:

$$A = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{bmatrix} \rightarrow [X'' \ Y'' \ Z''] \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix} = c^2$$

Desarrollando: $\frac{X''^2}{c^2\lambda_1} + \frac{Y''^2}{c^2\lambda_2} + \frac{Z''^2}{c^2\lambda_3} = 1$ **ecuación canónica de un elipsoide**

Con esto hemos mostrado que las incertidumbres naturales asociadas a cada variable terminan definiendo una zona de un plano encerrada por una elipse (caso 2D) o un volumen en el espacio encerrado por un elipsoide (caso 3D).

Estas dos representaciones gráficas de la incertidumbre asociada a una medición se las conoce como **elipse o elipsoide de error**.

CALCULO DE LOS PARAMETROS

Para hallar los parámetros se deben calcular los valores y vectores propios de la matriz Σ .

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ matriz covarianza asociada a las coordenadas X,Y

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$ matriz covarianza asociada a las coordenadas X,Y,Z

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ valores propios de la matriz Σ (Caso X,Y)

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ valores propios de la matriz Σ (Caso X,Y,Z)

$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ vectores propios de la matriz Σ (Caso X,Y)

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\sin\beta & -\cos\alpha\sin\theta & -\sin\beta\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\cos\beta \\ \cos\beta\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta\sin\beta & \cos\alpha\cos\theta & -\sin\beta\sin\theta - \sin\alpha\cos\theta\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

vectores propios de la matriz Σ (Caso X,Y,Z)

Teniendo en cuenta las ecuaciones canónicas de la elipse y elipsoide, sus semiejes son :

Elipse de Error:

$$\begin{aligned} a &= c\sqrt{\lambda_1} && \text{semieje mayor de la elipse} \\ b &= c\sqrt{\lambda_2} && \text{semieje menor de la elipse} \end{aligned}$$

Elipsoide de Error:

$$\begin{aligned} a &= c\sqrt{\lambda_1} && \text{Primer semieje del elipsoide (mayor)} \\ b &= c\sqrt{\lambda_2} && \text{Segundo semieje del elipsoide} \\ z &= c\sqrt{\lambda_3} && \text{Tercer semieje del elipsoide (menor)} \end{aligned}$$

En el caso de los ángulos de rotación, a partir de sus vectores propios:

Elipse de Error:

$$\tan(\theta) = \frac{G_{21}}{G_{11}} \quad (\theta: \text{ángulo de rotación del semieje mayor a partir del eje X}).$$

Elipsoide de Error:

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{-G_{12}}{G_{22}} \quad (\theta: \text{ángulo de rotación del plano XY en torno al eje Z}). \\ \tan(\beta) &= \frac{G_{31}}{G_{33}} \quad (\beta: \text{ángulo de rotación del plano XZ en torno al eje Y}). \\ \sin(\alpha) &= G_{32} \quad (\alpha: \text{ángulo de rotación del plano YZ en torno al eje X}). \end{aligned}$$

A los efectos de mejor ubicar el elipsoide en el espacio se suelen calcular para cada semieje los ángulos que forman las proyecciones de cada semieje en el plano XY con el eje X (ang) y los ángulos de Inclinación de cada semieje del elipsoide respecto al plano XY (inc).

Ejemplo para el semieje mayor:

$$\text{ang} = \arctg(G(2,1)/G(1,1)).$$

$$\text{inc} = \arcsen(G(3,1)).$$

En el caso particular de la elipse de error, los cálculos se pueden realizar sin asistencia informática de la siguiente manera:

Para hallar los valores propios hay que resolver el polinomio característico:

$$|\Sigma_{XY} - \lambda I| = \begin{vmatrix} \sigma_X^2 - \lambda & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 - \lambda \end{vmatrix} = (\sigma_X^2 - \lambda)(\sigma_Y^2 - \lambda) - \sigma_{XY}^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)\lambda + \sigma_X^2\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_X^2 - \sigma_Y^2)^2 + 4\sigma_{XY}^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_X^2 - \sigma_Y^2)^2 + 4\sigma_{XY}^2}$$

Para calcular el ángulo de rotación, debemos plantear $A = G^T \Sigma^{-1} G$

$$\begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det(\Sigma)} \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Operando y escribiendo solo el elemento fuera de la diagonal:

$$0 = (\sigma_Y^2 - \sigma_X^2)\cos(\theta)\sin(\theta) + \sigma_{XY}(\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{cases} \cos(\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta) \\ \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = \cos(2\theta) \end{cases}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\sigma_{XY}}{(\sigma_X^2 - \sigma_Y^2)}$$

ELIPSE Y ELIPSOIDE DE ERROR ESTANDAR Y PROBABILIDAD ASOCIADA (Confianza)

Al considerar la ecuación $X^T A X = c^2$ y variar el valor de c obtendremos una familia de elipses o elipsoides de error.

Al caso particular en que se considere $c=1$, se las conoce como **ELIPSE O ELIPSOIDE DE ERROR ESTANDAR**.

$$X^T A X = 1$$

Al considerar la elipse o elipsoide de error el centro es la posición más probable del punto observado y las incertidumbres en cada uno de los puntos hacen que estos se encuentren comprendidos dentro de la elipse o elipsoide. Esto lo podemos traducir matemáticamente como:

$$\frac{X''^2}{\lambda_1} + \frac{Y''^2}{\lambda_2} \leq c^2 \quad \text{caso de elipse}$$

$$\frac{X''^2}{\lambda_1} + \frac{Y''^2}{\lambda_2} + \frac{Z''^2}{\lambda_3} \leq c^2 \quad \text{caso de elipsoide}$$

Mostraremos que $\Sigma_{X''} = (A)^{-1}$, es decir que la matriz covarianza de las variables X'' es igual a la inversa de la matriz A (matriz diagonal, con los inversos de los valores propios como elementos).

$$A = G^T \Sigma^{-1} G = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_n \end{bmatrix} \rightarrow (A)^{-1} = (G^T \Sigma^{-1} G)^{-1} = G^{-1} (G^T \Sigma^{-1})^{-1} = G^{-1} \Sigma (G^{-1})^T$$

Como $G^{-1} = G^T$ (por ser la matriz de cambio de base ortogonal) $\rightarrow (A)^{-1} = G^T \Sigma G$

$$(A)^{-1} = G^T \Sigma G = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Por otro lado:

En la traslación $X = X' + M \rightarrow X' = X - M \rightarrow$

aplicando propagación de covarianzas: $\Sigma_{X'} = \Sigma$

En la rotación $X' = G X'' \rightarrow G^{-1} X' = G^{-1} G X'' \rightarrow X'' = G^{-1} X'$, aplicando propagación de covarianzas:

$$\Sigma_{X''} = G^{-1} \Sigma_{X'} (G^{-1})^T = G^T \Sigma G$$

con lo cual, concluimos que $\Sigma_{X''} = (A)^{-1}$

$$(A)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{1''}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{2''}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{n''}^2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$\frac{X''^2}{\sigma_{x''}^2} + \frac{Y''^2}{\sigma_{y''}^2} \leq c^2 \quad \text{caso de elipse}$$

$$\frac{X''^2}{\sigma_{x''}^2} + \frac{Y''^2}{\sigma_{y''}^2} + \frac{Z''^2}{\sigma_{z''}^2} \leq c^2 \quad \text{caso de elipsoide}$$

Consideremos la variable aleatoria $U = \frac{X''^2}{\sigma_{x''}^2} + \frac{Y''^2}{\sigma_{y''}^2}$ o $U = \frac{X''^2}{\sigma_{x''}^2} + \frac{Y''^2}{\sigma_{y''}^2} + \frac{Z''^2}{\sigma_{z''}^2}$

Como X'' , Y'' y Z'' son variables normalmente distribuidas con $X'' \sim N(0, \sigma_{x''})$; $Y'' \sim N(0, \sigma_{y''})$; $Z'' \sim N(0, \sigma_{z''}) \rightarrow$ las variables $\frac{X''}{\sigma_{x''}}$, $\frac{Y''}{\sigma_{y''}}$ y $\frac{Z''}{\sigma_{z''}}$ seguirán el modelo normal $N(0,1) \rightarrow$ La variable U responde a una distribución del tipo Chi-cuadrada con $n=2$ o $n=3$ grados de libertad.

Su función de densidad será: $f(u) = \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}}$; $u > 0$

La probabilidad que los valores de X'' , Y'' , Z'' se encuentren dentro de la elipse/elipsoide de error será:

$$P \left[\frac{X''^2}{\sigma_{x''}^2} + \frac{Y''^2}{\sigma_{y''}^2} \leq c^2 \right] = P[U \leq c^2] = \int_0^{c^2} \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}} du = 1 - e^{-\frac{c^2}{2}}$$

$$P \left[\frac{X''^2}{\sigma_{x''}^2} + \frac{Y''^2}{\sigma_{y''}^2} + \frac{Z''^2}{\sigma_{z''}^2} \leq c^2 \right] = P[U \leq c^2] = \int_0^{c^2} \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}} du = 1 - e^{-\frac{c^2}{2}}$$

Tabla de χ^2 :

c	c ²	Probabilidad (2 grados libertad)	Probabilidad (3 grados libertad)
1	1	0,3934	0,1987
1,177	1,3853	0,4997	0,2910
1,414	2	0,6320	0,4276
2	4	0,8646	0,7385
2,146	4,6053	0,9000	0,7969
2,447	5,9878	0,9499	0,8878
3	9	0,9889	0,9707
3,035	9,2112	0,9900	0,9734
3,5	12,25	0,9978	0,9934

Para la elipse de error estándar $c=1$, por lo tanto la probabilidad de que el punto se encuentre dentro de la elipse de error estándar es de 39,34%.

Para el elipsoide de error estándar $c=1$, por lo tanto la probabilidad de que el punto se encuentre dentro del elipsoide de error estándar es de 19,87%.

Ya vimos que:

Elipse de Error: $a = c\sqrt{\lambda_1}$

$$b = c\sqrt{\lambda_2}$$

Elipsoide de Error: $a = c\sqrt{\lambda_1}$

$$b = c\sqrt{\lambda_2}$$

$$z = c\sqrt{\lambda_3}$$

$\sqrt{\lambda_1}$, $\sqrt{\lambda_2}$, $\sqrt{\lambda_3}$ son los semiejes de la elipse/elipsoide de error estándar. La orientación de la elipse/elipsoide se mantienen para cualquier valor de c .

El valor de c define el tamaño de la elipse/elipsoide y en consecuencia la probabilidad asociada correspondiente.

ELIPSOIDE DE ERROR EN GEODESIA

Elipsoide de Error

En Geodesia, el elipsoide de error (también llamado elipsoide de confianza) representa gráficamente la incertidumbre de la posición estimada de un punto en el espacio (X, Y, Z), en base a la matriz de covarianza del ajuste.

Se trata de un elipsoide tridimensional centrado en la posición estimada, cuyas dimensiones y orientación dependen de los autovalores y autovectores de dicha matriz.

Matriz de Covarianza de Posición

Dado un vértice GNSS ajustado en solución de Red:

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{bmatrix}$$

y su matriz de covarianza asociada (simétrica y positiva definida):

$$\text{Cov}_{\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \text{Cov} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{xx}$$

es el resultado del ajuste por mínimos cuadrados, y su estructura refleja:

- Las varianzas (en la diagonal) representan la dispersión en cada eje.
- Las covarianzas (fuera de la diagonal) representan la correlación entre componentes.

Diagonalización: Autovalores y Autovectores

Para obtener el elipsoide de error:

Se diagonaliza (descomposición espectral) la matriz $\text{Cov}_{\hat{\mathbf{X}}}$:

$$\text{Cov}_{\hat{\mathbf{X}}} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T$$

donde:

$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ son los autovalores (cuadrado de los semiejes).

$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \mathbf{q}_3]$ contiene los autovectores (dirección de los ejes del elipsoide).

Descomposición espectral de una matriz

Es escribir una matriz A como “suma de modos propios” (o, en bloque, como una diagonal en un sistema de ejes conveniente).

Formalmente, si A es simétrica real (como una covarianza), entonces existe una matriz ortogonal V (columnas = autovectores) y una matriz diagonal Λ (diagonal = autovalores) tales que:

$$A = V \Lambda V^T.$$

Autovectores = direcciones “privilegiadas” de A .

- Autovalores = cuánto estira/encoge A en cada una de esas direcciones.
- Ortogonal (en simétricas) = los autovectores son perpendiculares y $V^{-1} = V^T$.

También se puede ver como suma:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T,$$

o sea, A es la combinación de “proyectores” $v_i v_i^T$ ponderados por λ_i .

Es conveniente recordar que una matriz representa una transformación lineal: toma un vector x y lo convierte en Ax . Dependiendo de A , esa acción puede rotar, estirar, encoger o cizallar el espacio.

Es conveniente pensarlo como una máquina que, para cada dirección del espacio, decide cuánto la cambia de tamaño y cuánto la gira.

¿Por qué aparecen autovalores y autovectores?

Porque hay direcciones privilegiadas en las que la transformación no gira al vector, solo lo escala.

Eso pide exactamente que exista $v \neq 0$ y λ tales que

$$Av = \lambda v$$

v : dirección que queda alineada consigo misma $\rightarrow$ autovector.

- λ : factor de escala en esa dirección $\rightarrow$ autovalor.

Estas direcciones existen porque estamos buscando vectores “fijos en orientación” bajo la acción de A .

¿De dónde surge la ecuación para hallarlos?

De pedir soluciones no triviales al sistema $(A - \lambda I)v = 0$.

Para que haya $v \neq 0$, la matriz debe ser singular:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Esa es la ecuación característica. Sus raíces son los autovalores λ .

Luego, para cada λ , resolvés $(A - \lambda I)v = 0$ y se obtienen los autovectores asociados.

Continuando entonces: Dimensiones de los semiejes del elipsoide son: $a = \sqrt{\lambda_1}$, $b = \sqrt{\lambda_2}$, $c = \sqrt{\lambda_3}$ y las orientaciones están dadas por los autovectores.

Interpretación geométrica

El elipsoide:

- Describe la región tridimensional de incertidumbre para la posición estimada.
- Si se considera un nivel de confianza (ej., 95%), se multiplica por un factor de escala de distribución chi-cuadrado:

$$\text{Elipsoide}_{95\%} \Rightarrow \text{semiejes} \times \sqrt{\chi_{3,0.95}^2} \approx \times 2.795$$

Ejemplo Numérico

Un Vértice GNSS se midió 10 veces. Las observaciones están afectadas por errores aleatorios con desviaciones estándar cercanas a 3 mm.

Coordenadas aproximadas:

$$X \approx 1000 \text{ m}, Y \approx 5000 \text{ m}, Z \approx 9 \text{ m}$$

Observaciones (TM PILAR 34FI):

Observación	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	1000.002	5000.003	9.000
2	999.998	5000.001	9.002
3	1000.001	5000.004	9.001
4	999.997	5000.002	8.998
5	1000.003	5000.006	9.003
6	999.999	5000.000	9.000
7	1000.000	5000.001	9.001
8	1000.001	4999.997	8.999
9	1000.002	5000.002	9.004
10	1000.000	5000.003	9.000

Cálculo de la media

$$\hat{X} = \frac{1}{10} \sum X_i \approx 1000.0003 \text{ m}$$

$$\hat{Y} = \frac{1}{10} \sum Y_i \approx 5000.0019 \text{ m}$$

$$\hat{Z} = \frac{1}{10} \sum Z_i \approx 9.000 \text{ m}$$

Matriz de covarianza muestral

$$C_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 8.1 \cdot 10^{-6} & 5.2 \cdot 10^{-6} & 3.6 \cdot 10^{-6} \\ 5.2 \cdot 10^{-6} & 10.2 \cdot 10^{-6} & 4.4 \cdot 10^{-6} \\ 3.6 \cdot 10^{-6} & 4.4 \cdot 10^{-6} & 6.8 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \text{ m}^2$$

Autovalores y Autovectores

Autovalores (varianzas en ejes principales):

$$\lambda_1 = 1.7 \cdot 10^{-5}, \lambda_2 = 6.5 \cdot 10^{-6}, \lambda_3 = 1.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

Semiejes del elipsoide:

$$a = \sqrt{\lambda_1} \approx 4.12 \text{ mm}, \quad b = 2.55 \text{ mm}, \quad c = 1.34 \text{ mm}$$

Estos valores indican que la mayor incertidumbre está en la dirección del primer autovector $a = \sqrt{\lambda_1}$, lo cual permite analizar el comportamiento de cada vértice en el ajuste de redes.

Escalado para nivel de confianza del 95%

Utilizamos:

$$\chi^2_{3, 0.95} \approx 7.815 \Rightarrow \sqrt{7.815} \approx 2.795$$

Semiejes del elipsoide de confianza:

$$a_{95} \approx 11.5 \text{ mm}, \quad b_{95} \approx 7.13 \text{ mm}, \quad c_{95} \approx 3.74 \text{ mm}$$

Visualización y Aplicación

La orientación del elipsoide muestra hacia dónde se propaga más el error, y es muy útil para Comparar instrumentos (distorsión de forma), Evaluar calidad posicional, y Diseño de redes geodésicas.

Utilización de autovalores para obtener el elipsoide de error

En Geodesia, al ajustar coordenadas por mínimos cuadrados, obtenemos una matriz de covarianza de las coordenadas estimadas:

$$C_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix}$$

Esta matriz es simétrica y definida positiva, contiene varianzas en X, Y, Z (en la diagonal) y covarianzas entre los componentes (fuera de la diagonal).

Forma general del Elipsoide de Confianza

La ecuación general de un elipsoide de confianza en 3D es:

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{X}})^T \mathbf{Cov}_{\hat{\mathbf{X}}}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{X}}) = \chi_{3,\alpha}^2$$

Esta ecuación define una superficie cuadrática centrada en la posición estimada $\hat{\mathbf{X}}$, pero tiene un problema:

Si la matriz $\mathbf{Cov}_{\hat{\mathbf{X}}}$ no es diagonal, los ejes del elipsoide están inclinados respecto a los ejes X, Y, Z. es decir, el elipsoide no está alineado con los ejes del sistema de coordenadas original, y esto se resuelve Diagonalizando la matriz.

Para comprender la forma y orientación del elipsoide, necesitamos transformar esa matriz a una forma diagonal; esto se logra mediante la descomposición espectral o (diagonalización):

$$\mathbf{Cov}_{\hat{\mathbf{X}}} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T$$

Donde:

- $\mathbf{Q}$: matriz ortonormal con los autovectores de $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}}$.
- $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$: matriz diagonal con los autovalores.

Los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ representan:

- Las varianzas a lo largo de los ejes principales del elipsoide.
- Sus raíces cuadradas son los semiejes del elipsoide de error:

$$\text{Semiejes del elipsoide: } a = \sqrt{\lambda_1}, \quad b = \sqrt{\lambda_2}, \quad c = \sqrt{\lambda_3}$$

Estos ejes están desacoplados (no correlacionados), y representan la dirección donde la incertidumbre es máxima, intermedia y mínima.

Una **matriz ortonormal** es una matriz cuadrada cuyas columnas (y filas) forman un conjunto de vectores ortonormales. Esto significa que cada vector es **unitario** (su norma o longitud es 1 y es **ortogonal** a todos los demás vectores (su producto escalar es 0). Al igual que una matriz ortogonal, su inversa es igual a su transpuesta y su producto por su transpuesta es la matriz identidad

Los Autovalores son imprescindibles pues nos permiten pasar de un sistema correlacionado (XYZ) a un sistema en el cual las direcciones de incertidumbre están independientemente orientadas, y el elipsoide puede ser interpretado como:

$$(\mathbf{u}^T \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{u}) = \chi^2 \text{ donde } \mathbf{u} = \mathbf{Q}^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{X}})$$

Aquí el cambio de base Q^T transforma el espacio a uno donde el elipsoide está alineado con los ejes, y en ese espacio, la forma del elipsoide es esférica deformada como elipsoide escalado por los autovalores.

Entonces utilizamos los autovalores porque:

- ✓ Nos permiten determinar el tamaño de los semiejes del elipsoide (medida de incertidumbre).
- ✓ Nos permiten transformar la matriz de covarianza en una forma geoméricamente interpretable.
- ✓ Permiten identificar la dirección de máxima incertidumbre (autovalor mayor) y la dirección de menor precisión (autovalor menor).
- ✓ Sin ellos, no podríamos representar gráficamente ni interpretar el elipsoide en forma clara.

Para resumir, imaginemos un esferoide deformable (elipsoide) con forma desconocida.

- El contenido es la incertidumbre.
- Y sólo con los autovalores y autovectores conoceremos:
 - Qué tan larga es cada arista (autovalores).
 - En qué dirección apunta cada una (autovectores).

Análisis

El Objetivo principal es utilizar las propiedades del elipsoide de error para:

- Cuantificar la precisión posicional de un punto ajustado.
- Identificar direcciones de mayor o menor incertidumbre.
- Evaluar la forma, orientación y tamaño de la región de confianza.
- Comparar soluciones GNSS, equipos o configuraciones de redes.

1. Tamaño del elipsoide = Precisión general

El volumen y los semiejes del elipsoide indican la **magnitud** de la **incertidumbre**:

$$\sigma_{3D} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2} \quad \text{o también} \quad \sigma_{3D} = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

Donde λ_i son los autovalores de la matriz de covarianza.

- Un elipsoide pequeño implica buena precisión.
- Un elipsoide grande implica incertidumbre alta.

Comparar el tamaño o volumen entre vértices permite detectar zonas débiles de la red.

2. Forma del elipsoide = Relación entre componentes

Analizando la relación entre los semiejes:

$$\frac{a}{c} \text{ y } \frac{b}{c} \text{ etc.}$$

Donde:

- $a = \sqrt{\lambda_{\max}}$,
- $c = \sqrt{\lambda_{\min}}$

Se evalúa si el elipsoide es:

- Esférico: incertidumbre equilibrada en todas direcciones.
- Achatado o elongado: mala geometría, posibles correlaciones.

3. Dirección de los autovectores = Propagación del error

Los autovectores indican las direcciones principales del error, esto permite:

- Evaluar si el error se concentra en alguna dirección crítica (ej. líneas de base GNSS muy largas o elevaciones bajas).
- Tomar decisiones para reforzar la red (más observaciones en ciertas direcciones, más satélites visibles).

4. Nivel de confianza (Chi-cuadrado)

La forma del elipsoide se puede escalar para representar una región de confianza estadística:

$$\text{Semiejes del elipsoide}_{95\%} = \sqrt{\lambda_i} \cdot \sqrt{\chi_{3, 0.95}^2} \approx \sqrt{\lambda_i} \cdot 2.795$$

Esto permite afirmar con 95% de probabilidad que la posición verdadera se encuentra dentro del elipsoide escalado.

CRITERIOS PRÁCTICOS DE EVALUACIÓN

Parámetros	Interpretación
Semiejes < 5 mm	Precisión excelente
Semiejes muy dispares	Geometría deficiente
Volumen del elipsoide alto	Alta incertidumbre global
Eje largo vertical	Baja precisión en Z (común en GNSS)
Inclinación del eje largo	Influencia de la configuración satelital o red mal distribuida

Desde el punto de vista Estadístico, queremos construir una región en el espacio (3D) dentro de la cual la posición verdadera del punto ajustado se encuentre con una cierta probabilidad, por ejemplo el 95% de confianza.

Fundamento estadístico: variable cuadrática

Sea el vector de errores de coordenadas:

$$\delta x = x - \hat{x}$$

donde $\hat{x}$ son las coordenadas ajustadas, y x es la posición verdadera (desconocida).

La forma cuadrática:

$$Q = \delta x^T \text{Cov}_{\hat{x}}^{-1} \delta x$$

es una variable aleatoria con distribución Chi-cuadrado con k grados de libertad, si δx es una variable normal multivariada.

En Geodesia:

- $k = 3$ (porque tenemos 3 coordenadas: X, Y, Z)
- Entonces:

$$Q \sim \chi_3^2$$

La probabilidad de que la posición verdadera esté dentro del elipsoide definido por:

$$\delta x^T \text{Cov}_{\hat{x}}^{-1} \delta x \leq c$$

es:

$$P(Q \leq c) = \alpha$$

donde:

- α es el nivel de confianza deseado (ej.: 0.95)
- c es el cuantil de la distribución Chi-cuadrado.

los valores como 7.815 se obtienen de la distribución Chi-cuadrado para $k = 3$ grados de libertad.

Nivel de confianza α	Valor $c = \chi_{3,\alpha}^2$
50%	2.366
68.3% (1σ)	3.530
90%	6.251
95%	7.815
99%	11.345
99.7% (3σ)	14.160

Entonces, si deseamos un elipsoide de error al 95%, usamos:

$$\delta x^T \text{Cov}_{\hat{x}}^{-1} \delta x \leq 7.815$$

Cuando diagonalizamos o descomponemos la matriz de covarianza:

$$\text{Cov}_{\hat{x}} = Q \Lambda Q^T$$

El elipsoide en el sistema de ejes principales (autovectores) es:

$$\frac{u_1^2}{\lambda_1} + \frac{u_2^2}{\lambda_2} + \frac{u_3^2}{\lambda_3} \leq c$$

Multiplicando ambos lados por c:

$$\frac{u_1^2}{\lambda_1/c} + \frac{u_2^2}{\lambda_2/c} + \frac{u_3^2}{\lambda_3/c} \leq 1$$

Lo que significa que los **semiejes del elipsoide de confianza** son:

$$a = \sqrt{\lambda_1} \cdot \sqrt{c}, \quad b = \sqrt{\lambda_2} \cdot \sqrt{c}, \quad c = \sqrt{\lambda_3} \cdot \sqrt{c}$$

Por lo tanto, se escalan los semiejes del elipsoide por $\sqrt{c}$, donde $c = \chi_{3,\alpha}^2$, para representar una región de confianza del $\alpha \cdot 100\%$.

Conclusión

- Se usa la distribución Chi-cuadrado porque la forma cuadrática del error sigue esta distribución.
- Los valores como 7.815 surgen del cuantil de la χ_3^2 para un nivel de confianza deseado.
- La aplicación es escalar los semiejes del elipsoide por $\sqrt{c}$, dando una interpretación probabilística a la región de error.

Resumen Final Elipsoide de Error de Confianza

Idea central: el elipsoide describe el conjunto de puntos que cumplen

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \leq c^2$$

donde $\hat{\mathbf{x}} = (X, Y, Z)$ es tu coordenada estimada, Σ es la matriz de covarianza de (X, Y, Z) , y c^2 viene de la chi-cuadrado para el nivel de confianza elegido.

Paso 1 – Obtener Σ (covarianza de coordenadas)

Del ajuste por mínimos cuadrados:

- Matriz normal: $N = B^T W B$.

- Covarianza de parámetros: $Q_{xx} = N^{-1}$ (o su equivalente si aplicaste restricciones/dátum).
- Varianza a posteriori: $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{v^T W v}{r}$ (con r =grados de libertad).
- Covarianza de coordenadas: $\Sigma = \text{Cov} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{xx}$ (toma la submatriz $X Y Z$ si hay más parámetros).

Paso 2 – Descomposición espectral (tamaños y orientaciones)

Descompón Σ (simétrica y definida positiva) como:

$$\Sigma = V \Lambda V^T, \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0.$$

Autovectores (columnas de V) $\rightarrow$ direcciones principales del elipsoide.

Autovalores $\lambda_i \rightarrow$ varianzas en esas direcciones.

Paso 3 – Elegir el nivel de confianza y el factor c^2

Para dimensión $p = 3$ y confianza γ (típico 95%):

$$c^2 = \chi_{p, \gamma}^2.$$

Valores útiles:

- $p = 2: \chi_{2, 0.95}^2 = 5.991 \Rightarrow c \approx 2.448$ (elipse 2D)
- $p = 3: \chi_{3, 0.95}^2 = 7.815 \Rightarrow c \approx 2.795$ (elipsoide 3D)

Paso 4 – Semiejes del elipsoide

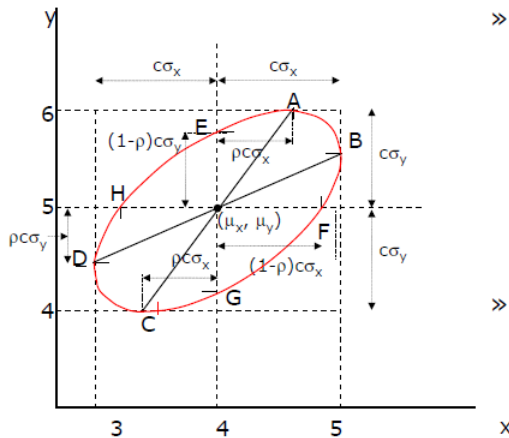
Los semiejes son:

$$a_i = \sqrt{c^2 \lambda_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

a_1 es el mayor (dirección de peor precisión), a_3 el menor (mejor).

el elipsoide queda definido por $\hat{x}$ (centro), a_1, a_2, a_3 (tamaños) y V (orientaciones).

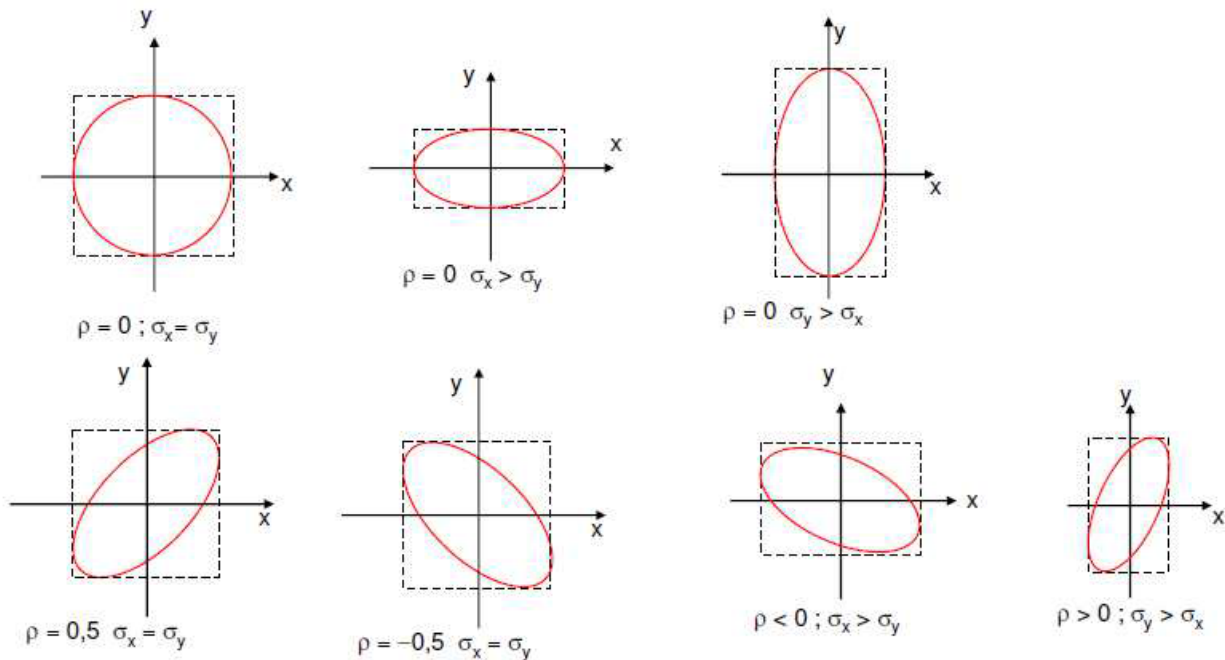
ANEXO



- » El centro de la elipse es (μ_x, μ_y)
- » Los puntos extremos A, B, C, D tienen las siguientes coordenadas.
 - A : $(\mu_x + \rho c\sigma_x, \mu_y + c\sigma_y)$
 - B : $(\mu_x + c\sigma_x, \mu_y + \rho c\sigma_y)$
 - C : $(\mu_x - \rho c\sigma_x, \mu_y - c\sigma_y)$
 - D : $(\mu_x - c\sigma_x, \mu_y - \rho c\sigma_y)$
- » Si se hace una traslación de ejes a (μ_x, μ_y) , estas coordenadas serán
 - A : $(\rho c\sigma_x, c\sigma_y)$
 - B : $(c\sigma_x, \rho c\sigma_y)$

El tamaño, forma y orientación de las elipses de error están gobernadas por $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$.

Ejemplos:



Si el cálculo del ángulo de rotación se realiza con la fórmula: $\tan(2\theta) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$

Entonces, hay que tener en cuenta que el cuadrante correcto para 2θ debe determinarse en función de los signos del numerador y del denominador, ello antes de dividir por 2 para obtener θ .

Vemos la tabla que sigue:

Signo Algebraico del		Cuadrante para 2θ	Suma r
Numerado r	Denominado r		
+	+	1	0
+	-	2	π
-	-	3	π
-	+	4	2π

Script para Octave

Archivo: *Error_ellipse.m*.

Calcula a partir de las fórmulas ya vistas los elementos de la elipse de error asociada a una probabilidad determinada.

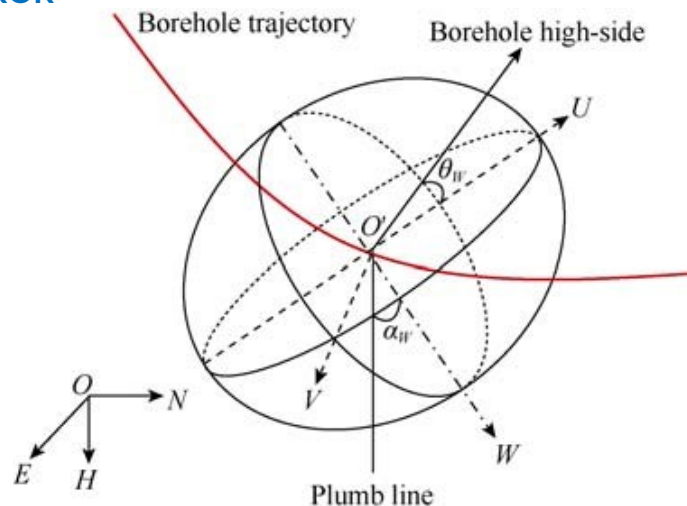
Donde, definidos $q11=\sigma_X^2$, $q22=\sigma_Y^2$, $q12=\sigma_{XY}$ y c , se obtiene

a = semieje mayor

b =semieje menor

w_{final} = ángulo de rotación (θ).

ELIPSOIDE DE ERROR



Para calcular sus elementos hay que utilizar asistencia informática.

Como se vio hay que calcular los valores y vectores propios de la matriz covarianza asociada a las coordenadas del posicionamiento. Para ello se puede realizar el cálculo en forma online (hay sitios web que lo realizan) o utilizando programas matemáticos como matlab u Octave.

Una vez que calculamos y escribimos las matrices D y G:

$$a = c\sqrt{\lambda_1}$$

$$b = c\sqrt{\lambda_2}$$

$$c = c\sqrt{\lambda_3}$$

$$\tan(\theta) = \frac{-G_{12}}{G_{22}} \quad \tan(\beta) = \frac{G_{31}}{G_{33}} \quad \sin(\alpha) = G_{32}$$

$$\text{ang1} = \arctg(G(2,1)/G(1,1)) \quad \text{inc1} = \arcsen(G(3,1))$$

$$\text{ang2} = \arctg(G(2,2)/G(1,2)) \quad \text{inc2} = \arcsen(G(3,2))$$

$$\text{ang3} = \arctg(G(2,3)/G(1,3)) \quad \text{inc3} = \arcsen(G(3,3))$$

Observación:

Cualquier múltiplo escalar de un vector propio sigue siendo un vector propio con el mismo valor propio. Esto significa que se pueden obtener vectores propios que apuntan en la dirección opuesta o que tienen una magnitud diferente, pero siguen siendo el mismo vector propio en términos de su dirección y relación con el valor propio.

Las diferentes aplicaciones que calculan los vectores propios pueden utilizar algoritmos diferentes y por lo tanto dar diferencias en el resultado. Esto se traduce en la práctica, en diferencias en el signo de las componentes del vector, es decir expresan vectores que comparten la misma dirección pero no su sentido.

En nuestro caso los vectores propios definen los ejes del sistema de referencia utilizado por el elipsoide de error. Por ello este sistema debe tener las características de un triedro directo.

Esta condición la podemos utilizar para determinar los vectores propios a utilizar.

Se puede utilizar el producto mixto (producto vectorial y escalar).

En un sistema de referencia directo (O,X,Y,Z), si consideramos vectores sobre sus ejes $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$, entonces estos deben cumplir:

$$\text{Productomixto} = \overrightarrow{OZ} \cdot (\overrightarrow{OX} \wedge \overrightarrow{OY}) > 0$$

Si el $\text{Productomixto} = 0$, entonces los tres vectores son coplanares.

Si el $Productomixto < 0$, entonces debemos cambiar la dirección de $\vec{OZ}$ para obtener un sistema de referencia directo. De acuerdo al cumplimiento o no de esta condición, se definen los vectores propios que correspondan (matriz G).

Script para Octave

Archivo: *Error_elipsoide.m*.

Este Script calcula los semiejes del elipsoide y el ángulo e inclinación de cada uno de ellos a partir de la matriz de Covarianza y una probabilidad con la cual se desee expresar los resultados.

Programa Elipsoides de Error

Archivo: *Elipsoides de Error*

Este programa calcula los semiejes del elipsoide (con una probabilidad asociada del 95%) y el ángulo e inclinación del semieje mayor a partir de una serie de observaciones (X,Y,Z) del mismo punto. También tiene un módulo donde se puede visualizar gráficamente el elipsoide.

Ejemplos de Cálculo

Ejemplo 1.

Coordenadas de un punto obtenidas utilizando una estación total.

X (m)	Y (m)	Z (m)
946.92	-136.36	144.01
947.12	-136.35	144.01
947.02	-136.39	144.70
947.10	-136.32	144.62
947.01	-136.34	144.49
947.03	-136.31	144.48
947.06	-136.26	144.41
947.05	-136.64	144.40
947.00	-136.32	144.53
946.99	-136.33	144.46
947.10	-136.30	144.52
947.05	-136.34	144.58

947.11	-136.30	144.59
947.06	-136.41	144.50
947.02	-136.35	144.58
947.08	-136.33	144.59

Resultados programa Elipsoides de Error

Matríz Covarianza:

[0.002733, 0.000417, 0.002283

0.000417, 0.007116, 0.001803

0.002283, 0.001803, 0.037836]

Semiejes del elipsoide (m):

[0.545598, 0.234366, 0.141589]

Ángulos de Orientación del Eje Principal:

ang=42.1502°

Inc= 84.96

86°

Resultados del script para Octave

Se ingresa la matríz covarianza calculada por el programa *Elipses de Error* y se elige como probabilidad asociada 95%.

Cov= [0.002733, 0.000417, 0.002283

0.000417, 0.007116, 0.001803

0.002283, 0.001803, 0.037836]

Resultados:

Valor del SemiEje en X: 0.545596 m

Valor del SemiEje en Y: 0.234362 m

Valor del SemiEje en Z: 0.14158 m

Ángulos de Orientación:

ang =

42.1557°

-93.6319°

-3.8530°

inc =

84.9688°

3.6107°

-3.4991°

Ejemplo 2.

Coordenadas de un punto obtenidas utilizando un equipo GNSS.

X (m)	Y (m)	Z (m)
665467.505	6184850.757	188.357
665467.510	6184850.742	188.358
665467.523	6184850.736	188.338
665467.508	6184850.737	188.353
665467.506	6184850.731	188.361
665467.533	6184850.776	188.356
665467.543	6184850.738	188.374
665467.538	6184850.739	188.388
665467.553	6184850.759	188.387
665467.561	6184850.761	188.398

Resultados programa Elipsoides de Error

Matríz Covarianza:

[0.000425, 0.000129, 0.000304

0.000129, 0.000214, 0.000069

0.000304, 0.000069, 0.000358]

Semiejes del elipsoide (m):

[0.075840, 0.038134, 0.024257]

Ángulos de Orientación del Eje Principal:

ang=-160.0897°

Inc= -39.2995°

Resultados del script para Octave

Se ingresa la matriz covarianza calculada por el programa *Elipses de Error* y se elige como probabilidad asociada 95%.

Cov= [0.000425, 0.000129, 0.000304

0.000129, 0.000214, 0.000069

0.000304, 0.000069, 0.000358]

Resultados:

Valor del SemiEje en X: 0.0758479 m

Valor del SemiEje en Y: 0.0381669 m

Valor del SemiEje en Z: 0.0241178 m

Ángulos de Orientación:

ang =

19.901°

-91.290°

-24.142°

inc =

39.283°

23.841°

-41.308°

Observación:

En este segundo ejemplo los ángulos de orientación del eje principal parecerían que dan diferentes según el programa y el script de octave.

Pero si observamos con más cuidado, los ángulos ang son suplementarios y la inc es la misma en magnitud pero con el signo opuesto.

Extrayendo las matrices de los vectores propios de cada aplicación, se observa:

Programa *Elipses de Error*:

$[-0.727590, -0.020638, -0.685702$

$-0.263532, -0.914444, 0.307153$

$-0.633375, 0.404186, 0.659902]$

Script de Octave:

$[0.727807 \ -0.020599 \ 0.685472$

$0.263471 \ -0.914438 \ -0.307224$

$0.633150 \ 0.404202 \ -0.660107]$

Los vectores propios (ejes del sistema de referencia utilizado por el elipsoide de error) definen en ambos casos el mismo triedro directo con la diferencia en el sentido de dos de los ejes: X y Z.

En conclusión el elipsoide es el mismo en cualquiera de ambos casos.