

Sobre los modelos de movimientos de manadas de animales

Esta charla es la continuación de una que di hace más de año y medio. El problema está motivado por el artículo de Cholaquidis et al. en el que se modela el movimiento de una manada de elefantes por medio de un Movimiento Browniano reflejado con trayectorias en $\mathbb{R}^2$. El problema es que esas trayectorias no son diferenciables, apenas Hölder. David Brillinger, a comienzos de este siglo, planteó substituir ese modelo por uno que diera cuenta del móvil verificando la segunda ley de Newton $m\ddot{x}(t) = -\gamma x(t) - \nabla V(x(t))$. Donde γ modela el roce que experimenta la partícula (en este caso el elefante) y V es un potencial que guía el movimiento. En el artículo de Brillinger esta segunda ley se complementa con un ruido blanco que posee una varianza local constante σ^2 . La ecuación toma la forma del siguiente sistema:

$$\begin{aligned}dX(t) &= Y(t)dt \\dY(t) &= -(\gamma X(t) + \nabla V(X(t)))dt + \sigma dW(t)\end{aligned}$$

Este tipo de problema está muy estudiado, siempre que la partícula se mueva sin restricciones en todo el plano, a los procesos resultantes se les denomina difusiones hipoelípticas. El problema surge en los movimientos de los animales. Sus trayectorias están limitadas por las fronteras naturales o artificiales. Esto nos dice que debemos limitar el movimiento de la trayectoria a un conjunto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ relativamente compacto y con frontera suave. Esto es, el espacio de estados es $\overline{\mathcal{O}} \times \mathbb{R}^2$, limitamos la posición, pero no la velocidad. Además queremos que cuando la partícula toque la frontera en un punto x si llega con velocidad $Y_{\tau-}$ sea reflejado de manera especular, Esto es

$$Y_{\tau} = Y_{\tau-} - 2\langle Y_{\tau-}, \mathbf{n}(X_{\tau-}) \rangle \mathbf{n}(X_{\tau-}),$$

aquí $\mathbf{n}(x)$ es el vector normal saliente en el punto x que sabemos que existe por la regularidad que suponemos de la frontera y τ es un tiempo de llegada a la frontera. Este problema plantea varias interrogantes cuyas respuestas contaremos.

1. Tal proceso existe y como se construye. ¿Cuál es su generador infinitesimal?
2. El proceso markoviano resultante: ¿es ergódico? ¿cómo es su medida invariante? ¿Posee propiedades de mixing?
3. Las respuestas positivas a estas preguntas son afirmativas y de eso se trata esta charla. Queda, sin embargo, una abierta ¿Cómo podemos hacer estadística no independiente si tenemos observaciones de una o varias trayectorias?