



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY



# UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

## FACULTAD DE INGENIERÍA

Tesis para optar al título de Magíster en Ingeniería Estructural

### **ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN CONSIDERANDO LOS EFECTOS DE LAS DEFORMACIONES DIFERIDAS**

SOFÍA EMILIA ROBLE GERSBERG

PROF. ALFREDO CANELAS BOTTA, D.Sc. ING.

PROF. BERARDI SENSALÉ COZZANO, Dr. ING.

Montevideo, Uruguay, 2014

**ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN CONSIDERANDO LOS EFECTOS  
DE LAS DEFORMACIONES DIFERIDAS**

SOFÍA EMILIA ROBLE GERSBERG

El tribunal docente integrado por los abajo firmantes aprueba la Tesis de  
Investigación:

---

Prof. Atilio Morquio Dr. Ing.

---

Prof. Ignacio Iturrioz Dr. Ing.

---

Prof. Ana I. Abreu D. Sc.

---

Prof. Eduardo Pedoja Dr. Ing.

# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis orientadores Berardi Sensale y Alfredo Canelas. A Berardi por sus ideas y por impulsar la realización de este trabajo y de la maestría en general. A Alfredo por su inmensa paciencia y dedicación, sin la cual este trabajo no hubiese llegado a feliz término.

También quiero manifestar mi gratitud hacia todos los Grados 1 y 2 del Instituto de Estructuras y Transporte con los que hemos compartido penas, alegrías y cursos y en particular a María Laura quien tantas tardes soportó entusiasmos y desánimos.

Agradezco al Instituto de Estructuras y Transporte en general por darme la oportunidad de cursar la Maestría.

Quiero agradecer también a Colom-Ramos-Rodríguez Ingenieros quienes apoyaron y facilitaron mi dedicación a este trabajo.

Asimismo, quiero expresar mi agradecimiento a mis amigos y familia, y especialmente a mis padres quienes me alentaron en todo momento.

Finalmente quisiera concluir con el agradecimiento hacia mi esposo Andrés quien me acompaña y motiva en todos los aspectos de mi vida.

# Resumen

El principal objetivo de este trabajo ha sido desarrollar un método numérico para el análisis del comportamiento diferido de estructuras de hormigón armado. Este método numérico debe calcular con precisión la evolución en el tiempo las deformaciones y sollicitaciones en estructuras de hormigón.

Se ha desarrollado una nueva forma de considerar los efectos de las deformaciones diferidas en estructuras de hormigón en el marco del Método de los Elementos Finitos (MEF), válida para los modelos de fluencia lenta basados en la teoría de solidificación, con lo que abarca la formulación propuesta por el código del CEB-fip de 1990.

En este trabajo se muestra que en los modelos de fluencia lenta del hormigón basados en la teoría de solidificación, que corresponden a modelos viscoelásticos con envejecimiento, se puede aplicar el Método de la Cuadratura de Convolución (MCC) para calcular las integrales que aparecen en su ecuación constitutiva, lo que evita la aproximación por cadenas de elementos Maxwell o Kelvin. Las únicas aproximaciones utilizadas en este método son las inherentes al método numérico que se aplica para su resolución.

Se ha desarrollado una variante al MEF tradicional, a partir de formulaciones variacionales mixtas en lugar de las basadas en el principio de los trabajos virtuales.

Se realizó una implementación computacional de la formulación propuesta con la que se analizaron varios ejemplos: fluencia y relajación en una barra de hormigón sometida a compresión; fluencia de una barra de hormigón armado sometida a compresión, carga constante en una viga compuesta sometida a flexión y viga de hormigón pretensado, en la que se incorpora la acción conjunta de la fluencia del hormigón con la retracción del hormigón y la relajación del acero.

Se realiza también un análisis de convergencia del método en función de los distintos parámetros involucrados a efectos de verificar su estabilidad.

Todos los ejemplos estudiados fueron resueltos con gran precisión, de acuerdo a la comparación con soluciones analíticas y numéricas de referencia, mostrando la potencialidad del método.

**Palabras clave:** hormigón armado, comportamiento dependiente del tiempo, viscoelasticidad, elementos finitos, método de cuadratura de convolución.

# Summary

The main purpose of this study has been to develop a numerical method to analyze the time dependent behavior of reinforced concrete structures. This numerical method should predict accurately the time evolution of deformations and stresses in concrete structures.

A new method for considering the effects of the time dependent deformations in concrete structures has been developed within the framework of the Finite Element Method (FEM). This method is valid for concrete creep models based on the solidification theory, which includes the formulation proposed by the CEB-fip Model Code of 1990.

When using the creep models of concrete based on the solidification theory, which correspond to aging viscoelastic models, it is shown that the convolution quadrature method can be applied in order to solve the integrals arising in the constitutive equation, hence avoiding the necessity of approximation by using Maxwell or Kelvin chains. The approximations used in this method are only those inherent to the numerical method of solution.

A mixed FEM formulation has been developed. It is based on mixed variational formulations rather than the virtual work principle of the traditional FEM.

A computational implementation of the proposed formulation has been developed, and several examples have been analyzed: creep and relaxation under compression in a concrete bar, creep under compression in a reinforced concrete bar, constant load in a composite beam submitted to bending and a prestressed concrete beam, in which the joint action of shrinkage, relaxation and creep is analyzed.

A convergence analysis of the method has been performed considering the different parameters involved in order to verify the stability of the proposed approach.

These examples were accurately solved, according to the comparison against analytical and numerical reference solutions, showing the potentiality of the method.

**Keywords:** reinforced concrete, time dependent behavior, viscoelasticity, finite elements, convolution quadrature method.

# Índice general

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>   | <b>2</b>  |
| 1.1      | Objetivos . . . . .   | 4         |
| 1.2      | Contenido del trabajo. . . . .                                      | 5         |
| <b>2</b> | <b>Propiedades del hormigón armado</b>                              | <b>7</b>  |
| 2.1      | Propiedades del hormigón. . . . .                                   | 8         |
| 2.1.1    | Resistencia a la compresión simple . . . . .                        | 8         |
| 2.1.2    | Resistencia a la tracción . . . . .                                 | 9         |
| 2.1.3    | Módulo de elasticidad . . . . .                                     | 11        |
| 2.1.4    | Deformaciones en el hormigón armado . . . . .                       | 12        |
| 2.1.5    | Relación constitutiva del hormigón. . . . .                         | 14        |
| 2.1.6    | Fluencia lenta del hormigón . . . . .                               | 18        |
| 2.1.7    | Retracción del hormigón . . . . .                                   | 26        |
| 2.2      | Propiedades de las armaduras . . . . .                              | 30        |
| 2.2.1    | Comportamiento mecánico de las armaduras pasivas . . . . .          | 31        |
| 2.2.2    | Comportamiento mecánico de las armaduras activas. . . . .           | 32        |
| 2.2.3    | Relajación del acero . . . . .                                      | 33        |
| 2.3      | Pérdidas instantáneas en vigas de hormigón pretensado . . . . .     | 37        |
| 2.3.1    | Pérdidas por rozamiento . . . . .                                   | 38        |
| 2.3.2    | Pérdidas por penetración de cuñas . . . . .                         | 39        |
| <b>3</b> | <b>Métodos de estudio del comportamiento reológico del hormigón</b> | <b>41</b> |
| 3.1      | Método del módulo reducido o efectivo . . . . .                     | 42        |
| 3.2      | Método del coeficiente de envejecimiento . . . . .                  | 43        |
| 3.3      | Método de Dischinger y de Dischinger Mejorado . . . . .             | 45        |
| 3.3.1    | Modelo de Dischinger . . . . .                                      | 45        |

---

|   |            |
|---|------------|
| 3.3.2 Modelo de Dischinger Mejorado . . . . .               | 46         |
| 3.4 Método de las j . . . . .                               | 47         |
| 3.5 Método paso a paso . . . . .                            | 48         |
| <b>4 Formulación de elementos finitos</b>                   | <b>50</b>  |
| 4.1 Barras sometidas a directa . . . . .                    | 51         |
| 4.2 Barras sometidas a flexión. . . . .                     | 55         |
| 4.3 Deformaciones iniciales. . . . .                        | 61         |
| 4.4 Formulación del elemento de cable . . . . .             | 62         |
| <b>5 Desarrollo del Método</b>                              | <b>67</b>  |
| 5.1 Método de la Cuadratura de Convolución . . . . .        | 67         |
| 5.2 Método propuesto . . . . .                              | 69         |
| 5.3 Resolución mediante elementos finitos . . . . .         | 73         |
| <b>6 Ejemplos y resultados</b>                              | <b>76</b>  |
| 6.1 Barras sometidas a directa . . . . .                    | 76         |
| 6.1.1 Función de fluencia . . . . .                         | 76         |
| 6.1.2 Función de relajación. . . . .                        | 77         |
| 6.1.3 Carga descarga . . . . .                              | 78         |
| 6.1.4 Fluencia del hormigón armado . . . . .                | 79         |
| 6.2 Análisis de convergencia . . . . .                      | 83         |
| 6.2.1 Variación del número de intervalos. . . . .           | 83         |
| 6.2.2 Variación del tiempo del inicio de la carga . . . . . | 87         |
| 6.2.3 Error inicial. . . . .                                | 89         |
| 6.3 Barras sometidas a flexión. . . . .                     | 91         |
| 6.3.1 Viga compuesta hormigón - acero . . . . .             | 91         |
| 6.3.2 Viga postensada . . . . .                             | 96         |
| <b>7 Conclusiones y perspectivas</b>                        | <b>104</b> |
| 7.1 Conclusiones. . . . .                                   | 104        |
| 7.2 Futuros trabajos. . . . .                               | 105        |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>114</b> |

# Índice de figuras

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Puente Le Veudre. . . . .   | 2  |
| 1.2  | Puente del Aue. . . . .   | 3  |
| 1.3  | Puente Koror-Babeldoab. . . . .   | 4  |
| 2.1  | Estructura típica de hormigón armado. . . . .   | 7  |
| 2.2  | Diagrama tensión deformación del hormigón. . . . .  | 12 |
| 2.3  | Clasificación de las deformaciones según Montoya et al . . . . .  | 14 |
| 2.4  | Diagrama de tensión y deformación de una barra cargada y descargada uniaxialmente . . . . .   | 15 |
| 2.5  | a) Diagrama de fluencia de un material con envejecimiento. b) Diagrama de fluencia de un material sin envejecimiento. . . . .   | 18 |
| 2.6  | Deformación por fluencia recuperable y remanente. . . . .   | 19 |
| 2.7  | Deformaciones instantáneas y diferidas. . . . .   | 20 |
| 2.8  | Coefficiente de fluencia según el MC90 cuando $f_{ck} = 30$ MPa; $RH = 80\%$ ; $h = 400mm$ , según Ghali et al. . . . .   | 24 |
| 2.9  | Ejemplos de diagramas tensión-deformación. (a) armaduras con tratamiento térmico, (b) armaduras con tratamiento térmico de bajo carbono (curva inferior), armaduras tratadas en frío (curva superior), (c) cables tratados en frío. . . . . | 31 |
| 2.10 | Diagrama idealizado del acero pasivo. . . . .   | 32 |
| 2.11 | Diagrama tensión-deformación del comportamiento típico del acero de alta resistencia. . . . .   | 33 |
| 2.12 | Diagrama idealizado del acero activo según el MC90. . . . .   | 33 |
| 2.13 | Relajación del acero según las diferentes clases según el MC90 . . . . .  | 34 |



|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.14 | Cociente $\sigma_{pt}/\sigma_{p0}$ para un cable sometido a relajación. . . . .  | 36 |
| 2.15 | Trayectoria típica de los cables de postensado en una viga simplemente apoyada. . . . .                                      | 37 |
| 2.16 | Pérdidas debido al rozamiento y a la penetración de cuñas a lo largo de la longitud del cable. . . . .                       | 38 |
| 3.1  | Coefficiente de envejecimiento según el MC90 cuando $f_{ck} = 30$ MPa; $RH = 80\%$ ; $h = 400$ mm según Ghali et al. . . . . | 44 |
| 3.2  | Modelo de Dischinger. . . . .  | 45 |
| 4.1  | Diagrama de una barra compuesta por dos materiales sometida a una fuerza normal centrada. . . . .                            | 52 |
| 4.2  | Desplazamientos y solicitaciones incógnitas en el problema de flexión. . .   | 55 |
| 4.3  | Definición de coordenadas del cable. . . . .   | 63 |
| 6.1  | Resultado obtenido para la fluencia del hormigón. . . . .  | 77 |
| 6.2  | Resultado obtenido para la relajación del hormigón. . . . .  | 78 |
| 6.3  | Resultado obtenido en el ejemplo de carga-descarga. . . . .  | 79 |
| 6.4  | Desplazamiento en la barra de hormigón armado para distintas cuantías de acero. . . . .                                      | 80 |
| 6.5  | Fuerza normal en el hormigón para distintas cuantías de acero. . . . .   | 81 |
| 6.6  | Fuerza normal en el acero para distintas cuantías de acero. . . . .  | 81 |
| 6.7  | Errores obtenidos para los ejemplos de fluencia, relajación y carga-descarga. . . . .  | 84 |
| 6.8  | Resultado obtenido en el ejemplo de fluencia para los distintos números de intervalos en el tiempo NT . . . . .              | 84 |
| 6.9  | Resultado obtenido en el ejemplo de relajación para los distintos números de intervalos en el tiempo NT. . . . .             | 85 |
| 6.10 | Función de Kummer con NT = 64, 128 y 256. . . . .  | 86 |
| 6.11 | Función de Kummer con NT = 512. . . . .  | 86 |
| 6.12 | Error relativo obtenido en el ensayo de fluencia para $t_0 = 16$ días. . . . .   | 87 |
| 6.13 | Error relativo obtenido en el ensayo de fluencia para $t_0 = 32$ días. . . . .   | 88 |
| 6.14 | Error relativo obtenido en el ensayo de fluencia para $t_0 = 64$ días. . . . .   | 88 |
| 6.15 | Error relativo obtenido en el ensayo de fluencia para $t_0 = 128$ días. . . . .  | 89 |

|   |     |
|---|-----|
| 6.16 Superposición de los resultados obtenidos estudiando el término elástico por fuera y dentro de la cuadratura de convolución (sin integración). . . . . | 90  |
| 6.17 Sección esquemática de la viga compuesta adoptada. . . . .   | 91  |
| 6.18 Desplazamiento en el punto medio de la viga compuesta. . . . .   | 92  |
| 6.19 Momento flector de la sección de hormigón en el punto medio de la viga compuesta. . . . .  | 92  |
| 6.20 Momento flector en la sección de acero en el punto medio de la viga compuesta. . . . .   | 93  |
| 6.21 Fuerza normal de la sección de acero en el punto medio de la viga compuesta. . . . .   | 93  |
| 6.22 Comparación de la tensión en la fibra superior del hormigón obtenida mediante el SAP, MCC y CE. . . . .  | 96  |
| 6.23 Comparación de la tensión en la fibra inferior del hormigón obtenida mediante el SAP, MCC y CE. . . . .  | 96  |
| 6.24 Comparación de la tensión en la fibra superior del acero obtenida mediante el SAP, MCC y CE. . . . .   | 96  |
| 6.25 Comparación de la tensión en la fibra inferior del acero obtenida mediante el SAP, MCC y CE. . . . .   | 97  |
| 6.26 Viga analizada: simplemente apoyada con un cable parabólico. . . . .   | 98  |
| 6.27 Fuerza en el cable de acero. . . . .   | 99  |
| 6.28 Pérdida de la fuerza de pretensado. . . . .  | 99  |
| 6.29 Máxima tensión en el hormigón. . . . .   | 100 |
| 6.30 Desplazamiento vertical en la mitad del vano. . . . .  | 101 |
| 6.31 Desplazamiento horizontal en el extremo libre. . . . .   | 101 |

# Índice de cuadros

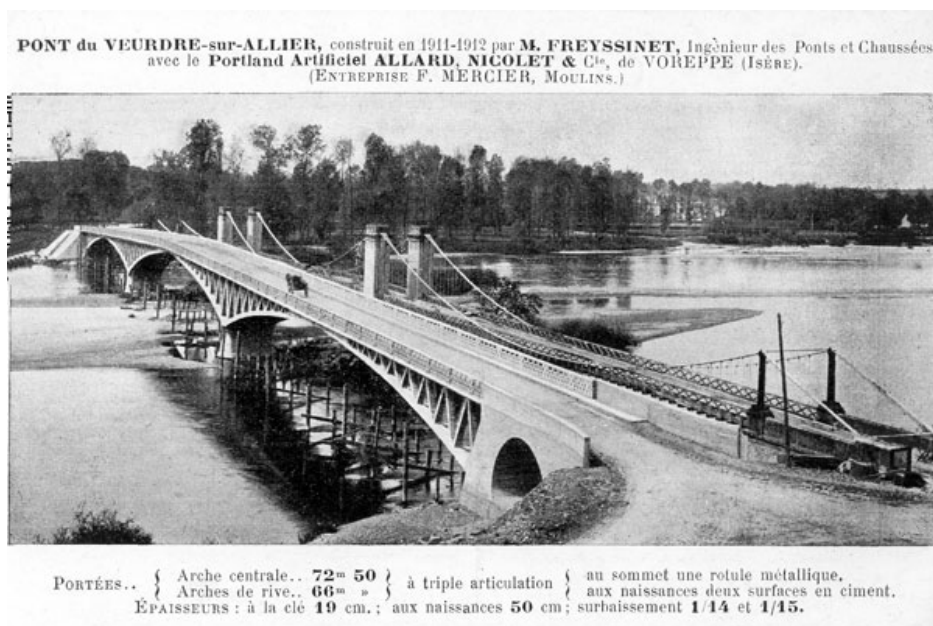
|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 2.1 | Coeficiente $s$ a ser utilizado en la ecuación (2.2) para diferentes tipos de cemento. . . . .   | 9   |
| 2.2 | Efecto del tipo de agregado en el módulo de elasticidad. . . . .   | 11  |
| 2.3 | Deformaciones del hormigón. . . . .  | 14  |
| 2.4 | Coeficientes $\mu$ recomendados por la EHE. . . . .  | 39  |
| 2.5 | Coeficientes $k$ recomendados por la EHE. . . . .  | 39  |
| 2.6 | Coeficientes $\mu$ recomendados por el MC90. . . . .   | 40  |
| 4.1 | Funcionales de elasticidad. . . . .  | 51  |
| 6.1 | Comparación de los valores obtenidos en el infinito con los obtenidos mediante el método del coeficiente de envejecimiento y el programa de elementos finitos SAP. . . . .         | 82  |
| 6.2 | Diferencia relativa de los valores obtenidos en el infinito con los obtenidos mediante el método del coeficiente de envejecimiento y el programa de elementos finitos SAP. . . . . | 83  |
| 6.3 | Errores obtenidos en los ejemplos de fluencia y retracción en $t=750$ días para distintos números de intervalos en el tiempo NT. . . . .   | 85  |
| 6.4 | Errores obtenidos el ejemplo de fluencia en $t = 512$ días para distintos números de intervalos en el tiempo NT. . . . .   | 89  |
| 6.5 | Comparación de los valores obtenidos mediante el MCC, SAP y CE. . . . .  | 94  |
| 6.6 | Diferencias relativas porcentuales obtenidas del MCC respecto a los resultados del SAP y del CE. . . . .   | 95  |
| 6.7 | Comparación de los resultados obtenidos con el MCC y el SAP. . . . .   | 102 |

# Capítulo 1

## Introducción

En 1910 Eugène Freyssinet construyó el puente Le Veudre sobre el Río Allier, al sur de Francia. Se trataba de un puente constituido por arcos de tres articulaciones de 72.5 m de luz cada uno, con flecha marcadamente pequeña.

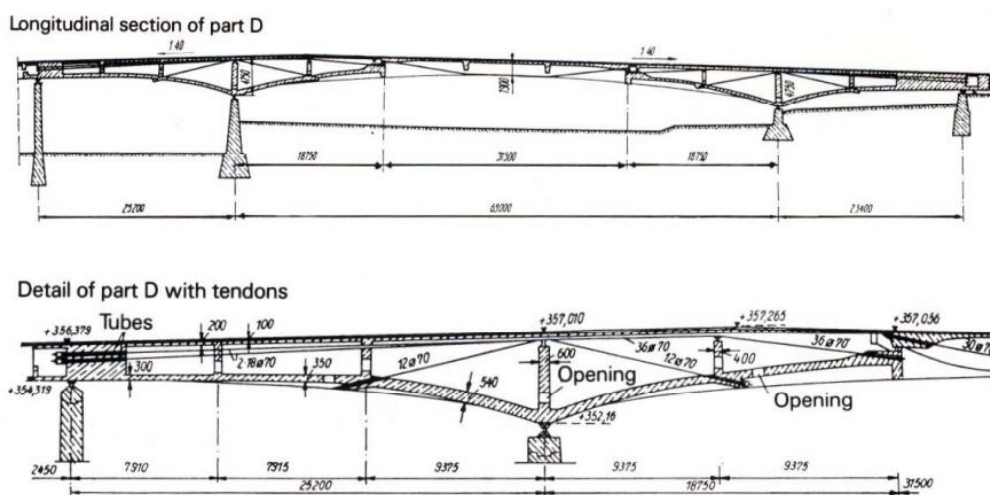
Para 1911 los arcos presentaban descensos del orden de los 13 cm que no parecían detenerse. En una escapada nocturna, Freyssinet y sus ayudantes volvieron el puente a su posición original mediante gatos y hormigonaron las articulaciones superiores para su fijación.



**Figura 1.1:** Puente Le Veudre.

En 1936, Franz Dischinger hizo su primer incursión en el hormigón pretensado construyendo el puente del Aue (Saxony, Alemania). Para ello empleó barras de acero exteriores al hormigón con una tensión de tracción de aproximadamente 220 MPa.

Veinticinco años después se realizaron investigaciones para determinar el estado del puente ya que este presentaba grandes deformaciones y fisuras. Se detectó que en algunas barras la tensión había disminuido hasta 50 MPa. Se procedió a su pretensado y reparación. Finalmente en 1996 el puente se sustituyó debido a problemas de mantenimiento.



**Figura 1.2:** Puente del Aue.

Estos ejemplos, fueron los primeros acercamientos a la comprensión de las deformaciones diferidas en el hormigón. Los ingenieros de la época estaban al tanto del fenómeno pero carecían de herramientas para cuantificarlo y actuar en consecuencia.

Cuarenta años después, en 1977, se construyó el puente Koror-Babeldaob en la República de Palau. El vano principal era de 240.8 m y en su momento fue el puente de viga cajón postensado más grande del mundo.

Desde poco después de su construcción, el puente desarrolló deformaciones excesivas. En 1993 se realizó un estudio que indicaba que el puente se deformaría 85 cm adicionales en los siguientes 85 años; en 1996 las deformaciones habían alcanzado ya los 120 cm. Para subsanar este defecto, se realizaron reparaciones que desencadenaron su posterior colapso.

Estos ejemplos, muestran que las dificultades del estudio del comportamiento diferido del hormigón han estado siempre presentes. Aún hoy, 100 años después del inicio de la



**Figura 1.3:** Puente Koror-Babeldoab.

teoría, se continúan realizando modificaciones en los modelos de las principales normas de referencia o se desarrollan nuevos métodos para su estudio.

Si bien la subestimación de los fenómenos diferidos no necesariamente desencadena el colapso de las estructuras, la misma implica gastos posteriores en mantenimiento o intervenciones para mitigar los efectos no deseados.

Una comprensión integral de los fenómenos diferidos, así como de los modelos y métodos de resolución, no garantiza pero sí aporta a evitar el desarrollo de patologías que afecten la vida útil de las estructuras y en última instancia, protege a los usuarios.

Surge así la motivación de este trabajo en estudiar el comportamiento diferido de los materiales, y en proponer un método de resolución que sea de fácil implementación, preciso y suficientemente general como para contemplar los distintos tipos de estructuras e historias de cargas.

## 1.1. Objetivos

El principal objetivo de este trabajo ha sido desarrollar un método numérico para el análisis del comportamiento diferido de estructuras de hormigón armado. Este método numérico debe calcular con precisión la evolución en el tiempo de las deformaciones y solicitaciones en estructuras de hormigón. Apuntando a la concreción de este principal

objetivo, surge el cumplimiento de metas específicas que se describen a continuación:

- Revisión del comportamiento instantáneo y diferido del hormigón y del acero, y de su marco normativo.
- Revisión de los distintos métodos de cálculo para la estimación del comportamiento diferido de las estructuras.
- Deducir una formulación teórica para resolver la ecuación constitutiva del hormigón, en la que no sea necesario recurrir a aproximaciones de la función de fluencia.
- Desarrollar una metodología para el cálculo de estructuras en la cual se pueda aplicar la formulación deducida.
- Implementar un programa computacional en el cual se puedan evaluar los resultados de la metodología propuesta.
- Contrastar los resultados del modelo computacional desarrollado con los resultados obtenidos por otros métodos analíticos y numéricos.

## 1.2. Contenido del trabajo

Después de una breve introducción donde se definen los objetivos de este trabajo, se presenta una revisión del estado del conocimiento. A continuación, se describe el método propuesto y se presenta la formulación del problema. Se analizan y discuten los resultados numéricos y finalmente se extraen conclusiones y se plantean alternativas para futuros desarrollos.

- Capítulo 1 - Introducción.
- Capítulo 2 - Se describen las características básicas del comportamiento instantáneo del hormigón armado que serán utilizadas durante todo el trabajo: definiciones normativas acerca de resistencia y deformaciones, propiedades mecánicas de las armaduras, pérdidas de pretensado, etc. Se describen en particular las características del comportamiento diferido del hormigón armado: fluencia lenta y retracción del hormigón y relajación del acero. Se indican las referencias normativas y los modelos que se utilizarán para definir cada uno de los fenómenos.

- Capítulo 3 - Se aborda aquí la relación constitutiva del hormigón y se exponen los métodos tradicionales y más usuales para resolverla. Se describen de forma sucinta sus características, indicando ventajas y desventajas de cada uno de ellos.
- Capítulo 4 - Se describe una formulación alternativa de elementos finitos para barras sometidas a solicitaciones normales y solicitaciones de flexión. Se describe el elemento de cable. Se describen algunos aspectos particulares de la introducción de esfuerzos.
- Capítulo 5 - Se expone el método propuesto: se describe el método de la cuadratura de convolución y se aplica a la resolución de la ecuación constitutiva del hormigón. Se deduce la formulación mediante elementos finitos.
- Capítulo 6 - Se presentan aquí los resultados obtenidos a partir de un programa computacional desarrollado para la aplicación del método propuesto. Se analiza el comportamiento estructural de los ejemplo analizados y se comparan los resultados con soluciones de referencia. Se realiza un análisis de la convergencia del método.
- Capítulo 7- Finalmente, se extraen las conclusiones acerca del método propuesto y se proponen alternativas para futuras investigaciones.



## Capítulo 2

# Propiedades del hormigón armado

El hormigón armado es el material de construcción más frecuentemente utilizado en nuestro medio. Existe abundante marco normativo para su diseño y numerosos modelos de comportamiento para los distintos fenómenos que presenta el hormigón en estado endurecido. En este capítulo, se describen los fenómenos más relevantes para nuestro estudio del hormigón y se hace referencia a las principales normas aplicadas habitualmente.



**Figura 2.1:** Estructura típica de hormigón armado.

## 2.1. Propiedades del hormigón

### 2.1.1. Resistencia a la compresión simple

La resistencia a la compresión simple es el parámetro más importante del hormigón. Es habitual que los valores normativos del resto de las propiedades mecánicas (resistencia a la tracción, al corte, módulo de elasticidad instantáneo, etc.) sean establecidos en función de la resistencia a la compresión. A la hora de diseñar la mezcla del hormigón, la resistencia a la compresión simple es el parámetro fundamental a partir del cual se determinan las dosificaciones de los distintos componentes. La resistencia del hormigón está fuertemente ligada a la resistencia de la pasta de cemento hidratada, por lo que depende de la relación agua/cemento, el tipo de cemento, el tipo de adiciones, etc., además de las condiciones ambientales durante su creación y de las condiciones de curado.

Ya que la resistencia a compresión se determina mediante ensayos a compresión de probetas normalizadas, se define la resistencia característica del hormigón  $f_{ck}$  del hormigón como aquella que presenta un grado de confianza del 95 % (según [1]). El valor  $f_{ck}$  de la resistencia característica a la compresión del hormigón es el elegido en numerosas normas ([2], [3], Eurocódigo, etc.) como resistencia de diseño. En otras normas como la ACI 209 se eligen otros valores representativos como la resistencia que representa un grado de confianza del 90 %.

Según el CEB-FIP Model Code de 1990 [4], la resistencia característica se puede relacionar con la resistencia media  $f_{cm}$  obtenida en los ensayos mediante la fórmula:

$$f_{ck} = f_{cm} + 8 \text{ MPa.} \quad (2.1)$$

Los hormigones de uso habitual tienen una resistencia característica entre los 20 MPa y 30 MPa. A partir de los 45 MPa se consideran hormigones especiales de alta resistencia.

### Evolución en el tiempo

El desarrollo de la resistencia a compresión en el tiempo para un tiempo  $t$ , depende del tipo y clase de cemento, de las adiciones y aditivos agregados, de la relación agua/cemento y de las condiciones ambientales como humedad y temperatura.

Para una temperatura promedio de 20 °C, la resistencia media a la compresión puede

ser estimada a partir de la ecuación (2.2), [4]:

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) \cdot f_{cm}, \quad (2.2)$$

con

$$\beta_{cc}(t) = e^{s \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{0.5} \right]}, \quad (2.3)$$

donde

$f_{cm}(t)$  es la resistencia media a la compresión del hormigón en MPa a la edad de  $t$  días,

$f_{cm}$  es la resistencia media a la compresión del hormigón en MPa a la edad de 28 días,

$\beta_{cc}(t)$  es la función que describe la evolución en el tiempo,

$t$  es la edad del hormigón ajustada (tomando en cuenta la temperatura durante el curado),

$s$  es un coeficiente que depende del tipo de cemento, de acuerdo al Cuadro 2.1.

**Cuadro 2.1:** Coeficiente  $s$  a ser utilizado en la ecuación (2.2) para diferentes tipos de cemento.

| $f_{cm}$ [MPa] | Tipo de cemento                               | $s$  |
|----------------|---|------|
| $\leq 60$      | 32,5 <i>N</i>                                 | 0,38 |
|                | 32,5 <i>R</i> ; 42,5 <i>N</i>                 | 0,25 |
|                | 42,5 <i>R</i> ; 52,5 <i>N</i> ; 52,5 <i>R</i> | 0,20 |
| $> 60$         | todos los tipos                               | 0,20 |

En el Cuadro 2.1, *R* y *N* indican si el cemento es de alta resistencia inicial o no.

### 2.1.2. Resistencia a la tracción

El hormigón es un material que tiene buena resistencia a la compresión pero no así a la tracción. Cuando se diseña en estado último (dimensionado a la rotura), la mayor parte

de la normativa vigente desprecia la colaboración a tracción (excepto en algunos casos especiales como la colaboración de la tracción en las bielas de cortante).

No es así cuando se trata del diseño de piezas en servicio (control de fisuración y deformación). Es en estos casos que resulta útil la definición de una resistencia característica a la tracción, que variará dependiendo del tipo de ensayo (tracción simple, flexotracción o tracción por compresión). La que suele interesar en estructuras convencionales de hormigón armado es la resistencia a la tracción simple. Si bien depende de numerosos factores (Hanson [5]), en general se puede estimar a partir de la resistencia característica de compresión según las distintas formulaciones presentadas en la normativa. En el caso del MC90 [4], la resistencia media a tracción  $f_{ctm}$  puede ser estimada como:

$$f_{ctm} = f_{ctk0,m} \left( \frac{f_{ck}}{f_{ck0}} \right)^{2/3}, \quad (2.4)$$

$$f_{ctk0,m} = 1,40 \text{ Mpa,}$$

$$f_{ck0} = 10 \text{ Mpa.}$$

### Evolución en el tiempo

El desarrollo de la resistencia a tracción en el tiempo, depende fundamentalmente de los mismos parámetros de los que depende el desarrollo de la resistencia a compresión. Sin embargo, la resistencia a la tracción no es proporcional a la resistencia a la compresión; para hormigones de alta resistencia, un gran aumento en la resistencia a la compresión no se refleja de forma similar en la resistencia a la tracción. La evolución de la resistencia a la tracción depende fuertemente de las condiciones de curado y secado así como de la superficie expuesta del elemento estructural. Se puede asumir que para las condiciones habituales de curado (menos de 7 días) y para un hormigón de edad mayor a 28 días, el desarrollo de la resistencia a la tracción es similar a la de compresión. Para hormigones de menos de 18 días, las tensiones residuales debido a la retracción pueden causar un descenso temporario de la resistencia a la tracción. Este efecto es más pronunciado en hormigones de alta resistencia, [6].

### 2.1.3. Módulo de elasticidad

El módulo de elasticidad del hormigón es fundamentalmente controlado por el módulo de elasticidad de sus componentes: pasta de cemento hidratada y agregados. Hasta aproximadamente 40 % de la tensión de rotura, las tensiones y deformaciones son proporcionales, i.e. el módulo de elasticidad es constante. Éste es definido por el MC90 [4] como la pendiente en el origen del diagrama tensión-deformación:

$$E_{ci} = E_{c0} \cdot \alpha_E \cdot \left( \frac{f_{ck} + \Delta f}{10} \right)^{2/3}, \quad (2.5)$$

donde:

$$E_{c0} = 21,5 \cdot 10^3 \text{ MPa},$$

$$\Delta f = 10 \text{ MPa},$$

$\alpha_E$  depende del tipo de agregado y toma el valor de 1,0 para agregados graníticos.

**Cuadro 2.2:** Efecto del tipo de agregado en el módulo de elasticidad.

| Tipo de agregado                | $\alpha_E$ |
|---------------------------------|------------|
| Basalto, piedra caliza compacta | 1,2        |
| Agregados graníticos            | 1,0        |
| Piedra caliza                   | 0,9        |
| Arenisca                        | 0,7        |

### Evolución en el tiempo

El módulo de elasticidad del hormigón se desarrolla más rápido que la resistencia a la compresión. Éste es controlado en gran parte por el módulo de elasticidad de los agregados gruesos que son independientes de la edad del hormigón, [6]. El módulo de elasticidad para un hormigón de edad distinta a los 28 días puede ser estimado mediante:

$$E_c(t) = \beta_E(t)E_{ci}, \quad (2.6)$$

con

$$\beta_E(t) = [\beta_{cc}(t)]^{0,5}, \quad (2.7)$$

donde:

$E_{ci}(t)$  Módulo de elasticidad en MPa a la edad de  $t$  días,

$E_{ci}$  Módulo de elasticidad en MPa a la edad de 28 días de acuerdo a la ecuación (2.5),

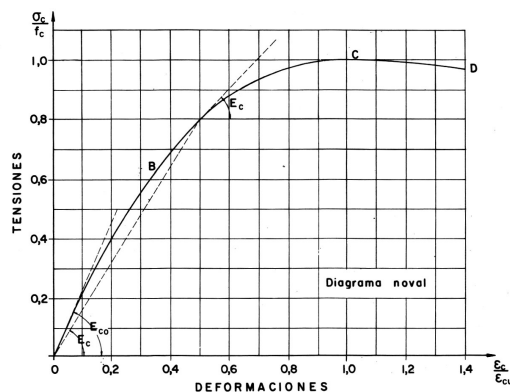
$\beta_E(t)$  coeficiente que depende de la edad del hormigón,  $t$  en días,

$\beta_{cc}(t)$  es la función que describe la evolución en el tiempo, según la ecuación (2.3).

#### 2.1.4. Deformaciones en el hormigón armado

Cuando una pieza de hormigón se somete a una carga, su respuesta tiene una componente instantánea y otra que depende del tiempo. Bajo carga constante, la deformación de la pieza aumenta con el tiempo e incluso puede ser varias veces su valor inicial. Este efecto debe tenerse en cuenta cuando se diseña una pieza en el estado límite de servicio.

El diagrama de tensión-deformación a compresión del hormigón presenta una parte inicial casi rectilínea y una parte final que se aproxima a una parábola. Habitualmente se trabaja con tensiones en el orden del 40 % de la rotura, por lo que se está en el tramo inicial cuasi-rectilíneo. Si no se supera el valor indicado, el comportamiento de la estructura será perfectamente elástico.



**Figura 2.2:** Diagrama tensión deformación del hormigón.

A medida que se aumenta la carga, se generarán deformaciones remanentes que no

se recuperarán al quitar la carga. Este fenómeno es conocido como el comportamiento plástico del hormigón pero no será objeto de estudio en este trabajo. Si se continúa aumentando la carga, aparecerán deformaciones progresivamente mayores ya que la curva se va haciendo cada vez más tendida. Este fenómeno explica la aparición de rótulas plásticas en estructuras hiperestáticas, con la consiguiente readaptación de esfuerzos. Cuando dicha readaptación no es posible el hormigón llega a la rotura en un proceso acelerado e irreversible de deformaciones crecientes, como sucede en los casos de inestabilidad, [1].

De acuerdo al MC90 [4], el diagrama tensión-deformación responde a la fórmula:

$$\frac{f_{\sigma_c}}{f_{cm}} = - \left( \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \right), \quad (2.8)$$

con

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}, \quad (2.9)$$

$$k = \frac{E_{ci}}{E_{c1}}, \quad (2.10)$$

donde:

$f_{\sigma_c}$  Resistencia a la compresión (MPa),

$\eta$  Resistencia a la compresión relativa,

$\varepsilon_c$  deformación a compresión,

$\varepsilon_{c1}$  deformación a la máxima compresión,

$E_{ci}$  Módulo de elasticidad del hormigón a la edad de 28 días (MPa),

$E_{c1}$  Módulo secante desde el origen al pico de tensión de compresión (MPa).

Si la temperatura y la tensión permanecen constantes, el desarrollo gradual de las deformaciones es consecuencia de la fluencia y de la retracción. Estas deformaciones no elásticas son dependientes del tiempo, y causan un aumento en la curvatura de la pieza, pérdidas de tensiones de pretensado y redistribución de tensiones internas.

Asimismo, en piezas con deformación restringida, la retracción puede causar fisuración lo cual afecta negativamente la vida útil de la pieza, [7].

Según Jiménez Montoya et al. [1], las deformaciones del hormigón se pueden clasificar de acuerdo al Cuadro 2.3.

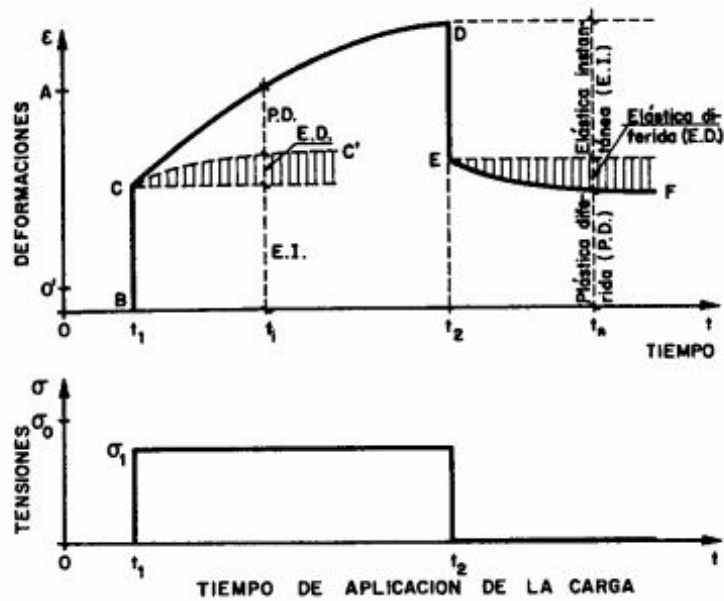


Figura 2.3: Clasificación de las deformaciones según Montoya et al

Cuadro 2.3: Deformaciones del hormigón.

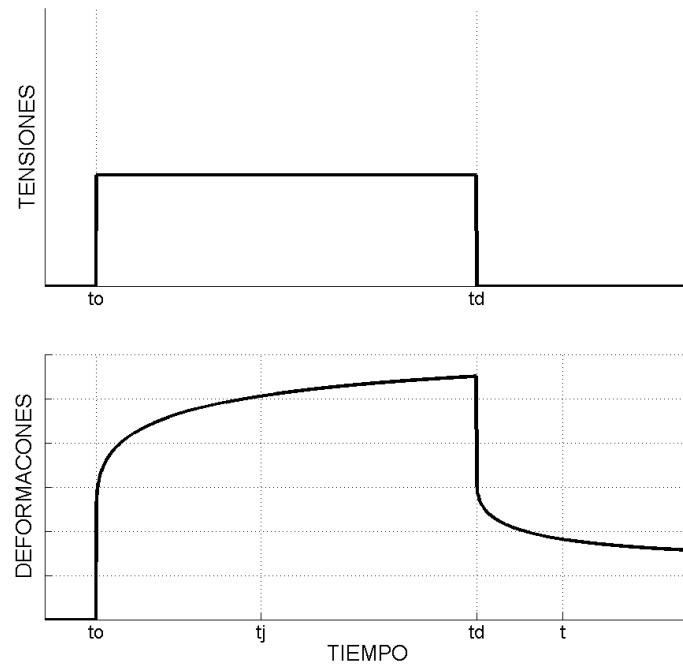
|                      | <i>Dependiente de las cargas exteriores</i> |                             | <i>Independientes de las</i> |
|----------------------|---|-----------------------------|------------------------------|
|                      | <i>Instantáneas</i>                         | <i>Diferidas (Fluencia)</i> | <i>cargas exteriores</i>     |
| <i>Reversibles</i>   | Elásticas                                   | Elásticas Diferidas         | Térmicas                     |
| <i>Irreversibles</i> | Remanentes                                  | Plásticas Diferidas         | Retracción                   |

2.1.5. Relación constitutiva del hormigón

Al aplicar una tensión al hormigón, se produce una deformación instantánea. Si la tensión se mantiene en el tiempo, la deformación aumenta progresivamente debido al fenómeno de fluencia lenta. El módulo de elasticidad instantáneo del hormigón también varía en el tiempo. La magnitud de las deformaciones del hormigón depende de la edad al tiempo de carga y del tiempo que se mantiene la carga aplicada.

En la Figura 2.4, se muestra una gráfica típica de carga-descarga de una barra de hormigón, en la que se la aplica una fuerza axial en un tiempo  $t_0$  y se retira completamente en el tiempo  $t_f$ . Se puede distinguir claramente una deformación instantánea y deformaciones diferidas que aumentan a una tasa decreciente hasta el tiempo  $t_f$  mientras la fuerza se





**Figura 2.4:** Diagrama de tensión y deformación de una barra cargada y descargada uniaxialmente

mantiene constante. Al retirar la fuerza, la barra recupera parte de la deformación instantánea y la deformación diferida disminuye progresivamente. Una parte de la deformación diferida es recuperable mientras que una parte usualmente mayor es irrecuperable o permanente [7].

Se puede asumir que para tensiones habituales de trabajo del hormigón, donde no se supera el 40 % de la resistencia media, éste tiene un comportamiento lineal visco-elástico. Si no hay un cambio significativo en la humedad de la pieza o si no ocurre la descarga total, es válido el principio de superposición de Boltzmann, y la relación constitutiva del hormigón puede ser expresada en el dominio del tiempo mediante la ecuación integral de convolución de Volterra (2.11) [8]:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t_0)J(t, t_0) + \int_{t_0^+}^t J(t, \tau) \frac{\partial \sigma_c(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \sigma_c(t)J(t, t) - \int_{t_0^+}^t \frac{\partial J(t, \tau)}{\partial \tau} \sigma_c(\tau) d\tau, \quad (2.11)$$

donde:

- $\varepsilon_c(t)$  es la deformación del hormigón en el tiempo  $t$ ,
- $\sigma_c(t)$  es la tensión del hormigón en el tiempo  $t$ ,
- $J(t, t_0)$  es la función de fluencia del hormigón que representa la deformación total para una tensión unitaria,
- $t$  es el tiempo en el que se evalúa la deformación,
- $t_0$  es el tiempo en el que se aplica la carga.

La función de fluencia puede ser expresada a partir del coeficiente de fluencia:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{ci}}, \quad (2.12)$$

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t, t_0)}{\varepsilon_{ci}}, \quad (2.13)$$

donde:

- $\varphi(t, t_0)$  coeficiente de fluencia,
- $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$  deformación debido a la fluencia en el tiempo  $t$  de un hormigón cargado a la edad  $t_0$ ,
- $\varepsilon_{ci}$  deformación inicial (elástica) cuando el hormigón es cargado a una edad de 28 días,
- $E_c(t_0)$  módulo de elasticidad del hormigón en el momento de la carga a los  $t_0$  días de acuerdo con la ecuación (2.6). Representa la deformación inicial instantánea.

La ecuación (2.11) es una relación constitutiva general para hormigón que permite calcular las deformaciones si se conocen las tensiones y calcular las tensiones si se conoce la historia de deformaciones. Esta integral no puede evaluarse directamente, ya que o se debe conocer la historia de tensiones que es en muchos casos la incógnita del problema o en el caso de que se conozca la historia de deformaciones la integral debe ser evaluada numéricamente. Por este motivo, dependiendo del modelo que se adopte para la fluencia del hormigón, existen distintos métodos para resolver esta ecuación de forma aproximada.

Si en lugar de aplicar una carga constante, se aplica una deformación constante en el tiempo, se producirá una tensión inicial que irá disminuyendo en el tiempo. Este compor-

tamiento es determinado por la función de relajación, que de forma similar a la función de fluencia cumple la siguiente relación:

$$\sigma_c(t) = \varepsilon_c(t_0)R(t, t_0) + \int_{t_0^+}^t R(t, \tau) \frac{\partial \varepsilon_c(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \varepsilon_c(t)R(t, t) - \int_{t_0^+}^t \frac{\partial R(t, \tau)}{\partial \tau} \varepsilon_c(\tau) d\tau, \quad (2.14)$$

donde:

$R(t, t_0)$  es la función de relajación del hormigón que representa la tensión total para una deformación unitaria,

$t$  es el tiempo en el que se evalúa la deformación,

$t_0$  es el tiempo en el que se aplica la carga.

Asimismo, las funciones de fluencia y relajación se relacionan de la siguiente forma [9]:

$$H(t - t_0) = R(t, t_0)J(t, t) + \int_{t_0^+}^t \frac{\partial J(t, \tau)}{\partial \tau} R(t, \tau) d\tau. \quad (2.15)$$

donde  $H$  es la función de Heaviside.

### Envejecimiento

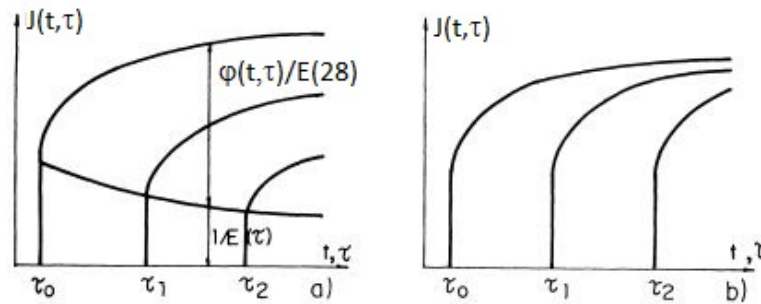
Se llama envejecimiento a la variación de las propiedades mecánicas de un material debido a su edad. Desde el momento del hormigonado, aumenta la resistencia a la compresión y disminuye la deformabilidad. En el caso de materiales con envejecimiento, la función de fluencia adopta la forma indicada en la Figura 2.5 a), mientras que los materiales sin envejecimiento se comportan de la forma indicada en 2.5 b), [9].

En el caso de materiales sin envejecimiento, se cumple la siguiente relación:

$$J(t + \Delta t, \tau + \Delta t) = J(t, \tau), \forall \Delta t. \quad (2.16)$$

De esta forma, se puede expresar la función de fluencia utilizando un único parámetro  $\Delta t$ :

$$J(t, \tau) = J(\Delta t) = J(t - \tau). \quad (2.17)$$

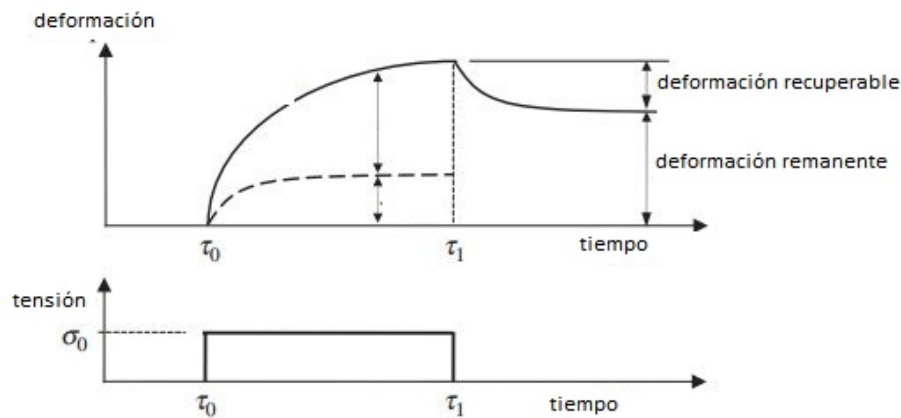


**Figura 2.5:** a) Diagrama de fluencia de un material con envejecimiento. b) Diagrama de fluencia de un material sin envejecimiento.

### 2.1.6. Fluencia lenta del hormigón

La fluencia del hormigón depende de factores internos como las propiedades de las fases del hormigón y su composición y de parámetros externos como el clima. En rasgos generales, la fluencia del hormigón es proporcional a la fracción de volumen de pasta de cemento [10]. La fluencia aumenta en función de la porosidad capilar, por lo que disminuye a medida que se mejora la relación agua/cemento y aumenta el grado de hidratación en el tiempo de carga, i.e. mayor edad en el momento de la carga. La fluencia disminuye con la mayor rigidez del agregado ya que el agregado normalmente no sufre el fenómeno de fluencia lenta y actúa como una restricción a la deformación de la pasta de cemento. La fluencia aumenta cuando es mayor el contenido de humedad y cuando es mayor la pérdida de humedad durante el tiempo de carga. En consecuencia, la fluencia aumenta cuando disminuye la humedad ambiente y cuando disminuye el espesor del miembro estructural [11]. En conclusión, la fluencia de la pasta de cemento hidratada es gobernada en gran parte por el contenido de agua en la pasta. Además de los movimientos de agua en el sistema de poros de la pasta debido a las tensiones, pueden desarrollarse también procesos de deslizamiento y compactación [6], [12], [13].

La fluencia del hormigón es parcialmente reversible, parte de la deformación por fluencia desarrollada bajo carga será recuperada después de la descarga. Por lo tanto, la deformación por fluencia puede ser dividida en una parte irreversible (remanente), generalmente denominada flujo y una parte reversible denominada deformación elástica diferida. Debido a la importante influencia del contenido de agua del hormigón y de la pérdida



**Figura 2.6:** Deformación por fluencia recuperable y remanente.

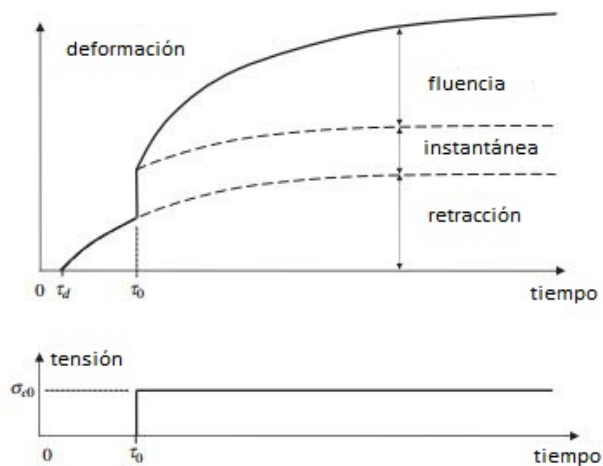
de agua debido al secado mientras el hormigón está bajo carga, la fluencia también puede ser dividida en los componentes de fluencia básica y fluencia de secado. La fluencia básica se define como la deformación por fluencia de un hormigón que ni pierde ni gana agua durante el período de duración de la carga. La diferencia entre el total de la deformación por fluencia que desarrolla un hormigón que si tiene intercambio de humedad con el ambiente y la deformación por fluencia básica es definida como la fluencia de secado. Cuando se modela el fenómeno de fluencia, el enfoque constitutivo elegido puede tomar o no en cuenta deformaciones reversibles e irreversibles o componentes básicas y de secado de la fluencia. Esta elección afectará la precisión en la predicción del fenómeno [6].

La fluencia puede afectar de forma favorable o desfavorable el comportamiento de las estructuras en el largo plazo. Cuando el hormigón se somete a una carga sostenida, las deformaciones de la estructura se incrementarán en el tiempo debido a los efectos de la fluencia. En el caso de miembros comprimidos, la fluencia del hormigón causa una redistribución de tensiones desde el hormigón hacia el acero que incluso puede llegar a provocar que el acero supere la tensión de fluencia.

Por otro lado, la fluencia del hormigón tiene un efecto favorable en las tensiones internas y en las tensiones debido a restricciones en la deformación que se desarrollen gradualmente (por ejemplo, efectos térmicos). Estas tensiones pueden disminuir sustancialmente debido a la fluencia o nunca alcanzar los valores previstos de cálculo obtenidos despreciando el fenómeno de fluencia lenta.

### Requisitos de los modelos

De acuerdo a la expresión indicada en (2.12), la función de fluencia debe ser capaz de representar las deformaciones elásticas y las deformaciones por fluencia lenta de forma independiente.



**Figura 2.7:** Deformaciones instantáneas y diferidas.

Según Creus [9], esto no es sencillo porque no se pueden aplicar cargas realmente instantáneas. Las deformaciones instantáneas medidas en laboratorio, contendrán en general algunos componentes diferidos debido a mecanismos de fluencia con muy bajo tiempo de retardación. Sin embargo, en la mayoría de los problemas prácticos relacionados con carga cuasi-estática, las pequeñas incertidumbres acerca de esta separación no son importantes.

A la hora de formular una expresión para representar la función de fluencia, se aceptan las siguientes hipótesis:

1. Para tensiones hasta el 40 % de la tensión de rotura, las deformaciones por fluencia pueden ser consideradas como una función lineal de las tensiones. El comportamiento lineal es importante porque la mayor parte de las estructuras de hormigón, se diseñan para trabajar dentro de este rango.
2. La fluencia es menor si el tiempo en el que se aplica la carga es mayor (envejecimiento).

3. Después de la descarga, se observa una recuperación de las deformaciones que aumenta con el tiempo. Esta recuperación no necesariamente coincide con la calculada utilizando superposición de efectos.
4. La fluencia lenta de un hormigón que está secando bajo carga es mayor que la de un hormigón que mantiene su humedad interna (espécimen sellado).
5. La fluencia del hormigón tiene una componente esférica y una desviadora. Los datos experimentales acerca de la fluencia lenta en estados tensionales que no sean de compresión son escasos, pero en general se acepta que dentro del rango de comportamiento lineal, el hormigón se comporta como un material viscoelástico, isotrópico con un coeficiente de Poisson viscoelástico de la forma  $\nu H(t - \tau)$  donde,  $\nu$  es el coeficiente de Poisson elástico.

Asimismo, el coeficiente de fluencia debe respetar las siguientes características:

1. La fluencia debe ser monótona creciente

$$\frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial t} \geq 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial t} \Big|_{t=\tau} \rightarrow \infty \quad (2.19)$$

2. La tasa de incremento de la fluencia debe ser negativa

$$\frac{\partial^2 \varphi(t, \tau)}{\partial t^2} \leq 0, \quad (2.20)$$

3. El valor final de la deformación por fluencia debe ser finito

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \tau) \leq M \quad (2.21)$$

4. La fluencia de un hormigón envejecido no es nula

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi(t, \tau) > 0 \quad (2.22)$$

5. Después de la descarga, existe recuperación de las deformaciones

$$\varphi(t, t_1) > \varphi(t, t_0) - \varphi(t_1, t_0), \quad (2.23)$$

donde  $t_0$  es el tiempo en el que se carga y  $t_1$  en el que se descarga.

Los datos experimentales son usualmente representados mediante fórmulas matemáticas aproximadas. Las formulaciones más comunes aceptan que el coeficiente de fluencia puede ser escrito de la forma:

$$\varphi(t, \tau) = F(\tau)f(t - \tau). \quad (2.24)$$

Por lo tanto, todas las curvas serán similares, con un factor de similitud  $F(\tau)$  que depende de la edad del hormigón en el momento que se aplica la carga.

El método de cálculo propuesto en el presente trabajo será aplicable a los modelos que cumplan esta propiedad.

### Modelo adoptado por el MC90

Existen diversos modelos para caracterizar la función de fluencia, uno de ellos es la teoría de solidificación, [14], [15], [16], [17], [18]. Esta teoría se basa en que el mecanismo del proceso de envejecimiento se debe al incremento del volumen de pasta de cemento hidratado que progresivamente ocupa los poros dejados por moléculas de agua y de cemento no hidratado. Por lo tanto, al responder a procesos químicos, no se considera que el proceso de hidratación envejece sino que se modifica a lo largo del tiempo por los cambios de concentraciones de los distintos elementos que participan del proceso de hidratación.

La función de fluencia adoptada en el MC90 [4] está basada en la teoría de solidificación y responde a la formulación indicada en (2.12), donde el término que refleja las deformaciones diferidas es el que involucra el coeficiente de fluencia obtenido de la forma:

$$\varphi(t, t_0) = \phi_0 \beta_c(t, t_0) \quad (2.25)$$

donde:

- $\phi_0$  es el coeficiente básico de fluencia, según la ecuación (2.26),
- $\beta_c(t, t_0)$  es el coeficiente que describe el desarrollo de la fluencia en el tiempo después de la carga, según ecuación (2.30),
- $t$  es la edad del hormigón en días en el momento considerado,
- $t_0$  es la edad del hormigón en días en el momento de la carga.



El coeficiente básico de fluencia puede ser determinado de la forma:

$$\phi_0 = \phi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0), \quad (2.26)$$

con

$$\phi_{RH} = \left[ 1 + \frac{1 - RH/100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h}} \right], \quad (2.27)$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}}, \quad (2.28)$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + (t_0)^{0,2}}, \quad (2.29)$$

donde:

$RH$  es el porcentaje de humedad ambiente relativa,

$h = \frac{2A_c}{u}$  = espesor medio en milímetros siendo  $A_c$  el área de la sección transversal y  $u$  el perímetro de contacto con la atmósfera.

La evolución de la fluencia en el tiempo es descrita por:

$$\beta_c(t, t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)}{\beta_H + (t - t_0)} \right]^{0,3}, \quad (2.30)$$

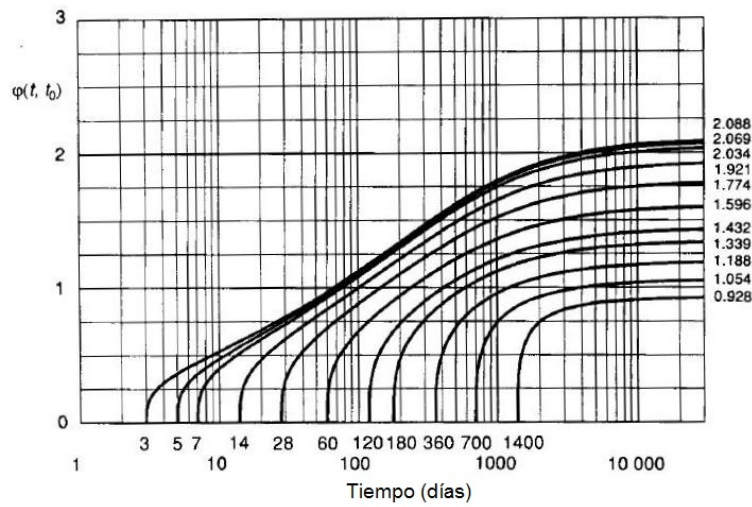
$$\beta_H = 1,5h \cdot \left[ 1 + \left( 1,2 \cdot \frac{RH}{100} \right)^{18} \right] + 250 \neq 1500. \quad (2.31)$$

Este modelo es adoptado también por la Instrucción Española de Hormigón Armado [3] y en forma simplificada por nuestra norma local UNIT [2]. Se puede observar que el modelo verifica la ecuación (2.24). En la Figura 2.8 se muestran los valores del coeficiente de fluencia calculados por Ghali et al. [19].

El modelo presentado cuenta con amplio respaldo experimental. Las bases de datos utilizadas han sido recopiladas en CEB Bull. N° 199 [20] y el reporte elaborado por RILEM TC 107, SC 5 [21].

### Modelos adoptados por otras normativas de referencia

Se han realizado numerosas comparaciones acerca de los distintos modelos que utilizan las principales normas, [22], [23], [24]. Se presentan aquí algunos modelos que describen la evolución de la fluencia lenta tomando hipótesis de comportamiento que difieren de las consideradas en el MC90 [4].



**Figura 2.8:** Coeficiente de fluencia según el MC90 cuando  $f_{ck} = 30$  MPa;  $RH = 80\%$ ;  $h = 400$ mm, según Ghali et al.

**MC 2010:** El Código del Modelo 2010 [25] introduce nuevas fórmulas para definir el comportamiento del hormigón a largo plazo bajo cargas en condiciones de servicio. La principal diferencia con la formulación del MC90 [4] es que la fluencia se divide en los dos componentes de fluencia básica y fluencia de secado, reflejando los dos mecanismos físicos asociados.

El coeficiente de fluencia puede ser calculado de la forma:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{bc}(t, t_0) + \varphi_{dc}(t, t_0), \quad (2.32)$$

donde:

$\varphi_{bc}(t, t_0)$  es el coeficiente de fluencia básico según la ecuación (2.33),

$\varphi_{dc}(t, t_0)$  es el coeficiente de fluencia de secado según la ecuación (2.36).

El coeficiente de fluencia básico puede ser estimado a partir de:

$$\varphi_{bc}(t, t_0) = \beta_{bc}(f_{cm}) \cdot \beta_{bc}(t, t_0), \quad (2.33)$$

$$\beta_{bc}(f_{cm}) = \frac{1,8}{(f_{cm})^{0,7}}, \quad (2.34)$$

$$\beta_{bc}(t, t_0) = \ln \left( \left( \frac{30}{t_{0,adj}} + 0,035 \right)^2 \cdot (t - t_0) + 1 \right). \quad (2.35)$$

El coeficiente de fluencia de secado puede ser evaluado de la forma:

$$\varphi_{dc}(t, t_0) = \beta_{dc}(f_{cm}) \cdot \beta(RH) \cdot \beta_{dc}(t_0) \cdot \beta_{dc}(t, t_0), \quad (2.36)$$

$$\beta_{dc}(f_{cm}) = \frac{412}{(f_{cm})^{1,4}}, \quad (2.37)$$

$$\beta(RH) = \frac{1 - \frac{RH}{100}}{\sqrt[3]{0,1 \cdot \frac{h}{100}}}, \quad (2.38)$$

$$\beta_{dc}(t, t_0) = \frac{1}{0,1 + t_{0,adj}^{0,2}}. \quad (2.39)$$

El desarrollo de la fluencia de secado en el tiempo es descrito por:

$$\beta_{dc}(t, t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)}{\beta_H + (t - t_0)} \right]^{\gamma(t_0)}, \quad (2.40)$$

$$\gamma(t_0) = \frac{1}{2,3 + \frac{3,5}{\sqrt{t_{0,adj}}}}, \quad (2.41)$$

$$\beta_h = 1,5h + 250 \alpha_{f_{cm}} \leq 1500 \alpha_{f_{cm}}, \quad (2.42)$$

$$\alpha_{f_{cm}} = \left( \frac{35}{f_{cm}} \right)^{0,5}. \quad (2.43)$$

Según Mola and Pellegrini [23] al comparar los valores finales obtenidos con el antiguo y el nuevo código, los coeficientes de fluencia son muy similares. Por lo tanto, cuando se trata de estructuras visco-elásticas homogéneas interaccionando con restricciones elásticas, la limitación de la deformación por fluencia efectuada por las restricciones elásticas reduce de forma significativa las diferencias entre ambos modelos.

**ACI:** La norma ACI 209 [26] asume las siguientes hipótesis para la predicción de las deformaciones debido a la fluencia y retracción del hormigón:

- La retracción y la fluencia son independientes.
- El modelo adoptado es lineal, es decir que la fluencia se considera proporcional a las tensiones. Es válido el principio de superposición.
- Se divide la fluencia en fluencia básica (las deformaciones se desarrollan impidiendo cambios en la humedad) y fluencia por secado (deformación adicional que se desarrolla cuando la pieza se expone a un ambiente seco).

- Se desprecian los gradientes de retracción y fluencia, es decir que se asumen uniformes en toda la longitud de la pieza.
- Las tensiones que se generan durante la fase de curado son despreciables.

La formulación propuesta en la ACI 209 [27] define también un coeficiente de fluencia de la siguiente forma:

$$\nu_t = \frac{t^\psi}{d + t^\psi} \nu_u, \quad (2.44)$$

donde:

- $\nu_u$  es el coeficiente de fluencia último definido como el cociente entre la deformación por fluencia y la deformación inicial, que puede variar entre los valores 1,3 y 4,15,
- $t$  es el tiempo transcurrido desde la carga, en días,
- $d$  en días y
- $\psi$  son factores que definen la variación en el tiempo y dependen de la forma y tamaño de la pieza.

Para condiciones estándar, con edad de carga a los 7 días y hormigón con curado húmedo se pueden adoptar los siguientes coeficientes:

$$\nu_t = \frac{t^{0,60}}{10 + t^{0,60}} \nu_u, \quad (2.45)$$

$$\nu_u = 2,35 \cdot \gamma_c, \quad (2.46)$$

donde  $\gamma_c$  es un coeficiente que depende de la edad de carga, humedad relativa del ambiente, espesor medio de la pieza y de la composición del hormigón (asentamiento, contenido de cemento y contenido de aire).

### 2.1.7. Retracción del hormigón

La retracción por secado es una deformación que ocurre fundamentalmente por pérdida de agua en la masa del hormigón cuando está expuesto a una humedad relativa de menos del 100 %. De acuerdo a for Structural Concrete [6], hay varios tipos de deformación por retracción: plástica, autógena y por carbonatación que pueden ocurrir simultáneamente con la retracción por secado.

- retracción plástica: ocurre cuando la pérdida de agua en el hormigón se da cuando está en estado plástico.
- retracción autógena: básica, o química, está asociada con la hidratación del cemento. Ocurre independientemente del ambiente, debido al cambio de volumen de los elementos químicos.
- retracción por carbonatación: causada por la reacción del cemento y los componentes de los agregados con el dióxido de carbono en el aire en presencia de humedad.
- retracción por secado: es la más importante en el diseño del hormigón.

Las principales causas de la retracción son los cambios en las tensiones capilares en el sistema de poros de la pasta de cemento hidratado, cambios en la tensión superficial de los productos de hidratación debido a los cambios en la humedad y a la tensión “repelente” entre los productos de hidratación. La retracción total oscila entre el 0,1 y el 1 ‰. Para hormigones convencionales, el parámetro con mayor influencia en la magnitud de la retracción es la pérdida de agua. Por lo tanto, la retracción aumenta con el aumento del contenido de agua [5] y decrece con la humedad relativa del ambiente. Para cualquier tipo de hormigón, el curado es de suma importancia para controlar las fisuras por retracción ya que éstas generalmente son causadas por insuficiente tiempo de curado. Asimismo, la retracción disminuye con la rigidez de los agregados gruesos, con el tamaño de la pieza hormigonada y aumenta con la finura del cemento [11], [28]. Las tensiones causadas por la retracción son generalmente reducidas por el efectos de la fluencia lenta. Por lo tanto, los efectos de estos fenómenos simultáneos deben ser considerados en el análisis de las tensiones. Se ha estudiado asimismo la influencia de la fluencia lenta en la retracción y viceversa [29] pero en las normas de referencia, esta interacción es despreciada.

#### **Modelo adoptado por el MC90**

Los modelos de predicción de la retracción y fluencia, suelen basarse en la resistencia a la compresión del hormigón. En efecto, éstas no dependen de la resistencia a la compresión, sino de parámetros relacionados con la microestructura y la composición del hormigón como son la relación agua/cemento, el grado de hidratación, las propiedades de

los agregados, etc. Sin embargo, los modelos de predicción de las deformaciones son utilizados por los proyectistas en instancias en las que aún no se conocen las características del hormigón, sino únicamente los requerimientos de resistencia a la compresión. Por lo tanto, se utiliza este parámetro ya que actúa como una medida indirecta de las propiedades microestructurales del hormigón, for Structural Concrete [6]. En este trabajo se utiliza el modelo de retracción definido en el MC90 [4]. En el modelo adoptado, la retracción se comienza a desarrollar en el tiempo  $t_s$ , cuando termina el curado húmedo. La deformación  $\varepsilon_{cs}(t, t_s)$  que se desarrolla en un tiempo  $t$  puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cs0}\beta_s(t - t_s), \quad (2.47)$$

donde:

$\varepsilon_{cs0}$  es el coeficiente de retracción nominal,

$\beta_s$  es el coeficiente que describe el desarrollo de la retracción en el tiempo.

El coeficiente de retracción nominal puede ser obtenido como:

$$\varepsilon_{cs0} = \varepsilon_s(f_{cm})\beta_{RH}, \quad (2.48)$$

con

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = [160 + 10\beta_{sc}(9 - f_{cm}/f_{cm0})] \times 10^{-6}, \quad (2.49)$$

donde:

$\beta_{sc}$  es un coeficiente que depende del tipo de cemento,

$\beta_{RH} = -1,55\beta_{sRH}$  para  $40\% \leq RH < 99\%$ ,

$\beta_{RH} = +0,25$  para  $RH \geq 99\%$ ,

$\beta_{sRH} = 1 - \left(\frac{RH}{RH_0}\right)^3$ ,

$RH_0 = 100\%$ .

El desarrollo de la retracción en el tiempo está dado por:

$$\beta_s(t - t_s) = \left[ \frac{(t - t_s)/t_1}{350(h/h_0)^2 + (t - t_s)/t_1} \right]^{0.5}, \quad (2.50)$$

donde:

$h$  según fue definido en la ecuación (2.27),

$h_0$  100 mm,

$t_1$  1 día.

**Modelos adoptados por otras normativas de referencia**

**MC 2010:** En el nuevo MC 2010, la retracción total se subdivide en retracción autógena y retracción por secado. La retracción total puede ser calculada como:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cas}(t) + \varepsilon_{cds}(t, t_s), \quad (2.51)$$

$$\varepsilon_{cas}(t) = \varepsilon_{caso}(f_{cm}) \cdot \beta_{as}(t), \quad (2.52)$$

$$\varepsilon_{cds}(t, t_s) = \varepsilon_{cdso}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(RH) \cdot \beta_{ds}(t - t_s), \quad (2.53)$$

donde:

- $\varepsilon_{cs}(t, t_s)$  retracción total en el tiempo  $t$ ,
- $\varepsilon_{cas}(t)$  retracción autógena en el tiempo  $t$ ,
- $\varepsilon_{cds}(t, t_s)$  retracción por secado en el tiempo  $t$ ,
- $\varepsilon_{caso}(f_{cm})$  coeficiente de retracción autógena nominal,
- $\varepsilon_{cdso}(f_{cm})$  coeficiente de retracción por secado nominal,
- $\beta_{as}(t)$  función que describe la evolución en el tiempo de la retracción autógena,
- $\beta_{RH}(RH)$  coeficiente que toma en cuenta la influencia de la humedad relativa en la retracción por secado,
- $\beta_{ds}(t - t_s)$  función que describe la evolución en el tiempo de la retracción por secado,
- $t$  edad del hormigón en días,
- $t_s$  edad del hormigón en días al momento del inicio de la retracción,
- $t - t_s$  duración de la etapa del secado en días.

La evolución en el tiempo de la retracción autógena se describe mediante la siguiente función:

$$\beta_{as}(t) = 1 - e^{-0,2\sqrt{t}}. \quad (2.54)$$

Por otro lado, la función que describe la retracción por secado es de la forma:

$$\beta_{ds}(t - t_s) = \left( \frac{t - t_s}{0,035h^2 + t - t_s} \right). \quad (2.55)$$

Se puede ver entonces, que a diferencia del MC90 [4] en este caso hay un término que depende de la edad del hormigón (la retracción autógena) y otro que sólo depende de la duración de la etapa de secado.

**ACI:** La deformación por retracción por secado  $\varepsilon_{sh}(t, t_c)$  de un hormigón de  $t$  días medida desde la edad de inicio de secado  $t_c$  días puede ser estimada mediante la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_{sh}(t, t_c) = \frac{(t - t_c)^\alpha}{f + (t - t_c)^\alpha} \varepsilon_{shu}, \quad (2.56)$$

donde  $f$  y  $\alpha$  son constantes dependientes de la forma y tamaño del elemento estructural que definen la relación entre la deformación y el tiempo.  $\varepsilon_{shu}$  es la deformación por retracción última y  $t - t_c$  es el tiempo transcurrido desde la edad en la que se inicia el curado.

Para condiciones estándar, con una humedad ambiente de 40 %, el valor medio sugerido para  $\varepsilon_{shu}$  es:

$$\varepsilon_{shu} = 780 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}. \quad (2.57)$$

La norma 209 [27] recomienda adoptar el parámetro  $f$  en 35 días para piezas con 7 días de curado. Sugiere asimismo que el parámetro  $\alpha$  sea considerado con un valor igual a 1,0.  $\alpha$  y  $f$  deben ser corregidos según la forma y tamaño de la pieza.

En caso de que las condiciones de la pieza no sean estándar, el valor de la retracción última  $\varepsilon_{shu}$  debe ser corregido por siete factores que dependen de la edad de curado, la humedad relativa, el espesor promedio de la pieza, el asentamiento del hormigón fresco, el contenido de agregados finos, el contenido de cemento y el contenido de aire.

## 2.2. Propiedades de las armaduras

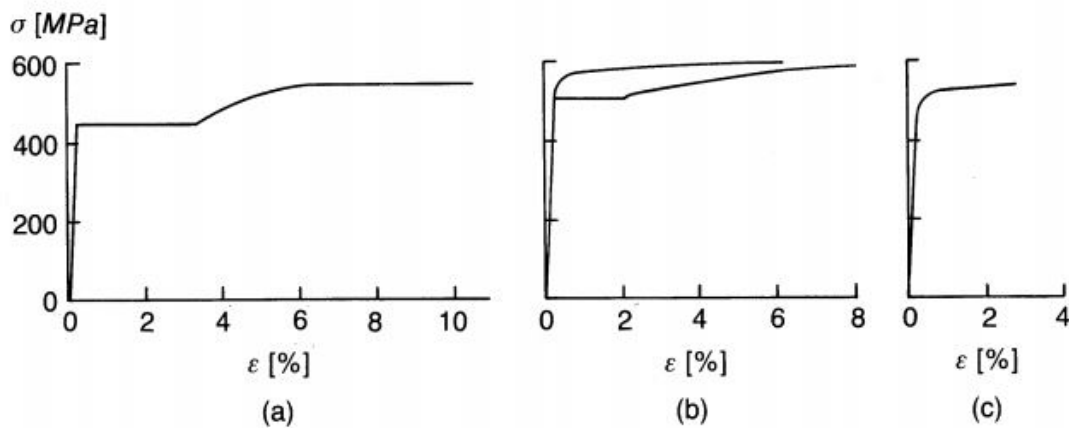
Los principales factores que influyen en la calidad del acero son su composición química y el tratamiento que reciba después de conformada la barra o el cable. En general, el acero se compone de hierro, impurezas y componentes de aleación según las propiedades que se requieran. El principal componente no metálico del acero es el carbono. Otros materiales como fósforo, azufre y nitrógeno son las principales impurezas y deben mantenerse dentro de ciertos límites para no afectar sus propiedades.

Excepto en aceros con aleaciones especiales, las propiedades mecánicas del acero como resistencia y deformabilidad, la capacidad de ser soldado y resistir a los tratamientos térmicos, dependen fundamentalmente del contenido de carbono. El mismo se encuentra entre el 0,15 y 0,20 % para acero común y entre 0,5 y 0,8 % para acero de pretensado [6].



### 2.2.1. Comportamiento mecánico de las armaduras pasivas

Debido a la diversidad de procesos para la elaboración de barras y alambres, se pueden encontrar varios diagramas de tensión-deformación. La principal diferencia de comportamiento radica en el tratamiento que se le da a las barras para adquirir la resistencia necesaria: acero con tratamientos térmicos o acero tratado en frío.



**Figura 2.9:** Ejemplos de diagramas tensión-deformación. (a) armaduras con tratamiento térmico, (b) armaduras con tratamiento térmico de bajo carbono (curva inferior), armaduras tratadas en frío (curva superior), (c) cables tratados en frío.

El acero con tratamiento térmico, suele tener cuatro etapas: etapa elástica, etapa plástica, etapa de endurecimiento y etapa post-pico. En el caso de aceros tratados en frío, no hay distinción entre la etapa elástica y plástica, sino que hay una transición continua entre el comportamiento elástico y el comportamiento plástico; sí se pueden distinguir las etapas de endurecimiento y post-pico, ver Figura 2.9, [4].

Las normas ([2], [4], [3]), permiten adoptar simplificaciones modelando al acero como un material elasto-plástico perfecto, como se muestra en la Figura 2.10, [4]. Excepto en aceros de alta resistencia, el diagrama se asume simétrico para compresión y tracción.

En este trabajo, interesa estudiar las deformaciones del hormigón armado, por lo que siempre se estará dentro de los estados límites de servicio. Por lo tanto, en el caso de las armaduras pasivas, las tensiones y deformaciones se mantendrán siempre dentro de los límites del comportamiento elástico.

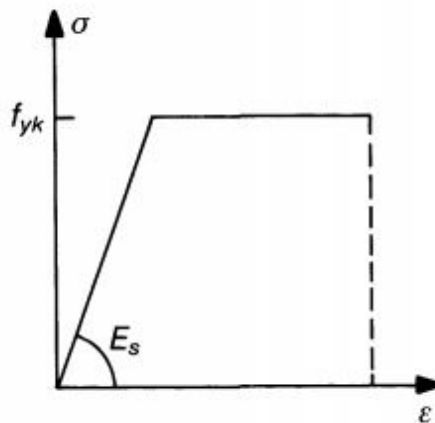


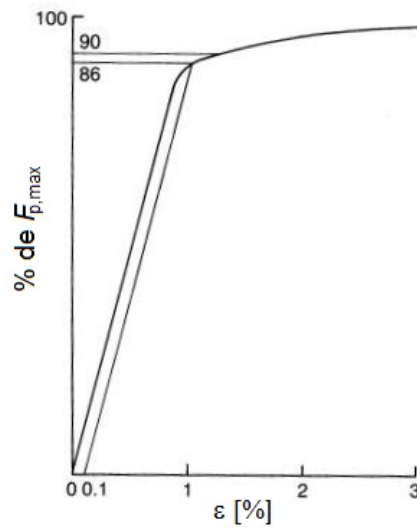
Figura 2.10: Diagrama idealizado del acero pasivo.

### 2.2.2. Comportamiento mecánico de las armaduras activas

Para un diseño práctico y eficiente, las pérdidas totales de pretensado deben ser una pequeña proporción de la fuerza inicial. Por lo tanto, el acero utilizado debe ser capaz de resistir altas tensiones iniciales. La resistencia típica del acero para armaduras activas se encuentra entre los 1000 y 1900 MPa. En los inicios de los sistemas de hormigón pretensado se realizaron intentos con aceros de baja resistencia, pero estos fallaron ya que la tensión inicial disminuía rápidamente debido a las deformaciones diferidas del hormigón y el acero.

Básicamente hay tres tipos de acero de alta resistencia utilizados usualmente en el hormigón pretensado: alambres deformados en frío, torones y barras de aleaciones de alta resistencia. Los torones son el tipo más utilizado, y en general se componen de 7 alambres (6 torneados alrededor de uno central). Después de torneado, el torón se somete a un tratamiento térmico adicional para aliviar las tensiones. Las propiedades del torón son ligeramente distintas a las de los alambres que lo componen ya que al ser deformados éstos se tornan ligeramente más rígidos.

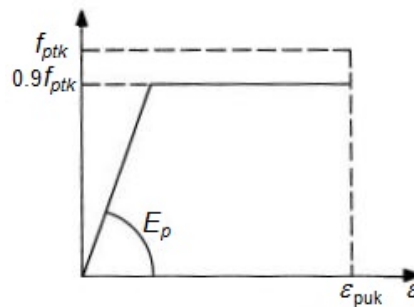
Las curvas de tensión deformación de los tres tipos de materiales tienen características similares, como el diagrama mostrado en la Figura 2.11. Tienen un comportamiento elástico inicial (con módulo elástico  $E_p$ ) y no tienen un punto de fluencia definido. La curva se vuelve no lineal con el aumento de las deformaciones hasta que alcanza la rotura. El acero de alta resistencia es menos dúctil que el acero convencional, llegando a una



**Figura 2.11:** Diagrama tensión-deformación del comportamiento típico del acero de alta resistencia.

deformación de rotura de aproximadamente el 5 %.

A efectos del diseño, se toma como límite convencional de fluencia a la tensión desarrollada con una deformación del 0,2 % que corresponde habitualmente a un valor de la tensión del 85 %-90 % de la tensión de rotura, [7].



**Figura 2.12:** Diagrama idealizado del acero activo según el MC90.

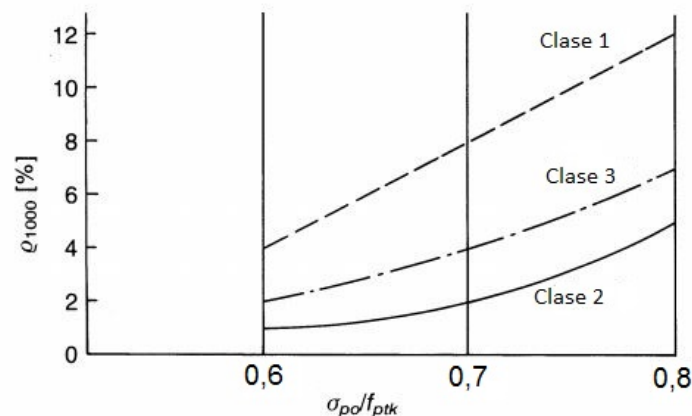
### 2.2.3. Relajación del acero

Al imponer una deformación al acero, se genera de forma instantánea una respuesta tensional. Si la deformación impuesta se mantiene en el tiempo, las tensiones disminuyen progresivamente debido al fenómeno de relajación. Si bien está presente en todos los

tipos de acero, el estudio de la relajación es especialmente importante en el acero de alta resistencia utilizado para el pretensado del hormigón. La relajación se expresa como una pérdida porcentual de la carga inicial; cuanto más cercana a la tensión de fluencia sea la tensión aplicada, mayor será la relajación. La relajación se ve fuertemente afectada también por el incremento de temperaturas.

El acero para pretensado se clasifica usualmente en clases de relajación, de acuerdo a los resultados obtenidos en el ensayo de 1000 horas, con una tensión inicial de 0,6, 0,7 y 0,8 de la tensión de rotura y a una temperatura constante de 20 °C. El MC90 [4] define las siguientes clases de relajación:

- Clase 1: relajación normal para alambres y cordones. Pérdidas de tensión correspondientes a 0,6, 0,7 y 0,8  $f_{pk}$  no mayores de 4, 8 y 12 % respectivamente.
- Clase 2: baja relajación para alambres y cordones. Pérdidas de tensión correspondientes a 0,6, 0,7 y 0,8  $f_{pk}$  no mayores de 1, 2 y 5 % respectivamente.
- Clase 3: relajación normal para barras. Pérdidas de tensión correspondientes a 0,6, 0,7 y 0,8  $f_{pk}$  no mayores de 2, 4 y 7 % respectivamente.



**Figura 2.13:** Relajación del acero según las diferentes clases según el MC90

Si bien la relajación en el largo plazo es obtenida mediante ensayos, el MC90 [4] propone la siguiente fórmula para estimar la relajación hasta los 30 años de edad:

$$\rho_t = \rho_{1000} \left( \frac{t}{1000} \right)^k, \quad (2.58)$$

donde:

- $\rho_t$  es a relajación después de  $t$  horas,
- $\rho_{100}$  es la relajación después de 100 horas,
- $\rho_{1000}$  es la relajación después de 1000 horas,
- $k \approx \log\left(\frac{\rho_{1000}}{\rho_{100}}\right)$ .

A falta de información más exacta, el coeficiente  $k$  puede ser considerado 0,12 para relajación clase 1 y 0,19 para relajación clase 2.

Para resolver problemas de interacción entre los fenómenos diferidos del hormigón y el acero es habitual recurrir a valores tabulados de la reducción de tensiones en los cables [30],[31],[32]. Para este trabajo, interesa conocer la evolución de la tensión del acero en el tiempo, por lo que se utilizará la formulación propuesta por Magura et al. [33] que ha sido extensamente aplicada por otros autores [34], [35], [36].

Esta fórmula, puede ser utilizada siempre que la tensión inicial sea mayor al 55 % de la tensión de fluencia. Si bien se han desarrollado métodos para estimar la relajación fuera de este rango de aplicación [37], a los efectos de este trabajo la formulación propuesta por Magura et al. en [33] es válida ya que los ejemplos analizados se encontrarán dentro de este rango donde:

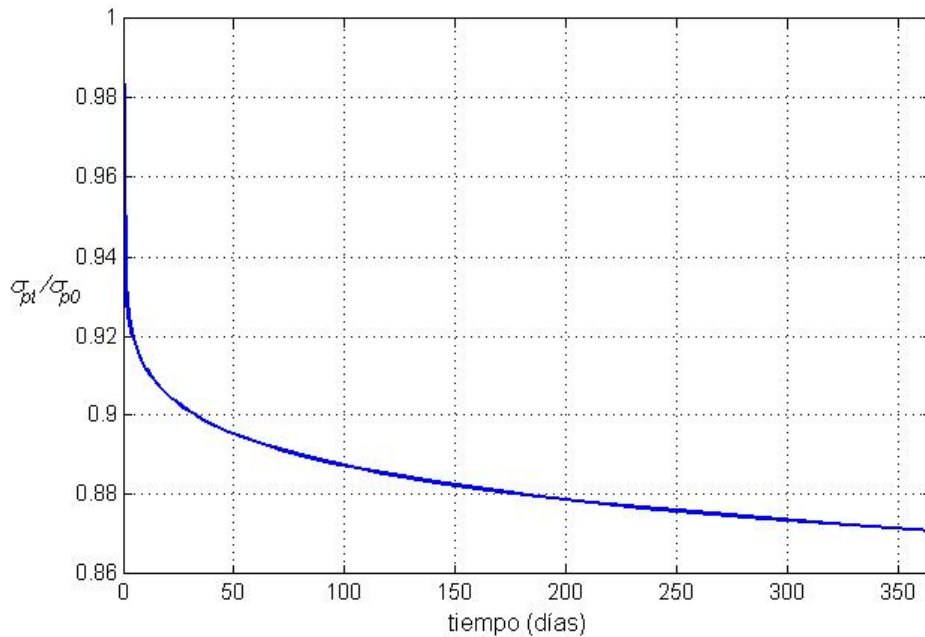
$$\sigma_{pt} = \frac{\sigma_{p0}}{1 + 10^n}, \quad (2.59)$$

donde:

- $\sigma_{pt}$  es la tensión remanente en cualquier tiempo  $t$  después de realizado el pretensado,
- $\sigma_{p0}$  es la tensión inicial en el acero,
- $n$  es una función que depende del tiempo y del grado de pretensado inicial, descrita por la ecuación (2.60).

$$n = -1,3 + \frac{\log(t - t_0)}{3} \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{py}} - 0,55 \right), \quad (2.60)$$

donde:



**Figura 2.14:** Cociente  $\sigma_{pt}/\sigma_{p0}$  para un cable sometido a relajación.

$f_{py}$  es la tensión de fluencia convencional, adoptada como el 85 %-90 % del límite de rotura,

$t$  tiempo en horas,

$t_0$  tiempo en el que se realiza el pretensado.

Esta expresión puede ser remplazada por la indicada en la ecuación (2.61) la cual es utilizada con más frecuencia y que determina la pérdida de pretensado  $\Delta\sigma_{pt}$  en el tiempo  $t$ :

$$\frac{\Delta\sigma_{pt}}{\sigma_{p0}} = -\frac{\log(t - t_0)}{10} \left( \frac{\sigma_{p0}}{f_{py}} - 0,55 \right). \quad (2.61)$$

Si bien esta expresión es válida únicamente cuando el acero está sometido a una tensión constante (lo cual no es real), se admite que es una aproximación muy buena del comportamiento real.

La Figura 2.14 se puede ver que la disminución de la tensión es acelerada en tiempos iniciales y disminuye para tiempos mayores. El 90 % de la tensión inicial se alcanza a los 32 días de realizado el pretensado mientras que al cabo de un año el valor alcanza el 87 %.

### 2.3. Pérdidas instantáneas en vigas de hormigón pretensado

La compresión en el hormigón en general es aplicada mediante cables pretensados o postensados. En el caso de hormigón pretensado, el tendón es tensado en el encofrado donde se colará el hormigón. Después de que el hormigón adquiere resistencia suficiente, se corta el tendón. Debido a la adherencia entre el hormigón y el tendón, éste no puede volver a su largo original por lo que transmite una fuerza de compresión al hormigón.

En el caso del postensado, el tendón se ubica en una vaina (ducto) que se coloca en el encofrado, antes de colar el hormigón. Después de que el hormigón alcanza la resistencia necesaria, se aplica la tensión en el tendón y se lo ancla en los extremos. Posteriormente se rellena la vaina con mortero. Durante el tensado del tendón, las deformaciones en el acero y en el hormigón no son compatibles, por lo que el hormigón se acorta de forma instantánea, sin causar pérdidas en la fuerza de postensado. Después de la transferencia, se asume adherencia perfecta entre los tendones, la vaina y el hormigón [8].



**Figura 2.15:** Trayectoria típica de los cables de postensado en una viga simplemente apoyada.

La fuerza efectiva del pretensado en cualquier punto del tendón y a lo largo del tiempo difiere de la fuerza inicial de tesado en el anclaje.

En primer lugar ocurren las pérdidas instantáneas, que son aquellas que pueden producirse durante la operación de tesado y en el momento del anclaje de las armaduras activas. Estas comprenden las pérdidas por rozamiento a lo largo del conducto de pretensado, pérdidas por penetración de cuñas en los anclajes y pérdidas por acortamiento elástico del hormigón.

En esta sección se detallarán las pérdidas por rozamiento y penetración de cuñas que sí deben ser un dato conocido del problema.

### 2.3.1. Pérdidas por rozamiento

En una sección que se ubica a una distancia  $x$  en metros del anclaje activo, la tensión en el tendón  $\sigma_{p0}(x)$  es menor a la tensión en el anclaje  $\sigma_{p0,max}$ , tal como se indica en la Figura 2.16. La diferencia entre las tensiones es la pérdida por rozamiento que según el MC90 [4] se puede evaluar como:

$$\sigma_{p0}(x) = \sigma_{p0,max} e^{-\mu(\alpha+kx)}, \quad (2.62)$$

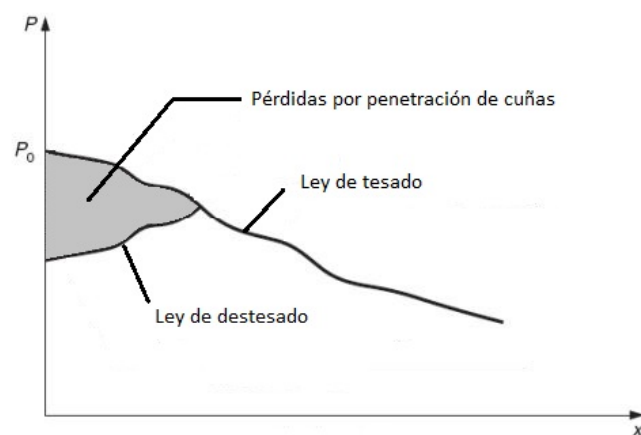
donde:

- $\mu$  es el coeficiente de rozamiento en curva,
- $\alpha$  es la suma de los valores absolutos de las variaciones angulares,
- $k$  es la desviación angular no intencional por unidad de longitud.

Al producto de  $\mu k$  se le denomina coeficiente de rozamiento parásito o coeficiente de rozamiento en recta.

Si bien es deseable que estos factores sean determinados de forma experimental, las normas recomiendan algunos valores de referencia.

La norma EHE [3] recomienda los valores indicados en los Cuadros 2.4 y 2.5. El MC90 [4] recomienda los indicados en el Cuadro 2.6 para  $\mu$ , mientras que para  $k$  recomienda utilizar valores en el entorno de  $0,005 - 0,01m^{-1}$ .



**Figura 2.16:** Pérdidas debido al rozamiento y a la penetración de cuñas a lo largo de la longitud del cable.



**Cuadro 2.4:** Coeficientes  $\mu$  recomendados por la EHE.

| Disposición de las armaduras en las vainas  | Estado superficial de las armaduras | Naturaleza de las armaduras    |                        |                             |
|---|-------------------------------------|--------------------------------|------------------------|-----------------------------|
|   |                                     | Alambres o cordones trefilados | Barras laminadas lisas | Barras laminadas corrugadas |
| Tendón formado por varios elementos agrupados en una misma vaina de acero sin tratamiento superficial | Sin lubricar                        | 0,21                           | 0,25                   | 0,31                        |
|   | Con lubricación ligera              | 0,18                           | 0,23                   | 0,27                        |
| Tendón formado por un único elemento aislado, en una vaina sin tratamiento                            | Sin lubricar                        | 0,18                           | 0,22                   | 0,28                        |
|   | Con lubricación ligera              | 0,15                           | 0,20                   | 0,24                        |

**Cuadro 2.5:** Coeficientes  $k$  recomendados por la EHE.

| Diámetro interior del conducto (mm) | 30    | 40    | 50    | 60    | >60   |
|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $k$                                 | 0,016 | 0,012 | 0,009 | 0,007 | 0,006 |

### 2.3.2. Pérdidas por penetración de cuñas

Cuando se finaliza el tesado de un tendón, se procede a la colocación de las cuñas, introduciéndolas a una presión determinada. Tras la colocación de las cuñas, el gato se relaja transmitiéndose la fuerza de anclaje de los cables a las cuñas de la placa de anclaje. Al recibir la fuerza del tendón, las cuñas penetran algunos milímetros adicionales dentro del anclaje, hasta alcanzar el equilibrio. Este desplazamiento  $a$  tiene un valor que habi-

**Cuadro 2.6:** Coeficientes  $\mu$  recomendados por el MC90.

| Naturaleza de las armaduras | $\mu$ |
|-----------------------------|-------|
| Alambres trefilados         | 0,17  |
| Cordones                    | 0,19  |
| Barras corrugadas           | 0,65  |
| Barras redondas y lisas     | 0,33  |

tualmente ronda los 5 mm. Debido a la penetración de la cuña, la tensión máxima en el tendón no se da en la sección del anclaje.

Para determinar la pérdida de tensado por esta causa, se deben tener en cuenta los rozamientos de los conductos, tal como se indica en la Figura 2.16. La pérdida se puede determinar mediante la siguiente expresión:

$$\Delta P = 2P_0(1 - e^{-\mu(\alpha + kl_a)}), \quad (2.63)$$

donde:

$\Delta P$  es la pérdida de fuerza de pretensado,

$P_0$  es la fuerza de pretensado inicial en el anclaje,

$l_a$  es la longitud afectada por la penetración de las cuñas.

Para determinar la longitud afectada, se debe realizar un proceso iterativo. La penetración de la cuña es el desplazamiento que se obtiene al integrar la deformación que se produce por la pérdida a lo largo de la longitud afectada:

$$a = \int_0^{l_a} \Delta \varepsilon(x) dx = \int_0^{l_a} \frac{\Delta P(x)}{E_p A_p} dx. \quad (2.64)$$

## Capítulo 3

# Métodos de estudio del comportamiento reológico del hormigón

Existen diversos métodos tradicionales para evaluar la fluencia del hormigón, como el método de Dischinger [38], [39], el método del módulo efectivo propuesto por McMillan [40] y Faber [41], el método de Dischinger mejorado [42], el método del coeficiente de envejecimiento [43], etc.

Sin embargo, debido al avance de los métodos computacionales, los métodos tradicionales han ido perdiendo importancia, y se han desarrollado métodos dirigidos a la resolución directa del modelo constitutivo del hormigón (ecuación de Volterra): aproximación de un paso utilizando el módulo efectivo, soluciones paso a paso basadas en el principio de superposición o soluciones paso a paso basadas en modelos de cadenas de Kelvin o Maxwell [44], [45], [46].

Otros autores han desarrollado métodos numéricos basados en el método paso a paso: Sensale [47], Pisani [48], Lou et al. [49], métodos incrementales Chazal and Pitti [50], Au and Si [37] y métodos combinados entre las distintas técnicas: Ruiz [51], Partov and Kantchev [52].

En este capítulo, se realizará una revisión de los métodos más extendidos para estudiar el comportamiento reológico del hormigón.

### 3.1. Método del módulo reducido o efectivo

Según Creus [9], se puede obtener una solución aproximada de los problemas viscoelásticos mediante un análisis elástico con un módulo reducido o efectivo. Este módulo  $E_R$ , es en general una función del tiempo y la edad, con un valor menor al del módulo elástico, que permite determinar la deformación incrementada debido a los efectos de la fluencia.

En el caso de una carga constante,  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t - \tau)$  (donde  $H(t - \tau)$  representa la función de Heaviside, la ecuación (2.11), queda de la forma:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_0 J(t, t_0), \quad (3.1)$$

por lo que es claro que la deformación en cada instante  $t$  puede ser determinada con el módulo reducido:

$$E_R(t, \tau_0) = \frac{1}{J(t, t_0)}, \quad (3.2)$$

ya que:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_R(t, t_0)}. \quad (3.3)$$

Este resultado es exacto, porque en este caso particular se trata de una carga constante. A medida que aumenta la variación en las tensiones, el módulo reducido se aleja de la solución real. El método del módulo efectivo es únicamente aplicable a casos donde la tensión sea constante con el tiempo o la variación muy pequeña, ya que se asume para su aplicación que la variación de las tensiones que ocurre entre los instantes  $t$  y  $t_0$  se desarrolla totalmente en el instante  $t_0$ :

$$\Delta\varepsilon_c(t) = \frac{\Delta\sigma_c(t_0)}{E(t_0)}(1 + \varphi(t, t_0)) = \frac{\Delta\sigma_c(t_0)}{\left(\frac{E(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)}\right)} = \frac{\Delta\sigma_c(t_0)}{E_R}. \quad (3.4)$$

Para todos los materiales sin envejecimiento, el módulo reducido da una solución exacta para  $t = 0$  y para  $t \rightarrow \infty$ ;  $E_R(t_0, t_0)$  es el módulo instantáneo y  $E_R(\infty, t_0)$  es el módulo asintótico.

Para materiales como el hormigón, el módulo reducido no da una buena solución; en particular no se obtiene la solución exacta cuando el tiempo  $t$  tiende al infinito.

Debido a la limitación en sus hipótesis de partida, su aplicación se restringe a pocos casos concretos.

### 3.2. Método del coeficiente de envejecimiento

Para obtener mejores resultados, particularmente en el caso de materiales con envejecimiento, se puede utilizar el módulo de Trost-Bažant  $E_{TB}$  (también llamado módulo efectivo de edad ajustada) [9].

Este módulo, fue determinado originalmente con el objeto de dar una solución exacta al problema de relajación, en el cual se aplica una deformación constante a lo largo del tiempo  $\varepsilon(t) = H(t - t_0)$ .

En este caso, las tensiones tendrán una variación que se puede dividir en un término constante  $\sigma(t_0)$  y un término variable  $\sigma(t) - \sigma(t_0)$ . Las deformaciones pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E_R(t, t_0)} + \frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{E_{TB}(t, t_0)}, \quad (3.5)$$

donde  $E_{TB}$  es el módulo T-B a ser determinado. En el primer término se usa el módulo reducido  $E_R$  ya que representa una deformación bajo carga constante.

En el ensayo de relajación, por definición se cumple que:

$$\sigma(t_0) = E(t_0), \quad (3.6)$$

$$\sigma(t) = R(t, t_0). \quad (3.7)$$

Remplazando estos valores en la ecuación (3.5) se obtiene:

$$H(t - t_0) = E(t_0)J(t, t_0) + \frac{R(t, t_0) - E(t_0)}{E_{TB}(t, t_0)}, \quad (3.8)$$

de donde se deduce que:

$$E_{TB} = \frac{E(t_0) - R(t, t_0)}{E(t_0)J(t, t_0) - H(t, t_0)}. \quad (3.9)$$

El módulo de T-B, puede ser expresado de la forma:

$$E_{TB} = \frac{E(t_0)}{1 + \chi(t, t_0)\phi(t, t_0)}, \quad (3.10)$$

donde  $\chi$  es el coeficiente de envejecimiento dado por la fórmula:

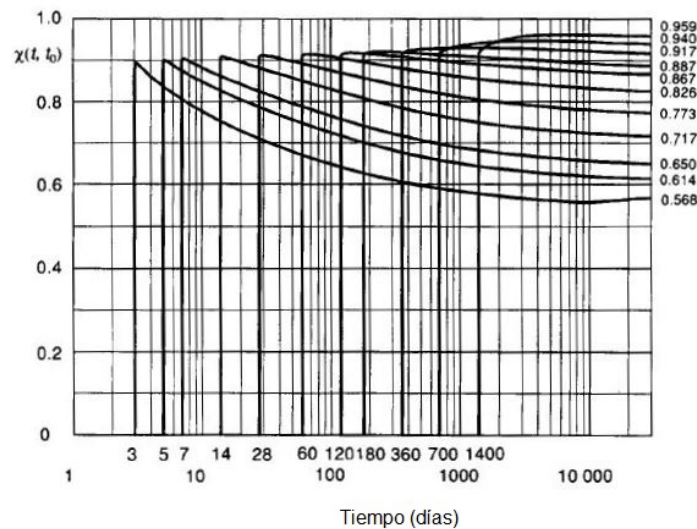
$$\chi(t, t_0) = \frac{E(t_0)}{E(t_0) - R(t, t_0)} - \frac{1}{\phi(t, t_0)}. \quad (3.11)$$

En la ecuación (2.11), las deformaciones se obtienen a partir de una variación en las tensiones que se aplica gradualmente en el período comprendido entre  $t_0$  y  $t$ . Utilizando el coeficiente de envejecimiento, se asume que la variación de tensión se aplica en el

instante  $t_0$  y se mantiene constante durante el período  $(t - t_0)$  pero se reemplaza el coeficiente de fluencia  $\varphi(t, t_0)$  por un valor reducido igual a  $\chi\varphi(t, t_0)$ . Con esta simplificación, la expresión (2.11) puede ser formulada nuevamente:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t_0) \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \Delta\sigma_c(t) \frac{1 + \chi\varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)}. \quad (3.12)$$

La ventaja de este método se debe a la escasa variabilidad del parámetro  $\chi$ . Si se adopta para  $\chi$  un valor constante, se simplifica de forma notable la ecuación constitutiva. Bazant [43] ha demostrado que para  $t = \infty$ ,  $\chi$  varía entre 0,6 y 1,0 con un valor medio de 0,80. En la Figura 3.1 se muestran los valores del coeficiente de fluencia calculados por Ghali et al. [19].



**Figura 3.1:** Coeficiente de envejecimiento según el MC90 cuando  $f_{ck} = 30$  MPa;  $RH = 80\%$ ;  $h = 400$  mm según Ghali et al.

En materiales sin envejecimiento, los valores obtenidos mediante este método y el del módulo efectivo son prácticamente coincidentes. Si hay envejecimiento del hormigón, los valores del módulo obtenido por este método son considerablemente mayores.

Este método fue propuesto originalmente por Trost [53], quien calculó valores aproximados para el coeficiente de envejecimiento bastante cercanos a los valores exactos posteriormente deducidos.

Esta expresión presenta importantes ventajas respecto a anteriores planteamientos ya que se puede emplear en casos de tensión variable y no requiere ninguna simplificación

en la función de fluencia. Además, no es necesaria una discretización temporal ya que únicamente se evalúa la función en los tiempos inicial y final.

A tiempo infinito y para edades usuales de puesta en carga de las estructuras, el valor del coeficiente  $\chi$  es bastante próximo a 0,80, por lo que es un valor apropiado para la mayoría de los problemas. Sin embargo, edades de puesta en carga tempranas o tardías dan lugar a desviaciones importantes en el valor del coeficiente y sí conviene adoptar un valor más preciso.

Como variante al método del coeficiente de envejecimiento tradicional, Murcia [54] propone la formulación del módulo global equivalente que ha sido recogida también por otros autores como Pedoja [55].

### 3.3. Método de Dischinger y de Dischinger Mejorado

#### 3.3.1. Modelo de Dischinger

Dischinger propuso un modelo que permitía tener en cuenta la interacción de elementos elásticos con elementos sujetos a deformaciones de fluencia [38], que ha sido desarrollado por numerosos autores MC90 [4], Rüsç et al. [56].

Para esto, adoptó el modelo de cadena de Maxwell básico con coeficientes que dependen del tiempo, tal como se muestra en la Figura 3.2.

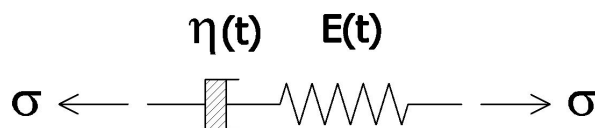


Figura 3.2: Modelo de Dischinger.

Definiendo:

$$E(t) = E_0, \quad (3.13)$$

$$\eta(t) = \eta_0 e^{\gamma_0(t-\tau_0)}, \quad (3.14)$$

la ecuación diferencial que gobierna el modelo es de la forma:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{E_0} \frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{\sigma(t)}{\eta_0} e^{-\gamma_0(t-\tau_0)}. \quad (3.15)$$

La función de fluencia determinada es:

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{\gamma_0 \eta_0} (e^{-\gamma_0(t-\tau_0)} - e^{-\gamma_0(\tau-\tau_0)}) = J_{Dis}(t) - J_{Dis}(\tau). \quad (3.16)$$

De la ecuación (3.16) se desprende que las curvas de fluencia para diferentes edades de carga tienen la misma forma y están simplemente desplazadas por un factor  $J_{Dis}$ . Esta propiedad es aceptable a edades tempranas de puesta en carga, pero no para edades avanzadas. De esta forma, el método se ajusta mejor a hormigones jóvenes que a viejos ya que para tiempo infinito presenta fluencia nula.

### 3.3.2. Modelo de Dischinger Mejorado

Este método fue propuesto por Rüsç et al. [42] como una mejora a la ley de fluencia utilizada por Dischinger, introduciendo en la misma la componente elástica diferida de las deformaciones tal como propuso Nielsen [57].

La deformación del hormigón bajo tensión constante  $\sigma_0$ , se puede expresar como la composición de dos partes: deformación elástica instantánea y deformación debida a la fluencia (se podrían agregar los efectos de la retracción que se omiten para simplificar la exposición del método), o sea:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon(t_0) + \varepsilon_{cc}(t, t_0). \quad (3.17)$$

Como fue indicado en la ecuación (2.12), la deformación debido a la fluencia está dada por el coeficiente de fluencia según la fórmula:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_0}{E_{ci}} \varphi(t, t_0) \quad (3.18)$$

Para el método se toma el coeficiente de fluencia  $\varphi$  como composición de una parte de fluencia irreversible (también llamada fluencia plástica) y otra parte de elasticidad diferida:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{pl}(t, t_0) + \varphi_v(t, t_0), \quad (3.19)$$

donde:

$$\varphi_{pl}(t, t_0) = \varphi_{pl0}(k_f(t) - k_f(t_0)), \quad (3.20)$$

representa la fluencia plástica y

$$\varphi_v(t, t_0) = \varphi_{v0} k_v(t - t_0), \quad (3.21)$$



representa la elasticidad diferida.

Al ser su desarrollo mucho más rápido que el de la fluencia plástica, se puede asumir de forma simplificada que la componente elástica diferida se desarrolla de forma instantánea, es decir:

$$k_v(t - t_0) = 1. \quad (3.22)$$

Esta hipótesis, es equivalente a agregar a la constante elástica del modelo desarrollado por Dischinger un término adicional que representa la elasticidad diferida, o sea:

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \varphi_v}. \quad (3.23)$$

Al agregar esta constante, no se afecta la resolubilidad de la ecuación diferencial del problema.

Esta forma de trabajar con la elasticidad retardada tendría poco error si su valor fuese independiente de la edad de carga  $t_0$  y si la deformación elástica retardada final alcanzase se valor en un tiempo relativamente corto. Sin embargo, hay numerosa información que contradice estas hipótesis. Por lo tanto, del método se obtienen resultados precisos siempre que el tiempo  $t$  no sea próximo al tiempo de inicio de la carga.

### 3.4. Método de las j

El método de las j, propuesto por Calzón and Herrera [58], es un método para el análisis diferido de secciones mixtas que permite la integración de la ecuación de Volterra de forma simplificada, utilizando para el hormigón un módulo de deformación equivalente dado por la expresión:

$$E_{c,\infty} = \frac{E_c}{1 + \psi_j \varphi(t, t_0)}. \quad (3.24)$$

Si se realiza la hipótesis de que la tensión en el hormigón varía de forma proporcional a una potencia j del coeficiente de fluencia:

$$\frac{d\sigma_c(t)}{dt} = k[\varphi(t, t_0)]^j, \quad (3.25)$$

y utilizando la igualdad:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E(t)}(1 + \psi_j \varphi(t, t_0)), \quad (3.26)$$

se puede demostrar que los coeficientes  $\psi_j$  se pueden calcular mediante la siguiente expresión:

$$\psi_j = \frac{1}{[\varphi(t, t_0)]^{j+1}} \int_{t_0}^t [\varphi(t, \tau)]^j \frac{d\varphi(t, \tau)}{d\tau} d\tau. \quad (3.27)$$

Por lo tanto, conocida la expresión del coeficiente de fluencia se puede obtener el coeficiente  $\psi_j$  que resuelve el problema en el tiempo  $t$  para una edad de puesta en carga  $t_0$ .

La ventaja del método reside que según sea la variabilidad de los esfuerzos que solicitan la sección, se pueden emplear constantes 'j' obtenidas a partir de un mayor número de potencias de  $\varphi$ .

Los coeficientes  $\psi$  para un hormigón cargado a los 28 días, fueron recalculados por Ruiz [59] en base a la formulación del coeficiente de fluencia de la EHE [3], proponiendo unas formulaciones simplificadas.

### 3.5. Método paso a paso

En el método paso a paso, se calcula la evolución del tiempo de una estructura dada en un número discreto de pasos temporales.

De esta forma, la integral de Volterra se resuelve de manera aproximada convirtiéndola en una sumatoria para un número de intervalos discretos según:

$$\varepsilon_c(t_i) = \sigma_c(t_0)J(t_i, t_0) + \sum_{j=1}^{i-1} J(t_i, t_j)\Delta\sigma_c(t_j). \quad (3.28)$$

Este planteo es el más general, aunque su uso está enfocado al empleo de computadores. El principal inconveniente de éste, es que es necesario conocer toda la historia de las tensiones.

Se han desarrollado métodos alternativos basados en la aproximación de la función de fluencia mediante series de Dirichlet de  $m$  términos ([13], [60], [61]):

$$\varphi(t, t - \tau) = \sum_{i=1}^m a_i(\tau) [1 - e^{-\lambda_i(t-\tau)}], \quad (3.29)$$

donde  $a_i$  son parámetros de envejecimiento que dependen de la edad del hormigón en el instante de carga y  $\lambda_i$  son coeficientes que gobiernan la forma de la función decreciente. Información detallada de como obtener estos coeficientes se encuentra en la referencia

[62]. La metodología permite obtener relaciones recurrentes, que evitan el almacenamiento de la historia tensional, siendo necesario solamente conocer el resultado del último paso anterior.

Los procedimientos paso a paso obligan a la discretización del tiempo en una serie de intervalos. La mayor eficacia numérica se obtiene usando períodos en los que la deformación diferida sea similar, lo cual conduce a intervalos de duración creciente, ya que la función de fluencia crece rápidamente en los instantes cercanos a la aplicación de la carga y tiene un comportamiento asintótico para tiempos alejados.

De acuerdo a Manterola [63] el mínimo número de pasos a adoptar es de 10, mientras que en el reporte del CEB [64] se indican 16 para tener una respuesta suficientemente precisa. Las características del método implican que cada vez que se aplica una carga debe volver a iniciar la discretización en el tiempo.

# Capítulo 4

## Formulación de elementos finitos

Debido a que se aspira a utilizar la función de fluencia dada por la norma sin realizar aproximaciones (por lo que no se cuenta con la función de relajación), la aplicación del método de los elementos finitos en su forma tradicional no es posible. Entonces, se debe recurrir a formulaciones variacionales mixtas en lugar de las basadas en el principio de los trabajos virtuales [65], [66].

Formulación variacional mixta se define aquella en que las variables secundarias de la formulación convencional son tratadas como independientes, de igual forma que las variables principales del problema. Estas formulaciones en general se desarrollan con el objetivo de determinar directamente las variables secundarias, que con frecuencia son variables de interés, Reddy [67].

En problemas elásticos, hay tres variables desconocidas que pueden ser tratadas como variables independientes: campo de desplazamientos, campo de deformaciones y campo de tensiones. Dependiendo de que variables se tomen como independientes, se obtienen siete combinaciones posibles de acuerdo al Cuadro 4.1.

La formulación variacional mixta adoptada permite que los desplazamientos y las tensiones (o sollicitaciones) varíen de forma independiente, lo que define las variables principales. La variable secundaria es el campo de deformaciones, que puede ser obtenido a partir del campo de desplazamientos o del campo de tensiones. En la solución exacta del problema elástico, ambos campos coinciden punto a punto. Sin embargo, cuando estos campos son obtenidos mediante un procedimiento aproximado como elementos finitos, las deformaciones determinadas a través del campo de desplazamiento y del campo de

**Cuadro 4.1:** Funcionales de elasticidad.

|     | <i>Tipo</i>    | <i>Variables independientes</i>               | <i>Nombre del funcional</i>         |
|-----|----------------|---|-------------------------------------|
| I   | Una variable   | Desplazamientos                               | Energía Potencial                   |
| II  | Una variable   | Tensiones                                     | Energía Potencial<br>Complementaria |
| III | Una variable   | Deformaciones                                 | Sin nombre                          |
| IV  | Dos variables  | Desplazamientos y tensiones                   | Hellinger-Reissner                  |
| V   | Dos variables  | Desplazamientos y deformaciones               | Sin acuerdo en el nombre            |
| VI  | Dos variables  | Tensiones y deformaciones                     | Sin nombre                          |
| VII | Tres variables | Desplazamientos, tensiones<br>y deformaciones | Veubeke-Hu-Washizu                  |

tensiones en general no serán coincidentes.

#### 4.1. Barras sometidas a directa

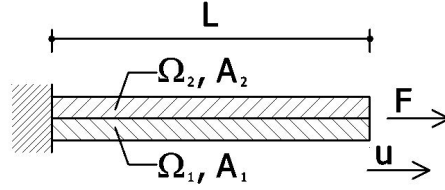
Uno de los problemas estudiados en este trabajo es el de una barra de hormigón armado sometida a fuerzas normales. Para la formulación del elemento finito mixto, se divide la sección en dos capas de secciones  $A_1$  y  $A_2$  y módulos de elasticidad  $E_1$  y  $E_2$  respectivamente (se analiza para dos capas pero el razonamiento puede ser generalizado). Llamando  $u$  al desplazamiento longitudinal de la barra y  $x$  al eje longitudinal, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}, \quad (4.1)$$

$$\sigma_i^x = E_i \varepsilon_x, \quad (4.2)$$

$$N_i = \int_{A_i} \sigma_i d\omega = \int_{A_i} E_i \frac{du}{dx} d\omega. \quad (4.3)$$

Si la barra de longitud  $L$  está fijada en un extremo, y se encuentra sometida a una fuerza  $F$  centrada en el otro extremo libre y a una fuerza de masa longitudinal  $b$ , entonces



**Figura 4.1:** Diagrama de una barra compuesta por dos materiales sometida a una fuerza normal centrada.

el total de la energía potencial se puede expresar de la forma:

$$\Pi(u) = \sum_i \int_0^L \frac{du}{dx} \cdot E_i A_i \frac{du}{dx} dx - \int_0^L b u dx - F u|_L. \quad (4.4)$$

Si ahora se desea introducir como variables independientes del problema a las fuerzas normales en las barras, utilizando el método de los multiplicadores de Langrange, el Lagrangeano obtenido es:

$$\tilde{\Pi}(u, N_i, \lambda_i) = \sum_i \int_0^L \frac{N_i \cdot N_i}{E_i A_i} dx + \sum_i \int_0^L \lambda_i \cdot \left( N_i - \frac{du}{dx} E_i A_i \right) dx - \int_0^L b u dx - F u|_L, \quad (4.5)$$

donde  $\lambda_i$  es el multiplicador de Lagrange asociado a la relación fuerza-desplazamiento indicada en la ecuación (4.3).

Si se impone que la variación del funcional sea nula para cada una de sus variables, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi}(u, N_i, \lambda_i)[\delta u] &= \sum_i \int_0^L -\lambda_i \cdot -\frac{d\delta u}{dx} E_i A_i dx - \int_0^L b \delta u dx - F \delta u|_L \\ &= \sum_i -\lambda_i|_L E_i A_i \delta u|_L + \sum_i \int_0^L -\frac{d\lambda_i}{dx} \cdot \delta u E_i A_i dx - \int_0^L b \delta u dx - F \delta u|_L \\ &= \int_0^L \delta u \left[ \sum_i \frac{-d\lambda_i}{dx} E_i A_i - b \right] dx + \delta u|_L \left[ \sum_i -\lambda_i|_L E_i A_i - F \right] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\delta \tilde{\Pi}(u, N_i, \lambda_i)[\delta N_i] = \int_0^L \left[ \frac{N_i \cdot \delta N_i}{E_i A_i} dx + \lambda_i \cdot \delta N_i \right] dx = \int_0^L \delta N_i \left[ \frac{N_i}{A_i E_i} + \lambda_i \right] dx, \forall i. \quad (4.7)$$

Se obtienen por lo tanto, las siguientes relaciones puntuales:

$$\sum_i -\frac{d\lambda_i}{dx} E_i A_i - b = 0, \quad (4.8)$$

$$\sum_i -\lambda_i|_L E_i A_i - F = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{N_i}{A_i E_i} + \lambda_i = 0, \forall i. \quad (4.10)$$

Siendo  $\mathcal{N}^u$  y  $\mathcal{N}_i^N$  las funciones de forma adoptadas para desplazamientos y fuerzas normales respectivamente:

$$u = \mathcal{N}^u \mathbf{u}^e, \quad (4.11)$$

$$N_i = \mathcal{N}_i^N \mathbf{N}_i^e, \forall i, \quad (4.12)$$

discretizando la barra en elementos, se llega al siguiente funcional para un elemento:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(u, N_i, \lambda_i) = & \sum_i \int_0^L \left[ \frac{(\mathcal{N}_i^N \mathbf{N}_i^e)^T (\mathcal{N}_i^N \mathbf{N}_i^e)}{E_i A_i} \right] dx \\ & + \sum_i \int_0^L (\lambda_i^N)^T (\mathcal{N}_i^N \mathbf{N}_i^e - \mathcal{B}^u \mathbf{u}^e E_i A_i) - \int_0^L b^T \mathcal{N}^u \mathbf{u}^e - F \delta u|_L. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Realizando un procedimiento análogo al ya aplicado para la barra continua, se llega a las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\delta \tilde{\Pi}(u, N_i, \lambda_i)[\delta u] = \sum_i \int_0^L (\mathcal{B}^u)^T \lambda_i^e E_i A_i dx - \int_0^L (\mathcal{N}^u)^T b dx - F = 0, \quad (4.14)$$

$$\delta \tilde{\Pi}(u, N_i, \lambda_i)[\delta N_i] = \int_0^L \left[ \frac{(\mathcal{N}_i^N)^T \mathcal{N}_i^N}{E_i A_i} \mathbf{N}_i^e - (\mathcal{N}_i^N)^T \lambda_i^e \right] dx = 0, \forall i. \quad (4.15)$$

Sustituyendo la expresión de  $\lambda_i$  indicada en la ecuación (4.10) en la ecuación (4.14), se obtiene la siguiente igualdad:

$$\sum_i \left( - \int_0^L (\mathcal{B}^u)^T \mathcal{N}_i^N \mathbf{N}_i^e dx \right) = F + \int_0^L (\mathcal{N}^u)^T b dx. \quad (4.16)$$

De acuerdo a la ecuación (4.3),  $\lambda_i$  puede expresarse de la forma:

$$\lambda_i = -\frac{N_i}{E_i A_i} = \frac{-1}{E_i A_i} \int_{A_i} E_i \frac{du}{dx} d\omega = -\frac{du}{dx}. \quad (4.17)$$

Por lo tanto, la ecuación (4.15) puede ser reescrita como:

$$\int_0^L \left[ \frac{(\mathcal{N}_i^N)^T \mathcal{N}_i^N}{E_i A_i} \mathbf{N}_i^e - (\mathcal{N}_i^N)^T \mathcal{B}^u \mathbf{u}^e \right] dx = 0, \forall i. \quad (4.18)$$

Las expresiones de  $\lambda_i$  podrán no cumplirse de forma exacta cuando los campos de tensiones y deformaciones sean aproximados. Sin embargo, en el caso de la barra sometida a una fuerza normal y debido al tipo de funciones de interpolación que se utilizarán, las expresiones utilizadas se cumplen de forma exacta.

Usando las siguientes definiciones:

$$A_i = \int_0^L (\mathcal{B}^u)^T \mathcal{N}_i^N dx, \quad (4.19)$$

$$C_i = \int_0^L \frac{(\mathcal{N}_i^N)^T \mathcal{N}_i^N}{E_i A_i} dx, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{F}^e = F + \int_0^L (\mathcal{N}^u)^T b dx, \quad (4.21)$$

a partir de las ecuaciones (4.17) y (4.18) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 0 & A_1 & \cdots & A_n \\ A_1^T & C_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_n^T & 0 & & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{N}_1^e \\ \vdots \\ \mathbf{N}_n^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

En este trabajo se han considerado funciones de forma lineales tanto para solicitaciones como para desplazamientos:

$$u^e = \begin{pmatrix} \frac{L^e - x}{L^e} & \frac{x}{L^e} \end{pmatrix}^T \mathbf{u}^e, \quad (4.23)$$

$$\mathbf{N}_i^e = \begin{pmatrix} \frac{L^e - x}{L^e} & \frac{x}{L^e} \end{pmatrix}^T \mathbf{N}_i^e, \forall i. \quad (4.24)$$

Si se considera una barra de hormigón armado, con una sección de hormigón  $A_c$  y una sección de acero  $A_s$ , el sistema de ecuaciones para un elemento es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{L^e}{3A_c E_c} & -\frac{L^e}{6A_c E_c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{L^e}{6A_c E_c} & -\frac{L^e}{3A_c E_c} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{L^e}{3A_s E_s} & -\frac{L^e}{6A_s E_s} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{L^e}{6A_s E_s} & -\frac{L^e}{3A_s E_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{N}_c^1 \\ \mathbf{N}_c^2 \\ \mathbf{N}_s^1 \\ \mathbf{N}_s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$



donde:

$\mathbf{u}^1$  es el desplazamiento del nodo 1 del elemento

$\mathbf{u}^2$  es el desplazamiento del nodo 2 del elemento

$\mathbf{N}_c^1$  es la fuerza normal del hormigón en el nodo 1 del elemento

$\mathbf{N}_c^2$  es la fuerza normal del hormigón en el nodo 2 del elemento

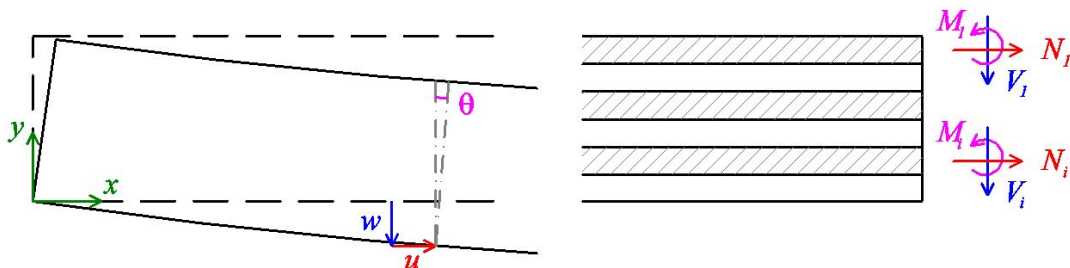
$\mathbf{N}_s^1$  es la fuerza normal del acero en el nodo 1 del elemento

$\mathbf{N}_s^2$  es la fuerza normal del acero en el nodo 2 del elemento

En el sistema hallado, se pueden identificar dos conjuntos de ecuaciones. Las dos primeras filas, se corresponden con las ecuaciones de equilibrio entre las solicitaciones internas de la pieza y las fuerzas aplicadas en el elemento. Las siguientes filas, son ecuaciones que vinculan las solicitaciones internas y los desplazamientos de la pieza; las restricciones impuestas con los multiplicadores de Lagrange.

## 4.2. Barras sometidas a flexión

En este trabajo se ha estudiado también el problema de vigas sometidas a flexión. Para el desarrollo de la formulación se ha utilizado el modelo de viga de Timoshenko. Para esto se divide la sección en capas y se asigna a cada capa las variables correspondientes a las solicitaciones. Los desplazamientos serán caracterizados por el desplazamiento de la fibra inferior de la sección, ya que el baricentro de la sección compuesta varía en el tiempo por lo que no es un parámetro que se pueda definir a priori (ver Figura 4.2).



**Figura 4.2:** Desplazamientos y solicitaciones incógnitas en el problema de flexión.

En el elemento de Viga de Timoshenko se cumplen las siguientes relaciones entre

tensiones, deformaciones y desplazamientos:

$$u(x, y) = u(x) - y\theta(x) = u(x) - y\left(\frac{dw(x)}{dx} + \phi\right), \quad (4.26)$$

$$w(x, y) = w(x), \quad (4.27)$$

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{du(x)}{dx} - y\frac{d\theta(x)}{dx}, \quad (4.28)$$

$$\gamma_{xy}(x, y) = \frac{dw(x)}{dx} + \frac{du(x)}{dy} = -\phi, \quad (4.29)$$

$$\sigma_i^x = E_i\varepsilon^x, \forall i, \quad (4.30)$$

$$\tau_i^{xy} = G_i\gamma^{xy}, \forall i. \quad (4.31)$$

Las solicitaciones se relacionan con los desplazamientos mediante las ecuaciones:

$$N_i = \int_{A_i} \sigma_i^x d\Omega = E_i \int_{A_i} \left( \frac{du(x)}{dx} - y\frac{d\theta(x)}{dx} \right) d\Omega = E_i A_i \left( \frac{du(x)}{dx} - y_{Gi} \frac{d\theta(x)}{dx} \right), \quad (4.32)$$

$$M_i = \int_{A_i} \sigma_i^x y_i d\Omega = \int_{A_i} E_i \left( \frac{du(x)}{dx} - y\frac{d\theta(x)}{dx} \right) y_i d\Omega = -E_i I_i \frac{d\theta(x)}{dx}, \quad (4.33)$$

$$V_i = \int_{A_i} \tau_i^{xy} d\Omega = G_i A_i^* \left( \frac{dw(x)}{dx} - \theta(x) \right). \quad (4.34)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_i^* &= \frac{A_i}{\alpha}, \\ \frac{1}{\alpha} &= \frac{A_i}{I_i^2} \int_{A_i} \frac{\mu_i^2(y, z)}{b^2(y)} d\Omega. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Si la barra tiene una longitud  $L$ , está sometida a una carga distribuida vertical  $q$ , y se le aplican las solicitaciones  $N_L$ ,  $M_L$  y  $V_L$  de normal, momento flector y cortante respectivamente, el total de la energía potencial se puede expresar de la forma:

$$\begin{aligned} \Pi(u, w, \theta) &= \sum_i \int_0^L \left[ \left( \frac{du}{dx} - y_{Gi} \frac{d\theta}{dx} \right) A_i E_i \left( \frac{du}{dx} - y_{Gi} \frac{d\theta}{dx} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d\theta}{dx} E_i I_i \frac{d\theta}{dx} + \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right) G_i A_i^* \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right) \right] dx \\ &\quad - \int_0^L q(x)w(x)dx - N_L u_L - w_L V_L - M_L \theta_L. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Si ahora se desea introducir como variables independientes en el problema a las sollicitaciones en la viga, de acuerdo a las relaciones establecidas en (4.32), (4.33) y (4.34), con sus respectivos multiplicadores de Langrange  $\lambda_i^N$ ,  $\lambda_i^M$  y  $\lambda_i^V$ , el Lagrangeano obtenido es:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}(u, w, \theta, N_i, V_i, M_i, \lambda_i^N, \lambda_i^V, \lambda_i^M) &= \sum_i \int_0^L \left[ \frac{N_i \cdot N_i}{A_i E_i} + \frac{M_i \cdot M_i}{I_i E_i} + \frac{V_i \cdot V_i}{A_i^* G_i} \right] dx \\
&+ \sum_i \int_0^L \left[ +\lambda_i^N \cdot \left( N_i - \left( \frac{du}{dx} + \frac{d\theta}{dx} y_{Gi} \right) \right) + \lambda_i^M \cdot \left( M_i + \frac{d\theta}{dx} E_i I_i \right) \right. \\
&+ \lambda_i^V \cdot \left. \left( V_i + \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right) G_i A_i^* \right) \right] dx \\
&- \int_0^L q(x) \cdot w dx - N_L u_L - w_L V_L - M_L \theta_L. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Si se impone que la variación del funcional sea nula para cada una de sus variables, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&\delta \tilde{\Pi}(u, w, \theta, N_i, V_i, M_i, \lambda_i^N, \lambda_i^V, \lambda_i^M)[\delta w] = \\
&= \sum_i \int_0^L \lambda_i^V \cdot \frac{d\delta w}{dx} G_i A_i^* dx - \int_0^L q \cdot \delta w dx - V|_L \cdot \delta w|_L \\
&= - \sum_i \int_0^L \frac{d\lambda_i^V}{dx} \cdot \delta w G_i A_i^* dx - \int_0^L q \cdot \delta w dx - V|_L \cdot \delta w|_L, \tag{4.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\delta \tilde{\Pi}(u, w, \theta, N_i, V_i, M_i, \lambda_i^N, \lambda_i^V, \lambda_i^M)[\delta \theta] = \\
&= \sum_i \int_0^L \left[ \lambda_i^M \cdot \frac{d\delta \theta}{dx} E_i I_i - \lambda_i^N \cdot \frac{d\delta \theta}{dx} y_{Gi} E_i A_i \right] dx - M|_L \cdot \delta \theta|_L \\
&= \sum_i \int_0^L \left[ -\frac{d\lambda_i^M}{dx} \cdot \delta \theta E_i I_i + \frac{d\lambda_i^N}{dx} \cdot \delta \theta y_{Gi} E_i A_i \right] dx \\
&+ \sum_i \left[ \lambda_i^M|_L E_i I_i \cdot \delta \theta|_L - \lambda_i^N|_L E_i A_i y_{Gi} \cdot \delta \theta|_L \right] - M|_L \cdot \delta \theta|_L, \tag{4.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta\tilde{\Pi}(u, w, \theta, N_i, V_i, M_i, \lambda_i^N, \lambda_i^V, \lambda_i^M)[\delta u] = \\
& = \sum_i \int_0^L -\lambda_i^N \cdot \frac{d\delta u}{dx} E_i A_i dx - N|_L \cdot \delta u|_L \\
& = \sum_i \int_0^L \frac{d\lambda_i^N}{dx} E_i A_i \cdot \delta u dx + \sum_i \lambda_i^N |_L E_i A_i \cdot \delta u|_L - N|_L \cdot \delta u|_L, \quad (4.40)
\end{aligned}$$

$$\delta\tilde{\Pi}(u, w, \theta, N_i, V_i, M_i, \lambda_i^N, \lambda_i^V, \lambda_i^M)[\delta M_i] = \int_0^L \left[ \frac{M_i \cdot \delta M_i}{E_i I_i} + \lambda_i^M \cdot \delta M_i \right] dx, \forall i, \quad (4.41)$$

$$\delta\tilde{\Pi}(u, w, \theta, N_i, V_i, M_i, \lambda_i^N, \lambda_i^V, \lambda_i^M)[\delta V_i] = \int_0^L \left[ \frac{V_i \cdot \delta V_i}{G_i A_i^*} + \lambda_i^V \cdot \delta V_i \right] dx, \forall i, \quad (4.42)$$

$$\delta\tilde{\Pi}(u, w, \theta, N_i, V_i, M_i, \lambda_i^N, \lambda_i^V, \lambda_i^M)[\delta N_i] = \int_0^L \left[ \frac{N_i \cdot \delta N_i}{E_i A_i} + \lambda_i^N \cdot \delta N_i \right] dx, \forall i. \quad (4.43)$$

Se obtienen por lo tanto, las siguientes relaciones puntuales:

$$\sum_i \frac{d\lambda_i^V}{dx} G_i A_i^* - q = 0, \quad (4.44)$$

$$\sum_i \lambda_i^V |_L G_i A_i^* - V|_L = 0, \quad (4.45)$$

$$\sum_i \left[ -\frac{d\lambda_i^M}{dx} E_i I_i + \frac{d\lambda_i^N}{dx} y_{Gi} E_i A_i - \lambda_i^V G_i A_i^* \right] = 0, \quad (4.46)$$

$$\sum_i \left[ \lambda_i^M |_L E_i I_i - \lambda_i^N |_L E_i A_i y_{Gi} \right] - M|_L = 0, \quad (4.47)$$

$$\sum_i \frac{d\lambda_i^N}{dx} E_i A_i = 0, \quad (4.48)$$

$$\sum_i -\lambda_i^N |_L E_i A_i - N|_L = 0. \quad (4.49)$$

Siendo  $\mathcal{N}^u$ ,  $\mathcal{N}^w$ ,  $\mathcal{N}^\theta$ ,  $\mathcal{N}_i^N$ ,  $\mathcal{N}_i^V$  y  $\mathcal{N}_i^M$  las funciones de forma adoptadas para desplazamientos longitudinales, desplazamientos verticales, giros, fuerzas normales, fuerzas cor-

tantes y momentos flectores respectivamente:

$$u = \mathcal{N}^u \mathbf{u}^e, \quad (4.50)$$

$$w = \mathcal{N}^w \mathbf{w}^e, \quad (4.51)$$

$$\theta = \mathcal{N}^\theta \boldsymbol{\theta}^e, \quad (4.52)$$

$$N_i = \mathcal{N}_i^N \mathbf{N}_i^e, \forall i, \quad (4.53)$$

$$V_i = \mathcal{N}_i^V \mathbf{V}_i^e, \forall i, \quad (4.54)$$

$$M_i = \mathcal{N}_i^M \mathbf{M}_i^e, \forall i, \quad (4.55)$$

discretizando la barra en elementos, se llega al siguiente funcional para un elemento

$$\begin{aligned} & \tilde{\Pi}(u, w, \theta, N_i, V_i, M_i, \lambda_i^N, \lambda_i^V, \lambda_i^M) = \\ & = \sum_i \int_0^L \left[ \frac{(\mathcal{N}_i^N \mathbf{N}_i^e)^T \cdot (\mathcal{N}_i^N \mathbf{N}_i^e)}{A_i E_i} + \frac{(\mathcal{N}_i^V \mathbf{V}_i^e)^T \cdot (\mathcal{N}_i^V \mathbf{V}_i^e)}{A_i^* G_i} + \frac{(\mathcal{N}_i^M \mathbf{M}_i^e)^T \cdot (\mathcal{N}_i^M \mathbf{M}_i^e)}{I_i E_i} \right. \\ & + (\lambda_i^M)^T \cdot (\mathcal{N}_i^M \mathbf{M}_i^e + \mathcal{B}^\theta \boldsymbol{\theta}^e E_i I_i) + (\lambda_i^N)^T \cdot (\mathcal{N}_i^N \mathbf{N}_i^e - (\mathcal{B}^u \mathbf{u}^e + \mathcal{B}^\theta \boldsymbol{\theta}^e y_{Gi}) E_i A_i) \\ & + (\lambda_i^V)^T \cdot (\mathcal{N}_i^V \mathbf{V}_i^e + (\mathcal{B}^w \mathbf{w}^e - \mathcal{N}^\theta \boldsymbol{\theta}^e) G_i A_i^*) \left. \right] dx \\ & - \int_0^L q^T \cdot \mathcal{N}^w \mathbf{w}^e dx - w|_L V|_L - \theta|_L M|_L - u|_L N|_L. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Realizando un procedimiento análogo al ya aplicado para la barra continua, se llega a las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\sum_i - \int_0^L (\mathcal{B}^w)^T \cdot \mathcal{N}_i^V \mathbf{V}_i^e dx - \int_0^L (\mathcal{N}^w)^T \cdot q dx - V|_L = 0, \quad (4.57)$$

$$\sum_i \left[ \int_0^L (\mathcal{B}^\theta)^T \cdot \mathcal{N}_i^N \mathbf{N}_i^e y_{Gi} dx + \int_0^L (\mathcal{N}^\theta)^T \cdot \mathcal{N}_i^V \mathbf{V}_i^e dx + \int_0^L (\mathcal{B}^\theta)^T \cdot \mathcal{N}_i^M \mathbf{M}_i^e dx \right] - M|_L = 0, \quad (4.58)$$

$$\sum_i \int_0^L (\mathcal{B}^u)^T \cdot \mathcal{N}_i^N \mathbf{N}_i^e dx - N|_L = 0, \quad (4.59)$$

$$\int_0^L \frac{(\mathcal{N}_i^M)^T \cdot \mathcal{N}_i^M}{E_i I_i} \mathbf{M}_i^e dx + \int_0^L (\mathcal{N}_i^M)^T \cdot \mathcal{B}^\theta \boldsymbol{\theta}^e dx = 0, \forall i, \quad (4.60)$$

$$\int_0^L \frac{(\mathcal{N}_i^V)^T \cdot \mathcal{N}_i^V}{E_i A_i^*} \mathbf{V}_i^e dx + \int_0^L (\mathcal{N}_i^V)^T \cdot \mathcal{B}^w \mathbf{w}^e dx - \int_0^L (\mathcal{N}_i^V)^T \cdot \mathcal{N}^\theta \boldsymbol{\theta}^e dx = 0, \forall i, \quad (4.61)$$

$$\int_0^L \frac{(\mathcal{N}_i^N)^T \cdot \mathcal{N}_i^N}{E_i A_i} \mathbf{N}_i^e dx - \int_0^L (\mathcal{N}_i^N)^T \cdot \mathcal{B}^u \mathbf{u}^e dx + \int_0^L (\mathcal{N}_i^N)^T \cdot \mathcal{B}^\theta y_{G_i} \boldsymbol{\theta}^e dx = 0, \forall i. \quad (4.62)$$

Se consideran en este trabajo elementos de dos nodos con interpolación lineal para las sollicitaciones y los desplazamientos. Se obtiene por lo tanto la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & \cdots & G_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_1 & \cdots & G_n & H_1 & \cdots & H_n & -G_1 & \cdots & -G_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & \cdots & G_n \\ & G_1^T & & A_1 & & & & & & & & \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & & & 0 & & 0 & & & \\ & G_n^T & & & A_n & & & & & & & \\ G_1^T & H_1^T & & & & B_1 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & & \ddots & & & 0 & & & \\ G_n^T & H_n^T & & & & & B_n & & & & & \\ & -G_1^T & G_1^T & & & & & C_1 & & & & \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & 0 & & & & \ddots & & & \\ & -G_n^T & G_n^T & & & & & & & C_n & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}^e \\ \boldsymbol{\theta}^e \\ \mathbf{u}^e \\ \mathbf{M}_1^e \\ \vdots \\ \mathbf{M}_n^e \\ \mathbf{V}_1^e \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n^e \\ \mathbf{N}_1^e \\ \vdots \\ \mathbf{N}_n^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^e \\ M^e \\ N^e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} -\frac{L}{3E_i I_i^e} & -\frac{L}{6E_i I_i^e} \\ -\frac{L}{6E_i I_i^e} & -\frac{L}{3E_i I_i^e} \end{pmatrix}; B_i = \begin{pmatrix} -\frac{L}{3E_i A_i^e} & -\frac{L}{6E_i A_i^e} \\ -\frac{L}{6E_i A_i^e} & -\frac{L}{3E_i A_i^e} \end{pmatrix}; C_i = \begin{pmatrix} -\frac{L}{3G_i A_i^{e*}} & -\frac{L}{6G_i A_i^{e*}} \\ -\frac{L}{6G_i A_i^{e*}} & -\frac{L}{3G_i A_i^{e*}} \end{pmatrix};$$

$$G_i = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; H_i = \begin{pmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{6} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} \end{pmatrix}.$$

donde:

- $\mathbf{w}^e$  es el vector de desplazamiento vertical del elemento  $e$ ,  
 $\theta^e$  es el vector de giro del elemento  $e$ ,  
 $\mathbf{u}^e$  es el vector de desplazamiento horizontal del elemento  $e$ ,  
 $\mathbf{M}_i^e$  es el vector de momento flector en la capa  $i$  del elemento  $e$ ,  
 $\mathbf{V}_i^e$  es el vector de fuerza cortante en la capa  $i$  del elemento  $e$ ,  
 $\mathbf{N}_i^e$  es el vector de fuerza normal en la capa  $i$  del elemento  $e$ ,  
 $\mathbf{V}^e$  es el vector de fuerzas cortantes nodales en el elemento  $e$ ,  
 $\mathbf{M}^e$  es el vector de momentos flectores nodales en el elemento  $e$ ,  
 $\mathbf{N}^e$  es el vector de fuerzas normales nodales en el elemento  $e$ ,  
 $I_i^e$  es el módulo de inercia de la sección de la capa  $i$  del elemento  $e$ ,  
 $A_i^e$  es el área de la sección de la capa  $i$  del elemento  $e$ ,  
 $A_i^{e*} = \frac{A_i^e}{\alpha_i^e}$  donde  $\alpha_i^e$  es el factor de forma de la sección de la capa  $i$  del elemento  $e$ .

Tal como sucede para el problema de la barra sometida a directa, en este caso también pueden identificarse las ecuaciones de equilibrio en las primeras filas y las ecuaciones de compatibilidad en las siguientes.

### 4.3. Deformaciones iniciales

Como se mostró en las anteriores secciones, las cargas aplicadas se introducen en el problema como vectores de fuerzas equivalentes, de forma similar al procedimiento aplicado en el MEF tradicional. Las deformaciones iniciales también serán incorporadas en el vector de fuerzas externas, pero no en las ecuaciones de equilibrio, sino en las de compatibilidad.

Si a una viga sometida a flexión se la aplica una deformación uniforme longitudinal  $\varepsilon_0$ , la expresión indicada en la ecuación (4.28) debe ser modificada, obteniendo la siguiente:

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{du(x)}{dx} - y \frac{d\theta(x)}{dx} + \varepsilon_0. \quad (4.64)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al ya descrito, el Lagrangeano es de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(u, w, \theta, N_i, V_i, M_i, \lambda_i^N, \lambda_i^V, \lambda_i^M) = & \sum_i \int_0^L \left[ \frac{N_i \cdot N_i}{A_i E_i} + \frac{M_i \cdot M_i}{I_i E_i} + \frac{V_i \cdot V_i}{A_i^* G_i} \right] dx \\ & + \sum_i \int_0^L \left[ +\lambda_i^N \cdot \left( N_i - \left( \frac{du}{dx} + \frac{d\theta}{dx} y_{Gi} + \varepsilon_0 \right) \right) + \lambda_i^M \cdot \left( M_i + \frac{d\theta}{dx} E_i I_i \right) \right. \\ & \left. + \lambda_i^V \cdot \left( V_i + \left( \frac{dw}{dx} - \theta \right) G_i A_i^* \right) \right] dx. \quad (4.65) \end{aligned}$$

Por lo tanto, discretizando el problema e imponiendo que la derivada del funcional sea nula, la ecuación de equilibrio puntual (4.62) es la única que se modifica, resultando de la forma:

$$\int_0^L \frac{(\mathcal{N}_i^N)^T \cdot \mathcal{N}_i^N}{E_i A_i} \mathbf{N}_i^e dx - \int_0^L (\mathcal{N}_i^N)^T \cdot \mathcal{B}^u \mathbf{u}^e dx + \int_0^L (\mathcal{N}_i^N)^T \cdot \mathcal{B}^\theta y_{Gi} \theta^e dx - \int_0^L (\mathcal{N}_i^N)^T \varepsilon_0 = 0, \forall i. \quad (4.66)$$

El término  $\int_0^L (\mathcal{N}_i^N)^T \varepsilon_0$  debe ser incorporado al vector de esfuerzos externos, en este caso en la ecuación de compatibilidad de deformaciones normales.

Esta deducción puede extenderse a deformaciones impuestas en cualquiera de las variables del problema.

#### 4.4. Formulación del elemento de cable

Para introducir los cables de postensado en el problema, se han utilizado elementos específicamente desarrollados para este efecto, con trazado continuo rectilíneo, donde se considera la contribución de cada cable para rigidez del elemento y para el vector sollicitación de la estructura, tal como ha sido presentado por Roca [68], Henriques [69], Povoas [70] y de Sousa [71].

Por lo tanto, cada tendón de postensado será tratado como un elemento independiente, que se superpone a los elementos de viga agregando la variable  $\tilde{N}$  al problema. La fuerza de postensado aplicada será incorporada como una deformación inicial del cable. Con esta formulación, será posible determinar la fuerza en el cable de forma directa, en cualquier etapa del problema.



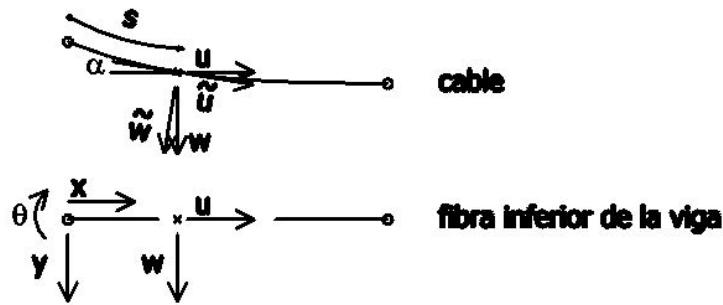


Figura 4.3: Definición de coordenadas del cable.

Como ya fue indicado en las ecuaciones (4.26) y (4.27), los desplazamientos del nodo pueden ser expresados de la siguiente forma:

$$u(x, y) = u(x) - y\theta(x), \quad (4.67)$$

$$w(x, y) = w(x). \quad (4.68)$$

De acuerdo a la Figura 4.3, el desplazamiento longitudinal que ocurre en un punto del tendón  $\tilde{u}(x)$ , puede ser relacionado con las componentes  $\theta$ ,  $u$  y  $w$  del desplazamiento de la fibra inferior de la viga según la expresión:

$$\tilde{u}(x) = (u(x) - y\theta(x)) \cos(\alpha) + w(x) \sin(\alpha). \quad (4.69)$$

Para determinar el Lagrangeano del elemento de cable, se debe determinar la deformación longitudinal del mismo en las coordenadas  $x, y$  del elemento de viga. La deformación axial del tendón se evalúa de la siguiente forma:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{u}(s)}{ds} = \frac{\tilde{u}(x) dx}{dx ds}. \quad (4.70)$$

La longitud del cable  $s$  se relaciona con las coordenadas  $x, y$  mediante las expresiones:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2} dx, \quad (4.71)$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}}. \quad (4.72)$$

En este trabajo, la geometría de los cables se considera lineal entre nodos consecutivos, por lo que la expresión indicada en la ecuación (4.70) queda de la forma:

$$\tilde{\epsilon} = \left[ \left( \frac{du(x)}{dx} - \frac{d(y\theta(x))}{dx} \right) \cos \alpha + \frac{dw(x)}{dx} \sin \alpha \right] \cos \alpha + \epsilon_0. \quad (4.73)$$

La fuerza de pretensado será introducida como una deformación inicial del cable, tal como fue indicado en la Sección 4.3. Por lo tanto, a la deformación del cable se debe sumar el término  $\varepsilon_0$ .

La energía de un elemento de cable se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\Pi(u, w, \theta) &= \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{L}} \frac{d\tilde{u}}{ds} E_p A_p \frac{d\tilde{u}}{ds} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d\tilde{u}}{ds} E_p A_p \frac{d\tilde{u}}{ds} \frac{ds}{\cos \alpha},\end{aligned}\quad (4.74)$$

donde:

- $\tilde{L}$  es el largo del elemento de cable,
- $E_p$  es el módulo de elasticidad del elemento de cable,
- $A_p$  es la sección del elemento de cable.

Introduciendo ahora la relación entre la deformación del cable y la fuerza axial, con su correspondiente multiplicador de Lagrange, el Lagrangeano obtenido es de la forma:

$$\tilde{\Pi}(u, w, \theta, \tilde{N}, \lambda^{\tilde{N}}) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\tilde{N} \cdot \tilde{N}}{E_p A_p \cos \alpha} dx + \int_0^L \lambda^{\tilde{N}} \cdot \left( \tilde{N} - E_p A_p \frac{d\tilde{u}}{ds} \right) \frac{dx}{\cos \alpha}. \quad (4.75)$$

Sumando el Lagrangeano correspondiente al de la barra en flexión indicado en (4.37) y realizando un procedimiento análogo al ya realizado para flexión, en el que se impone que la variación del funcional sea nula para cada una de sus variables, se obtienen las siguientes relaciones puntuales:

$$-\frac{d\lambda^{\tilde{N}}}{dx} E_p A_p \sin \alpha + \sum_i \frac{d\lambda_i^V}{dx} G_i A_i^* - q = 0, \quad (4.76)$$

$$-\lambda^{\tilde{N}}|_L E_p A_p \sin \alpha + \sum_i \lambda_i^V|_L G_i A_i^* - V|_L = 0, \quad (4.77)$$

$$-\frac{d\lambda^{\tilde{N}}}{dx} E_p A_p \tilde{y} \cos \alpha + \sum_i \left[ -\frac{d\lambda_i^M}{dx} E_i I_i + \frac{d\lambda_i^N}{dx} y_{Gi} E_i A_i - \lambda_i^V G_i A_i^* \right] = 0, \quad (4.78)$$

$$\lambda^{\tilde{N}}|_L E_p A_p \tilde{y} \cos \alpha + \sum_i \left[ \lambda_i^M|_L E_i I_i - \lambda_i^N|_L E_i A_i y_{Gi} \right] - M|_L = 0, \quad (4.79)$$

$$\frac{d\lambda^{\tilde{N}}}{dx} E_p A_p \cos \alpha + \sum_i \frac{d\lambda_i^N}{dx} E_i A_i = 0, \quad (4.80)$$

$$-\lambda^{\tilde{N}}|_L E_p A_p \cos \alpha + \sum_i -\lambda_i^N|_L E_i A_i - N|_L = 0, \quad (4.81)$$

$$\frac{\tilde{N}}{E_p A_p} + \tilde{\lambda} = 0, \quad (4.82)$$

donde  $\tilde{y}$  es la posición vertical del cable medida desde la fibra inferior de la viga.

Discretizando la barra en elementos, y adoptando la función de forma  $\mathcal{N}^{\tilde{N}}$  para interpolar la fuerza en el cable y la función  $\mathcal{Y}$  para interpolar la posición del cable,

$$\tilde{N} = \mathcal{N}^{\tilde{N}} \tilde{\mathbf{N}}^e, \quad (4.83)$$

$$\tilde{y} = \mathcal{Y} \mathbf{y}^e, \quad (4.84)$$

al funcional indicado en la ecuación (4.56) se debe agregar el siguiente término:

$$\begin{aligned} & \tilde{\Pi}(u, w, \theta, N_i, V_i, M_i, \tilde{N}, \lambda_i^N, \lambda_i^V, \lambda_i^M, \lambda^{\tilde{N}}) \\ = & \tilde{\Pi}(u, w, \theta, N_i, V_i, M_i, \lambda_i^N, \lambda_i^V, \lambda_i^M) + \int_0^L \frac{(\mathcal{N}^{\tilde{N}} \tilde{\mathbf{N}}^e)^T \cdot (\mathcal{N}^{\tilde{N}} \tilde{\mathbf{N}}^e)}{A_p E_p} \frac{dx}{\cos \alpha} \\ + & \int_0^L \left[ (\lambda^{\tilde{N}})^T \cdot \left( \mathcal{N}^{\tilde{N}} \tilde{\mathbf{N}}^e - \left( \mathcal{B}^u \mathbf{u}^e - \frac{d(\mathcal{Y} \mathbf{y}^e \mathcal{N}^\theta \theta^e)}{dx} \right) \cos \alpha + \mathcal{B}^w \mathbf{w}^e + \varepsilon_0 \right) A_p E_p \right] \frac{dx}{\cos \alpha}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Por lo tanto, a las ecuaciones de equilibrio enumeradas en (4.57) a (4.62) debe agregarse la siguiente:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{(\mathcal{N}^{\tilde{N}})^T \cdot \mathcal{N}^{\tilde{N}}}{E_p A_p \cos \alpha} \tilde{\mathbf{N}}^e dx + \int_0^L (\mathcal{N}^{\tilde{N}})^T \cdot \mathcal{B}^u \mathbf{u}^e \cos \alpha dx \\ - & \int_0^L (\mathcal{Y}' \mathcal{N}^{\tilde{N}})^T \cdot \mathcal{N}^\theta \theta^e \cos \alpha dx - \int_0^L (\mathcal{Y} \mathcal{N}^{\tilde{N}})^T \cdot \mathcal{B}^\theta \theta^e \cos \alpha dx \\ + & \int_0^L (\mathcal{N}^{\tilde{N}})^T \cdot \mathcal{B}^w \mathbf{w}^e \sin \alpha dx + \int_0^L \frac{(\mathcal{N}^{\tilde{N}})^T \varepsilon_0}{\cos \alpha} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Al sistema de ecuaciones planteado en (4.63), se le agrega ahora la incógnita de la fuerza directa en el cable en cada nodo del elemento con las correspondientes ecuaciones.

Si la posición del cable se expresa dentro de cada elemento como  $\tilde{y} = mx + n$ , el sistema obtenido es de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & \cdots & G_n & 0 & J \\ 0 & 0 & 0 & G_1 & \cdots & G_n & H_1 & \cdots & H_n & -G_1 & \cdots & -G_n & K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & & G_1 & \cdots & G_n & L \\ & G_1^T & & A_1 & & & & & & & & & \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & & & 0 & & 0 & & 0 & 0 & \\ & G_n^T & & & & & A_n & & & & & & \\ G_1^T & H_1^T & & & & & B_1 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & & & \ddots & & 0 & & 0 & 0 & \\ G_n^T & H_n^T & & & & & & & B_n & & & & \\ & -G_1^T & G_1^T & & & & & & & & C_1 & & \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & & & 0 & & & \ddots & & 0 & \\ & -G_n^T & G_n^T & & & & & & & & C_n & & \\ J^T & K^T & L^T & 0 & & & 0 & & 0 & & 0 & D & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}^e \\ \boldsymbol{\theta}^e \\ \mathbf{u}^e \\ \mathbf{M}_1^e \\ \vdots \\ \mathbf{M}_n^e \\ \mathbf{V}_1^e \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n^e \\ \mathbf{N}_1^e \\ \vdots \\ \mathbf{N}_n^e \\ \tilde{\mathbf{N}}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^e \\ M^e \\ N^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_\varepsilon^e \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{L}{3E_p A_p \cos \alpha^e} & -\frac{L}{6E_p A_p \cos \alpha^e} \\ -\frac{L}{6E_p A_p \cos \alpha^e} & -\frac{L}{3E_p A_p \cos \alpha^e} \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha^e}{2} & -\frac{\sin \alpha^e}{2} \\ \frac{\sin \alpha^e}{2} & \frac{\sin \alpha^e}{2} \end{pmatrix}; \quad (4.88)$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{Lm^e \cos \alpha^e}{3} & \frac{Lm^e \cos \alpha^e}{6} \\ \frac{Lm^e \cos \alpha^e}{6} & \frac{Lm^e \cos \alpha^e}{3} \end{pmatrix}; L = \begin{pmatrix} \left(\frac{Lm^e}{6} - \frac{n^e}{2}\right) \cos \alpha^e & \left(-\frac{Lm^e}{6} - \frac{n^e}{2}\right) \cos \alpha^e \\ \left(\frac{Lm^e}{3} + \frac{n^e}{2}\right) \cos \alpha^e & \left(\frac{2Lm^e}{3} + \frac{n^e}{2}\right) \cos \alpha^e \end{pmatrix}.$$

donde:

$\tilde{\mathbf{N}}^e$  es el vector de fuerza normal en el cable del elemento  $e$ ,

$F_\varepsilon^e$  es el vector que representa la fuerza de pretensado, introducida como una deformación impuesta en el cable del elemento  $e$ ,

$E_p^e$  es el módulo de elasticidad del acero del cable postensado,

$A_p^e$  es el área de la sección del cable del elemento  $e$ .

# Capítulo 5

## Desarrollo del Método

Se presenta un método que utiliza directamente la ecuación constitutiva del hormigón, del modelo indicado en el MC90. El método propuesto resuelve la integral de Volterra mediante el Método de la Cuadratura de Convolución (MCC).

En este método no es necesario realizar ninguna aproximación del modelo constitutivo propuesto en el MC90 por lo que las únicas aproximaciones utilizadas son las inherentes al método numérico que se aplica para su resolución. Se mostrará además que el método es sumamente versátil, admitiendo cualquier historia en la variación de las cargas o de los desplazamientos impuestos.

### 5.1. Método de la Cuadratura de Convolución

El MCC fue propuesto por Lubich ([72], [73]), aplicado por primera vez a problemas elastodinámicos por Schanz y Antes ([74],[75]) y fue aplicado a problemas viscoelásticos y poroelásticos por Schanz et al. [76]. En Schanz [77] el método fue reformulado para problemas elastodinámicos, en Moser et al. [78] se aplica a problemas de interacción dinámica suelo-estructura y en Abreu et al. [79] se aplica a problemas de propagación de ondas acústicas. Recientemente fue aplicado en termoelasticidad en Abreu et al. [80] y a problemas de conducción de calor en materiales funcionalmente graduales en [81].

Todos estos trabajos fueron realizados en el marco del método de los elementos de contorno (MEC), donde la aplicación del MCC evita trabajar con integrales de dominio, permitiendo mantener la característica del método de trabajar solamente con integrales

de contorno. Syngellakis and Wu [82] realizan una revisión de los métodos de cálculo de integrales de convolución cuando se trabaja con el MEC en viscoelasticidad y desarrollan un estudio detallado del desempeño del MCC.

Básicamente, el MCC aproxima una integral de convolución por una fórmula de cuadratura con un paso constante de tiempo  $\Delta t$ , i.e.,  $t_n = t_0 + n\Delta t$ , donde  $t_0$  es el tiempo inicial.

El MCC aproxima una integral de convolución:

$$(g * f)(t) = \int_{t_0}^{t_f} g(t - \tau)f(\tau)d\tau \quad (5.1)$$

en valores discretos;

$$(g * f)(t_n) \approx \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t, \gamma, \hat{g})f(t_0 + k\Delta t); n = 0, 1, \dots, NT \quad (5.2)$$

$$\omega_n(\Delta t, \gamma, \hat{g}) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{j=0}^{NT-1} \hat{g}(s_j)\zeta^{-nj}; L = NT \quad (5.3)$$

$$s_j = \frac{\gamma(\zeta^j R)}{\Delta t}, \quad (5.4)$$

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}, i = \sqrt{-1}, \quad (5.5)$$

$$\gamma(z) = \sum_{i=1}^{N_\gamma} \frac{1}{i}(1 - z)^i, z \in \mathbb{C}, \quad (5.6)$$

donde:

|                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| $t_0$                               | es el tiempo inicial de análisis,   |
| $t_f$                               | es el tiempo final de análisis,   |
| $NT$                                | es la cantidad de pasos en el tiempo,   |
| $\omega_n$                          | representa los pesos de integración,  |
| $\hat{g}$                           | es la transformada de Laplace de la función $g$ ,   |
| $\gamma$                            | es el polinomio característico del método “multistep” lineal de orden $N_\gamma$ utilizado por el MCC,        |
| $R = (\varepsilon)^{\frac{1}{2NT}}$ | es el radio del círculo de integración en un dominio donde la transformada de Laplace $\hat{g}$ es analítica, |
| $\varepsilon$                       | es el parámetro que define el radio del círculo de integración.   |

Los pesos de integración  $\omega_n$  representan los coeficientes de una serie de potencias que aproximan la transformada de Laplace. Estos coeficientes se obtienen mediante la fórmula integral de Cauchy la cual, después de adoptar un sistema de coordenadas polares, se aproxima mediante una regla trapezoidal considerando  $L$  subintervalos y se obtiene la expresión indicada en (5.3). Si se adopta  $L = NT$  y  $\varepsilon$  es el error en el cálculo de  $\hat{g}$ , entonces el error en el cálculo de los pesos  $\omega_n$  es del orden  $o(\sqrt{\varepsilon})$ .

Los términos de los pesos de integración  $\omega_n(\Delta t, \gamma, \hat{g})$  dependen de la diferencia de tiempo  $t - \tau = (n - k)\Delta t$  y no del tiempo total.

La desventaja de utilizar el MCC es que es necesario guardar en la memoria de la computadora los resultados obtenidos en todos los pasos de tiempo anteriores al que se está calculando.

## 5.2. Método propuesto

La idea del método, que sería aplicable a aquellos materiales cuya función de fluencia sea de la forma indicada en la ecuación (2.24), es agrupar dentro de la función  $g$  los términos de la derivada de función de fluencia que dependen de  $(t - \tau)$ , y dentro de la función  $f$  los términos de la derivada de la función de fluencia que dependen de  $\tau$  multiplicados por la historia de tensiones aplicadas.

De acuerdo a la expresión de la función de fluencia, el término  $J(t, t)$  de la ecuación de Volterra (2.11) puede ser expresado como:

$$J(t, t) = \left[ \frac{\varphi(t, t)}{E_{ci}} + \frac{1}{E_c(t)} \right] = \frac{1}{E_c(t)} = \frac{1}{E_{ci}\beta_E(t)}, \quad (5.7)$$

de acuerdo a su definición en las ecuaciones (2.12) y (2.25).

Se expresa ahora el producto  $J(t, t)\sigma_c(t)$ , que corresponde a la deformación elástica en el tiempo  $t$  como una integral, obteniendo la siguiente ecuación:

$$J(t, t)\sigma_c(t) = \int_{t_0^+}^t \delta(t - \tau) \frac{1}{E_c(t)} \sigma_c(\tau) d\tau. \quad (5.8)$$

De esta forma, usando la ecuación (2.11) la deformación total se puede expresar como la suma de dos integrales:

$$\varepsilon_c(t) = \int_{t_0^+}^t \delta(t - \tau) \frac{1}{E_c(t)} \sigma_c(\tau) d\tau - \int_{t_0^+}^t \frac{\partial J(t, \tau)}{\partial \tau} \sigma_c(\tau) d\tau. \quad (5.9)$$

Con esta transformación, las deformaciones elásticas se han expresado de forma tal que pueden ser calculadas mediante la cuadratura de convolución. De esta forma, se evita tener que dividir el proceso de cálculo en cada etapa de carga, como se realiza habitualmente en métodos como el paso a paso con aproximación mediante series de Dirichlet.

Usando la ecuación (5.7), el integrando de la segunda integral de la ecuación (5.9) es de la forma:

$$\frac{\partial J(t, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{E_c(\tau)} \right), \quad (5.10)$$

A partir de las ecuaciones (2.25) y (2.26) se obtiene:

$$\frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial \tau} = \phi_{RH} \beta(f_{cm}) \left[ \frac{\partial \beta(\tau)}{\partial \tau} \beta_c(t - \tau) + \beta(\tau) \frac{\partial \beta_c(t - \tau)}{\partial \tau} \right]. \quad (5.11)$$

Por lo tanto, la deformación total podrá ser expresada como la suma de cuatro integrales:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) = & \frac{1}{E_{ci}} \int_{t_0^+}^t \delta(t - \tau) \frac{1}{\beta_E(\tau)} \sigma_c(\tau) d\tau \\ & + \phi_{RH} \beta(f_{cm}) \int_{t_0^+}^t -\beta_c(t - \tau) \frac{\partial \beta(\tau)}{\partial \tau} \sigma_c(\tau) d\tau \\ & + \phi_{RH} \beta(f_{cm}) \int_{t_0^+}^t -\frac{\partial \beta_c(t - \tau)}{\partial \tau} \beta(\tau) \sigma_c(\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{E_{ci}} \int_{t_0^+}^t -\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\beta_E(\tau)} \right) \sigma_c(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.12)$$

En el último término de la ecuación (5.12), debido a que no hay ningún término que dependa de  $(t - \tau)$ , se adopta una función constante de valor unitario como dependiente de  $(t - \tau)$ . Esto es equivalente a multiplicar este término por la función de escalón unitario o Heaviside  $H(t - \tau)$ .



Se realizan ahora las siguientes definiciones y cambios de notación:

$$-\frac{\partial\beta}{\partial\tau}(\tau) = \beta'(\tau) = \frac{0,2}{(1 + \tau^{0,2})^2\tau^{0,8}}, \quad (5.13)$$

$$-\frac{\partial\beta_c}{\partial\tau}(t - \tau) = \beta'_c(t - \tau) = \frac{0,3\beta_H}{\left(\frac{t-\tau}{\beta_H+(t-\tau)}\right)^{0,7}(\beta_H + t - \tau)^2}, \quad (5.14)$$

$$\frac{1}{\beta_E(\tau)} = \kappa(\tau), \quad (5.15)$$

$$-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\beta_E(\tau)}\right) = \kappa'(\tau) = \frac{1}{4} \frac{s \sqrt{\frac{28}{t}}}{e^{s(-1+\sqrt{\frac{28}{t}})}_t}. \quad (5.16)$$

Aplicando el MCC a cada uno de los términos de la ecuación (5.12) se llega al siguiente resultado:

$$\int_{t_0^+}^t \delta(t - \tau)\kappa(\tau)\sigma_c(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t, \gamma, \hat{\delta})\kappa(t_0 + k\Delta t)\sigma_c(t_0 + k\Delta t), \quad (5.17)$$

$$\int_{t_0^+}^t \beta_c(t - \tau)\beta'(\tau)\sigma_c(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t, \gamma, \hat{\beta}_c)\beta'(t_0 + k\Delta t)\sigma_c(t_0 + k\Delta t), \quad (5.18)$$

$$\int_{t_0^+}^t \beta'_c(t - \tau)\beta(\tau)\sigma_c(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t, \gamma, \hat{\beta}'_c)\beta(t_0 + k\Delta t)\sigma_c(t_0 + k\Delta t), \quad (5.19)$$

$$\int_{t_0^+}^t H(t - \tau)\kappa'(\tau)\sigma_c(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t, \gamma, \hat{H})\kappa'(t_0 + k\Delta t)\sigma_c(t_0 + k\Delta t). \quad (5.20)$$

Por lo tanto, la ecuación resultante es de la forma:

$$\varepsilon_c(t_n) = \sum_{k=0}^n \mathcal{J}_{n-k,k}\sigma_{ck}, \quad (5.21)$$

donde:

$$\mathcal{J}_{n-k,k} = \sum_{k=0}^n \left[ \phi_{RH}\beta(f_{cm})\left(\omega_{n-k}(\Delta t, \gamma, \hat{\beta}_c)\beta'(t_0 + k\Delta t) + \omega_{n-k}(\Delta t, \gamma, \hat{\beta}'_c)\beta(t_0 + k\Delta t)\right) + \frac{1}{E_{ci}}\left(\omega_{n-k}(\Delta t, \gamma, \hat{\delta})\kappa(t_0 + k\Delta t) + \omega_{n-k}(\Delta t, \gamma, \hat{H})\kappa'(t_0 + k\Delta t)\right) \right] \quad (5.22)$$

$$\sigma_{ck} = \sigma_c(t_0 + k\Delta t). \quad (5.23)$$

Se puede ver entonces que todos los términos agrupados dentro de  $\mathcal{J}_k$  son conocidos, y las únicas incógnitas son las tensiones o deformaciones. Reagrupando ahora la ecuación

anterior, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\varepsilon_c(t_n) = \mathcal{J}_{0,n}\sigma_n + \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{J}_{n-k,k}\sigma_{ck}. \quad (5.24)$$

Por lo tanto, conocida la historia de tensiones hasta el tiempo  $t_{n-1}$ , el problema se transforma en la resolución de un sistema de ecuaciones lineal.

Para calcular los pesos  $\omega_{n-k}$  utilizados en el MCC, resta determinar las transformadas de Laplace de la ecuación(5.12) que dependen de  $(t - \tau)$ . Los resultados para los términos que aparecen en las integrales son:

$$L\{\beta_c(t)\} = \frac{0,3\pi \csc(0,3\pi)}{\Gamma(0,7)\beta_H} U(1,3; 2; s\beta_H), \quad (5.25)$$

$$L\left\{\frac{\partial\beta_c(t)}{\partial t}\right\} = \frac{0,3\pi \csc(0,3\pi)}{\Gamma(0,7)\beta_H} U(1,3; 2; s\beta_H)s, \quad (5.26)$$

$$L\{H(t)\} = \frac{1}{s}, \quad (5.27)$$

$$L\{\delta(t)\} = 1. \quad (5.28)$$

La función hipergeométrica confluyente  $U(a; b; z)$  [83] es una de las soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial:

$$z \frac{d^2w}{dz^2} + (b - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0, \quad (5.29)$$

está dada por la siguiente fórmula:

$$U(a, b, z) = \frac{\pi}{\sin \pi b} \left[ \frac{M(a, b, z)}{\Gamma(1 + a - b)\Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{M(1 + a - b, 2 - b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2 - b)} \right], \quad (5.30)$$

$$M(a, b, z) = 1 + \frac{az}{b} + \frac{(a)_2 z^2}{(b)_2 2!} + \dots + \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!}, \quad (5.31)$$

$$(a)_n = a(a + 1)(a + 2) \dots (a + n - 1), \quad (5.32)$$

$$a_0 = 1, \quad (5.33)$$

y se encuentra disponible en los sistemas ambientes de MATLAB y MAPLE.

Por lo tanto, en las ecuaciones (5.25), (5.26), (5.27) y (5.28) se trata de funciones conocidas y relativamente sencillas de evaluar, por lo que utilizando este método no es necesario hacer ningún tipo de aproximación de la función de fluencia propuesta en el MC90, a diferencia de los métodos paso a paso basados en cadenas de Kelvin o Maxwell. La única aproximación realizada es la inherente al método de resolución numérico.

### 5.3. Resolución mediante elementos finitos

Se presentará el desarrollo del método para elementos de barra, pero es generalizable a cualquier otro tipo de elemento.

En primer lugar, debe ensamblarse el sistema de ecuaciones lineal dado por las matrices de los elementos tal como fue indicado en la ecuación (4.22) e imponerse las condiciones de contorno.

Hecho esto, el sistema de ecuaciones tiene la forma general:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{C}(\frac{1}{E_i}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

donde:

- $\mathbf{A}$  es la sub-matriz que contiene todas las matrices constantes  $A_i$  ensambladas,
- $\mathbf{C}(\frac{1}{E_i})$  es la sub-matriz que contiene todas las matrices que dependen del módulo elástico del material  $C_i$  ensambladas,
- $\mathbf{u}$  es el vector de los desplazamientos de los nodos,
- $\mathbf{N}$  es el vector de las sollicitaciones en los nodos,
- $\mathbf{F}$  es el vector de fuerzas nodales.

Desarrollando el sistema de ecuaciones (5.34), se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{F} \\ \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{u} + \mathbf{C}(\frac{1}{E_i}) \cdot \mathbf{N} = 0 \end{cases}, \quad (5.35)$$

Si ahora en lugar del problema elástico, se desea resolver el problema diferido, de acuerdo al principio de correspondencia de Alfrey, (Creus and Marques [8]), el sistema de ecuaciones es sustituido por:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}(t) = \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{C}(J(t, \tau)) * \mathbf{N}(t) = 0 \end{cases}, \quad (5.36)$$

por lo que se debe realizar la convolución entre la matriz que depende de las funciones de fluencia de los distintos materiales que componen la barra y el vector de sollicitaciones.

De acuerdo a la ecuación (5.21), aplicando la cuadratura de convolución al término correspondiente se obtiene:

$$(\mathbf{C}(\mathcal{J}) * \mathbf{N})(t_n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{C}(\mathcal{J}_{n-k,k}) \mathbf{N}_k = 0, \quad (5.37)$$

donde:

$\mathbf{C}(\mathcal{J}_{n-k,k})$  representa la matriz que se obtiene después de realizar las operaciones indicadas en (5.21),

$\mathbf{N}_k$  es el vector de fuerzas en el tiempo  $t_k$ .

La segunda ecuación del sistema indicado en la ecuación (5.36) resulta en:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{u}_n + \sum_{k=0}^n \mathbf{C}(\mathcal{J}_{n-k,k}) \mathbf{N}_k = 0, \quad (5.38)$$

donde  $\mathbf{u}_n$  es el vector de desplazamientos en el tiempo  $t_n$ .

Esto puede ser escrito de la forma:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{u}_n + \mathbf{C}(\mathcal{J}_{0,n}) \mathbf{N}_n = - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{C}(\mathcal{J}_{n-k,k}) \mathbf{N}_k, \quad (5.39)$$

por lo que finalmente, el sistema de ecuaciones a resolver será:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{C}(\mathcal{J}_{0,n}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{N}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}(t_n) \\ - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{C}(\mathcal{J}_{n-k,k}) \mathbf{N}_k \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

En el método propuesto, se resuelve un sistema de ecuaciones para cada tiempo  $t_k$ . A medida que se avanza en el paso de tiempo, los resultados obtenidos hasta  $t_{k-1}$  son integrados al vector del lado derecho del sistema.

Una desventaja que presenta este método, es que la matriz del sistema debe ser determinada para cada tiempo  $t_k$ .

En el caso del hormigón armado, en el cual se desprecia la fluencia del acero, el sistema de ecuaciones obtenido es de la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{C}(\mathcal{J}_{0,n}) & 0 \\ \mathbf{A}^T & 0 & \mathbf{C}(\frac{1}{E_s}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{N}_n^c \\ \mathbf{N}_n^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_n \\ - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{C}(\mathcal{J}_{n-k,k}) \mathbf{N}_k^c \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Por lo tanto, se puede ver que no hay interferencia entre uno y otro material. En el caso de que se deseen incorporar las propiedades viscoelásticas del acero, no habría mayor inconveniente en realizarlo.

Como se puede ver, este desarrollo es generalizable para cualquier tipo de elemento, número de capas, materiales, etc.

# Capítulo 6

## Ejemplos y resultados

Para evaluar la aplicabilidad, confiabilidad y precisión del método propuesto se desarrolló un programa computacional en lenguaje de MATLAB.

Todos los parámetros necesarios para aplicar el modelo indicado (módulo de elasticidad del hormigón, resistencia media, etc.) fueron calculados según el MC90 [4].

En la medida que los modelos adoptados en este trabajo surgen de una amplia base de datos experimental, en este trabajo no se compara con resultados experimentales.

### 6.1. Barras sometidas a directa

En primer lugar, se debe verificar que el método propuesto resuelva con una precisión razonable ejemplos sencillos con soluciones conocidas. Es por esto que las primeras aplicaciones estudiadas son problemas de piezas compuestas únicamente de hormigón sometidas a un único esfuerzo.

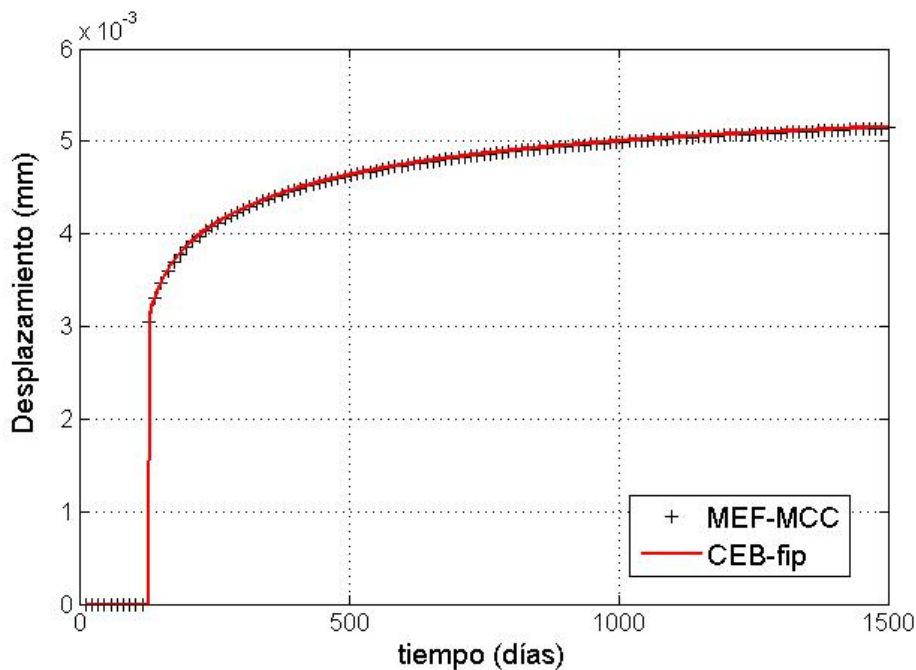
#### 6.1.1. Función de fluencia

El primer ejemplo analizado es el de una barra de sección 400x400 mm, 1m de largo, resistencia característica  $f_{ck}$  de 30 MPa y humedad relativa 80 %. En el tiempo  $t_c = 120$  días ( $d$ ), la barra se carga con una fuerza axial de 10 kN de compresión que se mantiene hasta el fin del análisis.

Este ejemplo reproduce un ensayo de fluencia, por lo que los resultados se comparan directamente con la función de fluencia indicada en el MC90.

El interés de este resultado, es que permite evaluar directamente si el método propuesto es capaz de resolver con precisión la integral de convolución indicada en la ecuación (2.11).

En la Figura 6.1 se muestran los resultados obtenidos considerando 128 intervalos en el tiempo. Se puede ver que el método propuesto reproduce en toda la historia la función de fluencia, teniendo errores menores al 1 % en todo el proceso (0,6 % el máximo error y 0,3 % después de  $t = 250d$ ).



**Figura 6.1:** Resultado obtenido para la fluencia del hormigón.

### 6.1.2. Función de relajación

El segundo ejemplo analizado es el de una barra de sección de 300x500 mm, 1 m de largo, resistencia característica  $f_{ck}$  de 25 MPa y humedad relativa 50 %. En el tiempo  $t_c = 120d$ , se le impone a la barra un acortamiento de 0,01 mm que se mantiene hasta el fin del análisis.

El objetivo de este ejemplo es verificar que el método desarrollado sea capaz de reproducir la función de relajación del hormigón.

En este caso, no se cuenta con una función de relajación explícita. Sin embargo, sabiendo que la función de relajación y función de fluencia están vinculadas a través de la

integral de Volterra del tipo:

$$1 = R(t_0, t_0)J(t_0, t_0) + \int_{t_0^+}^t J(t, \tau) \frac{\partial R(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (6.1)$$

evaluando la función de relajación en los puntos medios de cada intervalo de tiempo y aplicando la regla del trapecio se llega a la siguiente expresión [48]:

$$R(t_n, t_0) = \frac{2}{J(t_n, t_n) + J(t_n, t_{n-1})} \left[ 1 - E_c(t_0)J(t_n, t_0) - \sum_{i=1}^{n-2} (R(t_{i+1}, t_0) - R(t_i, t_0)) \left( \frac{J(t_n, t_{i+1}) + J(t_n, t_i)}{2} \right) \right] + R(t_{n-1}, t_0) \quad (6.2)$$

En la Figura 6.2, se pueden ver los resultados obtenidos para 128 intervalos en el tiempo. Ambos métodos obtienen respuestas similares, teniendo una diferencia inicial de 0,5 % que disminuye hasta 0,1 %.

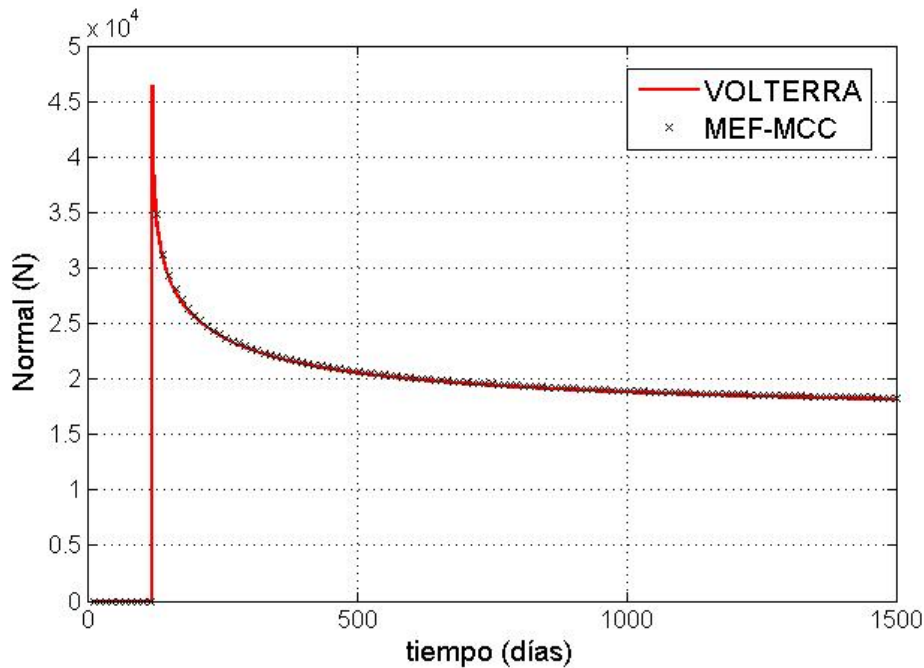


Figura 6.2: Resultado obtenido para la relajación del hormigón.

### 6.1.3. Carga descarga

El último de los ejemplos analizados para barras compuestas únicamente por hormigón es el de carga-descarga parcial. A la barra descrita en el primer ejemplo, se le aplica



una carga de compresión de 10 kN en  $t_c = 120d$  y se descarga parcialmente hasta 5 kN en  $t_s = 1000d$ . El análisis se realiza con 128 intervalos en el tiempo.

La respuesta analítica se determina mediante la superposición de dos funciones de fluencia con distinto inicio de carga:

$$\varepsilon(t) = J(t, t_c) \frac{10 \text{ kN}}{A} - J(t, t_d) \frac{5 \text{ kN}}{A}. \quad (6.3)$$

donde  $A$  es la sección de la barra.

Se puede ver en la Figura 6.3, que el método da resultados precisos luego de la descarga de la pieza, siendo el máximo error después de la descarga menor al 0,5 %.

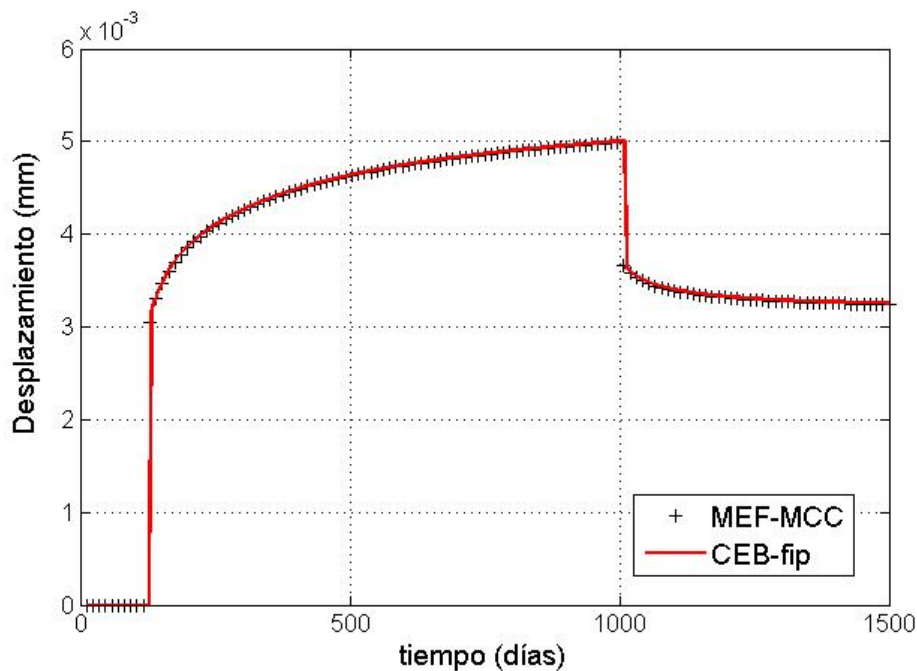
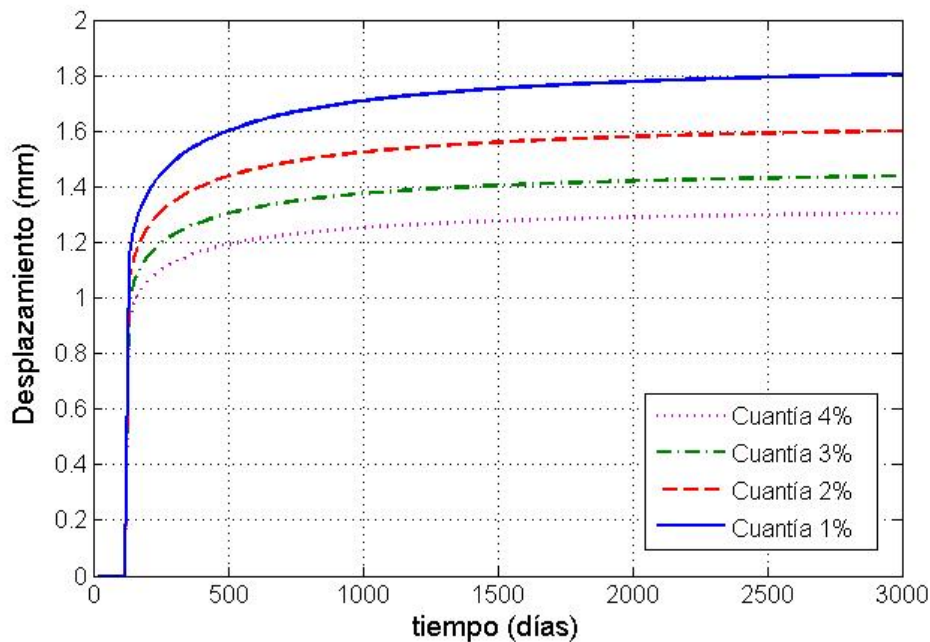


Figura 6.3: Resultado obtenido en el ejemplo de carga-descarga.

#### 6.1.4. Fluencia del hormigón armado

En el último ejemplo de barras sometidas únicamente a sollicitaciones normales, se incorporan armaduras a efectos de verificar el método con una sección compuesta de un material que presenta un comportamiento diferido en el tiempo y otro que no lo presenta. Una solución analítica de este problema se encuentra en la referencia [9], pero el resultado queda expresado en términos de una cuadratura de convolución que debe calcularse numéricamente o aplicar el método de los coeficientes de envejecimiento. La pieza

adoptada es de 350x500 mm de sección, 4 m de largo, resistencia característica  $f_{ck}$  de 30 MPa y humedad relativa 80 %. Se disponen cuantías geométricas de acero del 1 %, 2 %, 3 % y 4 %. Se considera un módulo de elasticidad del acero de  $2 \times 10^5$  MPa. En el tiempo  $t_c = 120d$ , se le aplica a la barra una fuerza de compresión de 1200 kN que se mantiene hasta el fin del análisis (10.000 días). El análisis se realiza considerando 1200 intervalos de tiempo.



**Figura 6.4:** Desplazamiento en la barra de hormigón armado para distintas cuantías de acero.

En la Figura 6.4 se muestran los desplazamientos obtenidos en el extremo de la barra de hormigón armado para las distintas cuantías. Como es de esperarse, se puede ver que a mayor cuantía de acero, menor desplazamiento y que en todos los casos el andamiento de las curvas responde al comportamiento del hormigón a largo plazo.

En las Figuras 6.5 y 6.6 se muestran las fuerzas normales obtenidas en el hormigón y en el acero respectivamente. Se puede apreciar que a mayor cuantía, los esfuerzos absorbidos por el acero son mayores y los del hormigón menores. Se distingue asimismo una clara transferencia de esfuerzos desde el hormigón hacia el acero a medida que transcurre el tiempo.

En este caso, se comparan los resultados en el infinito con el método del coeficiente

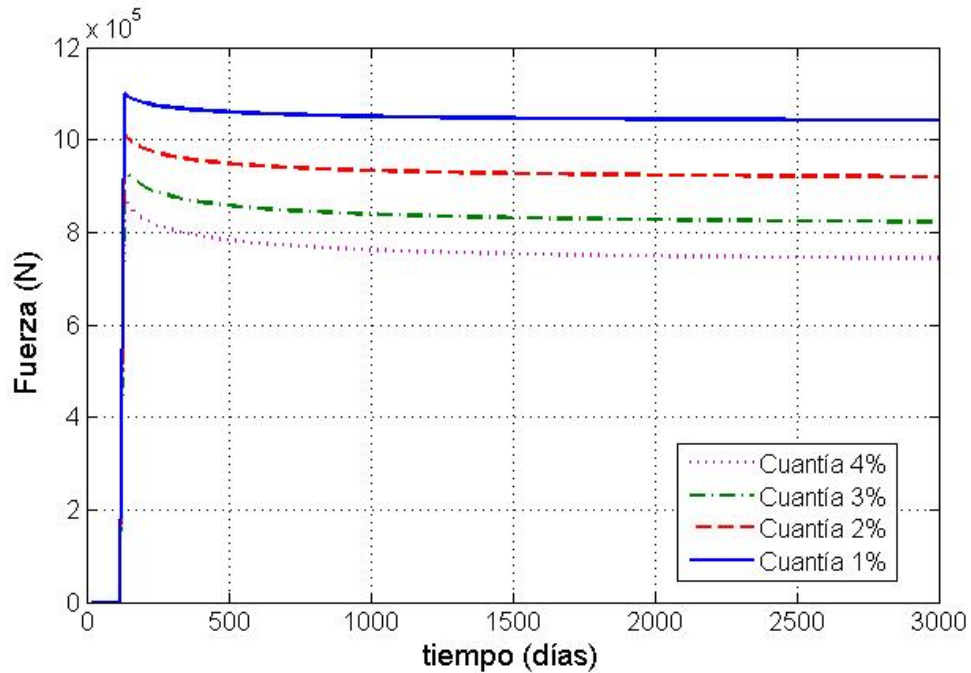


Figura 6.5: Fuerza normal en el hormigón para distintas cuantías de acero.

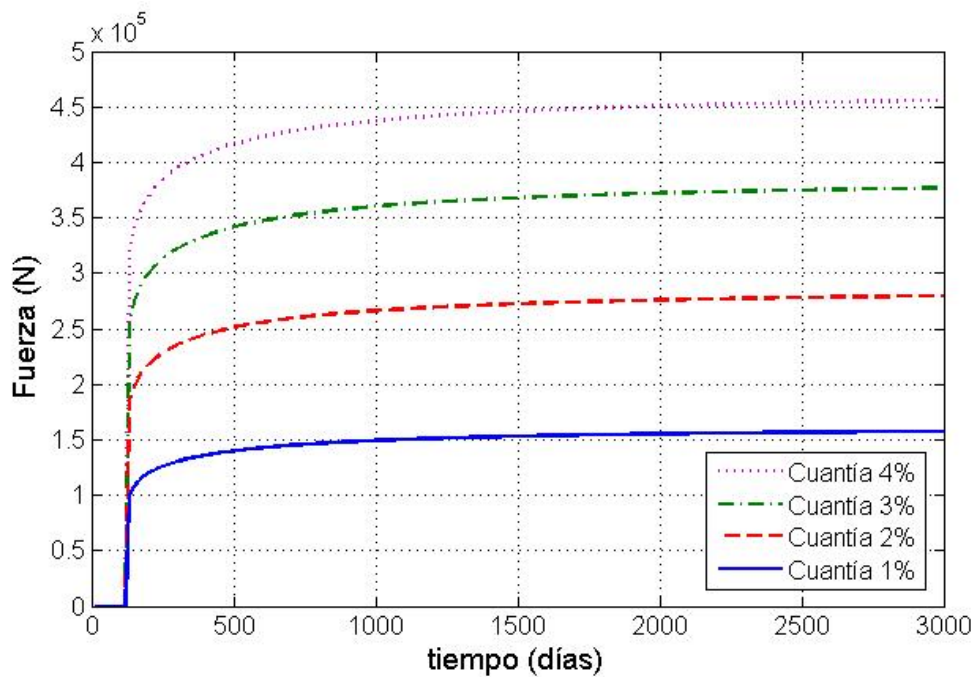


Figura 6.6: Fuerza normal en el acero para distintas cuantías de acero.

de envejecimiento y con el programa de elementos finitos SAP. Se considera para aplicar el método del coeficiente de envejecimiento,  $\chi = 0,9$  y  $\phi_{\infty} = 1,432$ . En el programa SAP,

se analiza el problema en 100 etapas de 100 días.

Se obtienen los resultados presentados en el Cuadro 6.1.

**Cuadro 6.1:** Comparación de los valores obtenidos en el infinito con los obtenidos mediante el método del coeficiente de envejecimiento y el programa de elementos finitos SAP.

|                            | Cuantía 1 % |        |      | Cuantía 2 % |        |      |
|----------------------------|-------------|--------|------|-------------|--------|------|
|                            | MEF-MCC     | $\chi$ | SAP  | MEF-MCC     | $\chi$ | SAP  |
| Desplazamiento (mm)        | 1,86        | 1,89   | 1,93 | 1,64        | 1,65   | 1,72 |
| Fuerza en el hormigón (kN) | 1038        | 1035   | 1034 | 912,6       | 911    | 902  |
| Fuerza en el acero (kN)    | 162,4       | 165    | 165  | 287,4       | 289    | 297  |
|                            | Cuantía 3 % |        |      | Cuantía 4 % |        |      |
|                            | MEF-MCC     | $\chi$ | SAP  | MEF-MCC     | $\chi$ | SAP  |
| Desplazamiento (mm)        | 1,47        | 1,47   | 1,56 | 1,33        | 1,32   | 1,42 |
| Fuerza en el hormigón (kN) | 813,6       | 814    | 796  | 733         | 737    | 709  |
| Fuerza en el acero (kN)    | 386,4       | 386    | 403  | 467         | 463    | 490  |

Se puede ver en el Cuadro 6.2, que la comparación con el método del coeficiente de envejecimiento arroja resultados muy similares, con diferencias menores al 2 % en todos los casos.

En la comparación con los resultados del SAP, se observa que a medida que aumenta la cuantía, los resultados presentan más diferencias. Asimismo, la magnitud que presenta la mayor diferencia es el desplazamiento en el extremo. Sin embargo, dado que los resultados del método propuesto son tan similares a los obtenidos mediante el método del

coeficiente de envejecimiento, es razonable suponer que sea el SAP el que esté presentando los errores al resolver este ejemplo.

**Cuadro 6.2:** Diferencia relativa de los valores obtenidos en el infinito con los obtenidos mediante el método del coeficiente de envejecimiento y el programa de elementos finitos SAP.

|                           | Cuantía 1 % |     | Cuantía 2 % |     | Cuantía 3 % |     | Cuantía 4 % |     |
|---------------------------|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|
|                           | $\chi$      | SAP | $\chi$      | SAP | $\chi$      | SAP | $\chi$      | SAP |
| Desplazamiento (%)        | 1,6         | 3,6 | 0,4         | 4,1 | 0,4         | 5,8 | 0,8         | 6,3 |
| Fuerza en el hormigón (%) | 0,3         | 0,4 | 0,2         | 1,2 | 0,0         | 2,2 | 0,5         | 3,4 |
| Fuerza en el acero (%)    | 1,6         | 1,6 | 0,6         | 3,2 | 0,1         | 3,4 | 0,9         | 4,7 |

## 6.2. Análisis de convergencia

### 6.2.1. Variación del número de intervalos

En la Figura 6.7, se muestra el error relativo en función del tiempo para los ejemplos de fluencia, relajación y carga-descarga con 128 pasos en el tiempo.

Como se puede apreciar, el error es máximo al inicio de la carga y luego decrece hasta estabilizarse en un error menor al 0.5 % en todos los casos.

A efectos de mejorar la precisión de los resultados obtenidos, se ha estudiado cómo varían los resultados de los ejemplos de fluencia y relajación en función de los pasos de tiempo elegidos para el análisis. Los resultados del ejemplo de fluencia son mostrados en la Figura 6.8 y los del ejemplo de relajación en la Figura 6.9. En el Cuadro 6.3 se computa el error para un punto de referencia en el tiempo.

Se puede ver que con muy pocos datos, los resultados son relativamente precisos. Sin embargo, al aumentar los intervalos, no se llega a la convergencia, sino que el resultado se aparta bruscamente a partir de  $t = 500d$ .

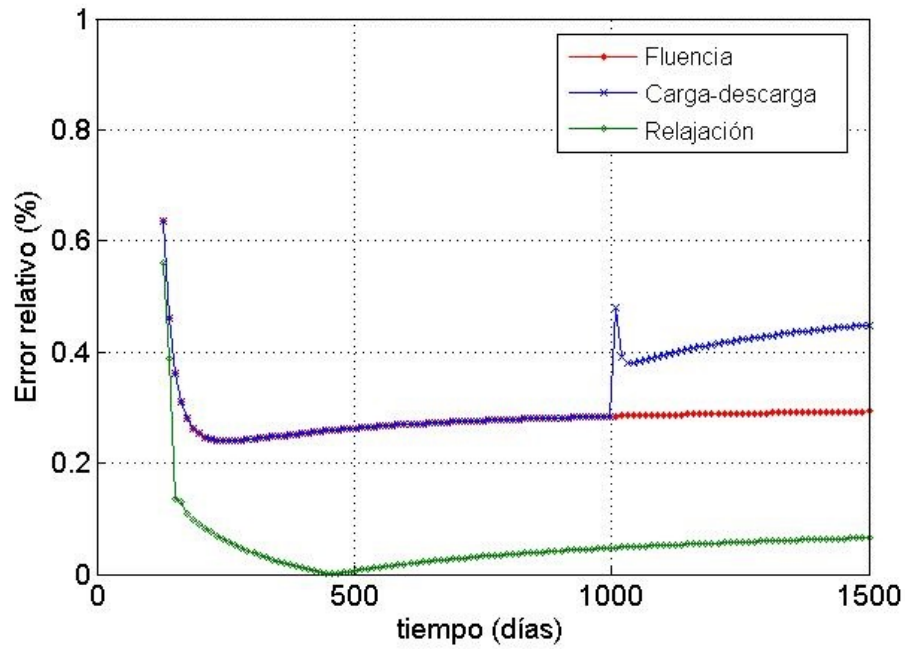


Figura 6.7: Errores obtenidos para los ejemplos de fluencia, relajación y carga-descarga.

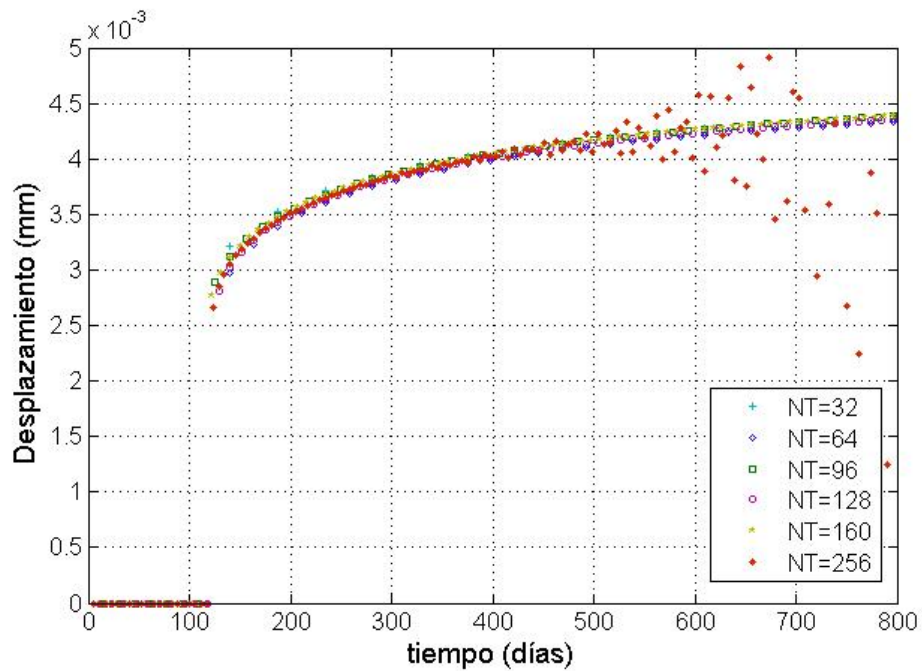
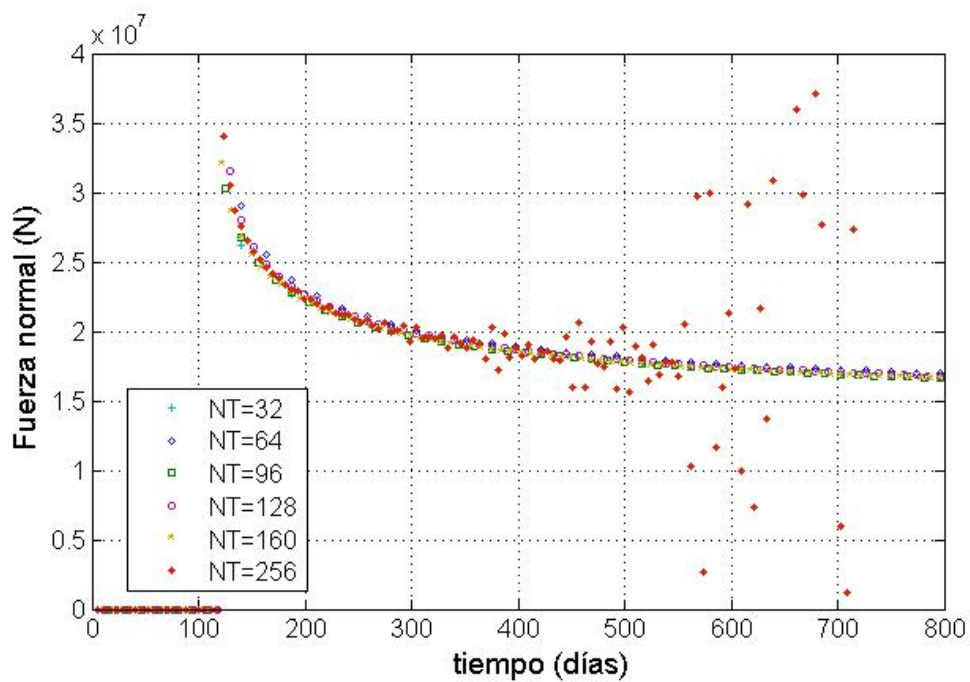


Figura 6.8: Resultado obtenido en el ejemplo de fluencia para los distintos números de intervalos en el tiempo NT

**Cuadro 6.3:** Errores obtenidos en los ejemplos de fluencia y retracción en  $t=750$  días para distintos números de intervalos en el tiempo NT.

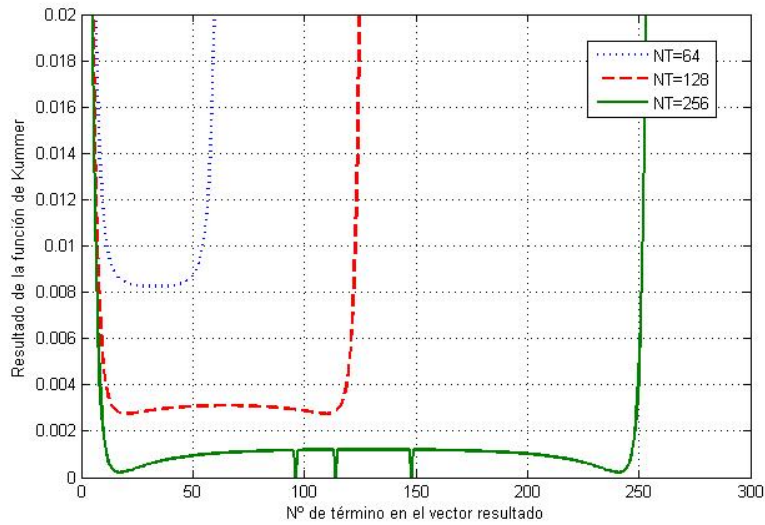
| NT  | Error fluencia | Error relajación |
|-----|----------------|------------------|
| 32  | 0,5 %          | 0,4 %            |
| 64  | 0,9 %          | 1,8 %            |
| 96  | 0,4 %          | 0,2 %            |
| 128 | 0,3 %          | 0,8 %            |
| 160 | 0,3 %          | 0,3 %            |
| 256 | 38,3 %         | 854 %            |



**Figura 6.9:** Resultado obtenido en el ejemplo de relajación para los distintos números de intervalos en el tiempo NT.

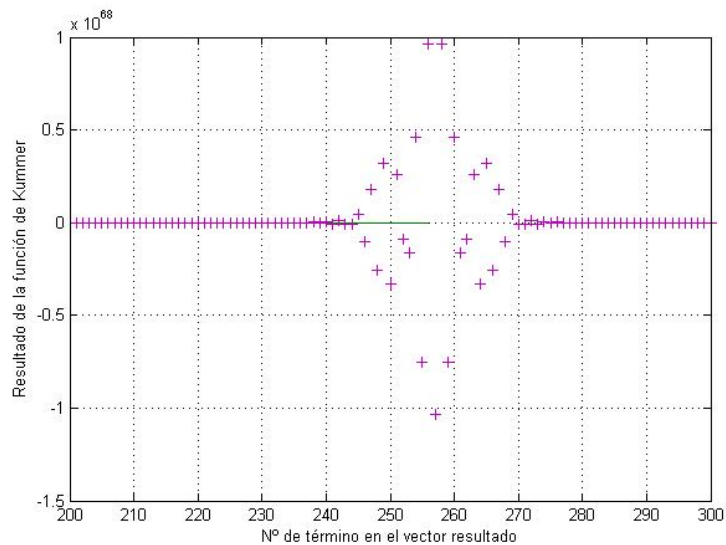
Se analizó con detalle este comportamiento, y se determinó que el origen de este comportamiento divergente se encuentra en el cómputo de los valores de la función de Kummer. En las Figuras 6.10 y 6.11 se grafican las partes reales de la evaluación de la función de Kummer para los distintos números de intervalos en el tiempo.

Con  $NT = 256$ , se observan tres puntos de discontinuidad entre los términos  $N^{\circ} 90$  y



**Figura 6.10:** Función de Kummer con  $NT = 64, 128$  y  $256$ .

Nº 150. Con  $NT = 512$  surgen numerosos puntos de discontinuidad con valores extremos.



**Figura 6.11:** Función de Kummer con  $NT = 512$ .

Se concluye entonces, que el programa MATLAB, no calcula la función de Kummer de forma adecuada fuera de cierto rango de argumentos, ya que por su definición ésta debería ser una función continua.

Este comportamiento, si bien no es inherente al método propuesto, representa una limitante en los ejemplos analizados.

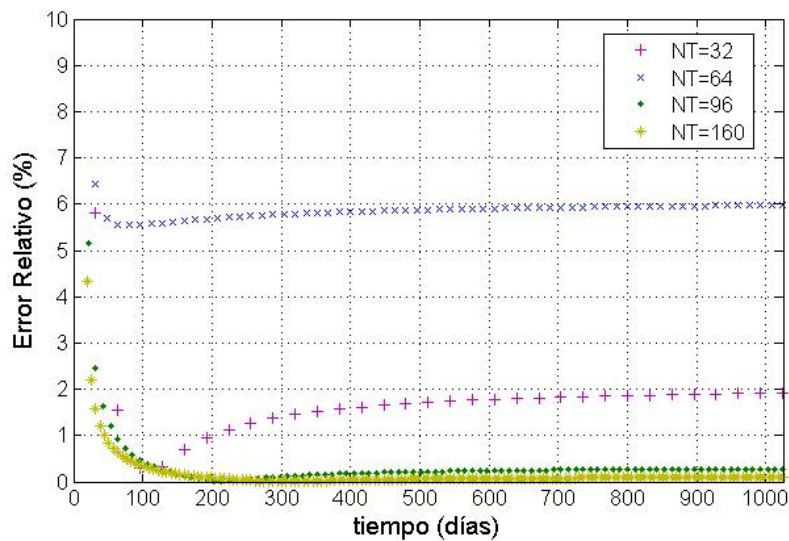


De todas formas, en este trabajo se ha utilizado la resolución de MATLAB ya que incluso con un número de intervalos no tan grande, se obtienen resultados suficientemente precisos para verificar la validez del método.

### 6.2.2. Variación del tiempo del inicio de la carga

En este trabajo se ha buscado también verificar la estabilidad del método propuesto, variando los distintos tiempos iniciales en los que se aplica la carga.

Esta verificación se realiza para el primer ejemplo analizado, que corresponde a la función de fluencia. Se adoptan inicios de carga  $t_0 = 16, 32, 64$  y  $128$  días y se mantiene la carga hasta los 1024 días. Se analizan también variando el número de intervalos en el tiempo, adoptando 32, 64, 96 y 160 intervalos. En las Figuras 6.12, 6.13, 6.14 y 6.15 se muestran los resultados obtenidos.



**Figura 6.12:** Error relativo obtenido en el ensayo de fluencia para  $t_0 = 16$  días.

Se puede observar que para números de intervalos altos, las soluciones obtenidas siempre muestran una buena precisión con errores menores al 3%. Los mayores errores se obtienen cuando se consideran pocos intervalos, como es de esperarse.

En el Cuadro 6.4 se presenta el error obtenido en  $t = 512$  para los distintos casos.

Se puede observar además que los errores disminuyen al aumentar el tiempo en el que se aplica la carga. Es esperable que para tiempos de carga menores a 28 días, los resultados obtenidos no sean precisos ya que la ley de variación del módulo de elasticidad

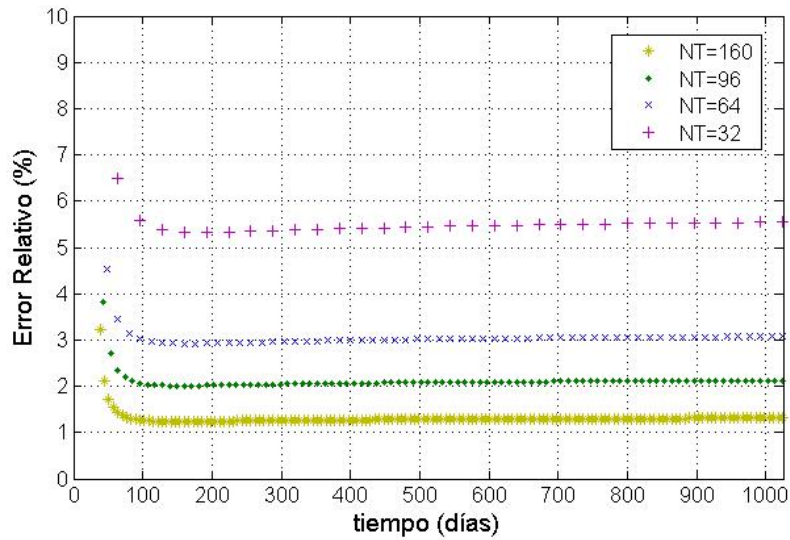


Figura 6.13: Error relativo obtenido en el ensayo de fluencia para  $t_0 = 32$  días.

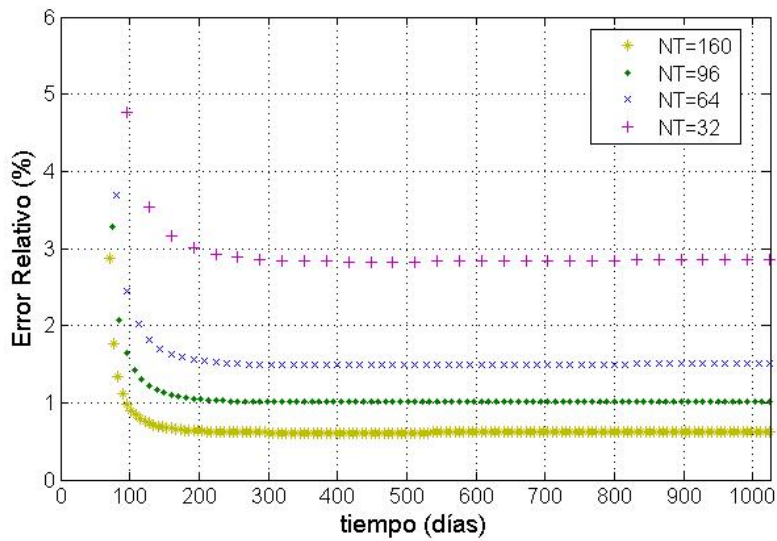
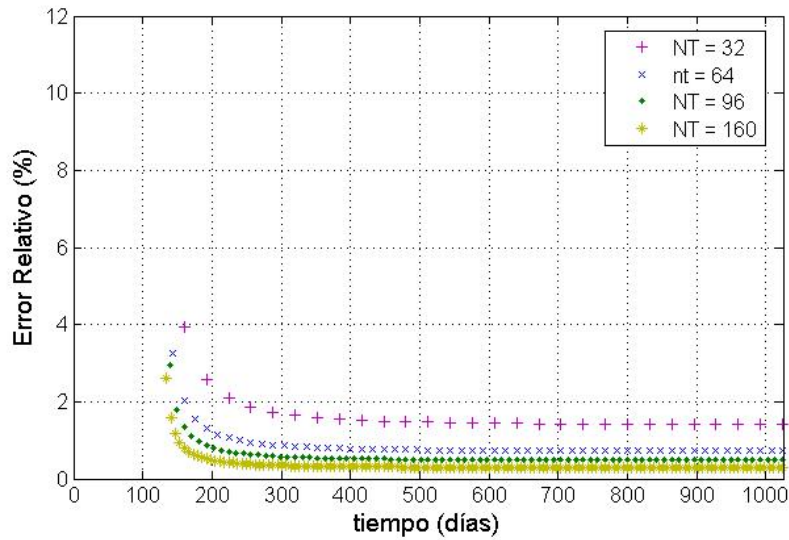


Figura 6.14: Error relativo obtenido en el ensayo de fluencia para  $t_0 = 64$  días.

está definida para un tiempo inicial de 28 días. Para hormigones más jóvenes, la evolución del módulo de elasticidad puede no ser representativa.

De todas formas, se puede apreciar que el método se comporta con una precisión razonablemente buena para las distintas edades de carga.



**Figura 6.15:** Error relativo obtenido en el ensayo de fluencia para  $t_0 = 128$  días.

**Cuadro 6.4:** Errores obtenidos el ejemplo de fluencia en  $t = 512$  días para distintos números de intervalos en el tiempo NT.

| NT  | $t_0 = 16$ | $t_0 = 32$ | $t_0 = 64$ | $t_0 = 128$ |
|-----|------------|------------|------------|-------------|
| 32  | 1,7 %      | 5,4 %      | 2,8 %      | 1,5 %       |
| 64  | 5,9 %      | 3,0 %      | 1,5 %      | 0,8 %       |
| 96  | 0,2 %      | 2,1 %      | 1,0 %      | 0,5 %       |
| 160 | 0,7 %      | 1,3 %      | 0,6 %      | 0,3 %       |

### 6.2.3. Error inicial

En todos los gráficos que representan el error, se observa que el máximo error siempre es el inicial. En esta sección, se intenta disminuir este error.

En el desarrollo del método, el término que corresponde a la deformación elástica en el tiempo  $t$  fue expresado como una integral de acuerdo a la ecuación (5.8). Si se deja este término por fuera de la convolución, al aplicar el MCC la ecuación (5.21) se modifica, resultando de la siguiente forma:

$$\varepsilon_c(t_n) = \frac{\sigma_n}{E_c(t_n)} + \sum_{k=0}^n \tilde{J}_{k,n-k} \sigma_{ck} \quad (6.4)$$

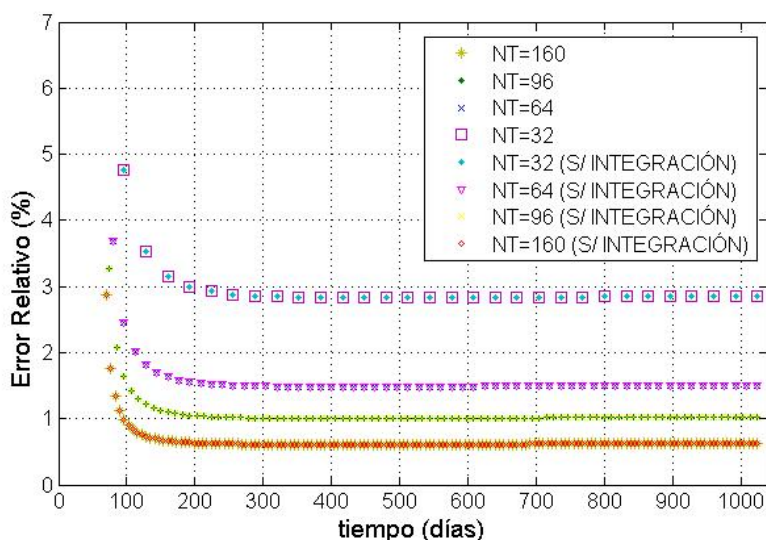
donde:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_{k,n-k} = & \sum_{k=0}^n \left[ \varphi_{RH} \beta(f_c m) \left( \omega_{n-k}(\Delta t, \gamma, \hat{\beta}_c) \beta'(t_0 + k\Delta t) + \omega_{n-k}(\Delta t, \gamma, \hat{\beta}'_c) \beta(t_0 + k\Delta t) \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{E_{ci}} \omega_{n-k}(\Delta t, \gamma, \hat{H}) \kappa'(t_0 + k\Delta t) \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Por lo tanto, la ecuación (5.24) puede ser escrita de la forma:

$$\varepsilon_c(t_n) = [\tilde{\mathcal{J}}_{n,0} + \frac{1}{E_c(t_n)}] \sigma_n + \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\mathcal{J}}_{k,n-k} \sigma_{ck}. \quad (6.6)$$

A modo de ejemplo, se aplica esta formulación alternativa al problema de fluencia con carga inicial en  $t_0 = 64$  días. Los resultados se muestran en la Figura 6.16.



**Figura 6.16:** Superposición de los resultados obtenidos estudiando el término elástico por fuera y dentro de la cuadratura de convolución (sin integración).

En el gráfico se puede observar que no hay cambio en la precisión utilizando una y otra formulación.

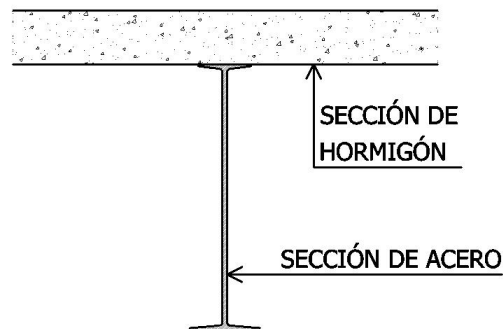
La forma de disminuir el error inicial sería entonces realizar incrementos de tiempo más pequeños al introducir las cargas. Podría pensarse en dividir el problema en etapas, con distintos pasos de tiempo. Si bien podrían obtenerse resultados más precisos con el mismo número total de pasos en el tiempo, densificando aquellos intervalos donde se introducen las cargas, esto le quitaría parte de la simplicidad al método.

### 6.3. Barras sometidas a flexión

Una vez asegurado que el método propuesto diese resultados precisos para ejemplos muy sencillos, se analizaron ejemplos de elementos de viga con aplicación práctica.

#### 6.3.1. Viga compuesta hormigón - acero

El primer ejemplo, corresponde al de una viga de acero trabajando en conjunto con una losa de hormigón, formando así una sección compuesta tal como se muestra en la Figura 6.17. Se analizó el ejemplo de una viga simplemente apoyada de 34 m de largo, sometida a una carga uniforme de 8560 N/m. La sección de hormigón considerada fue de 3000x300 mm y la de acero de 1500 mm de alto con un área de  $3,83 \times 10^4 \text{ mm}^2$  y una inercia de  $1,21 \times 10^{10} \text{ mm}^4$ . Se consideró un módulo de elasticidad del acero de  $2,1 \times 10^5 \text{ MPa}$ .

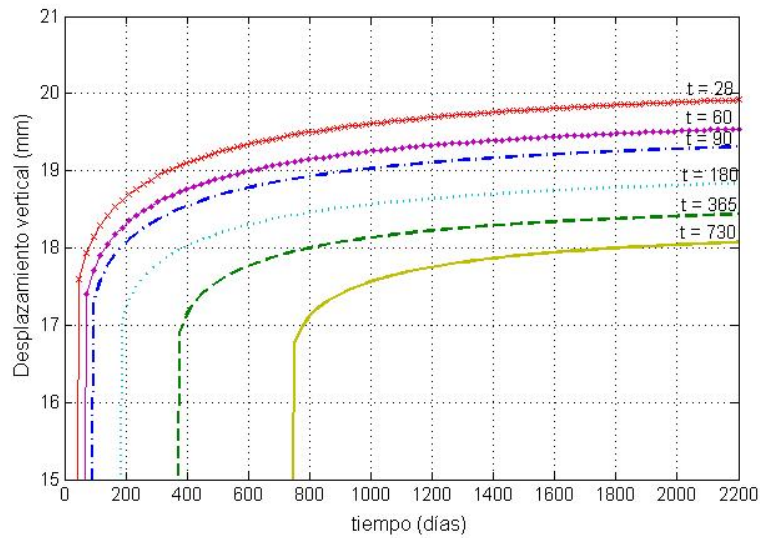


**Figura 6.17:** Sección esquemática de la viga compuesta adoptada.

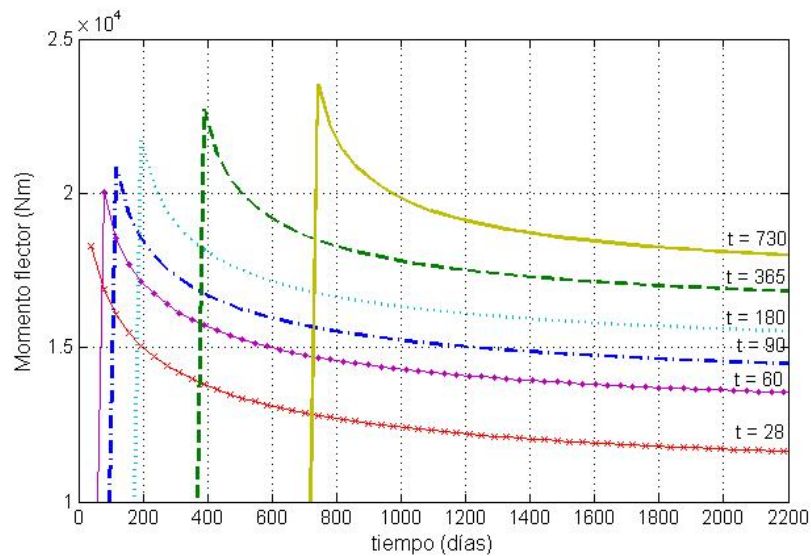
Se cargó la viga a las edades de 28, 60, 90, 180, 365 y 730 días y se mantuvo la carga constante hasta los 20000 días. El análisis se realizó con 256 pasos en el tiempo.

En la Figura 6.18 se muestran los resultados obtenidos para el desplazamiento vertical del punto medio de la viga. Se puede ver que el andamio acompaña lo esperado de acuerdo a la fluencia del hormigón, y que el máximo alcanzado se incrementa con la introducción más temprana de las cargas.

En las Figuras 6.19, 6.20 y 6.21 se muestra el momento flector en la sección de hormigón, el momento flector en la sección de acero y la directa en el acero (que es igual y opuesta a la del hormigón ya que no hay cargas normales aplicadas) en la sección media, de acuerdo a las sollicitaciones definidas en la Figura 4.2. Se puede ver que a medida que



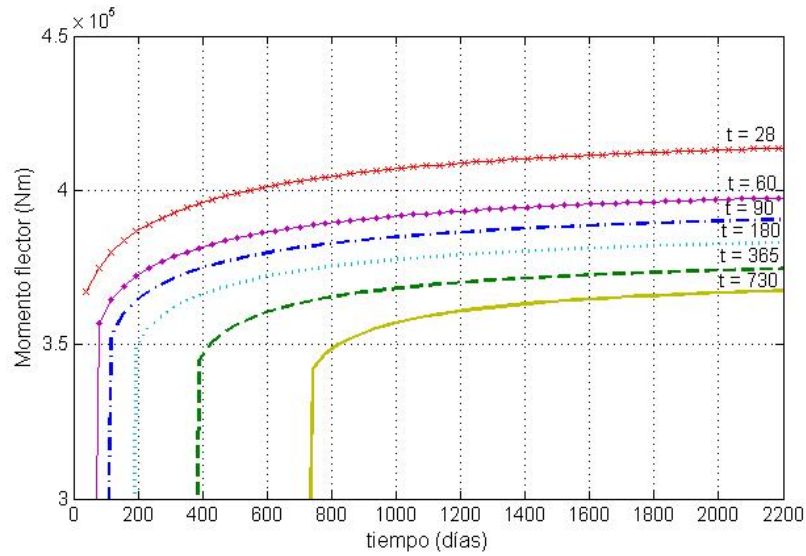
**Figura 6.18:** Desplazamiento en el punto medio de la viga compuesta.



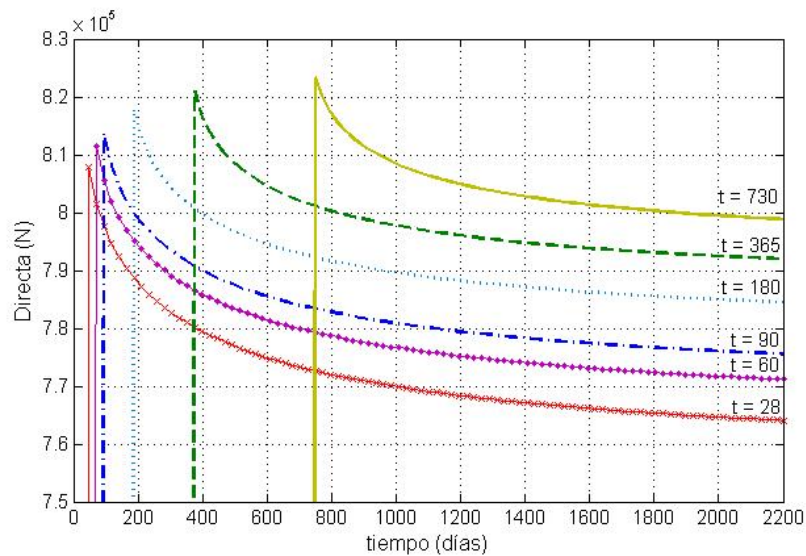
**Figura 6.19:** Momento flector de la sección de hormigón en el punto medio de la viga compuesta.

trascurre el tiempo, la sección de acero gana rigidez relativa por lo que incrementa el momento flector que absorbe, mientras que en el hormigón las solicitaciones decrecen, como era de esperarse.

A efectos de convalidar los resultados obtenidos, se realizó el modelo de la estructura analizada en el programa de elementos finitos SAP 2000, para el cual se utilizaron 20



**Figura 6.20:** Momento flector en la sección de acero en el punto medio de la viga compuesta.



**Figura 6.21:** Fuerza normal de la sección de acero en el punto medio de la viga compuesta.

etapas de 20 pasos de tiempo. Asimismo, se determinaron las tensiones en tiempo infinito mediante el método del coeficiente de envejecimiento. El Cuadro 6.5 muestra los resultados de tensiones máximas y desplazamiento vertical en el punto medio obtenidos para los tres métodos, y el Cuadro 6.6 las diferencias relativas determinadas.

Excepto por algunos valores puntuales, en general todos los errores se encuentran por

**Cuadro 6.5:** Comparación de los valores obtenidos mediante el MCC, SAP y CE.

|     |     | $\sigma_{sup}^h$ (MPa) | $\sigma_{inf}^h$ (MPa) | $\sigma_{sup}^a$ (MPa) | $\sigma_{inf}^a$ (MPa) | w (mm) |
|-----|-----|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|--------|
| MCC | 28  | -11,2                  | -6,3                   | -108,2                 | 414,9                  | 20,2   |
|     | 60  | -11,8                  | -6,1                   | -91,6                  | 410,1                  | 19,5   |
|     | 90  | -12,1                  | -5,9                   | -84,5                  | 407,9                  | 19,1   |
|     | 180 | -12,4                  | -5,7                   | -77,0                  | 405,6                  | 18,6   |
|     | 365 | -12,8                  | -5,5                   | -68,6                  | 403,1                  | 18,2   |
|     | 730 | -13,1                  | -5,3                   | -62,8                  | 401,5                  | 17,9   |
| SAP | 28  | -11,4                  | -6,5                   | -107,7                 | 423,3                  | 20,7   |
|     | 60  | -11,9                  | -6,3                   | -96,4                  | 419,9                  | 20,1   |
|     | 90  | -12,1                  | -6,2                   | -91,0                  | 418,3                  | 19,9   |
|     | 180 | -12,6                  | -5,9                   | -82,6                  | 415,7                  | 19,5   |
|     | 365 | -12,9                  | -5,7                   | -75,0                  | 413,4                  | 19,1   |
|     | 730 | -13,2                  | -5,5                   | -68,5                  | 411,3                  | 18,7   |
| CE  | 28  | -12,2                  | -5,8                   | -89,6                  | 409,7                  |        |
|     | 60  | -12,4                  | -5,7                   | -82,8                  | 407,7                  |        |
|     | 90  | -12,2                  | -5,5                   | -80,4                  | 410,1                  |        |
|     | 180 | -12,7                  | -5,5                   | -73,1                  | 404,8                  |        |
|     | 365 | -13,0                  | -5,4                   | -67,2                  | 403,1                  |        |
|     | 730 | -13,2                  | -5,3                   | -61,9                  | 401,5                  |        |

debajo del 5 %.

A efectos de analizar aquellos resultados que se alejan más de los valores de referencia, en las Figuras 6.23, 6.22, 6.25 y 6.24 se grafican las tensiones de cada uno de los métodos.

El resultado que difiere más respecto a los obtenidos mediante el SAP, es el de la tensión en la fibra superior del acero cuando la carga se aplica a los 365 días. Sin embargo, analizando los gráficos presentados, se puede ver que el resultado obtenido mediante el



**Cuadro 6.6:** Diferencias relativas porcentuales obtenidas del MCC respecto a los resultados del SAP y del CE.

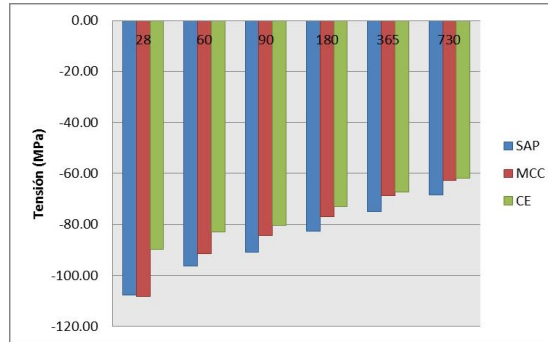
|     |     | $\sigma_{sup}^h$ | $\sigma_{inf}^h$ | $\sigma_{sup}^a$ | $\sigma_{inf}^a$ | w     |
|-----|-----|------------------|------------------|------------------|------------------|-------|
| SAP | 28  | 2,1 %            | 3,3 %            | 0,4 %            | 2,0 %            | 1,8 % |
|     | 60  | 1,1 %            | 3,4 %            | 5,0 %            | 2,3 %            | 3,2 % |
|     | 90  | 0,3 %            | 4,2 %            | 7,2 %            | 2,5 %            | 4,1 % |
|     | 180 | 1,0 %            | 3,2 %            | 6,8 %            | 2,4 %            | 4,8 % |
|     | 365 | 0,9 %            | 3,2 %            | 8,5 %            | 2,5 %            | 4,7 % |
|     | 730 | 1,0 %            | 3,1 %            | 8,4 %            | 2,4 %            | 4,4 % |
| CE  | 28  | 7,9 %            | 10,0 %           | 20,7 %           | 1,3 %            |       |
|     | 60  | 4,6 %            | 6,7 %            | 10,6 %           | 0,6 %            |       |
|     | 90  | 1,0 %            | 7,2 %            | 5,0 %            | 0,5 %            |       |
|     | 180 | 2,5 %            | 3,9 %            | 5,3 %            | 0,2 %            |       |
|     | 365 | 1,3 %            | 2,2 %            | 2,1 %            | 0,0 %            |       |
|     | 730 | 0,6 %            | 1,0 %            | 1,4 %            | 0,0 %            |       |

método del coeficiente de envejecimiento, difiere aún más. El método propuesto arroja en este caso un valor intermedio entre los otros dos métodos.

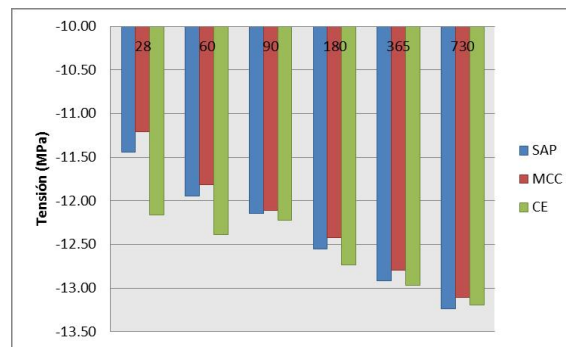
Por otro lado, el resultado que difiere más respecto a los obtenidos mediante el método del coeficiente de envejecimiento corresponde a la tensión superior en el acero pero a un tiempo de carga de 28 días, con una diferencia de más del 20 %. No obstante, al analizar nuevamente los gráficos, se puede observar que el resultado del SAP presenta una diferencia mayor.

Por lo tanto, si bien se pueden apreciar diferencias grandes entre los resultados obtenidos por uno y otro método, con el método propuesto se obtienen resultados que en general se encuentran dentro del rango esperable.

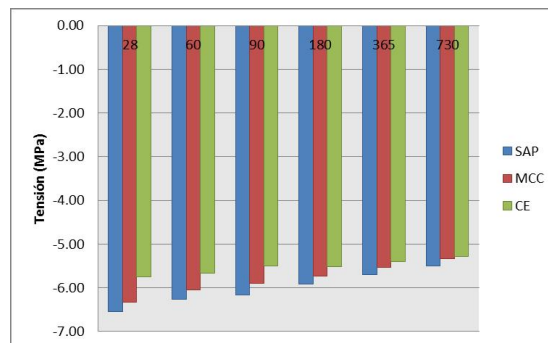
Este ejemplo fue analizado por Partov and Kantchev [52], pero debido a que se encontraron importantes diferencias en el comportamiento de la sección no se han tomado como referencia para realizar la comparación.



**Figura 6.22:** Comparación de la tensión en la fibra superior del hormigón obtenida mediante el SAP, MCC y CE.



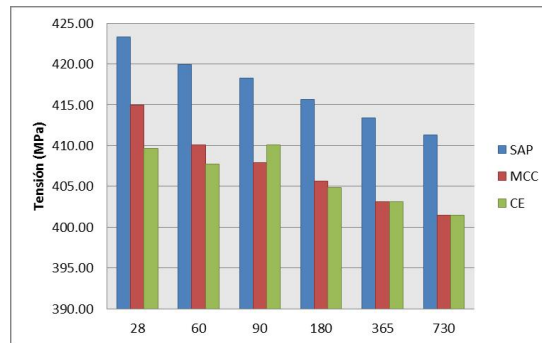
**Figura 6.23:** Comparación de la tensión en la fibra inferior del hormigón obtenida mediante el SAP, MCC y CE.



**Figura 6.24:** Comparación de la tensión en la fibra superior del acero obtenida mediante el SAP, MCC y CE.

### 6.3.2. Viga postensada

Conocer las deformaciones a largo plazo del hormigón es fundamental en el caso de piezas de hormigón pre y post tensado. Éstas deformaciones serán las responsables de las



**Figura 6.25:** Comparación de la tensión en la fibra inferior del acero obtenida mediante el SAP, MCC y CE.

pérdidas de tensión en los tendones, por lo que cuantificarlas es de suma importancia para el diseño ajustado de este tipo de piezas.

El valor de las fuerzas de pretensado en un tiempo  $t$  se obtiene de restar a la fuerza inicial las pérdidas diferidas. Éstas son las que se producen a lo largo del tiempo, después de ancladas las armaduras activas. Se deben esencialmente al acortamiento del hormigón por retracción y fluencia y a la relajación del acero.

En caso de que se trate de armaduras conformadas por varios tendones que se tensan sucesivamente, el tesado de un tendón produce un acortamiento elástico del hormigón, que provoca la disminución en la fuerza de los ya tensados, proporcional al acortamiento elástico.

En general, se admite una pérdida de tensión promedio para el conjunto de tendones, que depende de las etapas de tesado.

En este trabajo, las pérdidas por acortamiento elástico son determinadas por el programa desarrollado al evaluar comportamiento del conjunto hormigón-acero, por lo que no es necesario introducir las pérdidas o realizar hipótesis en base al procedimiento de tesado.

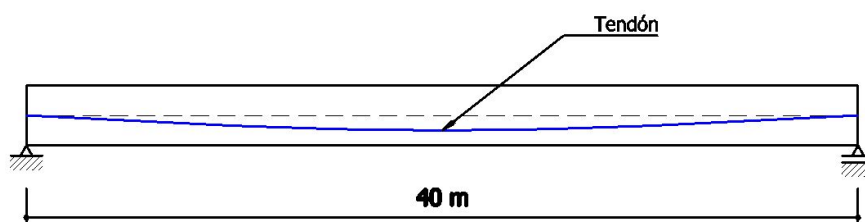
Las pérdidas diferidas se deben por un lado al acortamiento del hormigón por los efectos de fluencia lenta y retracción y por otro lado a la pérdida de tensión por relajación del acero.

En este trabajo, las deformaciones por retracción son impuestas como esfuerzos externos que varían en el tiempo, de acuerdo a la formulación presentada en la Sección 4.3.

La relajación es estimada mediante la fórmula presentada en la ecuación (2.59), aplicando a la viga la historia de esfuerzos de acuerdo a esta variación.

Finalmente, para evaluar los efectos de la fluencia lenta, se utiliza directamente función de fluencia, tal como fue indicado en la Sección 5.2.

La viga analizada está simplemente apoyada y tiene una luz de 40 m. La sección es de 600x1200 mm, se considera hormigón de resistencia característica  $f_{ck}$  32 MPa y 80 % de humedad relativa, con curado húmedo hasta los 3 días.



**Figura 6.26:** Viga analizada: simplemente apoyada con un cable parabólico.

Se coloca un cable parabólico de sección  $A_p = 924 \times 10^{-6} m^2$  e inercia  $I_p = 6,8 \times 10^8 m^4$ . La trayectoria del cable es parabólica, con excentricidad nula en los extremos y máxima excentricidad de 0.30 m en la mitad del vano. Se considera un módulo de elasticidad para el acero  $E_p = 2,0 \times 10^5$  MPa.

El cable se tensa a los 28 días con una fuerza inicial de 1100 kN. No se aplican cargas externas y se desprecia el peso propio de la viga.

Para evaluar las pérdidas instantáneas del cable, se consideró una penetración de cuñas de 5 mm, un coeficiente de rozamiento angular  $\mu = 0,21$  y un coeficiente de rozamiento parásito  $k = 0,012 m^{-1}$ .

El análisis se realiza con 20 elementos, 4 capas y 64 pasos en el tiempo.

En las Figuras 6.27 y 6.28 se muestra la evolución de la fuerza en el cable y la evolución de las pérdidas.

Como es esperable, en todos los casos la fuerza en el cable disminuye con el tiempo. Se puede ver claramente que el efecto con mayor influencia sobre las pérdidas del cable es la relajación, responsable del 13 % de las pérdidas, mientras que la fluencia y retracción son responsables de menos del 2 % cada una. En la Figura 6.28 se puede observar una pérdida inicial diferente de 0. Esto se debe a que el primer paso de tiempo no coincide con la edad en la que entra en carga, por lo que transcurren algunos días desde que se

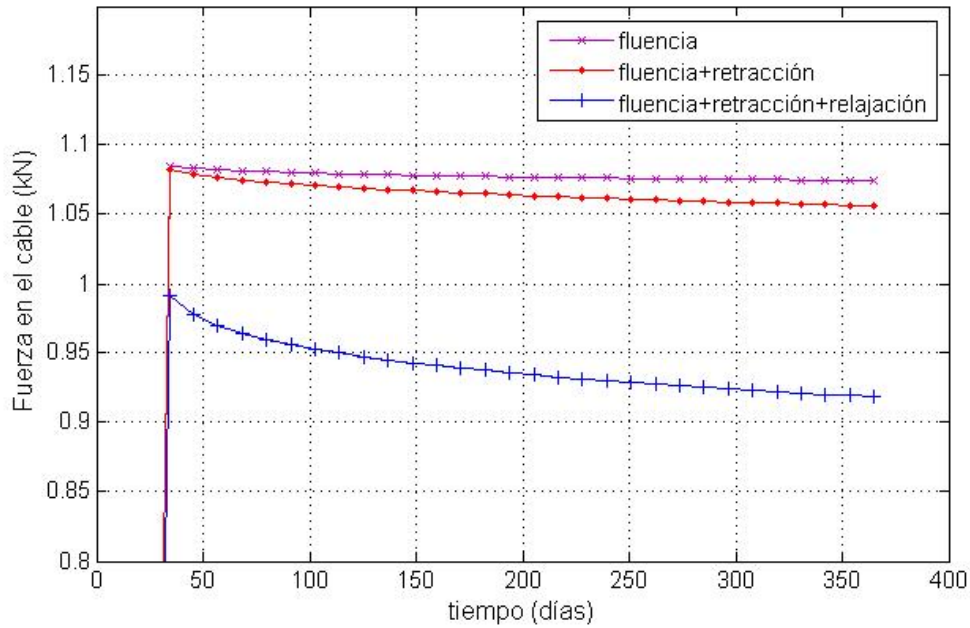


Figura 6.27: Fuerza en el cable de acero.

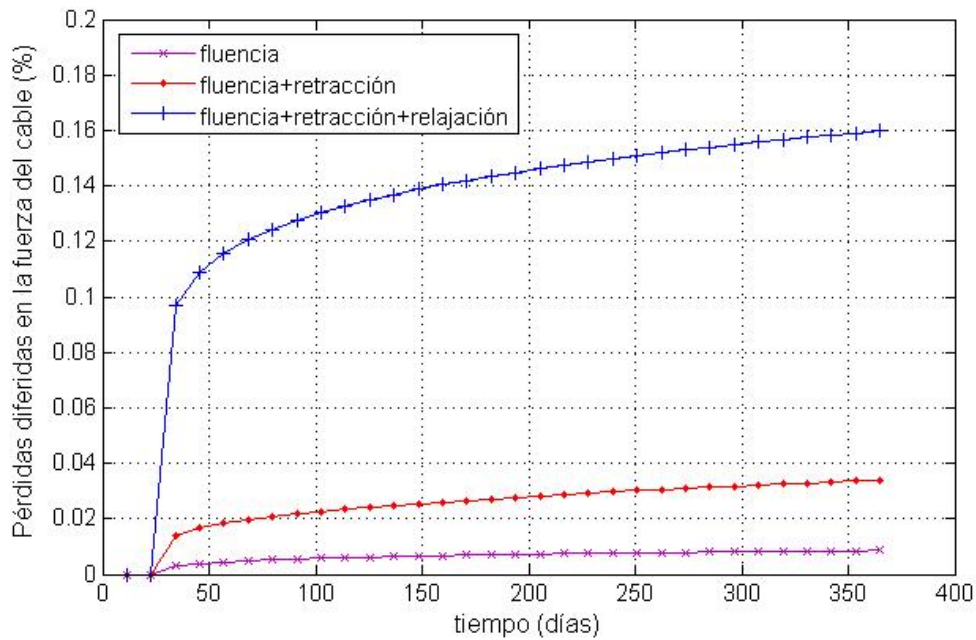
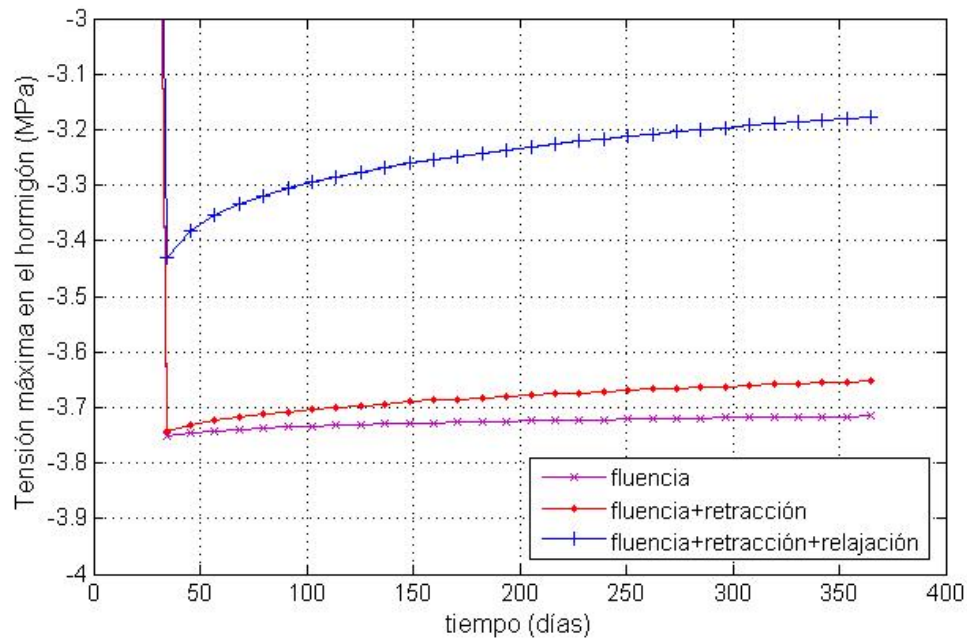


Figura 6.28: Pérdida de la fuerza de pretensado.

aplica la carga hasta que se realiza el primer cálculo. Si bien para los efectos de fluencia y retracción estas pérdidas son muy pequeñas, no es así cuando se incluye la relajación.

Esto se debe a que en la fórmula adoptada para representar la relajación las pérdidas de tensión son muy importantes en edades iniciales y se estabilizan a largo plazo, tal como se muestra en la Figura 2.14.



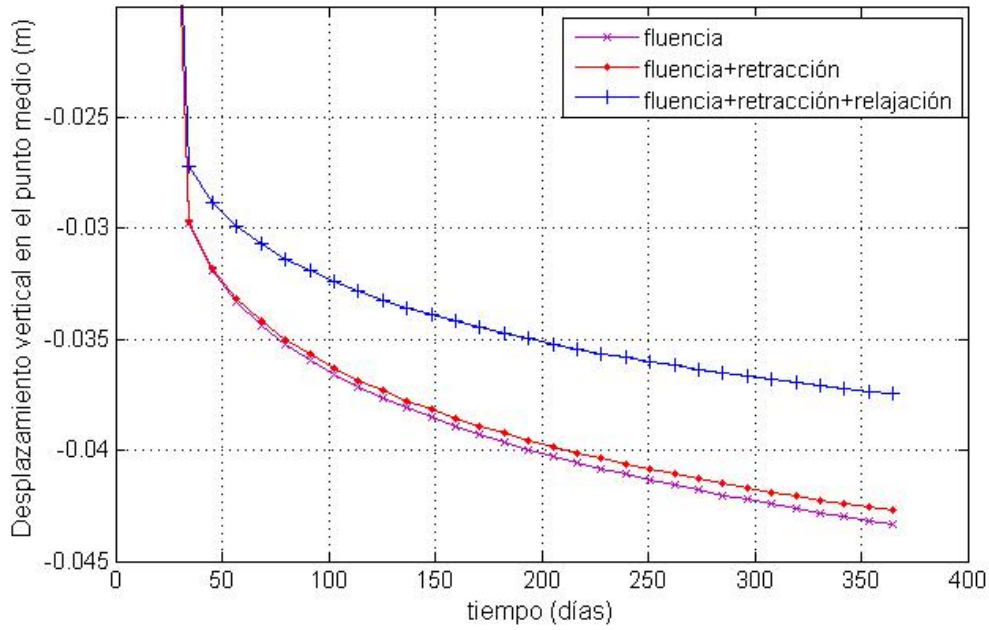
**Figura 6.29:** Máxima tensión en el hormigón.

En la Figura 6.29 se muestra la evolución de las tensiones máximas en el hormigón. Las tensiones son una consecuencia directa de la variación de la fuerza en el cable, por lo que responden al mismo comportamiento. Disminuyen en el tiempo y la mayor disminución se corresponde con la incorporación de los efectos de relajación.

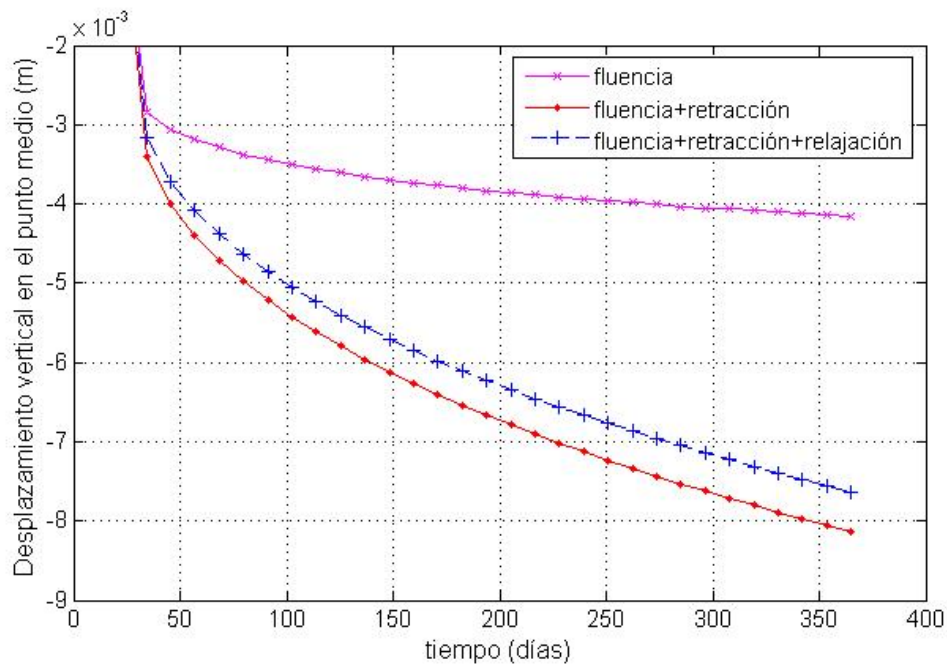
Las Figuras 6.30 y 6.31 muestran los desplazamientos horizontales en el extremo de la viga y verticales en el medio del vano.

Debido a que no hay cargas aplicadas, la configuración parabólica del cable provoca una flexión que deforma hacia arriba la viga, por lo que de acuerdo a la convención de signos establecida, se obtiene un desplazamiento negativo.

El desplazamiento es máximo cuando sólo se consideran los efectos de la fluencia. Se puede ver que la retracción prácticamente no influye en las deformaciones verticales y que al considerar la relajación los desplazamientos disminuyen sensiblemente (13%). Este comportamiento es esperable, ya que al incorporar la relajación y la retracción disminuye la fuerza en el cable, provocando que la flexión resultante sea menor. Asimismo, la



**Figura 6.30:** Desplazamiento vertical en la mitad del vano.



**Figura 6.31:** Desplazamiento horizontal en el extremo libre.

disminución en la fuerza del cable provoca también el alivio en las tensiones de hormigón, con la consiguiente disminución del efecto de fluencia.

En el caso de las deformaciones horizontales, la retracción y fluencia provocan el máximo desplazamiento (aproximadamente el 50 % cada una). Al incorporar la relajación, las deformaciones disminuyen, ya que disminuye el acortamiento elástico y el acortamiento por fluencia.

A efectos de convalidar los resultados obtenidos, se realizó el modelo de la estructura analizada en el programa de elementos finitos SAP 2000, para el cual se utilizaron 20 etapas de 20 pasos de tiempo. El Cuadro 6.7 muestra los resultados obtenidos.

**Cuadro 6.7:** Comparación de los resultados obtenidos con el MCC y el SAP.

|       |                        | fluencia | fluencia +<br>retracción | fluencia +<br>retracción +<br>relajación |
|-------|------------------------|----------|--------------------------|--|
| MCC   | $\sigma_{max}^c$ (Mpa) | 3,71     | 3,65                     | 3,12                                     |
|       | $F_p$ (Mpa)            | 1074     | 1056                     | 919                                      |
|       | u (mm)                 | 4,2      | 8,1                      | 7,6                                      |
|       | w (mm)                 | 43,3     | 42,7                     | 37,5                                     |
| SAP   | $\sigma_{max}^c$ (Mpa) | 3,63     | 3,56                     | 3,33                                     |
|       | $F_p$ (Mpa)            | 1088     | 1069                     | 1000                                     |
|       | u (mm)                 | 4,27     | 8,4                      | 8,2                                      |
|       | w (mm)                 | 42,4     | 41,8                     | 40                                       |
| ERROR | $\sigma_{max}^c$       | 2,2 %    | 2,5 %                    | 4,5 %                                    |
|       | $F_p$                  | 1,3 %    | 1,2 %                    | 8,1 %                                    |
|       | u                      | 1,6 %    | 3,6 %                    | 7,3 %                                    |
|       | w                      | 2,1 %    | 2,2 %                    | 6,3 %                                    |

Se puede ver nuevamente que los resultados obtenidos por ambos métodos son muy similares.

En el trabajo de Au and Si [37] se analiza el ejemplo presentado. Si bien no se cuenta con todos los resultados obtenidos, se presentan algunos valores de referencia.

Au y Si determinan que el máximo desplazamiento vertical en la mitad del vano es de



45 mm cuando solo se consideran los efectos de fluencia y retracción y de 39 mm cuando se incorpora la relajación. Estos valores, son muy similares a los calculados por el método propuesto.

Sin embargo, los valores presentados de pérdidas de pretensado en el acero presentan algunas diferencias: aproximadamente un 3 % de las pérdidas se deben a los efectos conjugados de fluencia y retracción y un 9 % se debe a la relajación del acero. En nuestro trabajo, los valores obtenidos son del 3.5 % y del 12.5 % respectivamente.

De este resultado, se obtiene la misma conclusión que con la comparación del SAP; las mayores diferencias se encuentran al incorporar la relajación al problema.

Esto era previsible, ya que la función de relajación adoptada parte de la hipótesis que no hay desplazamientos en los extremos del cable, lo que en este caso no es real.

Para mejorar este resultado, podría buscarse invertir la función de relajación para encontrar la función de fluencia y considerar al acero también como un material viscoelástico. Podría también aproximarse el acero por un elemento estándar, y usar la función de fluencia del mismo.

En este trabajo no se ha hecho, porque el esfuerzo se ha concentrado en estudiar el comportamiento del hormigón.

# Capítulo 7

## Conclusiones y perspectivas

### 7.1. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado una nueva formulación del método de elementos finitos para el análisis de estructuras de hormigón armado y pretensado. El método se basa en una formulación variacional mixta y resuelve numéricamente la ecuación integral de Volterra asociada al problema viscoelástico utilizando el Método de la Cuadratura de Convolución.

Del desarrollo del método propuesto se han extraído las siguientes conclusiones:

- En el método propuesto no es necesario realizar ninguna aproximación de la función de fluencia del hormigón, ya que se trabaja con la formulación adoptada por el MC90 y se resuelve directamente la integral de Volterra, lo que presenta una ventaja frente a otros métodos de resolución.
- Una ventaja del método propuesto frente a otros métodos, es que no es necesario dividir en etapas el cálculo al introducir nuevas cargas.
- El método propuesto presenta una gran versatilidad, ya que para aplicarlo no hay restricciones en la historia de cargas o desplazamientos a los que una estructura puede estar sometida, e incluso podrían modelarse estructuras construidas evolutivamente tal como han hecho de Sousa [71], Marí [61] y de la Fuente Antequera et al. [84].

- La desventaja principal es que, al utilizar el MCC, es necesario guardar toda la historia de las tensiones a diferencia del método paso a paso con la aproximación de la función de fluencia por una serie de Dirichlet.
- De la deducción de la formulación del método, surge que no es posible su aplicación con el Método de los Elementos Finitos tradicional, derivado del Principio de los Trabajos Virtuales. Esto representa una desventaja frente a otros métodos de resolución (i.e. paso a paso), ya que no se puede conjugar con programas comerciales de cierta potencia lo que permitiría su aplicación inmediata a numerosos problemas.
- El método de los elementos finitos desarrollado en base a una formulación mixta, permite obtener los resultados de desplazamientos y solicitaciones como variables principales del problema, lo que asegura una aproximación del mismo orden para desplazamientos y tensiones, mejorando la precisión de estas últimas frente a las versiones tradicionales del MEF.
- Una desventaja del método de los elementos finitos desarrollado en base a la formulación mixta es que los sistemas de ecuaciones a los que se llega para resolver el problema tienen dimensiones mayores que los obtenidos por el MEF tradicional.

De la resolución y análisis de las aplicaciones presentadas, se extraen las siguientes conclusiones:

- Los resultados obtenidos representan de forma adecuada el comportamiento en conjunto del hormigón-acero, demostrando claramente la transferencia de esfuerzos entre uno y otro material.
- Los resultados obtenidos con el método propuesto son similares a las soluciones de referencia consideradas.

## 7.2. Futuros trabajos

La versatilidad del método propuesto permite que se introduzcan otras características de los materiales que no han sido consideradas en este trabajo:

- Podría incorporarse el acero como material viscoelástico, aproximando su comportamiento al de un elemento estándar o invirtiendo la función de relajación utilizada.
- El estudio de la fisuración no ha sido incluido en este trabajo, por lo que las aplicaciones del método propuesto se han visto limitadas a casos en los cuales la sección del hormigón se encontrase totalmente comprimida. Por lo tanto, sería interesante incorporar un modelo de daño, que permita el estudio de secciones fisuradas, ampliando así el rango de aplicación del método.
- No se han incluido las propiedades plásticas de los materiales, lo que en principio no ha resultado una limitante para los ejemplos analizados. Sin embargo, su incorporación permitiría añadir otros elementos estructurales como tensores o tirantes.
- Podría incluirse un modelo de desarrollo de la adherencia hormigón-acero a efectos de iniciar el análisis de las tensiones en edades tempranas.
- Podría desarrollarse un cálculo más preciso de la función de Kummer para que esto no constituya una limitante a la precisión del método propuesto.

En cuanto a las características de las estructuras analizadas, se podrían incorporar los siguientes aspectos:

- Los efectos de segundo orden no han sido analizados. La inclusión de estos permitirá estudiar en detalle la evolución de las solicitaciones en pilares en el transcurso del tiempo.
- Las estructuras analizadas han sido muy simples. Podrían implementarse estructuras más complejas como losas o pórticos que permitan un análisis integral de la estructura.
- Ya que el método lo permite, podrían implementarse estructuras construidas evolutivamente con las correspondientes modificaciones de los estados de carga en el transcurso del tiempo.
- Debido a que su uso es relativamente frecuente, podría desarrollarse un modelo de tendón no adherente.

# Bibliografía

- [1] P. Jiménez Montoya, A. García Meseguer, and F. Morán Cabré. *Hormigón Armado, Tomo I*. Editorial Gustavo Gili, S.A., Barcelona, 8 edition, 1976.
- [2] UNIT. Unit 1050 Proyecto y ejecución de estructuras de hormigón en masa o armado, 2005.
- [3] EHE. Instrucción de Hormigón Estructural, 1998.
- [4] MC90. *CEB-fip Model Code*. Comité Euro-International du Béton, 1990.
- [5] J.A. Hanson. Effects of curing and drying. *ACI Journal*, 65:535–543, 1968.
- [6] International Federation for Structural Concrete. Structural concrete. textbook on behaviour, design and performance. Bulletin 51, fib, 2009.
- [7] R. I. Gilbert and G. Ranzi. *Time-Dependent Behaviour of Concrete Structures*. Spon Press, 2011.
- [8] G. J. Creus and S. P. C. Marques. *Computational Viscoelasticity*. Springer, 2012.
- [9] G. J. Creus. *Viscoelasticity - Basic Theory and Applications to Concrete Structures*. Springer - Verlag, 1986.
- [10] J.J. Brooks. Influence of mix proportions, plasticizers and superplasticizers on creep and drying shrinkage of concrete. *Magazine of Concrete Research*, 41(148):145–153, 1989.
- [11] T.C. Hansen and A.H. Mattock. Influence of size and shape of member on the shrinkage and creep of concrete. *ACI Journal*, 63:267–290, 1966.

- [12] A.M. Neville, W.H. Dilger, and J.J. Brooks. *Creep of Plain and Structural Concrete*. Construction Press - Logman, 1983.
- [13] Z. P. Bažant. *Mathematical models for creep and shrinkage of concrete*. F. H. Witmann, 1982.
- [14] Z. P. Bažant and E. Osman. Double power law for basic creep of concrete. *Materials and Structures*, 9:49, 1976.
- [15] Z. P. Bažant and S. Prasnanan. Solidification theory for concrete creep: I formulation. *Journal of Engineering Mechanics*, 115:8, 1989.
- [16] I. Carol and Z.P. Bazant. Viscoelasticity with aging caused by solidification of non-aging constituent. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 119(11):2252–2269, 1993.
- [17] Z. P. Bažant and Y. Xi. Continuous retardation spectrum for solidification theory of concrete creep. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 121(2):281–288, 1995.
- [18] Z. P. Bažant and L. P. Granger. Effect of composition on basic creep of concrete and cement paste. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(11):1261–1270, 1995.
- [19] A. Ghali, R. Favre, and M. Elbardy. *Concrete Structures. Stresses and Deformations*. E&FN Spon, Londres, 2002.
- [20] CEB Bulletin. Evaluation of the Time Dependent behavior of Concrete. Technical report, CEB, 1990.
- [21] RILEM TC 107 Subcomitee 5. Data Base on Concrete Creep and Shrinkage. Technical report, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, University of Karlsruhe, 1999.
- [22] A. J. Madrid Ramos and J. M. Arrieta Torrealba. Modelos de comportamiento diferido del hormigón: fluencia y relajación. Estudio comparativo. *Hormigón y Acero*, 213:85–91, 1999.
- [23] F. Mola and L. M. Pellegrini. The new model for creep of concrete in fib model code 2010. In *37th Conference on Our World in Concrete and Structures*, 2012.

- [24] A. Pérez Caldentey. *Comportamiento en servicio del hormigón estructural. Estudio teórico y experimental*. PhD thesis, U. Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 1996.
- [25] MC2010. *Model Code 2010*. Federation Internationale du Beton, 2010.
- [26] ACI Comitee 209. Guide for modeling and calculating shrinkage and creep in hardened concrete. Technical report, American Concrete Institute, 2008.
- [27] ACI Comitee 209. Prediction of creep, shrinkage and temperature effects in concrete structures. Technical report, American Concrete Institute, 1992.
- [28] R. G. L'Hermite and M. Mamillan. Influence de la dimension des éprouvettes sur le retrait. *Ann. Inst. Techn. Bâtim. Trav. Publics*, 18(207-208):323–360, 1965.
- [29] Z.P. Bažant and J. C. Chern. Concrete creep at variable humidity:constitutive law and mechanism. *Materials and Structures*, 18:1–20, 1985.
- [30] M.K. Tadros, A. Ghali, and W.H. Dilger. Time-dependent prestress loss and deflection in prestressed concrete members. *PCI Journal*, 20(3):86–98, 1975.
- [31] A. Ghali and J. Trevino. Relaxation of steel in prestressed concrete. *PCI Journal*, 30(5):82–94, 1985.
- [32] A. Sharif, S.F. Taher, and P.K. Basu. Time-dependent losses in prestressed, continuous composite beams. *PCI Journal*, 119(11):51–68, 1993.
- [33] D. Magura, M. A. Sozen, and C.P. Siess. A study of stress relaxation in prestressing reinforcement. *PCI Journal*, 9(2):13–57, 1964.
- [34] Y. Kang. *Nonlinear geometric, material and time dependen analysis of reinforced and prestressed concrete frames*. PhD thesis, Univ. of California, 1977.
- [35] A.R. Marí. Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames. Technical report, Univ of California, 1984.
- [36] M. Bosch. *Anàlisi no lineal i diferit d'estructures reticulades planes de formigò armat i pretensat*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 1989.

- [37] F. T. K. Au and X. T. Si. Accurate time-dependent analysis of concrete bridges considering concrete creep, concrete shrinkage and cable relaxation. *Engineering Structures*, 33:118–126, 2011.
- [38] F. Dischinger. Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken. *Der Bauingenieur*, 12, 1937.
- [39] F. Dischinger. Elastische und Plastische Verformungen de Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken. *Der Bauingenieur*, 20, 1939.
- [40] F.R. McMillan. Method and designing reinforced concrete slabs. In *Discussion by A.C. Janni, ASCE*, 1927.
- [41] O. Faber. Plastic yield, shrinkage and other problems of concrete, and their effect on design. In *Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers (London)*, 1927.
- [42] H. Rüsç, D. Jungwirth, and H. Hilsdorf. Kritische Sichtung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden des Betons auf das Verhalten der Tragwerke. *Beton - und Stahlbeton*, 68, 1973.
- [43] Z.P. Bažant. Prediction of concrete creep effects using age-adjusted modulus method. *Journal of the American Concrete Institute*, 69, 1972.
- [44] Z.P. Bažant. Creep and thermal effects in concrete structures: A conspectus of some new developments. In *Proceedings of computational Modelling of Concrete Structures (EURO-C). Innsbruck, Austria, March, Pineridhe Press,*, 1994.
- [45] Z.P. Bažant. Creep and damage in concrete. In *Materials Science of Concrete IV, American Ceramic Society*, 1995.
- [46] *RILEM Recommendation, Measurement of Time-Dependent Strains of Concrete, prepared by Subcomm. Mater. Struct. (RILEM, Paris) 31. 1998.*
- [47] B. Sensale. Análise do comportamento ao longo do tempo de peças de concreto armado submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos. Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1991.



- [48] M. A. Pisani. Numerical analysis of creep problems. *Computers and structures*, 51: 57–63, 1994.
- [49] T. Lou, S. M.R. Lopes, and A. V. Lopes. A finite element model to simulate long-term behavior of prestressed concrete girders. *Finite Elements in Analysis and Design*, 81:48–56, 2013.
- [50] C. Chazal and R. M. Pitti. Integral approach for time dependent materials using finite element method. *Journal of theoretical and applied mechanics*, 49,4:1029–1048, 2011.
- [51] M. Fernández Ruiz. *Evaluación no lineal de los efectos estructurales producidos por las deformaciones diferidas del hormigón y el acero*. PhD thesis, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos (U. de Madrid), 2003.
- [52] D. Partov and V. Kantchev. Numerical analysis of composite steel-concrete sections using integral equation of Volterra. *Central European Journal of Engineering*, 1(3): 316–331, 2011.
- [53] H. Trost. Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech und Relaxations Probleme bei Beton und Spannbeton. *Beton und Stahlbetonbau*, 62:10, 1967.
- [54] J. Murcia. Fundamentos para el análisis de estructuras de hormigón armado y hormigón pretensado. Technical report, CSIC Madrid., 1987.
- [55] E. D. Pedoja. *Análisis no lineal de losas sin vigas de hormigón armado y pretensado. Modelo general y experimentación numérica*. PhD thesis, Universidad de Navarra. Escuela Superior de Ingenieros. San Sebastián., 2007.
- [56] H. Rüsçh, D. Jungwirth, and H. Hilsdorf. *Creep and Shrinkage. Their effect on the Behaviour of Concrete Structures*. Springer Verlag, 1983.
- [57] L. F. Nielsen. Kriechen und Relaxation des Betons. *Beton - und Stahlbeton*, 65: 75–88, 1970.
- [58] J. Martínez Calzón and J. Ortiz Herrera. *Construcción Mixta Hormigón - Acero*. Editorial Rueda, 1978.

- [59] M. Fernández Ruiz. Estudio y comparación de diferentes métodos de cálculo para el análisis de redistribuciones a nivel de sección y estructura debido a deformaciones diferidas en el hormigón. *Hormigón y Acero*, 227, 2003.
- [60] A.R. Marí. Estudio comparativo entre diversos métodos de análisis no lineal de estructuras reticulares de hormigón armado y pretensado: Estado actual y líneas de futura actuación. modelos de análisis de estructuras de hormigón. Technical report, GEHO, Comisión II, 1991.
- [61] A.R. Marí. Numerical simulation of the segmental construction of three dimensional concrete frames. *Engineering Structures*, 22 (2000):585–596, 1999.
- [62] R. Oliveira. *Análise teórica e experimental de estruturas planas de concreto armado com a consideração da fluência*. PhD thesis, Escola politécnica da Universidad de São Paulo, 2011.
- [63] J. Manterola. *Puentes*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 2000.
- [64] CEB. Structural effects of time-dependent behaviour of concrete. bulletin d'information n° 142. Technical report, CEB, 1984.
- [65] O.C. Zienkiewicz and K. Morgan. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1989.
- [66] E. Oñate. *Structural analysis with the finite element method—linear statics. Volume I. Basis and solids*. Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, 2009.
- [67] J. N. Reddy. *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. John Wiley & Sons Inc., 2002.
- [68] P. Roca. *Un modelo de analisis no lineal para el estudio del comportamiento de estructuras laminadas de hormigón pretensado*. PhD thesis, Univ. Politecnica de Cataluña, 1988.
- [69] A. Henriques. *Análise não linear de estruturas planas de betão pré-esforçado*. Master's thesis, Univ. do Porto, Faculdade de Engenharia, 1991.

- [70] R. Povoas. *Modelos nao-lineares de analise e dimensionamento de estruturas laminares de betao incluindo efeitos diferidos*. PhD thesis, Faculdade de Engenharia, Univ. do Porto, 1991.
- [71] P. de Sousa. *Un modelo para el analisis no lineal y diferido de estructuras de hormigon y acero construidas evolutivamente*. PhD thesis, Univ. Politecnica de Cataluña, 1994.
- [72] C. Lubich. Convolution quadrature and discretized operational calculus I. *Numer. Math.*, 52:2, 1988.
- [73] C. Lubich. Convolution quadrature and discretized operational calculus II. *Numer. Math.*, 52:4, 1988.
- [74] M. Schanz and H. Antes. Application of operational quadrature methods in time domain boundary element methods. *Mecanica*, 32(3):179–186, 1997.
- [75] M. Schanz and H. Antes. A new visco- and elastodynamic time domain boundary element formulation. *Computer Mechanics.*, 20(5):452–249, 1997.
- [76] M. Schanz, H. Antes, and T. Rüberg. Convolution quadrature boundary element method for quasi-static visco and poroelastic continua. *Computers and Structures*, 83:673–684, 2005.
- [77] M. Schanz. On a reformulated convolution Quadrature based Boundary Element Method. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 58(2):109–128, 2010.
- [78] W. Moser, H. Antes, and G. Beer. A duhamel integral based approach to one-dimensional wave propagation analysis in layered media. *Computer Mechanics.*, 35: 115–126, 2005.
- [79] A. I. Abreu, J. A. M. Carrer, and W. J. Mansur. Scalar wave propagation in 2D: a BEM formulation based on the operational quadrature method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27:101–105, 2003.
- [80] A. I. Abreu, A. Canelas, B. Sensale, and W. J. Mansur. CQM-based BEM formulation for uncoupled transient quasistatic thermoelasticity analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36:568–578, 2012.

- 
- [81] A. I. Abreu, A. Canelas, and W. J. Mansur. A CQM-based BEM for transient heat conduction problems in homogeneous materials and FGMs. *Applied Mathematical Modelling*, 37:776–792, 2013.
- [82] S. Syngellakis and J. Wu. Evaluation of various schemes for quasi-static boundary element analysis of polymers. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28: 737–745, 2004.
- [83] M. Abramovits and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dober Books on Mathematics, 1965.
- [84] A. de la Fuente Antequera, A. Aguado de Cea, and C. Molins Borrell. Modelo numérico para el análisis no lineal de secciones prefabricadas construidas evolutivamente. *Hormigón y Acero*, 57(247):69–87, 2008.