Este libro de texto está destinado al dictado de un curso avanzado breve de grado y postgrado universitario en Matemática Pura, o en Matemática para Ingeniería u otras ciencias afines. Presenta y trata con estricto rigor científico el tópico de las particiones de Markov. En el texto se demuestra la existencia de dichas particiones en un espacio métrico donde evoluciona un sistema dinámico caótico del tipo de Anosov. Este tópico de la Teoría Ergódica matemática moderna tiene menos de 50 años de desarrollo.

Es uno de los pocos libros escritos en castellano, para cursos universitarios especializados y avanzados, que incluye el tópico de las particiones de Markov y de los difeomorfismos de Anosov. Contiene definiciones rigurosas y exactas e incluye demostraciones matemáticas completas.

Eleonora Catsigeras es Ingeniera Industrial y Máster en Matemática por la Universidad de la República en Uruguay, y PhD en Ciencias por el Instituto de Matemática Pura y Aplicada de Río de Janeiro en Brasil. Especialista en Sistemas Dinámicos, Caos Determinista y Teoría Ergódica, es autora de cerca de quince artículos de investigación, publicados en diversas revistas científicas arbitradas, y de cerca de diez textos de Matemática para cursos universitarios de grado y postgrado. Ha sido científica invitada y profesora visitante en las Universidades de Oporto (Portugal), Valparaíso (Chile) y Marburg (Alemania). Actualmente es profesora en el Instituto de Matemática y Estadística de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, e investigadora de la Agencia Nacional de Investigación e Innovación, ambas instituciones en Uruguay.

INNOVALIBROS

9 788493 849160

Particiones de Markov para difeomorfismos de Anosov / Eleonora Catsigeras

Particiones de Markov

para

difeomorfismos de Anosov

/

Eleonora Catsigeras

Particiones de Markov para difeomorfismos de Anosov

Eleonora Catsigeras

INNOVALIBROS

InnovaLibros
C/ Ramón Gómez de la Serna, 1, escalera 2, 3ºB
28035, Madrid
www.innovalibros.com

Diseño de la cubierta: www.alexvelasco.es
Maquetación y Diseño: Mercedes Aicart

ISBN: 978-84-938491-6-0
Depósito Legal:
Impreso en:
Impreso en España – Printed in Spain

Índice

1. DEFINICIONES Y RESULTADOS PREVIOS 9
- 1.1 Difeomorfismos de Anosov 9
- 1.2 Expansividad 10
- 1.3 Estabilidad topológica 10
- 1.4 Conjuntos estable e inestable 11
- 1.5 Variedades invariantes 15
- 1.6 Intersección de variedades invariantes 16
- 1.7 Forma local del producto 18

2. RECTÁNGULOS Y PARTICIONES DE MARKOV 19
- 2.1 Definición de rectángulo 19
- 2.2 Borde de un rectángulo 21
- 2.3 Propiedades de los rectángulos 22
- 2.4 Definición de partición de Markov 23
- 2.5 Borde de la partición de Markov 25
- 2.6 Propiedades de las particiones de Markov 26

3. SEMICONJUGACIÓN CON EL SHIFT 31
- 3.1 Espacio de funciones bi-infinitas y función shift 31
- 3.2 Semiconjugación 32
- 3.3 Semiconjugación de los difeomorfismos de Anosov con el shift . . 32
- 3.4 Conjuntos estable e inestable en el espacio de sucesiones 35
- 3.5 Construcción de un cubrimiento con rectángulos 37
- 3.6 Propiedades del cubrimiento por rectángulos 38

4. MÉTODO CONSTRUCTIVO DE LA PARTICIÓN 41
4.1 Primer refinamiento del cubrimiento 41
4.2 Segundo refinamiento de la partición 42
4.3 Densidad del conjunto Z^* cubierto por la partición 44
4.4 Demostración de que $\mathcal{R}$ es una partición de M 46
4.5 Densidad de Z^* en las variedades estable e inestables 48

5. TEOREMA DE SINAI 51
5.1 Enunciado del teorema de Sinai 51
5.2 Lema 51
5.3 Demostración del teorema de Sinai 53

6. DINÁMICA SIMBÓLICA 55
6.1 Matriz de transición 55
6.2 Lema 56
6.3 Teorema de semiconjugación 57
6.4 Conclusión 60

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 63

Capítulo 1

Definiciones y Resultados Previos

A lo largo del texto, se asume que M es una variedad de clase C^1 compacta y Riemanniana, y que $f: M \mapsto M$ es un difeomorfismo de clase C^1 en M.

1.1 Difeomorfismo de Anosov

Definición 1.1. f es un *difeomorfismo de Anosov* si existen constantes K y λ; $K > 0$, $0 < \lambda < 1$; y subespacios S_x, U_x de T_xM, tales que:

i S_x, U_x varían continuamente con x

ii $S_x \oplus U_x = T_xM$

iii S_x, U_x son invariantes con f, es decir: $f'_x S_x = S_{f(x)}$ y $f'_x U_x = U_{f(x)}$ $\forall x \in M$

iv $\|(f^n)'_x s_x\| \leq K\lambda^n \|s_x\|$ $\forall s_x \in S_x$, $\forall n \geq 0$, $\forall x \in M$

v $\|(f^n)'_x u_x\| \leq K\lambda^{-n} \|u_x\|$ $\forall u_x \in U_x$, $\forall n \leq 0$, $\forall x \in M$

Observación 1.2. Las dimensiones de S_x y U_x son constantes en las componentes conexas de M debido a la condición i. de la definición anterior. El fibrado tangente TM es la suma directa de los dos subfibrados S y U invariantes con f, llamados "subfibrado estable" e "inestable" respectivamente. Si $(x, s_x) \in S$, entonces su norma decrece (más que exponencialmente con tasa $+\log\lambda < 0$) cuando $n \to +\infty$. Si $(x, u_x) \in U$, entonces su norma crece (más que exponencialmente con tasa $-\log\lambda > 0$) cuando $n \to +\infty$, pues sustituyendo en v. $m = -n, y = f^{-m}(x), u_y = (f^{-m})'_x u_x$ resulta:

$$\|(f^m)'_y u_y\| \geq \frac{1}{K}\lambda^{-m}\|u_y\| \ \ \forall u_y \in U_y,\ \forall m \geq 0,\ \forall y \in M$$

Si f es un difeomorfismo de Anosov, también lo es f^{-1}, y el subfibrado estable para f^{-1} es el inestable para f y viceversa, como se observa de la definición de difeomorfismo de Anosov.

1.2 Expansividad

Definición 1.3. Un difeomorfismo $f : M \mapsto M$ es *expansivo* si existe una constante $\rho > 0$, llamada *constante de expansividad,* tal que:

$$\operatorname{dist}(f^n x, f^n y) \leq \rho \ \forall n \in \mathbb{Z} \ \text{ si y solo si } \ x = y$$

Una sucesión bi-infinita $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $y_n \in M$, se dice que $\varepsilon-$*acompaña* a otra $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $x_n \in M$, si $\operatorname{dist}(x_n, y_n) \leq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{Z}$. La expansividad de un difeomorfismo significa que para cierto $\rho > 0$ suficientemente pequeño, dos órbitas diferentes nunca se $\rho-$acompañan.

Una propiedad conocida es la siguiente:

Proposición 1.4. *Todo difeomorfismo de Anosov es expansivo.*

1.3 Estabilidad topológica

Definición 1.5. Un difeomorfismo $f : M \mapsto M$ es *topológicamente estable* si dado $\varepsilon > 0$ existe un C^0 entorno $\mathcal{V}$ de f tal que para todo $g \in \mathcal{V}$ existe una semiconjugación $h : M \mapsto M$ entre g y f (i.e. h es continua, sobreyectiva y cumple $h \circ g = f \circ h$) tal que $\operatorname{dist}(h(x), x) < \varepsilon \ \ \forall x \in M$.

Observación 1.6. Si f es topológicamente estable, si $\mathcal{V}$ es un C^0 entorno de f como en la definición anterior y si $g \in \mathcal{V}$ entonces:

$$h(g^n(x)) = f^n(h(x)) \ \ \forall x \in M \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

La estabilidad topológica de f significa que si g está suficientemente próxima de f (en la topología C^0) entonces las órbitas de g están ε-acompañadas por las de f y ε acompañan a todas las órbitas de f (ya que la transformación h es sobreyectiva.)

Teorema 1.7 (Pugh). Un difeomorfismo $f : M \mapsto M$ es topológicamente estable si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda sucesión bi-infinita de puntos $\{y_n\} n \in \mathbb{Z}$, $y_n \in M$ que cumple $\operatorname{dist}(y_{n+1}, f(y_n)) < \delta \ \forall n \in \mathbb{Z}$ está ε-acompañada por una órbita de f.

Definición 1.8. Sea $f : M \mapsto M$ invertible. Una sucesión bi-infinita $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de puntos de M se llama *δ-pesudo-órbita de f* si $\operatorname{dist}(f(y_n), y_{n+1}) < \delta \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Se concluye que un difeomorfismo $f : M \mapsto M$ es topológicamente estable si y solo si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo-órbita está ε-acompañada.

Teorema 1.9. *Los difeomorfismos de Anosov son topológicamente estables.*

1.4 Conjuntos estable e inestable

Definición 1.10. Sea $f : M \mapsto M$ un difeomorfismo. Se llama *conjunto estable* de f por el punto $x \in M$ a:

$$W^s(x) = \{y \in M : \operatorname{dist}(f^n(y), f^n(x))_{n\to+\infty} \to 0\}$$

Se llama *conjunto inestable* de f por el punto $x \in M$ a:

$$W^u(x) = \{y \in M : \operatorname{dist}(f^n(y), f^n(x))_{n\to-\infty} \to 0\}$$

Teorema 1.11. *Si f es un difeomorfismo de Anosov entonces:*

$$W^s = \{y \in M : \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \log \lambda\}$$

$$W^u = \{y \in M : \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \operatorname{dist}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \log\lambda\}$$

donde λ *es la misma constante* $0 < \lambda < 1$ *de la definición de Anosov.*

El teorema anterior significa que para los difeomorfismos de Anosov, dos órbitas que en el futuro (o en el pasado) se acercan de modo que su distancia tienda a cero, entonces lo hacen más que exponencialmente con tasa $\log\lambda$. En efecto:

$$\text{lím}\, sup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \log\lambda$$

implica:

$$\operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) < Ae^{-n\gamma} \quad \forall n \geq 0$$

donde A es un número positivo y γ es un número real positivo elegido de modo que $\gamma < -\log\lambda$.

Observación 1.12. Dos conjuntos estables distintos son disjuntos pues si $z \in W^s(x) \cap W^s(x') \neq \emptyset$ entonces, a partir de la definición de conjunto estable y la propiedad triangular de la distancia se tiene $W^s(z) \subset W^s(x) \cap W^s(x')$ y $W^s(x) \cup W^s(x') \subset W^s(z)$. Luego $W^s(x) = W^s(x')$.

Los mismo vale para los conjuntos inestables.

Proposición 1.13. *Si f es un difeomorfismo expansivo con constante de expansividad ρ, entonces:*

$$W^s(x) = \{y \in M : \operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \rho$$

$$\forall n \text{ suficientemente grande } \}$$

$$W^u(x) = \{y \in M : \operatorname{dist}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \rho$$

$$\forall n \text{ suficientemente grande } \}$$

Demostración: De la definición de conjunto estable se obtiene que $W^s(x) \subset \{y \in M :\, \mathrm{dist}\,(f^n(x), f^n(y)) \leq \rho\ \forall n$ suficientemente grande $\}$. Para demostrar la otra inclusión supongamos por absurdo que existe $y \in M$ tal que:

$$\mathrm{dist}\,(f^n(x), f^n(y)) \leq \rho\ \forall n \geq N,\ \mathrm{dist}\,(f^n(x), f^n(y))_{n \to +\infty} \not\to 0$$

Entonces existe una sucesión $n_k \to +\infty$ tal que:

$$\mathrm{dist}\,(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) \geq \varepsilon > 0\ \forall k.$$

Podemos elegir n_k de modo que $f^{n_k}(x)$ y $f^{n_k}(y)$ sean convergentes (por la compacidad de M). Luego si $p \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$\mathrm{dist}\,(f^{n_k+p}(x), f^{n_k+p}(y)) \leq \rho\ \ \forall n_k > N - p$$

Cuando $k \to +\infty$ se tiene $\mathrm{dist}\,(f^p(x_0), f^p(y_0)) \leq \rho\ \forall p \in \mathbb{Z}$ donde $x_0 = \mathrm{lím}\, f^{n_k}(x),\ y_0 = \mathrm{lím}\, f^{n_k}(y)$. Por la expansividad $x_0 = y_0$, contradiciendo la elección de n_k, pues:

$$\mathrm{dist}\,(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) \geq \varepsilon > 0.\ \square$$

Observación 1.14. Se observa que la proposición anterior sigue siendo válida si se sustituye la constante de expansividad ρ por cualquier otra constante $\varepsilon > 0, \varepsilon \leq \rho$. Entonces:

$$W^s(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{y \in M :\, \mathrm{dist}\,(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon\ \forall n \geq N\} =$$

$$= \bigcup_{n \geq k} \{y \in M :\, \mathrm{dist}\,(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon\ \forall n \geq N\}\quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Definición 1.15. Se llama $\varepsilon-$*conjunto estable* de f por el punto $x \in M$ al conjunto:

$$W^s_\varepsilon(x) = \{y \in M :\, \mathrm{dist}\,(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon\ \forall n \geq 0\}$$

Se llama $\varepsilon-$*conjunto inestable* de f por el punto $x \in M$ al conjunto:

$$W_\varepsilon^u(x) = \{y \in M : \operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \ \forall n \leq 0\}$$

Observación 1.16. Si f es un difeomorfismo expansivo es fácil ver, a partir de la definición anterior y de 1.13 y 1.14 que:

i) $y \in W_\varepsilon^s(x) \Leftrightarrow x \in W_\varepsilon^s(y); \quad y \in W_\varepsilon^u(x) \Leftrightarrow x \in W_\varepsilon^u(y)$.

ii) Si $\varepsilon \leq \rho$ entonces $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(x) = \{x\}$.

iii) $f(W_\varepsilon^s(x)) = \{z \in M : \operatorname{dist}(f^n(x), f^{n-1}(z)) \leq \varepsilon \ \forall n \geq 0\} =$

$$= \{z \in M : \operatorname{dist}(f^{n-1}(f(x)), f^{n-1}(z)) \leq \varepsilon \ \forall n \geq 1\} \ \cap$$

$$\{z \in M : \operatorname{dist}(x, f^{-1}(z)) \leq \varepsilon\}.$$

Luego:

$$f(W_\varepsilon^s(x)) = W_\varepsilon^s(f(x)) \cap f(\overline{B}_\varepsilon(x))$$

Análogamente:

$$W_\varepsilon^u(f(x)) = f(W_\varepsilon^u(x)) \cap \overline{B}_\varepsilon(f(x))$$

iv) $f(W_\varepsilon^s(x)) \subset W_\varepsilon^s(f(x))$ y $f(W_\varepsilon^u(x)) \supset W_\varepsilon^u(f(x))$

v) Si $\varepsilon \leq \rho$ (véase 1.14) entonces:

$$W^s(x) = \bigcup_{N \geq 0} f^{-N}(W_\varepsilon^s(f^N(x))) = \bigcup_{N \in \mathbb{Z}} f^{-N}(W_\varepsilon^s(f^N(x)))$$

En particular:

$$W_\varepsilon^s(x) \subset W^s(x), \quad W_\varepsilon^u(x) \subset W^u(x)$$

1.5 Variedades invariantes

El teorema que sigue justifica el nombre de *variedad invariante estable* (respectivamente *inestable*) que recibe el conjunto estable (respectivamente inestable) cuando f es un difeomorfismo de Anosov. Se enuncia sin demostración, la cual puede encontrarse en la referencia [3].

Teorema 1.17. *Sea $f : M \mapsto M$ un difeomorfismo de Anosov. Entonces los conjuntos $W^s(x)$ y $W^u(x)$ son C^1 variedades inmersas en M, que pasan por x, tangentes en x a los subespacios S_x y U_x respectivamente.*

Se observa de la definición 1.10 que la partición de M en las variedades estables e inestables es invariante por f; más precisamente: $f(W^s(x)) = W^s(f(x))$; $f(W^u(x)) = W^u(f(x))$

Observación 1.18. Cuando f es un difeomorfismo de Anosov, entonces $W^s(x)$ y $W^u(x)$ son variedades inmersas en M según afirma el teorema 1.17. Sin embargo no son necesariamente subvariedades de M: la inclusión es continua pero no necesariamente un homeomorfismo sobre su imagen (la topología en $W^s(x)$ podría ser estrcitamente más fina que la inducida por M).

Teorema 1.19. *Sea $f : M \mapsto M$ un difeomorfismo de Anosov. Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño entonces:*

1) *Para todo $N \in \mathbb{Z}$ el conjunto $f^N(W^s_\varepsilon(f^{-N}(x)))$ es un entorno de x en la variedad $W^s(x)$ homeomorfo a una bola en el subespacio S_x.*

2) *La topología en $f^N(W^s_\varepsilon(f^{-N}(x)))$ como entorno en la variedad $W^s(x)$ es la misma que la inducida en él por la topología de M.*

La demostración (referencia bibliográfica [3]), es parte de la demostración del teorema 1.17 de existencia variedades invariantes.

En particular $W^s_\varepsilon(x)$ es un entorno de x en $W^s(x)$, y la topología en $W^s_\varepsilon(x)$, como subconjunto de $W^s(x)$, es la misma que la inducida por la topología de M, como subconjunto de M.

Aplicando el teorema anterior a f^{-1} en lugar de f y observando que por definición las variedades estables de f^{-1} son las inestables de f, se obtiene que $W^u_\varepsilon(x)$ es un entorno de x en $W^u(x)$ y su topología como subconjunto de $W^u(x)$ es la misma que la inducida por la topología de M.

En virtud de la primera parte del teorema anterior, los $epsilon-$ conjuntos estable e inestable se llaman $epsilon-$variedades estable e inestable, y son subvariedades de M (variedades encajadas, con la topología inducida por la de M).

De la segunda parte del teorema anterior se desprende que:

- Si U es un abierto de $W^s_\varepsilon(x)$ (como variedad estable), entonces existe B abierto en M tal que $U = B \cap W^s_\varepsilon(x)$
- Si $x_n, x \in W^s_\varepsilon(x)$ y si $\operatorname{dist}(x_n, x) \to 0$ en M, entonces $x_n \to x$ en $W^s_\varepsilon(x)$ (y recíprocamente).

1.6 Intersección de variedades invariantes

En la observación 1.16 obtuvimos que $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u\varepsilon(x) = \{x\}$ si $0 < \varepsilon < \rho$. Probaremos a continuación que cuando x e y están suficientemente próximos y $\varepsilon > 0$ es pequeño, entonces $W^s_\varepsilon \cap W^u\varepsilon(y)$ consiste en un único punto que denotaremos como $[x,y]$. En lo que sigue $f : M \mapsto M$ denota un difeomorfismo de Anosov.

Proposición 1.20. *Dado* $0 < \varepsilon \leq \rho/2$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ *consiste en un único punto, para todos* $x, y \in M$ *tales que* $dist(x,y) < \delta$.

Demostración: Por los teoremas 1.7 y 1.9 existe $\delta_1 > 0$ tal que toda δ_1 pseudo-órbita de f está $\varepsilon/2$ acompañada por una órbita de f.

Tomemos $\delta = \text{mín}(\delta_1, \varepsilon/2)$ y dos puntos $x, y \in M$ tales que $\operatorname{dist}(x,y) < \delta$.

La sucesión bi-infinita $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ definida por $y_n = f^n(x)$ si $n \geq 0$, $y_n = f^n(y_n)$ si $n < 0$ es una δ_1 pseudo-órbita. Entonces existe $z \in M$ que cumple $\operatorname{dist}(f^n(z), f^n(x)) \leq \varepsilon/2 \, \forall n \geq 0$, $\operatorname{dist}(f^n(z), f^n(y)) \leq \varepsilon/2 \, \forall n < 0$. Además $\operatorname{dist}(z,y) \leq \operatorname{dist}(z,x) + \operatorname{dist}(x,y) \leq \varepsilon/2 + \delta \leq \varepsilon$. Entonces $z \in W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$. Además z es único en $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ debido a la expansividad de f. $\square$

Definición 1.21. Llamaremos función *corchete* a:

$$[\cdot,\cdot] : \{(x,y) \in M^2 : \operatorname{dist}(x,y < \delta)\} \mapsto M$$

definida por:

$$[x,y] = W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$$

Se observa que:

$$\operatorname{dist}(f^n([x,y]), f^n(x)) \leq \varepsilon \; \forall n \geq 0,$$

$$\operatorname{dist}(f^n([x,y]), f^n(y)) \leq \varepsilon \; \forall n \leq 0$$

debido a la definición de la función corchete y a la definición de las ε-variedades estable e inestable.

Teorema 1.22. *La función corchete* $[\cdot,\cdot]$ *es continua.*

Demostración: Sea $(x_n, y_n) \to (x,y)$ en M^2 tales que $\operatorname{dist}(x,y) < \delta$. Como M es compacta puede elegirse (x_n, y_n) de modo que $[x_n, y_n]$ sea convergente en M. Sea $z_n = [x_n, y_n] \to z \in M$. Basta demostrar que $z = [x,y]$.

Como $z_n \in W^s_\varepsilon(x_n)$ entonces $\operatorname{dist}(f^p(z_n), f^p(x_n)) \leq \varepsilon \; \forall p \geq 0$. Dejando fijo p y haciendo $n \to \infty$, por la continuidad de f se tiene que $\operatorname{dist}(f^p(z), f^p(x)) \leq \varepsilon \; \forall p \geq 0$, de donde $z \in W^s_\varepsilon(x)$.

Análogamente se obtiene $z \in W^u_\varepsilon(y)$, de donde $z \in W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) = [x,y]$ $\square$

1.7 Forma local del producto

Teorema 1.23. *Sea $f : M \mapsto M$ un difeomorfismo de Anosov. Existe una constante $\overline{\varepsilon} > 0$ tal que para todo $x \in M$ el producto $W^u_{\overline{\varepsilon}}(x) \times W^s_{\overline{\varepsilon}}(x)$ es homeomorfo a un entorno de x en M.*

Demostración: Elijamos $0 < \varepsilon < \rho/2$ (donde ρ es la constante de expansividad de f). Sea $\delta > 0$ elegido según el teorema 1.20 y sea $0 < \overline{\varepsilon} < \min(\delta/2, \varepsilon)$. Resulta:

$$W^u_{\overline{\varepsilon}}(x) \times W^s_{\overline{\varepsilon}}(x) \subset \{(z,y) \in M^2 : \operatorname{dist}(z,y) < \delta\}$$

Puede aplicarse la función corchete a puntos en $W^u_{\overline{\varepsilon}}(x) \times W^s_{\overline{\varepsilon}}(x) \subset M^2$.

Sea $\varphi = [\cdot,\cdot]|_{W^u_{\overline{\varepsilon}}(x) \times W^s_{\overline{\varepsilon}}(x)}$. La aplicación φ es continua porque es la restricción de una función continua. Es inyectiva pues si $[z,z'] = [\overline{z},\overline{z}']$ donde $z,\overline{z} \in W^u_{\overline{\varepsilon}}(x)$, $z',\overline{z}' \in W^s_{\overline{\varepsilon}}(x)$ entonces:

$$\operatorname{dist}(f^n(z), f^n(\overline{z})) \leq 2\overline{\varepsilon} < 2\varepsilon \ \forall n \geq 0$$

$$\operatorname{dist}(f^n(z), f^n(\overline{z})) \leq 2\overline{\varepsilon} < 2\varepsilon \ \forall n \leq 0$$

Luego por la expansividad de f se tiene $z = \overline{z}$. Análogamente se obtiene $z' = \overline{z}'$.

La $\overline{\varepsilon}$-variedad estable $W^s_{\overline{\varepsilon}}(x) = \{y \in M : \operatorname{dist}(f^n(y), f^n(x)) \leq \overline{\varepsilon} \ \forall n \geq 0\}$ es cerrada en M que es compacta, luego es compacta. Análogamente es compacta $W^u_{\overline{\varepsilon}}(x)$. Así φ es continua e inyectiva con dominio compacto $W^u_{\overline{\varepsilon}}(x) \times W^s_{\overline{\varepsilon}}(x)$ a M. Como el dominio de φ y su codominio son variedades de la misma dimensión finita, φ es un homeomorfismo sobre su imagen.

En efecto $\varphi(x,x) = x$, $\dim W^s_{\overline{\varepsilon}}(x) = \dim S_x$, $\dim W^u_{\overline{\varepsilon}}(x) = \dim U_x$, $S_x \oplus U_x = T_x M$ de donde $\dim(W^u_{\overline{\varepsilon}}(x) \times W^s_{\overline{\varepsilon}}(x)) = \dim M$.

Siendo $W^u_{\overline{\varepsilon}}(x) \times W^s_{\overline{\varepsilon}}(x)$ un entorno de (x,x) en M^2, su imagen homeomorfa es un entorno de $x \in M$. $\square$

Capítulo 2

Rectángulos y particiones de Markov

Sea f un difeomorfismo de Anosov en una variedad compacta y Riemanniana M. Se definirá *Partición de Markov* para f. Es un cubrimiento finito de M por cierta clase de cerrados llamados *rectángulos,* con interiores dos a dos disjuntos, y que cumplen condiciones que los vinculan a la dinámica de f, es decir, al espacio de órbitas de f.

Comenzaremos definiendo *rectángulo* y demostrando algunas propiedades que serán utilizadas más adelante.

2.1 Definición de rectángulo

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon\rho/4$ (donde ρ denota la constante de expansividad de f, definida en 1.3. y sea $\delta > 0$ elegido como en 1.20.

Definición 2.1. Un subconjunto R no vacío de M se llama *rectángulo* para f si tiene diámetro menor que δ y además $[x,y] \in R\ \forall x,y \in R$. Es decir: si $x,y \in R$ entonces existe un único $z \in W^s_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y) = [x,y]$ y además $z \in R$.

Definición 2.2. Un rectángulo R es propio si $R = \overline{\text{int} R}$.

Ejemplos:

i) A partir de la definición obsérvese que si $\overline{\varepsilon} > 0$ se elige suficientemente pequeño entonces es un rectángulo el entorno V de x en M que tiene forma local del producto según el teorema 1.23 (es decir V es homeomorfo a $W^u_{\overline{\varepsilon}}(x) \times W^s_{\overline{\varepsilon}}(x)$).

ii) Si x e y son dos puntos próximos en M y si U y V son entornos de x e y respectivamente, como en el ejemplo anterior, entonces $U \cup V \cup [U,V] \cup [V,U]$ es un rectángulo.

iii) Si U y V son dos rectángulos no disjuntos, entonces $U \cap V$ es un rectángulo.

Definición 2.3. Sea R un rectángulo y $x \in R$. Se llama ε-variedad estable de x en R a:

$$W^s(x,R) = W^s_\varepsilon(x) \cap R$$

Análogamente:

$$W^u(x,R) = W^u_\varepsilon(x) \cap R$$

Proposición 2.4. *Sean $x, y \in R$, R rectángulo. Entonces $y \in W^s(x,R)$ si y solo si $W^s(x,R) = W^s(y,R)$.*

Demostración: Como $y \in W^s(y,R)$ es inmediato que $W^s(x,R) \subset W^s(y,R)$ implica $y \in W^s(x,R)$.

Para el recíproco alcanza probar que $y \in W^s(x,R)$ implica $W^s(x,R) \subset W^s(y,R)$ (pues por simetría $y \in W^s(x,R)$ si y solo si $x \in W^s(y,R)$).

Probemos entonces que $y, z \in W^s(x,R)$ implica $z \in W^s(y,R)$:

Sea $w = [z,y] = W^s_\varepsilon(z) \cap W^u_\varepsilon(y)$. Como $z \in W^s_\varepsilon(x)$. Entonces $w = W^s_{2\varepsilon}(x)$ $\cap W^u_\varepsilon(y)$.

Además $y \in W^s_{epsilon}(x)$. Entonces $w = W^s_{3\varepsilon}(y) \cap W^u_\varepsilon(y)$. Siendo $3\varepsilon > \rho$, donde ρ es la constante de expansividad, se tiene que $w = y$ o sea:

$$y = [z,x] = W^s_\varepsilon(z) \cap W^u_\varepsilon(y)$$

de donde $y \in W^s_{epsilon}(z)$, o lo que es lo mismo $z \in W^s_\varepsilon(y)$ como queríamos demostrar. $\square$

2.2 Borde de un rectángulo

Definición 2.5. Se llama *Borde Estable* de un rectángulo R al conjunto:

$$\partial^s R = \{x \in R : x \notin \operatorname{int} W^u(x,R) \text{ en } W^u_\varepsilon(x)\}$$

Se llama *Borde Inestable* de un rectángulo R al conjunto:

$$\partial^u R = \{x \in R : x \notin \operatorname{int} W^s(x,R) \text{ en } W^s_\varepsilon(x)\}$$

Demostraremos que para los rectángulos R cerrados, el borde topológico de R es $\partial^s R \cup \partial^u R$. Además para justificar el nombre de borde estable, demostraremos que $\partial^s(R)$ está formado por la unión de ε-variedades estables en R:

Proposición 2.6. $y \in \partial^s R \ \Rightarrow \ W^s(y,R) \subset \partial^s R$.
$y \in \partial^u R \ \Rightarrow \ W^u(y,R) \subset \partial^u R$.

Demostración: Por absurdo sea $x \in W^s(y,R) \setminus \partial^s R$. Entonces $x \in \operatorname{int} W^u$ (x,R) en $W^u_\varepsilon(x)$, o sea existe un entorno V de x en $W^u_\varepsilon(x)$ contenido en R.

Sea $\varphi(z) = [z,x] = W^s_\varepsilon(z) \cap W^u_\varepsilon(x)$ definido para los puntos $z \in W^u\varepsilon(y)$ que están a distancia menor que δ de x. φ es continua pues es la restricción de $[\cdot,\cdot]$. Además $\varphi(y) = [y,x] = x$ porque $x \in W^s_\varepsilon(y)$. Entonces $\varphi^{-1}(V)$ es un abierto de $W^u_\varepsilon(y)$ que contiene a y. Además si $z \in \varphi^{-1}(V)$ entonces $\varphi(z) = u \in V \subset R$. Luego $[z,x] = u$, de donde $z \in W^s_\varepsilon(u)$. Como $z \in W^u_\varepsilon(y)$ se obtiene que $z = [u,y]$ con $u,y \in R$. Entonces por definición de rectángulo $z \in R$. Se tiene así que $\varphi^{-1}(V) \subset R$.

Se ha hallado un entorno de y en $W^u_\varepsilon(y)$ contenido en R. Entonces $y \in \operatorname{int} W^u(y,R)$ en $W^u_\varepsilon(y)$, o sea $y \notin \partial^s R$ contradiciendo la hipótesis. $\square$

Proposición 2.7. *Si R es un rectángulo cerrado entonces $\partial R = \partial^s R \cup \partial^u R$.*

Demostración: Veremos que int$R = R \setminus (\partial^s R \cup \partial^u R)$ Según la definición de borde estable e inestable tenemos que:

$$R \setminus (\partial^s R \cup \partial^u R) = \{x \in R : x \in \text{int}\, W^u(x,R) \text{ en } W^u_\varepsilon(x),$$
$$x \in \text{int}\, W^s(x,R) \text{ en } W^s_\varepsilon(x)\}.$$

Sea $y \in$ int R, sea B un entorno de y en M contenido en R. Tenemos que:

$$y \in W^u_\varepsilon(y) \cap B \supset W^u_\varepsilon(y) \cap R = W^u(y,R)$$

Luego $W^u_\varepsilon(y) \cap B$ es un entorno de y en $W^u_\varepsilon(y)$ que está contenido en $W^u(y,R)$, y entonces $y \notin \partial^s R$.

De igual forma tenemos que $y \notin \partial^u R$, con lo cual deducimos que:

$$\text{int}\, R \subset R \setminus (\partial^s R \cup \partial^u R)$$

Recíprocamente: Si $y \in$ int $W^u(y,R)$ en $W^u_\varepsilon(y)$ entonces existe un entorno de y en $W^u_\varepsilon(y)$ que está contenido en R. Llamemos V a su intersección con $W^u\overline{\varepsilon}(y)$, siendo $\overline{\varepsilon}$ ¿0 elegido como en el Teorema 1.23.

V es un entorno de y en $W^u_\varepsilon(y)$ porque $W^u\overline{\varepsilon}(y)$ lo es. Además $V \subset R \cap W^u\overline{\varepsilon}(y)$. De igual forma hallemos U entorno de $y$en $W^s_\varepsilon(y)$ contenido de $R \cap W^s\overline{\varepsilon}(y)$.

Por el Teorema 1.23 $[V,U]$ es un entorno de y en M. Como $V,U \subset R$, por la definición de rectángulo se deduce que $[V,U] \subset R$. Entonces $y \in$ int R. Luego $R \setminus (\partial^s R \cup \partial^u R) \subset$ int R. $\square$

2.3 Propiedades de los rectángulos

Algunas propiedades que se demuestran a continuación serán utilizadas en los parágrafos siguientes:

Proposición 2.8. *Si R es un rectángulo entonces también los son $\overline{R}$ y int R cuando no es vacío.*

Si R_1 y R_2 son rectángulos tales que $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ entonces $R_1 \cap R_2$ también es un rectángulo.

Demostración: Sean $x,y \in \overline{R}$, $x_n =\to x$, $y_n \to y$, $x_n, y_n \in R$. Probemos que $[x,y] \in \overline{R} forall x,y \in \overline{R}$. Se tiene por la continuidad de la función corchete que $[x,y] = \lim [x_n, y_n]$. Según la definición de rectángulo se sabe que $[x_n, y_n] \in R$, ya que $x_n, y_n \in R$. Entonces $[x,y] \in \overline{R}$ como se quería.

Sean ahora $x,y \in \operatorname{int} R$. Entonces $[x,y] \in R$. Por la expansividad de f se tiene que $x = [[x,y],x]$ e $y = [y,[x,y]]$.

Sean V_x, V_y entornos de x e y respectivamente, ambos contenidos en R. Por la continuidad de la función corchete existe V entorno de $[x,y]$ en M tal que $[V,x] \subset V_x$, $[y,V] \subset V_y$. Entonces para todo $z \in V$ se cumple:

$$[[z,x],[y,z]] \in R$$

Siendo $\varepsilon < \rho/4$ tenemos que $z = [[z,x],[y,z]]$ y entonces $V \subset R$. Luego $[x,y] \in \operatorname{int} R$ como se quería.

Finalmente, la intersección no vacía de rectángulos es un rectángulo como se ve inmediatamente a partir de la definición de rectángulo. □

2.4 Definición de partición de Markov

Definición 2.9. Una *partición por cerrados* de una variedad M es un cubrimiento finito de M por cerrados R_i con interiores dos a dos disjuntos. El diámetro de la partición es el máximo de los diámetros de los conjuntos cerrados que la componen.

Definición 2.10. Una partición por cerrados de M es una *partición de Markov* para el difeomorfismo de Anosov f si está constituida por rectángulos propios $R_1, R_2, \ldots, R_m$ y si para todo $x \in \operatorname{int} R_i \cap f^{-1} \operatorname{int} R_j$ se cumple:

i) $fW^s(x,R_i) \subset W^s(fx,R_j)$

ii) $fW^u(x,R_i) \supset W^u(fx,R_j)$

Observación 2.11. La partición de Markov está vinculada a f a través de la definición de rectángulo y de las condiciones (i) y (ii). Si $\operatorname{int} R_i \cap$

$f^{-1}\text{int}\, R_j \neq \emptyset$ entonces $f(R_i)$ se obtiene de R_i al aplicarle f comprimiendo las variedades ε- estables y dilatando las inestables.

Sea una partición $\mathcal{R}$ en m subconjuntos de M($\mathcal{R}$ no es necesariamente de Markov), con diámetro $\beta < \rho$ (ρ es la constante de expansividad de f). Se cumple:

a) $\cap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}R_{j_n}$ consta a lo sumo de un punto (donde j_n es una sucesión bi-infinita de números en $\{1,2,\ldots,m\}$). Esto es porque:

$$x,y \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}R_{j_n} \;\Rightarrow \text{dist}\,(f^n x, f^n y) < \rho \;\;\forall n\in\mathbb{Z} \;\;\Rightarrow x = y$$

b) Sea Σ el conjunto de las sucesiones $\{j_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que $\cap_{n\in\mathbb{Z}}R_{j_n} \neq \emptyset$. Por lo observado antes existe una función $\Pi : \sigma \mapsto M$ definida por:

$$\Pi(\{j_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} R_{j_n}$$

Π es sobreyectiva pues toda órbita $\{f^n x\}_{n\in\mathbb{Z}}$ está cubierta por conjuntos de la partición. Así dado $x\in M$ existe alguna sucesión j_n tal que $f^n(x)\in R_{j_n}\;\forall n\in\mathbb{Z}$. Luego $x\in\cap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}R_{j_n}$.

c) Si $x,y\in\cap_{n\geq 0} f^{-n}R_{j_n}$ entonces $\text{dist}\,(f^n x, f^n y) \leq \beta\;\forall n\geq 0$. Luego $y\in W^s_\beta(x)\cap R_{j_0}$. Hemos probado que para cualquier partición $\mathcal{R}$ se cumple:

$$x\in\cap_{n\geq 0} f^{-n}R_{j_n} \;\Rightarrow \cap_{n\geq 0} f^{-n}R_{j_n} \subset W^x_\beta(x)\cap R_{j_0}$$

Observación 2.12. Si $x = \Pi\{j_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ entonces $f^n(x)\in R_{j_n}\forall n\in\mathbb{Z}$, o sea $f^n(fx)\in R_{n_{j+1}}\;\forall n\in\mathbb{Z}$, de donde $fx = \Pi\{j_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Llamemos *shift* a la transformación $\sigma : \Sigma\mapsto\Sigma$ tal que a la sucesión $\{j_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ hace corresponder la sucesión $\{j_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Hemos obtenido que $\Pi \circ \sigma = f \circ \Pi$, es decir, conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & \sigma & & \\ & \Sigma & \rightarrow & \Sigma & \\ \Pi & \downarrow & & \downarrow & \Pi \\ & M & \rightarrow & M & \\ & & f & & \end{array}$$

Además como Σ y f son invertibles se cumple que $\Pi \circ \Sigma^n = f^n \circ \Pi \; \forall n \in \mathbb{Z}$. Luego:

La función sobreyectiva Π lleva órbitas del shift en órbitas de f.

Sea $\mathcal{R} = \{R_1, \dots R_m\}$ una partición de Markov y sea $x \in M$ un punto cuya órbita por f no corta a los bordes de los cerrados R_j de la partición, o sea $x \in \cap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(M \setminus \partial \cup_{j=1}^{m} \partial R_j)$. Sea $\{j_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión tal que $f^n x \in R_{j_n} \; \forall n \in \mathbb{Z}$ (o sea $\Pi(\{j_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = x$). Ahora, por construcción tenemos que $f^n x \in \operatorname{int} R_{j_n}$ y por definición de partición cerrada $\{j_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es única. La función Π es inyectiva sobre el conjunto $\cap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(M \setminus \cup_{j=1}^{m} \partial R_j)$. A continuación veremos que ese conjunto es denso en M e invariante bajo f.

2.5 Borde de la partición de Markov

Definición 2.13. Sea $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ una partición de M por cerrados. Se llama *borde de $\mathcal{R}$* al conjunto:

$$\partial \mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^{m} \partial R_j$$

Si $\mathcal{R}$ es una partición de Markov se llama *borde estable de $\mathcal{R}$* a:

$$\partial^s \mathcal{R} = \cup_{j=1}^{m} \partial^s R_j$$

y se llama *borde inestable de $\mathcal{R}$* a:

$$\partial^u \mathcal{R} = \cup_{j=1}^{m} \partial^u R_j$$

Se observa de la proposición 2.7 lo siguiente:

$$\partial\mathcal{R} = \partial^s\mathcal{R} \cup \partial^u\mathcal{R}$$

Proposición 2.14. Sea $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ una partición por cerrados de M. Entonces:

1) $\partial\mathcal{R}$ tiene interior vacío y es cerrado.
2) $\cup_{j=1}^{m}\text{int}\, R_j$ es abierto y denso en M.
3) $A = M \setminus \cup_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}(\partial\mathcal{R})$ es denso en M e invariante por f.

Demostración: (1) ∂R_j es cerrado con interior vacío. La unión finita de conjuntos en una variedad que son cerrados con interior vacío es cerrada con interior vacío.

(2) Tomando el complemento $(\partial\mathcal{R})^c$ es abierto y denso en M. Pero si $y \in (\partial\mathcal{R})^c$ entonces $y \in \cap_{j=1}^{m}(\partial R_j)^c$. Como $\mathcal{R}$ cubre a M existe j tal que $y$int R_j. Entonces $(\partial\mathcal{R})^c \subset \cup_{j=1}^{m}\text{int}\, R_j$. Deducimos que $\cup_{j=1}^{m}\text{int}\, R_j$ es abierto y denso en M.

(3) $A = \cap_{n\in\mathbb{Z}}(f^{-n}\partial R_j)^c = \cap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}((\partial R_j)^c)$ es denso en M porque es la intersección numerable de abiertos densos. Además A es invariante por f porque:

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}((\partial R_j)^c)) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n-1}((\partial R_j)^c) = A\square$$

2.6 Propiedades de las particiones de Markov

La siguiente proposición permite aplicar las condiciones (i) y (ii) de la definición 2.10 de partición de Markov a otros puntos $x \in M$ que no están necesariamente en int $R_i \cap f^{-1}(\text{int}\, R_j)$.

Proposición 2.15. *Sea $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ una partición de Markov de M para f. Si int $R_i \cap f^{-1}(\text{int}\, R_j) \neq \emptyset$ entonces para todo $y \in R_i \cap f^{-1}R_j$ se cumple:*

i) $f(W^s(y,R_i)) \subset W^s(fy,R_j)$

ii) $f(W^u(y,R_i)) \supset W^u(fy,R_j)$

Demostración: Sean $x \in \text{int } R_i \cap f^{-1}(\text{int } R_j)$, $y \in R_i \cap f^{-1}(R_j)$. Es inmediato, a partir de la definición de rectángulo y sabiendo que $x, y \in R_i$ lo siguiente:

$$W^s(y,R_i) = \{[y,z] : z \in W^s(x,R_i)\} = \{[y,z] : fz \in fW^s(x,R_i)\}$$

Como $x \in \text{int } R_i \cap f^{-1}(\text{int } R_j)$ tenemos por la condición (i) de la definición 2.10 que se cumple:

$$f(W^s(x,R_i)) \subset W^s(fx,R_j) \subset R_j$$

Entonces $y,z \in R_i$, $fy, fz \in R_j$. Así $\text{dist}(y,z) \leq \text{ diam } R_i \leq \delta < \varepsilon$. Análogamente $\text{dist}(fy, fz) < \varepsilon$, de donde $f[y,z] = [fy, fz]$. Luego:

$$fW^s(y,R_i) = \{f[y,z] : z \in W^s(x,R_i)\} = \{[fy, fz] : z \in W^s(x,R_i)\} =$$

$$= \{[fy,w] : w \in fW^s(x,R_i)\} \subset$$

$$\{[fy,w] : w \in W^s(fx,R_j)\} = W^s(fy,R_j),$$

donde $fx, fy \in R_j$. Deducimos que $fW^s(y,R_i) \subset W^s(fy,R_j)$. Análogamente $fW^u(y,R_i) \supset W^u(fy,R_j)$ $\square$

Corolario 2.16. *Si $\{R_{j_n}\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de rectángulos de una partición de Markov $\mathcal{R}$ con diámetro $\beta > 0$ suficientemente pequeño y tales que $\text{int } R_{j_n} \cap f^{-1} \text{ int } R_{j_{n+1}} \neq \emptyset$ $\forall n \geq 0$ entonces:*

$$x \in \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}R_{j_n} \Rightarrow \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}R_{j_n} = W^s_\varepsilon(x, R_{j_0})$$

Demostración: Por lo observado en 2.11 c) si se elige el diámetro de la partición de Markov menor que $\varepsilon > 0$ obtenemos $\bigcap_{n\geq 0} f^{-n}R_{j_n} \subset W^s_\varepsilon(x, R_{j_0})$. Sea $y \in W^s_\varepsilon(x, R_{j_0})$. Por 2.15 se tiene:

$$fy \in W^s_\varepsilon(fx, R_{j_1}), \quad f^n y \in W^s_\varepsilon(f^n y, R_{j_n}) \ \forall n \geq 0$$

Luego $y \in \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}R_{j_n}$ □

Proposición 2.17. *Si $\mathcal{R}$ es una partición de Markov para el difeomorfismo de Anosov f entonces:*

$$f(\partial^s \mathcal{R}) \subset \partial^s \mathcal{R}$$

$$f(\partial^u \mathcal{R}) \supset \partial^u \mathcal{R}$$

Demostración: Sea $x \in \partial^s \mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^m \partial^s R_i$. Sea i tal que $x \in \partial^s R_i$. En la proposición 2.14 se probó que $\bigcup_{j=1}^m \text{ int } R_j$ es denso en M. Entonces también lo es su preimagen por el difeomorfismo f. Luego:

$$(f^{-1} \bigcup_{j=1}^m \text{ int } R_j) \bigcap \text{ int } R_i$$

es denso en R_i. Sea entonces $x_n \in (f^{-1} \bigcup_{j=1}^m \text{ int } R_j) \bigcap \text{ int } R_i \ \forall n$ tal que $x_n \to x$. Tenemos que $f(x_n) \in \bigcup_{j=1}^m \text{ int } R_j \ \forall n \geq 0$, pero j solo puede tomar una cantidad finita de valores. Luego, existe una subsucesión, que por comodidad seguimos llamando x_n, y un índice j tal que $f(x_n) \in \text{ int } R_j \ \forall n \geq 0$.

El rectángulo R_j es cerrado. Entonces $f(x) = \lim f(x_n) \in R_j$. Tenemos entonces:

$$x_n \in (f^{-1} \text{ int } R_j) \bigcap \text{ int } R_i$$

Luego por 2.15 se cumple:

$$f(W^u(x, R_i)) \supset W^u(f(x), R_j)$$

Supongamos por absurdo que $f(x) \notin \partial^s R_j$. Existe un entorno V de $f(x)$ en $W^u_\varepsilon(f(x))$ contenido en $R_j \bigcap W^u_\varepsilon(f(x))$. Entonces:

$$f^{-1}(W^u_\varepsilon(f(x))) \subset W^u_\varepsilon(x)$$

Así $x \in \operatorname{int} W^u(x, R_i)$ en $W^u_\varepsilon(x)$, o sea, $x \notin \partial R_i$ contra lo supuesto.

De igual forma se prueba que $f(\partial^u \mathcal{R}) \supset \partial^u \mathcal{R}$. $\square$

Capítulo 3

Semiconjugación con el shift

3.1 Espacio de funciones bi-infinitas y función shift

Sea $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$ un conjunto finito de puntos en M. Se denota con $P^{\mathbb{Z}}$ al espacio de las sucesiones bi-infinitas de puntos en P. Tomando en P la topología discreta y en $P^{\mathbb{Z}}$ la topología producto asociada a ella, por el teorema de Tychonov, el espacio $P^{\mathbb{Z}}$ es compacto y metrizable.

Sea $q = \{q_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $q_j \in P$, $q \in P^{\mathbb{Z}}$. Una base local de abiertos en q está formada por los abiertos:

$$I_N(q) = \{q' \in P^{\mathbb{Z}} : q_j = q'_j \ \forall |j| \leq N\}$$

Una métrica en $P^{\mathbb{Z}}$ está dada por:

$$\operatorname{dist}(q,q') = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\operatorname{dist}(q_n, q'_n)}{2^{|n|}}$$

Definición 3.1. La función o transformación *shift*, denotada como $\sigma : P^{\mathbb{Z}} \mapsto P^{\mathbb{Z}}$, es la trasnformación definida por $\sigma(q) = q'$ donde $q'_n = q_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Se observa que la función shift σ aplicada a q consiste en un corrimiento a la izquierda de los términos de q: el mismo término q_0 que antes ocupaba el lugar 0, después de aplicarle σ ocupará el lugar -1 (es decir es q'_{-1}), el término q_1 que antes ocupaba el lugar 1 pasará a ocupar el lugar 0 (es decir será q'_0) y así $q_j = q'_{j-1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Es fácil demostrar que $\sigma : P^{\mathbb{Z}} \mapsto P^{\mathbb{Z}}$ es un homeomorfismo.

3.2 Semiconjugación

Sean M, M' dos espacios topológicos, y sean f, f' dos homeomorfismos en M y M' respectivamente.

Definición 3.2. Una función $\theta : M' \mapsto M$ se llama *semiconjugación* de f con f' si cumple:

i) θ es continua y sobreyectiva

ii) $f \circ \theta = \theta \circ f'$

Se observa que:

$$f \circ \theta = \theta \circ f' \quad \Rightarrow \quad f^n \circ \theta = \theta \circ f'^n \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Luego, toda órbita en M' según f' es llevada por θ a alguna única órbita por f en M y toda órbita en M por f es corresponde a alguna (no necesariamente única) órbita por f' en M'.

Definición 3.3. Una semiconjugación se llama *conjugación* entre f y f' si es un homeomorfismo.

3.3 Semiconjugación de los difeomorfismos de Anosov con el shift

Sea $\beta > 0$ arbitrario dado. Sea $f : M \mapsto M$ un difeomorfismo de Anosov. Por el teorema 1.9 el difeomorfismo f es topológicamente estable. Elijamos $\alpha > 0$ tal que toda pseudo-órbita de f está β acompañada por una órbita de f.

Sea $0 < \gamma < \text{mín}(\beta, \alpha/2)$ tal que:

$$\text{dist}\,(x,y) < \gamma \ \Rightarrow \ \text{dist}\,(fx, fy) < \alpha/2$$

Tal número γ existe porque f es continua en M compacta.

Siendo M compacta existe un conjunto finito $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ de puntos de M, centros de bolas de radio γ que cubren M. Dado $x \in M$ existe $p_j \in P$ tal que $\operatorname{dist}(x, p_j) < \gamma$. Es decir P es un conjunto γ-denso en M.

Sea $\Sigma(P) = \{q \in P^{\mathbb{Z}} : \operatorname{dist}(fq_j, fq_{j+1}) < \alpha \; \forall j \in \mathbb{Z}\}$

$\Sigma(P)$ es el conjunto de las α-pseudo-órbitas de f que están formadas con puntos de P.

Si además elegimos $\beta < \rho/2$, donde ρ es la constante de expansividad de f, se cumple, en virtud de la estabilidad topológica de f dada por el teorema 1.9, lo siguiente:

Para todo $q \in \Sigma(P)$ existe un único $\theta(q) \in M$ tal que:

$$dist(f^n(\theta(q)), q_n) \leq \beta \;\; \forall n \in Z$$

Lema 3.4. *La aplicación $\theta : \Sigma(P) \mapsto M$ es sobreyectiva.*

Demostración: Sea $x \in M$. Demostremos que existe algún $q \in \Sigma(P)$ tal que $x = \theta(q)$.

La órbita $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ se puede aproximar por $q = \{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in P^{\mathbb{Z}}$ de modo que:

$$\operatorname{dist}(f^n(x), q_n) \leq \gamma \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$$

porque P es γ-denso en M.

Entonces $\operatorname{dist}(fq_n, q_{n+1}) \leq \operatorname{dist}(fq_n, f^{n+1}x) + \gamma$. De acuerdo a la elección de γ, siendo $\operatorname{dist}(f^n x, q_n) < \gamma$, se cumple $\operatorname{dist}(f^{n+1}x, fq_n) < \alpha/2$.

Así $\operatorname{dist}(fq_n, q_{n+1}) \leq \alpha/2 + \gamma$.

Siendo $\gamma < \alpha/2$ se cumple $\operatorname{dist}(fq_n, q_{n+1}) < \alpha$, o sea $\{q_n\}$ es una α-pseudo-órbita de f. Luego $q \in \Sigma(P)$.

Como $\{f^n x\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una órbita que γ-acompaña a q por construcción, y siendo $\alpha < \beta$ resulta $\operatorname{dist}(f^n x, q_n) < \beta \; \forall n \in Z$. Entonces $x = \theta(q)$ como se quería demostrar. $\square$

Lema 3.5. *La aplicación $\theta : \Sigma(P) \mapsto M$ es continua*

Demostración: Sea $q^n \to q \in \Sigma(P)$, $\theta(q^n) = x_n \in M$. La sucesión x_n puede suponerse convergente $x_n \to x_0$debido a la compacidad de la variedad M.

Se tiene que $\operatorname{dist}(q^n_j, f^j(x_n)) \leq \beta \quad \forall j \in \mathbb{Z}$ por la construcción de la función θ.

Sea $j \in \mathbb{Z}$ fijo. Como $q^n \to q \in \Sigma(P)$, existe $N(j)$ tal que para todo $n > N(j)$ se cumple $q^n \in I_j(q)$, es decir $q^n_i = q_i \; \forall |i| \leq j$.

De lo anterior se deduce que para todo $n > N(j)$:

$$\operatorname{dist}(q_j, f^j(x_n)) \leq \beta$$

Tomando $n \to \infty$, en virtud de la continuidad de f se deduce que:

$$\operatorname{dist}(q_j, f^j(x_0)) \leq \beta \;\; \forall j \in \mathbb{Z}$$

Entonces por construcción de la función θ se cumple que $x_0 = \theta(q)$ y luego $\theta(q^n) \to \theta(q)$. $\square$

Teorema 3.6. *La función $\theta : \Sigma(P) \mapsto M$ es una semiconjugación del difeomorfismo de Anosov $f : M \mapsto M$ con el shift σ restringido a $\Sigma(P)$*

Demostración: La función shift σ, cuando restringida a $\Sigma(P)$, tiene codominio en $\Sigma(P)$ pues $\Sigma(P)$ es invariante bajo σ. En otras palabras $\sigma|_{\Sigma(P)} : \Sigma(P) \mapsto \Sigma(P)$.

Para demostrar que θ es una semiconjugación entre f y $\sigma|_{\Sigma(P)}$ alcanza demostrar que el diagrama siguiente conmuta, pues ya se sabe que θ es continua y sobreyectiva:

$$\begin{array}{ccccc} & & \sigma & & \\ & \Sigma(P) & \mapsto & \Sigma(P) & \\ \theta & \downarrow & & \downarrow & \theta \\ & M & \mapsto & M & \\ & & f & & \end{array}$$

Sea $q \in \Sigma(P)$. Sean $x = \theta(q)$, $q' = \sigma(q)$. Alcanza probar que $f(x) = \theta(q')$. Sea $x' = \theta(q')$. Entonces:

$$\operatorname{dist}(f^n(x'), q'_n) \leq \beta \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Pero $q'_n = q_{n+1}$ pues $q' = \sigma(q)$. Entonces:

$$\operatorname{dist}(f^n(x'), q_{n+1}) \leq \beta \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{dist}(f^{n+1}(f^{-1}(x')), q_{n+1}) \leq \beta \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Luego $f^{-1}(x') = \theta(q) = x$, de donde $x' = f(x)$ como queríamos probar.□

3.4 Conjuntos estable e inestable en el espacio de sucesiones

Sea $q \in \Sigma(P)$ donde $\Sigma(P)$ es el subconjunto de $P^{\mathbb{Z}}$ (sucesiones bi-infinitas) definido en la sección 3.3

Definición 3.7. Se llama *conjunto estable* por q en $\Sigma(P)$ a:

$$\widehat{W}^s(q) = \{q' \in \Sigma(P) : \operatorname{dist}(\sigma q, \sigma q') \to_{n \to +\infty} 0\}$$

Se llama conjunto inestable *por q en $\Sigma(P)$ a:*

$$\widehat{W}^u(q) = \{q' \in \Sigma(P) : dist(\sigma q, \sigma q') \to_{n \to -\infty} 0\}$$

Observación 3.8. Se sabe que $dist(q, q') = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \operatorname{dist}(q_j, q'_j)/2^{|j|}$. Luego:

$$dist(\sigma^n q, \sigma^n q') = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \operatorname{dist}(q_{n+j}, q'_{n+j})/2^{|j|}$$

Si $\operatorname{dist}(\sigma^n q, \sigma^n q') \to 0$ entonces existe N tal que $\forall n > N$ se cumple:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\operatorname{dist}(q_{n+j}, q'_{n+j})}{2^{|j|}} < \text{mín}\{\operatorname{dist}(p_i, p_j) : i \neq j, p_i, p_j \in P\}$$

Lo anterior se cumple si y solo si $q_n = q'_n$ para todo n suficientemente grande. Luego:

$$\widehat{W}^s(q) = \{q' \in \Sigma(P) : q'_n = q_n \; \forall n \text{ suficientemente grande}\} =$$

$$\widehat{W}^s(q) = \bigcup_{N \geq 0} \{q' \in \Sigma(P) : q'_n = q_n \; \forall n \geq N\}$$

Análogamente:

$$\widehat{W}^u(q) = \bigcup_{N \leq 0} \{q' \in \Sigma(P) : q'_n = q_n \; \forall n \leq N\}$$

Definición 3.9. Se llama $0-$*conjunto estable (e inestable)* por q a

$$\widehat{W}_0^s(q) = \{q' \in \Sigma(P) : q'_n = q_n \; \forall n \geq 0\}$$

(respectivamente a:

$$\widehat{W}_0^u(q) = \{q' \in \Sigma(P) : q'_n = q_n \; \forall n \leq 0\})$$

Observación 3.10. 1) $\widehat{W}_0^s(q) \subset \widehat{W}^s(q), \quad \widehat{W}_0^u(q) \subset \widehat{W}^u(q)$

2) $\sigma \widehat{W}_0^s(q) \subset \widehat{W}_0^s(\sigma q), \quad \sigma \widehat{W}_0^u(q) \supset \widehat{W}_0^u(\sigma q)$

3) Si $q, q' \in \Sigma(P)$ y si $q_0 = q'_0$, entonces puede construirse una única q'' tal que $q''_j = q_j \; \forall j \geq 0, \quad q''_j = q'_j \; \forall j \leq 0$. Se cumple:

$$q'' = \widehat{W}_0^s(q) \bigcap \widehat{W}_0^u(q')$$

Definición 3.11. *La función corchete en el espacio de sucesiones es:*

$$[,] : \{(q, q') \in (\Sigma(P))^2 : q_0 = q'_0\} \mapsto \Sigma(P)$$

definida por:

$$[q, q'] = \widehat{W}_0^s(q) \bigcap \widehat{W}_0^u(q')$$

o sea $q'' = [q, q']$ *si y solo si* $q''_j = q_j \; \forall j \geq 0, \quad q''_j = q'_j \; \forall j \leq 0$.

Proposición 3.12. Sea θ la semiconjugación definida en la sección 3.3. Si β es suficientemente pequeño entonces:

$$\theta[q,q'] = [\theta q, \theta q'] \; \forall q,q' \in \Sigma(P) \text{ tales que } q_0 = q'_0$$

Demostración: Sean $q,q' \in \Sigma(P)$ tales que $q_0 = q'_0$. Llamemos $x = \theta(q)$, $y = \theta(q')$, $z = \theta[q,q']$. Hay que demostrar que $z = [x,y]$ o sea que $z = W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$.

Por construcción y por definición de la función θ se cumple:

$$\operatorname{dist}(f^n x, q_n) \leq \beta \quad \operatorname{dist}(f^n y, q'_n) \leq \beta \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{dist}(f^n z, q_n) \leq \beta \; \forall n \geq 0, \quad \operatorname{dist}(f^n z, q'_n) \leq \beta \; \forall n \leq 0$$

porque $z = \theta[q,q']$.

Entonces:

$$\operatorname{dist}(f^n x, f^n z) \leq 2\beta \; \forall n \geq 0, \quad \operatorname{dist}(f^n y, f^n z) \leq 2\beta \; \forall n \leq 0$$

Eligiendo $2\beta < \text{mín}(\varepsilon, \delta/2)$ se tiene que $z \in W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$. Además $\operatorname{dist}(x,y) \leq \operatorname{dist}(x,z) + \operatorname{dist}(y,z) \leq 4\beta < \delta$ Entonces por la expansividad de f, el punto $z \in M$ es el único en $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$. $\square$

La semiconjugación definida en la sección 3.3 conmuta con la función corchete.

3.5 Construcción de un cubrimiento con rectángulos

Proposición 3.13. *Sea $\beta > 0$ dado suficientemente pequeño, como en la Proposición 3.12. Si $p_s \in P$ (según la sección 3.3) entonces $T_s = \theta\{q \in \Sigma(P) : q_0 = p_s\}$ es un rectángulo cerrado de M con diámetro a lo sumo 2β.*

Demostración: Si q,q' cumplen $q_0 = q'_0 = p_s$ entonces también se cumple por construcción de $[q,q']$ que $[q,q']_0 = p_s$.

Para demostrar que T_s es un rectángulo en M alcanza tomar $x,y \in T_s$ y demostrar que $[x,y] \in T_s$. Pero $x,y \in T_s \Rightarrow \theta(q) = x, \theta(q') = y$ con $q_0 = q'_0 = p_s$. Luego según 3.12 se tiene $[x,y] = \theta[q,q']$. Entonces $[x,y] \in T_s$ (por construcción de T_s).

Además $\operatorname{dist}(x,y) < \operatorname{dist}(x,q_0) + \operatorname{dist}(q'0,y) < 2\beta$. Entonces $\operatorname{diam} T_s \leq 2\beta$.

T_s es cerrado porque es la imagen continua de $\{q \in \Sigma(P) : q_0 = p_s\}$ que es compacto en $P^{\mathbb{Z}}$ (ya que es cerrado en el espacio compacto $P^{\mathbb{Z}}$). $\square$

Corolario 3.14. *La familia de rectángulos* $\tau = \{T_i\}_{i=1,\dots,m}$ (construidos según la proposición 3.13) *es un cubrimiento finito de M por rectángulos cerrados de diámetro a lo sumo* 2β.

Demostración: Alcanza ver que $\cup_{i=1}^m T_i = M$. Como θ es sobreyectiva, todo punto $x \in M$ es $x = \theta(q)$ con $q \in \Sigma(P)$. Sea $q_0 \in P = \{p_1, \dots, p_m\}$. Entonces existe un subíndice $s = 1, 2, \dots, m$ tal que $q_0 = p_s$, o sea $x \in T_s$. Luego $M = \cup_{i=1}^m T_i$ como se quería probar. $\square$

3.6 Propiedades del cubrimiento por rectángulos

Proposición 3.15. *Si* $x = \theta(q)$ *con* $q_0 = p_s$ *entonces* $\theta(\widehat{W}_0^s q) = W^x(x, T_s)$

Demostración: Si $y \in \theta(\widehat{W}_0^s q)$, entonces $y = \theta(q')$ con $q'_j = q_j, \forall j \geq 0$. Así $[\theta q, \theta q'] = [x,y] = \theta[q,q']$ (por la Proposición 3.12).

Como $q'_j = q_j \; \forall j \geq 0$ tenemos que $[q,q'] = q'$. Entonces $[x,y] = \theta q' = y$, de donde $y \in W^s(x, T_s)$. Hemos probado que $\theta(\widehat{W}_0^s q) \subset W^x(x, T_s)$.

Recíprocamente, si $y \in W^s(x, T_s) \subset T_s$ entonces existe q' con $q'_0 = p_s$ tal que $y = \theta(q')$ (por construcción del rectángulo T_s). Además si $y \in W^s(x, T_s)$ entonces $y = [x,y]$. Aplicando la proposición 3.12 se obtiene:

$$y = [x,y] = [\theta q, \theta q'] = \theta[q,q'] \in \theta(\widehat{W}_0^s q)$$

Hemos probado entonces que $W^s(x, T_s) \subset \theta(\widehat{W}_0^s q)$. $\square$

Observación 3.16. La proposición anterior caracteriza las ε-variedades estables en los rectángulos T_s de M: la semiconjugación θ lleva $\delta-$ variedades estables en el espacio $\Sigma(P)$ en ε- variedades estables en rectángulos T_s de M.

La siguiente proposición será utilizada en la sección 5 de este trabajo para demostrar el teorema de Sinai (existencia de una partición de Markov para f, difeomorfismo de Anosov).

Proposición 3.17. *Sea $q \in \Sigma(P)$ con $q_0 = p_s, q_1 = p_t$* (según la definición al principio de la sección 3.3). *Sea $x = \theta(q)$. Entonces:*

i) $fW^s(x,T_s) \subset W^s(fx,T_t)$

ii) $fW^u(x,T_s) \supset W^u(fx,T_t)$

Demostración: Se tiene $fx = \theta(\sigma q)$, $(\sigma q)_0 = q_1 = p_t$, $x = \theta(q)$, $q_0 = p_s$. Por la Proposición 3.15 tenemos que $W^s(x,T_s) = \theta(\widehat{W}^s_0 q)$, $W^s(fx,T_t) = \theta(\widehat{W}^s_0(\sigma q)$. Por el Teorema 3.6 $fW^s(x,T_s) = f\circ\theta(\widehat{W}^s_0 q) = \theta\sigma(\widehat{W}^s_0 q)$. De la definición de $\widehat{W}^s_0(q)$ y de la definición de la función shift σ, es inmediato que $\sigma(\widehat{W}^s_0 q) \subset \widehat{W}^s_0(\sigma q))$. Entonces:

$$fW^s(x,T_s) \subset \theta(\widehat{W}^s_0 \sigma q) = W^s(fx,T_t))$$

En forma similar, utilizando conjuntos inestables en vez de estables, se prueba (ii). $\square$

Observación 3.18. Este procedimiento ha permitido construir un cubrimiento $\tau = \{T_1,\ldots,T_m\}$ de M por rectángulos cerrados de diámetro menor que un número positivo dado y que cumplen las condiciones (i) y (ii) de la proposición anterior. Estas condiciones son similares a las exigidas en la definición de partición de Markov en el parágrafo 2.10.

El cubrimiento τ no es necesariamente una partición de Markov porque los interiores de los rectángulos de τ no son en general disjuntos dos y a dos y los rectángulos no son necesariamente propios. A partir del cubrimiento τ, que cumple (i) y (ii), refinándolo apropiadamente, se construirá una partición de Markov.

Capítulo 4

Método constructivo de la partición

En la sección 3.5 se construyó un cubrimiento finito τ de la variedad M, con rectángulos cerrados $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ para el difeomorfismo de Anosov f, que cumplen las condiciones (i) y (ii) de la Definición 2.10 de Partición de Markov. En esta sección se refinará el cubrimiento τ para obtener ahora una partición $\mathcal{R}$ por cerrados de M (con interiores dos a dos disjuntos) que sean además conjuntos propios (cada cerrado es la adherencia de su interior). Finalmente en la sección 5 se demostrará que esa partición $\mathcal{R}$ es una partición de Markov para f.

4.1 Primer refinamiento del cubrimiento

A partir del cubrimiento $\{T_i\}_{i=1,2,\ldots,m} = \tau$ definamos otro cubrimiento más fino, de la siguiente forma:

Definición 4.1. Sean $T_j, T_k \in \tau$. Se definen:

- $T_{jk}^1 = \{x \in T_j : W^u(x, T_j) \cap T_k \neq \emptyset,\ W^s(x, T_j) \cap T_k \neq \emptyset\}$
- $T_{jk}^2 = \{x \in T_j : W^u(x, T_j) \cap T_k \neq \emptyset,\ W^s(x, T_j) \cap T_k = \emptyset\}$
- $T_{jk}^3 = \{x \in T_j : W^u(x, T_j) \cap T_k = \emptyset,\ W^s(x, T_j) \cap T_k \neq \emptyset\}$
- $T_{jk}^4 = \{x \in T_j : W^u(x, T_j) \cap T_k = \emptyset,\ W^s(x, T_j) \cap T_k = \emptyset\}$

Observación 4.2. (1) T_j es la unión disjunta $\cup_{n=1}^4 T_{jk}^n$.

(2) Si $n_1 \neq n_2$ entonces $\mathrm{int} T_{jk}^{n_1} \cap T_{jk}^{n_2} = \emptyset = T_{jk}^{n_1} \cap T_{jk}^{n_2}$.

(3) $T^1_{jk} = T_j \cap T_k$. En efecto: $T_j \cap T_k \subset T^1_{jk}$. Además si $x \in T^1_{jk}$ entonces existen $y, z \in T_j \cap T_k$ tales que $y \in W^u_\varepsilon(x)$, $z \in W^s_\varepsilon(x)$. Luego $x = [x, y]$. Pero por definición de rectángulo, como $y, z \in T_j \cap T_k$, entonces $x = [z, y] \in T_j \cap T_k$.

Proposición 4.3. *Si $T^n_{jk} \neq \emptyset$ entonces T^n_{jk} es un rectángulo.*

Demostración: Sean $x, y \in T^n_{jk} \subset T_j$. Entonces $z \in [x, y] \in T_j$, porque T_j es un rectángulo. Por la proposición 2.4, como $z \in W^s(x, T_j)$, tenemos que $W^s(z, T_j) = W^s(x, T_j)$.

Análogamente $W^u(z, T_j) = W^u(y, T_j)$. Entonces:

$$W^s(z, T_j) \text{ ó } W^u(z, T_j)$$

cortan a T_k si y solo si lo hacen $W^s(x, T_j)$, o respectivamente $W^u(y, T_j)$. Luego $z \in T^n_{jk}$ como queríamos. □

4.2 Segundo refinamiento de la partición

Los rectángulos T^n_{jk} construidos al principio de la sección 4.1 cubren a M pero no tienen necesariamente interiores disjuntos. Tampoco son todos propios porque no son todos cerrados. Construiremos un refinamiento $\mathcal{R}$ de $\{T^n_{jk}\}$.

En primer lugar hay que observar que un punto $x \in M$ puede pertenecer a varios rectángulos de la familia $\{T^n_{jk}\}$.

Definición 4.4. Dado $x \in M$ sea:

$$H(x) = \{(j, k, n) : x \in T^n_{j,k}\}$$

$$R(x) = \bigcap_{(j,k,n) \in H(x)} \operatorname{int} \overline{T}^n_{j,k}$$

donde $R(x)$ podría ser vacío.

$$Z^* = \{x \in M : x \in \operatorname{int} T^n_{j,k} \ \ \forall (j,k,n) \in H(x))\}$$

$$\mathcal{R} = \{\overline{R(x)}\}_{x \in Z^*}$$

Observación 4.5. (1) $\mathcal{R}$ es una familia finita, porque $H(x)$ es un subconjunto del conjunto finito de todos los posibles índices:

$$\{(j,k,n) : 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq m, \leq n \leq 4\}.$$

(2) $x \in Z^*$ si y solo si toda vez que $x \in T^n_{j,k}$ se cumple $x \in \operatorname{int} T^n_{j,k}$.

(3) Si $x \in Z^*$ entonces $x \in R(x)$; luego en ese caso $R(x) \neq \emptyset$.

(4) Si $x \in Z^*$ entonces $R(x)$ es un rectángulo abierto, porque no es vacío y es intersección finita de rectángulos abiertos.

(5) Si $x \in Z^*$ entonces $\overline{R(x)}$ es un rectángulo propio pues:

$$\overline{R(x)} \supset \overline{\operatorname{int} \overline{R(x)}} \supset \overline{\operatorname{int} R(x)} = \overline{R(x)}$$

pues $R(x)$ es abierto. Entonces $\overline{R(x)} = \overline{\operatorname{int} \overline{R(x)}}$.

De las observaciones anteriores se deduce que $\mathcal{R}$ es una familia finita de rectángulos propios que cubren Z^*. Probaremos que $\mathcal{R}$ es una partición de M (más aún será una partición de Markov), para lo cual demostraremos que:

I) La familia $\mathcal{R}$ cubre a M lo que se demostrará en la sección 4.4.

II) Dos rectángulos de la familiar $\mathcal{R}$ que sean diferentes tienen interiores disjuntos (esto se demostrará en la sección 4.4).

Las afirmaciones (I) y (II) se probarán a partir de las definiciones de los rectángulos $T^n_{j,k}$ y del conjunto Z^*. En especial la densidad de Z^* en M que se demuestra a continuación juega un papel importante en la prueba.

4.3 Densidad del conjunto Z^* cubierto por la partición

Proposición 4.6. *El conjunto Z^* definido en la sección* 4.2 *es abierto y denso en M. Además:*

$$Z^* = \bigcap_{j,k=1}^{m} \left(\bigcup_{n=1}^{4} \text{int } T_{j,k}^{n} \cup T_j^c \right)$$

Demostración: Por definición:

$$Z^* = \{x \in M : x \in \text{ int } T_{jk}^n \; \forall (j,k,n) \in H(x)\} =$$

$$\{x \in M : x \in T_{jk}^n \Rightarrow \text{ int } T_{jk}^n\}$$

Se probó que $M = \cap_{j=1}^m T_j$. Además, por construcción, T_j es la unión disjunta $\cup_{n=1}^4 T_{j,k}^n \; \forall (j,k)$.

Fijados $j,k (1 \leq j,k \leq m)$ y dado un punto $x \in M$ se cumple $x \in T_j^c \cup \cup_{n=1}^4 T_{jk}^n$. Si el punto $x \in Z^*$ entonces $x \in T_j^c \cup \cup_{n=1}^4 T_{jk}^n \; \forall j,k$

Y recíprocamente, si $x \in T_j^c \cup \cup_{n=1}^4 T_{jk}^n \; \forall j,k$ entonces:

$$x \in \{x \in M : x \in T_{jk}^n \Rightarrow x \in \text{ int } T_{jk}^n\} = Z^*$$

Luego:

$$Z^* = \bigcap_{j,k=1}^{m} \left(T_j^c \bigcup \bigcup_{n=1}^{4} T_{jk}^n \right)$$

Entonces Z^* es abierto, por se intersección finita de abiertos.

Para demostrar que Z^* es denso en M alcanza probar que cada uno de los siguientes abiertos:

$$Z_{jk}^* = T_j^c \bigcup \bigcup_{n=1}^{4} T_{jk}^n$$

es denso en M.

Para eso es suficiente tomar un abierto cualquiera no vacío contenido en T_j y probar que corta a $\bigcup_{n=1}^{4}$ int T_{jk}^n.

El lema que sigue permite caracterizar $\bigcup_{n=1}^{4}$ int T_{jk}^n como intersección de dos abiertos densos en int T_j. Luego por el teorema de Baire, $\bigcup_{n=1}^{4}$ int T_{jk}^n será denso en int T_j como queremos.

Lema 4.7. *Dados* j,k *sean:*

$$\begin{aligned} A_{j,k} = {} & \text{int}\,\{x \in T_j : W^s(x,T_j) \cap T_k = \emptyset\} \cup \\ & \text{int}\,\{x \in T_j : W^s(x,T_j) \cap T_k \neq \emptyset\}, \\ B_{j,k} = {} & \text{int}\,\{x \in T_j : W^u(x,T_j) \cap T_k = \emptyset\} \cup \\ & \text{int}\,\{x \in T_j : W^u(x,T_j) \cap T_k \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Entonces:

1) $A_{j,k} \cap B_{j,k} = \cup_{n=1}^{4}$ int $T_{j,k}^n$

2) $A_{j,k}$ y $B_{j,k}$ *son abiertos y densos en* int T_j.

Demostración: 1) Teniendo en cuenta las definiciones en la sección 4.1 se tiene que:

$$A_{j,k} \cap B_{j,k} \cap T\,j,k^n = \text{int}\ T_{j,k}^n\ \forall j,k,n.$$

Entonces:

$$A_{j,k} \cap B_{j,k} \cap \cup_{n=1}^{4} T_{j,k}^n = \cup_{n=1}^{4} \text{int}\ T_{j,k}^n\ \ \forall j,k$$

Sabemos que $\cup_{n=1}^{4} T_{j,k}^n = T_j \ni A_{j,k} \cap B_{j,k}$ y entonces $A_{j,k} \cap B_{j,k} = \cup_{n=1}^{4}$ int $T_{j,k}^n\ \forall j,k$.

2) $A_{j,k}$ y $B_{j,k}$ son abiertos por construcción. Mostremos que $A_{j,k}$ es denso en int T_j. Sea V un abierto no vacío contenido en T_j. Basta probar que V contiene algún punto de $A_{j,k}$.

$$V = \{y \in V : W^s(y,T_j) \cap T_k = \emptyset\}\ \cup\ \{y \in V : W^s(y,T_j) \cap T_k \neq \emptyset\}$$

1er. caso) Si el primero de esos subconjuntos es vacío, entonces el otro es el abierto V y tiene entonces todos sus puntos interiores: $V \subset A_{j,k}$.

2do caso) Si existe $y \in V$ tal que $W^s(y, T_j) \cap T_k = \emptyset$ probemos que $y \in \operatorname{int}\{x \in V : W^s(y, T_j) \cap T_k = \emptyset\} \subset A_{j,k}$:

En efecto, si así no fuera existirían $Y_n \to y$ en T_j tales que $Z_n \in W^s(y_n, T_j) \cap T_k \neq \emptyset$. Tomando subsucesiones convergentes, tendríamos $z_n \to z$ en $T_j \cap T_k$ (porque T_j, T_k son cerrados). Luego:

$$z \in W^s_\varepsilon(y_n) \Rightarrow \operatorname{dist}\left(f^p z_n, f^p y_n\right) \leq \varepsilon \ \ \forall p \geq 0$$

Por continuidad $\operatorname{dist}\left(f^p z, f^p y\right) \leq \varepsilon \ \forall p \geq 0$ y entonces $z \in W^s_\varepsilon(y) \cap T_j \cap T_k$. Luego $W^s(y, T_j) \cap T_k \neq \emptyset$ contra lo supuesto. $\square$

4.4 Demostración de que $\mathcal{R}$ es una partición de *M*

En la sección 4.2 se construyó una familia $\mathcal{R} = \{\overline{R(x)}\}_{x \in Z^*}$ finita de rectángulos propios. Para demostrar que $\mathcal{R}$ es una partición por cerrados de M falta probar que:

I) $\mathcal{R}$ cubre M.

II) Los interiores de dos rectángulos distintos de $\mathcal{R}$ son disjuntos.

Proposición 4.8. $\mathcal{R} = \{\overline{R(x)}\}_{x \in Z^*}$ *definido según la sección 4.1 es un cubrimiento de M:*

Demostración: Como la familia $\mathcal{R}$ es finita se tiene:

$$\bigcup_{x \in Z^*} \overline{R(x)} = \overline{\bigcup_{x \in Z^*} R(x)}$$

Por la sección 4.2 si $x \in Z^*$ entonces $x \in R(x)$. Entonces $\cup_{x \in Z^*} R(x) \supset Z^*$ de donde:

$$\overline{\bigcup_{x \in Z^*} R(x)} \supset \overline{Z^*} = M$$

debido a la densidad de Z^* en M. $\square$

Proposición 4.9. *Sea $R(x)$ definido en la sección 4.2. Se cumple:*

1) $\operatorname{int} \overline{R(x)} = R(x)$

2) *Si x, y son tales que $R(x) \cap R(y) \neq \emptyset$ entonces $R(x) = R(y)$.*

Demostración: 1) Por la definición en la sección 4.2 se tiene:

$$R(x) = \bigcap_{(j,k,n) \in H(x)} \operatorname{int} \overline{T^n_{j,k}}$$

Por otro lado $R(x)$ es abierto contenido en $\overline{R(x)}$ y entonces $R(x) \subset \operatorname{int} \overline{R(x)}$.

Además $R(x) \subset \cap_{(j,k,n) \in H(x)} \overline{T^n_{j,k}}$ que es un cerrado. Luego $\overline{R(x)} \subset \overline{T^n_{j,k}}$ $\forall (j,k,n) \in H(x)$.

Se deduce que:

$$\operatorname{int} \overline{R(x)} \subset \operatorname{int} \overline{T^n_{j,k}} \quad \forall (j,k,n) \in H(x)$$

de donde:

$$\operatorname{int} \overline{R(x)} \subset \bigcap_{(j,k,n) \in H(x)} \operatorname{int} \overline{T^n_{j,k}} = R(x).$$

2) $R(x) \cap R(y)$ es abierto no vacío y como Z^* es denso en M contiene algún punto $z \in Z^*$. Alcanza probar que $R(x) = R(z) = R(y)$. Para eso es suficiente demostrar que si $z \in Z^*$ con $z \in R(x)$ entonces $H(x) = H(z)$ (por la definición en la sección 4.2).

Demostremos primero que $H(x) \subset H(z)$: $(j,k,n) \in H(x) \Rightarrow x \in T^n_{j,k} \Rightarrow z \in R(x) \subset \overline{T^n_{j,k}} \subset T_j = \cap^4_{n=1} T^n_{j,k}$. Luego existe n_1 tal que $z \in T^{n_1}_{j,k}$. Pero $z \in R(x) = \overline{T^n_{j,k}}$, luego:

$$\operatorname{int} T^{n_1}_{j,k} \cap \overline{T^n_{j,k}} \neq \emptyset$$

de donde $n_1 = n$. Luego $z \in T^n_{j,k}$ y $(j,k,n) \in H(z)$ como se quería probar.

Ahora probemos que $H(z) \subset H(x)$: Sea $(i,h,m) \in H(z)$, lo que implica $z \in T_{i,h}^m \subset T_i$, de donde $z \in T_i$. Sea j tal que $x \in T_j = \cup_{n=1}^4 T_{j,i}^n$. Existe n tal que $x \in T_{j,i}^n$. Como $H(x) \subset H(z)$ entonces $z \in T_{j,i}^n \subset T_j$. Pero entonces $z \in T_j \cap T_i = T_{j,i}^1$, o sea $n = 1$. Luego $x \in T_{j,i}^1 = T_j \cap T_i \subset T_i = \cup_{m=1}^4 T_{i,h}^m$.

Luego existe m_1 tal que $x \in T_{i,h}^{m_1}$. Como $H(x) \subset H(z)$ entonces $z \in T_{i,h}^{m_1}$. Pero por hipótesis $z \in T_{i,h}^m$ y entonces $m = m_1$ y $x \in T_{i,h}^m$ de donde $(i,h,m) \in H(x)$ como se quería probar. □

4.5 Densidad de Z^* en las variedades estable e inestables

En la sección 4.3 se probó que Z^* es denso en M y además que:

$$Z^* = \bigcap_{j,k=1}^{m} T_j^c \cup (A_{j,k} \cap B_{j,k})$$

Se probará que Z^* es además denso en las ε- variedades estables e inestables que pasan por algún punto de Z^*. Este resultado se utilizará luego en la demostración del teorema de Sinai.

Lema 4.10. *Sean $A_{j,k}$ y $B_{j,k}$ definidos en la sección 4.3.*

Si $x \in A_{j,k}$ entonces int $T_j \cap W_\varepsilon^s(x) \subset A_{j,k}$.

Si $x \in B_{j,k}$ entonces int $T_j \cap W_\varepsilon^u(x) \subset B_{j,k}$.

Demostración: Si $x \in A_{j,k}$ existe un entorno V de x en T_j tal que para todo $y \in V$ $W^s(y,T_j)$ corta a T_k si y solo si lo hace $W^s(x,T_j)$ (por definición del abierto $A_{j,k}$ en la sección 4.3).

Sea $w \in$ int $T_j \cap W_\varepsilon^s(x)$. Tenemos que $x = [w,x]$. Existe un entorno W de w en M tal que $[W,x] \subset V$ por la continuidad de la función corchete. Podemos elegir $W \subset T_j$ porque $w \in$ int T_j. Si $z \in W$ entonces $[z,x] = y \in V$. Luego $W^s(z,T_j) = W^s(y,T_j)$. Entonces para todo $z \in W$: $W^s(z,T_j)$ corta a T_k si y solo si lo hace $W^s(x,T_j)$. De donde $w \in W \subset A_{j,k}$.

Análogamente se tiene que int $T_j \cap W_\varepsilon^u(x) \subset B_{j,k}$ cuando $x \in B_{j,k}$. □

Proposición 4.11. *Sean $x \in Z^*$ y $R(x)$ definidos en la sección 4.2.*
Z^* es denso en $W^s(x,R(x))$ y en $W^u(x,R(x))$.

Demostración: Dado un abierto V en $W^s(x,R(x))$ demostremos que contiene algún punto de Z^*. Si $w \in V$, entonces $w \in W^s_\varepsilon(x) \cap R(x),\ w = [x,w]$. Por continuidad de la función corchete existe un entorno U de w en M tal que $[x,U] \subset V$.

Como $w \in R(x)$ y $R(x)$ es abierto podemos suponer que $U \subset R(x)$.

Sabemos que Z^* es denso en M por lo demostrado en la sección 4.3. Existe $y \in U \cap Z^*$. Basta demostrar que el punto z definido como $z = [x,y]$ pertenece a Z^*.

En efecto por lo demostrado en la sección 4.3: $Z^* = \cap_{j,k=1}^m T_j^c \cup (A_{j,k} \cap B_{j,k})$. Basta demostrar que si $z \in T_j$ entonces $z \in A_{j,k} \cap B_{j,k}\ \ \forall k$.

Por construcción $z = [x,y]\ \ ,\ x,y \in Z^* \cap R(x)$. Sea j tal que $z \in T_j$. Sea i tal que $x \in T_i$. Se tiene que $y,z \in R(x) \subset \ \text{int}\ \overline{T_i}\ =\ \text{int}\ T_i$ pues T_i es cerrado. Así $x,y \in Z^* \cap T_i$. Por la caracterización de Z^*: $x,y \in A_{i,j} \cap B_{i,j}$.

Además $z \in W^s_\varepsilon(x) \cap\ \text{int}\ T_i,\quad z \in W^u_\varepsilon(y) \cap\ \text{int}\ T_i$. Aplicando el lema de la sección 4.3 se tiene que $z \in A_{i,j} \cap B_{i,j} = \cup_{n=1}^4\ \text{int}\ T_{i,j}^n$.

Como $z \in T_j \cap T_i = T_{i,j}^1$ entonces z int $T_{i,j}^1$. Como $x \in T_i$ entonces $x \in T_{i,j}^n$ para algún n. Luego $y,z \in R(x) \subset overlineT_{i,j}^n$. Luego $z \in \overline{T_{i.j}^n} \cap\ \text{int}\ T_{i,j}^1 \neq \emptyset$ de donde $n = 1$.

Hemos probado que para todo j tal que $z \in T_j$ se cumple $x,y \in T_j$. Entonces $z \in T_j \Rightarrow x \in T_j \Rightarrow z \in R(x) \subset\ \text{int}\ T_j$. Luego $z \in W^s_\varepsilon(x) \cap\ \text{int}\ T_j\ \ ,z \in W^u_\varepsilon(y) \cap\ \text{int}\ T_j$. Como $x,y \in Z^* \cap T_j$ entonces $x,y \in A_{j,k} \cap B_{j,k}\ \forall k$. Aplicando de nuevo el lema de la sección 4.3 se deduce $z \in A_{j,k} \cap B_{j,k}\ \ \forall k$. □

Corolario 4.12. *Si $x \in f^{-1}(Z^*)$ entonces $f^{-1}(Z^*)$ es denso en $W^s(x,R(x))$.*

Demostración: Sea V un abierto no vacío de $W^s(x,R(x))$. Encontraremos un punto $y \in f^{-1}(Z^*) \cap V$.

$V = U \cap W^s_\varepsilon(x)$ donde U es un abierto de M.

$f(V) = f(U) \cap f(W^s_\varepsilon(x))$ porque f es invertible.

$f(V) = f(U) \cap W^s_\varepsilon(fx) \cap f(\overline{B}_\varepsilon(x))$. Luego:

$f(V)$ es un entorno no vacío en $W^s_\varepsilon(fx)$, de donde también lo es $f(V) \cap R(fx)$ porque $R(fx)$ es un abierto de M.

Por la proposición anterior existe $z \in Z^*$ en $f(V) \cap R(fx)$. Sea $y = f^{-1}(z)$. Por construcción $y \in f^{-1}(Z^*) \cap V$. $\square$

Capítulo 5

Teorema de Sinai

En la parte 4 se construyó una partición $\mathcal{R}$ por rectángulos propios. Porbaremos que $\mathcal{R}$ es una partición de Markov de M para el difeomorfismo f de Anosov con lo cual quedará probada la existencia de particiones de Markov.

5.1 Enunciado del teorema de Sinai

Teorema 5.1. *Si f es un difeomorfismo de Anosov en M entonces, dado $\beta > 0$ existe una partición de Markov de M para f con diámetro menor que β.*

5.2 Lema

Lema 5.2. *Sea $\tau = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ el cubrimiento definido en la sección 3.5 con diámetro suficientemente pequeño y sean $Z^*, \mathcal{R}$ definidos en la sección 4.2 a partir de τ.*

Si $x, y \in Z^*$ y si $y \in f^{-1}(Z^*) \cap R(x) \cap W^s_\varepsilon(x)$ entonces $fy \in R(fx)$.

Demostración: $R(f(x)) = \cap_{(j,k,n)} \in H(fx) \text{ int } \overline{T^n_{j,k}}$ por la definición en la sección 4.2.

Basta probar que $fx \in T^n_{j,k} \Rightarrow fy \in \text{ int } \overline{T^n_{j,k}}$. Probemos primero que $fx \in T_j \Rightarrow fy \in T_j$:

$fx \in T_j \Rightarrow fx = \theta(\sigma q)$ con $q_1 = p_j$, $q_o = p_h$. Luego $x = \theta(q) \Rightarrow x \in T_h$.

$y \in W^s_\varepsilon(x) \cap R(x) \subset W^s_\varepsilon(x) \cap T_h = W^s(x, T_h)$.

Aplicando la proposición de la sección 3.6 e obtiene:

$$fy \in W^s(fx, T_j) \subset T_j.$$

Ahora probemos que $fx \in t^n_{j,k} \Rightarrow fy \in T^n_{j,k}$:

$fx \in T^n_{j,k} \subset T_j \Rightarrow fy \in T_j = \cup_{n=1}^4 T^n_{j,k}$. Por absurdo supongamos que $fy \in T^{n_1}_{j,k}$ con $n_1 \neq n$. Por hipótesis $y \in W^s_\varepsilon(x)$. Aplicando 1.16 se tiene $fy \in W^s_\varepsilon(fx)$. Luego de la proposición 2.4 se obtiene $W^s(fx, T_j) = W^s(fy, T_j)$. La hipótesis de absurdo y la definición de los rectángulos $T^n_{j,k}$ en la sección 4.4 implican que estrictamente uno de los conjuntos $W^u(fx, T_j)$, $W^u(fy, T_j)$ corta a T_k.

Supongamos para fijar ideas que $W^u(fx, T_j) \cap T_k \neq \emptyset$, $W^s(fy, T_j) \cap T_k = \emptyset$.

Como $fx \in T_j$ por 3.13 existe $q \in \Sigma(P)$ tal que $(\sigma q)_0 = p_j$, $fx = \theta(\sigma q = f(\theta q))$. Llamando $P_i = q_0$ se tiene $x = \theta(q)$. Luego $x \in T_i$.

Por hipótesis $y \in R(x) \cap W^S_\varepsilon(x)$. De lo anterior $R(x) \subset T_i$. Luego $y \in W^s(x, T_i)$.

Por lo supuesto, existe $fz \in W^u(fx, T_j) \cap T_k$. Aplicando la proposición de la sección 3.6 se tiene que $z \in W^u(x, T_i)$.

Como además $fz \in T_k$, por 3.13 existe $\overline{q} \in \Sigma(P)$ tal que $\sigma(\overline{q})_0 = p_k$, $fz = \theta(\sigma\overline{q}) = f\theta\overline{q}$. Llamando $p_h = \overline{q}_0$ se tiene $z \in \theta(\overline{q})$. Luego $z \in T_h$.

Por otro lado como $x, y \in T_i = \cup_{n=1}^4 T^n_{i,h}$, existen n_1, n_2 tales que $x \in T^{n_1}_{i,h}$, $y \in T^{n_2}_{i,h}$. Luego $y \in R(x) \subset \overline{T_{i,h}}^{n_1}$. Como $y \in Z^*$ entonces $y \in \operatorname{int} T^{n_2}_{i,h}$. Por lo observado en la sección 4.1 $n_1 = n_2$.

Sabiendo que $z \in W^u(x, T_i) \cap T_h \neq \emptyset$ y que $x, y \in T^{n_1}_{i,h}$ se obtiene que existe $w' \in W^u(y, T_i) \cap T_h \neq \emptyset$.

Sea $w = [z, w'] \in T_i \cap T_h$ porque $z, w' \in T_i \cap T_h$. Como $w' \in W^u_\varepsilon(y)$ se tiene $w = [z, w'] = [z, y] \in T_i \cap T_h$.

Si el diámetro de los rectángulos T_i se elige suficientemente pequeño, por la continuidad uniforme de f en M compacta se cumple que $w \in$

$W^u_\varepsilon(y)$, $w, y \in T_i \Rightarrow \operatorname{dist}(f^p W, f^p y) \leq \varepsilon \ \forall p \geq 0$, $\operatorname{dist}(fw, fy) < \varepsilon \Rightarrow fw \in W^u_\varepsilon(fy)$.

Como $w \in W^s(z, T_h)$ se tiene $fw \in W^s(fz, T_k)$.

Luego $fw = [fz, fy] \in T_j$ porque $fy, fz \in T_j$, de donde $fw \in W^u(fy, T_j)$ $\cap T_k \neq \emptyset$ contra lo supuesto.

Se observa que se han utilizado hasta aquí todas las hipótesis excepto que $y \in f^{-1}(Z^*)$ y que la misma demostración puede realizarse permutando x e y, pues todas las hípótesis utilizadas son simétricas en x e y. Entonces $y \in R(x) \cap Z^* \Rightarrow y \in R(y) \cap R(x) \neq \emptyset \Rightarrow R(y) = R(x)$ y como $x \in Z^*$ entonces $x \in R(x) = R(y)$. Además $y \in W^s_\varepsilon(x) \Rightarrow x \in W^s_\varepsilon(y)$ por definición. De allí que la suposición del principio no era restrictiva.

Finalmente demostremos que $fx \in T^n_{j,k} \Rightarrow fy \in \operatorname{int} \overline{T_{j,k}}^n$:

Tenemos que $fx \in T^n_{j,k} \Rightarrow fy \in T^n_{j,k}$. Además por hipótesis $fy \in Z^*$ o sea $fy \in T^n_{j,k} \Rightarrow fy \in \operatorname{int} T^n_{j,k} \subset \operatorname{int} \overline{T_{j,k}}^n$ $\square$.

5.3 Demostración del teorema de Sinai

La partición $\mathcal{R}$ de M construida en la sección 4.4 está formada por rectángulos propios y es un refinamiento del cubrimiento τ construido en la sección 3.5. Luego:

$$\operatorname{diam} \mathcal{R} \leq \max_{T_i \in \tau} \operatorname{diam} T_i$$

Por la proposición 3.13 $\operatorname{diam} T_i \leq 2\beta$ donde β es un número positivo arbitrario.

Para terminar de demostrar el teorema de Sinai solo hace falta verificar que $\mathcal{R}$ cumple las condiciones (i) y (ii) de la definición de partición de Markov (2.10), lo cual se demuestra a continuación:

Proposición 5.3. Si $x \in \operatorname{int} R_i \cap f^{-1} \operatorname{int} R_j$ con $R_i, R_j \in \mathcal{R}$ entonces

(i) $fW^s(x, R_i) \subset W^s(fx, R_j)$

(ii) $fW^u(x, R_i) \supset W^u(fx, R_j)$

Demostración: Por lo visto en 1.16 $fW^s_\varepsilon(x) \subset W^s_\varepsilon(fx)$. Para demostrar (i) alcanza probar que $fW^s(x,R_i) \subset R_j$. Probémoslo primero en el caso particular que:

$$x \in Z^* \cap f^{-1}Z^* \cap \operatorname{int} R_i \cap f^{-1} \operatorname{int} R_j$$

Por lo visto en la sección 4.4 $R(x) = \operatorname{int} R(x)$, $R(fx) = \operatorname{int} R(fx)$. Por lo visto en la sección 4.5 $Z^* \cap f^{-1}Z^*$ es denso en $W^s(x,R_i)$. Dado $y \in W^s(x,R_i)$ existe $y_n \to y$ con $y_n \in Z^* \cap f^{-1}Z^* \cap W^s(x,R(x))$. Por el lema de la sección 5.2 se tiene $fY_n \in R(f(x))\ \forall n$. Luego $fy = \text{lím}\, fy_n \in \overline{R(fx)} = R_j$ o sea $fW^s(x,R_i) \subset R_j$ como queríamos probar.

Ahora probémoslo en general: Si $x \in \operatorname{int} R_i \cap f^{-1} \operatorname{int} R_j$ sea:

$$\overline{x} \in Z^* \cap f^{-1}Z^* \cap \operatorname{int} R_i \cap f^{-1} \operatorname{int} R_j$$

Existe tal x porque $Z^* \cap f^{-1}Z^*$ es denso en M al ser intersección de abiertos densos.

$W^s(x,R_i) = \{[x,\overline{y}] : \overline{y} \in W^s(\overline{x},R_i)\}$ $fW^s(x,R_i) = \{f[x,\overline{y}] : \overline{y} \in W^s(\overline{x},R_i)\}$. Como $f[x,\overline{y}] = [fx, f\overline{y}]$ se obtiene:

$$fW^s(x,R_i) = \{[fx, f\overline{y}] : \overline{y} \in W^s(\overline{x},R_i)\} = \{[fx,w] : w \in fW^s(\overline{x},R_i)\}$$

$$\subset \{[fx,w] : w \in W^s(f\overline{x},R_j)\} = W^s(fx,R_j)$$

Hemos probado que $fW^s(x,R_i) \subset W^s(fx,R_j)$.

La afirmación (ii) se prueba de (i) aplicándola al difeomorfismo f^{-1} recordando que las variedades estables de f^{-1} son las inestables de f. $\square$

Capítulo 6

Dinámica Simbólica

6.1 Matriz de transición

Sea $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$ una partición de la variedad M.

Definición 6.1. La matriz de transición A de la partición es una matriz $m \times m$ tal que $A_{i,j} = 1$ sin int $R_i \cap f^{-1}$ int $R_j \neq \emptyset$ y $A_{i,j} = 0$ en caso contrario.

Definición 6.2. Si A es la matriz de transición de la partición $\mathcal{R}$ denotaremos con Σ_A al conjunto de sucesiones bi-infinitas $\{R_{a_i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de rectángulos de $\mathcal{R}$ tales que dos rectángulos R_{a_i} y $R_{a_{i+1}}$ consecutivos cumplen:

$$\text{int } R_{a_i} \cap f^{-1} \text{ int } R_{\_i+1} \neq \emptyset$$

Luego:

$$\Sigma_A = \{a \in \{1, 2, \ldots, m\}^{\mathbb{Z}} : A_{a_i a_{i+1}} = 1\}$$

Observación 6.3. 1) Si $\mathcal{R}$ es una partición de Markov, aplicando 2.15 se obtiene, para todo $x \in R_i \cap f^{-1} R_j$ cuando $A_{ij} = 1$:

i) $fW^s(x, R_i) \subset W^s(fx, R_j)$

ii) $fW^u(x, R_i) \supset W^u(fx, R_j)$

2) Σ_A es invariante por el shift σ pues:

$$a \in \Sigma_A \Rightarrow A_{a_i a_{i+1}} = 1 \ \forall i, \ \sigma(a)_i = a_{i+1}, \ \sigma(a)_{i+1} = a_{i+2},$$

$$A_{a_{i+1} a_{i+2}} = 1 \ \forall i \Rightarrow \sigma(a) \in \Sigma_A$$

3) En 2.11 se observó que si existe, es único el punto $x \in \cap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j} R_{n_j}$ con $\{n_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ sucesión cualquiera bi-infinita.

Cuando $\mathcal{R}$ es una partición de Markov demostraremos que:

1) $a \in \Sigma_A \Rightarrow \ \exists x = \cap j \in \mathbb{Z} f^{-j} R_{a_j}$

2) La función $\pi : \Sigma_A \mapsto M \ \ \pi(x) = \cap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j} R_{a_j}$ es una semiconjugación de f con el shift.

   π llevará entonces continuamente y sobreyectivamente las órbitas del shift en Σ_A (llamada ”dinámica simbólica”) en las órbitas de f en M.

Además en la sección 2.4 se observó que si $x \notin \cup_{j\in Z} f^j \partial\mathcal{R}$ entonces existe una única sucesión bi-infinita $\{n_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ tal que $f^j(x) \in R_{n_j}\ \forall j \in \mathbb{Z}$ (es decir $x = \cap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j} R_{n_j}$). Eso significa que π es además inyectiva en los puntos de $M \setminus \cup_{j\in\mathbb{Z}} f^j \partial\mathcal{R}$, que como se vio en 2.14 es denso en M.

6.2 Lema

Lema 6.4. *Sea $\mathcal{R}$ una partición de Markov y A su matriz de transición. Sea $a \in \Sigma_A$. Entonces:*

$$K_N(a) = \bigcap_{j=-N}^{j=N} f^{-j} R_{a_j}$$

es un rectángulo cerrado.

Demostración: Supongamos en primer lugar que $K_N(a) \neq \emptyset$ y demostremos la tesis en este caso: $K_N(a)$ es cerrado por ser intersección finita de cerrados R_i. Si $x, y \in K_N(a) = \cap_{-N}^{N} f^{-j} R_{a_j}$ entonces $f^j x,\ f^j y \in R_{a_j}\ \forall |j| \leq N$. Sea $w = [x, y] \subset R_{a_0}$. Se cumple $w \in W^s(x, R_{a_0}),\ w \in W^u(y, R_{a_0})$. Aplicando la proposición 2.15 se obtiene:

$$fw \in W^s(fx, R_{a_1}) \ \ , \ \ f^{-1}w \in W^u(f^{-1}y, R_{a_{-1}})$$

$$f^j w \in W^s(f^j x, R_{a_j}) \ , \ f^{-j} w \in W^u(f^{-j} y, R_{a_{-j}}) \ \forall 0 \leq j \leq N$$

Se observa que para poder aplicar la proposición 2.15 se usan las hipótesis $a \in \Sigma_A$ y la partición $\mathcal{R}$ es de Markov.

Luego $f^j w \in R_{a_j} \ \forall |j| \leq N$ o sea $w \in K_N(a)$.

Demostremos ahora que $K_N(a) \neq \emptyset \ \ \forall a \in \Sigma_A$:

$$K_N(a) = f^N R_{a_{-N}} \cap f^{N-1} R_{a_{-N+1}} \cap \ldots \cap f^{-N+1} R_{a_{N-1}} \cap f^{-N} R_{a_N} =$$

$$= f^N (R_{a_{-N}} \cap f^{-1} R_{a_{-N+1}} \cap \ldots \cap f^{-2N} R_{a_N})$$

Es suficiente demostrar que para todo $b \in \Sigma_A$ y para todo $n \geq 0$

$$R_{b_0} \cap f^{-1} R_{b_1} \cap \ldots \cap f^{-n} R_{b_n} \neq \emptyset$$

Por inducción completa sobre n: Cuando $n = 0$ el conjunto $R_{b_0} \neq \emptyset$ por ser un rectángulo.

Sabiendo por hipótesis de inducción que existe $y \in R_{b_1} \cap \ldots \cap f^{-n+1} R_{b_n}$ encontremos $z \in R_{b_0} \cap f^{-1}(R_{b_1} \cap \ldots \cap f^{-n+1} R_{b_n})$:

$b \in \Sigma_A \Rightarrow \text{int} R_{b_0} \cap f^{-1} \text{int } R_{b_1} \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \exists f^{-1} x \in R_{b_0} \cap f^{-1} R_{b_1}$.

Sea $z = [y, x]$. Se tiene $z \in R_{b_1}$ porque $x, y \in R_{b_1}$. Además $z \in W^s(y, R_{b_1})$. Por 2.15:

$$fz \in W^s(fy, R_{b_2}), \ldots, f^{n-1} z \in W^s(f^{n-1} y, R_{b_n})$$

Así $z \in R_{b_1} \cap \ldots \cap f^{-n+1} R_{b_n}$. Además $z \in W^u(x : R_{b_1})$. Por 2.15 $f^{-1} z \in W^u(f^{-1} x, R_{b_0}) \subset R_{b_0}$. Así se tiene:

$$f^{-1} z \in R_{b_0} \cap f^{-1}(R_{b_1} \cap \ldots \cap f^{-n+1} R_{b_n}). \quad \square$$

6.3 Teorema de semiconjugación

Sea $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i=1,\ldots,m}$ una partición de Markov de la variedad M para el difeomorfismo f.

Sea A la matriz de transición y Σ_A el subespacio de las sucesiones bi-infinitas definido en la sección 6.1.

Entonces:

1) Para todo $a \in \Sigma_A$ existe único $x = \cap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}(R_{a_j})$

2) La función $\pi : \Sigma_A \mapsto M$ definida por $\pi(a) = \cap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}(R_{a_j})$ es una semiconjugación de f con el shift σ en Σ_A.

3) $\pi|_{\pi^{-1}(\cap_{j\in Z} f^{-j}(\partial\mathcal{R})^c)}$ es inyectiva, es decir π es inyectiva en los puntos de M cuyas órbitas no cortan al borde $\partial\mathcal{R}$ de la partición.

Demostración: Sea $K_N(a) = \bigcap_{|j|\leq N} f^{-j}R_{a_j}$.

$K_N(a)$ es cerrado no vacío por el lema de la sección 6.2

$K_N(a) \supset K_{N+1}(a)$ por construcción.

Siendo M compacta por la propiedad de las intersecciones finitas se sabe que el conjunto:

$$K(a) = \bigcap_{infty}^{+\infty} f^{-j}R_{a_j} = \bigcap_{N=1}^{+\infty} K_N(a) \neq \emptyset$$

lo cual prueba que existe $x \in K(a)$.

$x \in K(a)$ es único porque si $x, y \in K(a)$ entonces $f^j(x), f^j(y) \in R_{a_j}$ $\forall j \in \mathbb{Z}$. Pero R_{a_j} tiene diámetro a lo sumo igual al de la partición de Markov que puede elegirse menor que la constante de expansividad de f, resultando $x = y$.

Se ha probado la parte 1) de la tesis.

Ahora probemos la parte 2):

$$\pi(\sigma(a)) = \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j}R_{a_{j+1}} = f(\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j-1}R_{a_{j+1}}) = f(\pi(a))$$

Entonces:

$$\pi \circ \sigma(a) = f \circ \pi(a) \ \ \forall\, a \in \Sigma_A$$

Por lo tanto es conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & \sigma & & \\ & \Sigma_A & \mapsto & \Sigma_A & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \pi \\ & M & \mapsto & M & \\ & & f & & \end{array}$$

Para demostrar que π es una semiconjugación hay que probar que $\pi : \Sigma_A \mapsto M$ es continua y sobreyectiva.

π es continua pues si $a^n \to a \in \Sigma_A$, llamando $\pi(a^n) = x_n \in M$ y eligiendo una subsucesión convergente tenemos $x_n \to x \in M$ y además:

$$x_n = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^{-j} R_{a_j^n}$$

Como $a^n \to a$, dado $p > 0$ existe $N > 0$ tal que $a_j^n = a_j \; \forall n > N, \; \forall \, |j| \leq p$. Luego para todo $n > N$ el punto $x_n \in \bigcap_{-p}^{p} f^{-j} R_{a_j}$ que es un cerrado. Entonces $x = \lim x_n \in \bigcap_{-p}^{p} f^{-j} R_{a_j} \; \forall \, p > 0$. Así $x \in \bigcap_{-\infty}^{+\infty} f^{-j} R_{a_j} = \pi(a)$.

π es sobreyectiva pues si $x \in M \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^j \partial\mathcal{R}$ la órbita por x no corta al borde $\partial\mathcal{R}$ de la partición. Entonces sea $a_j(x)$ el único subíndice tal que $f^j(x) \in \operatorname{int} R_{a_j(x)}$. Como $f^j(x) \in \operatorname{int} R_{a_j(x)} \bigcap f^{-1} \operatorname{int} R_{a_{j+1}(x)}$ tenemos que $A_{a_j a_{j+1}} = 1$ de donde $a(x) \in \Sigma_A$.

Entonces por construcción:

$$x \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} f^{-j} R_{a_j(x)} = \pi(a) \;\; \forall a \in \Sigma_A$$

.

Hemos probado que $\pi(\Sigma_A) \supset M \setminus \bigcup_{n\in Z} f^j \partial\mathcal{R}$. Por 2.14 el conjunto $M \setminus \bigcup_{n\in Z} f^j \partial\mathcal{R}$ es denso en M.

Además Σ_A es compacto porque es cerrado contenido en el espacio compacto $\{1, 2, \ldots, m\}^{\mathbb{Z}}$. Luego $\pi(\Sigma_A)$ es cerrado en M. Como contiene a un conjunto denso en M y es cerrado en M es M, lo cual prueba que π es sobreyectiva.

Probemos ahora la parte 3): Si $a, a' \in \Sigma_A$ tales que $\pi(a) = \pi(a') = x \in M \setminus \bigcup_{n \in Z} f^j \partial \mathcal{R}$ entonces $f^j x \in \operatorname{int} R_{a_j} \cap \operatorname{int} R_{a'_j}$ $\forall\, j \in \mathbb{Z}$.

Por la definición de la sección 2.4 los rectángulos distintos tienen interiores disjuntos. Entonces $a_j = a'_j$. Luego $a = a'$ y la transformación π restringida a la preimagen por π de $M \setminus \bigcup_{n \in Z} f^j \partial \mathcal{R}$, es inyectiva. $\square$

6.4 Conclusión

El teorema anterior permite construir una semiconjugación π del difeomorfismo de Ansosov f con el shift σ en el subespacio de la sucesiones bi-infinitas Σ_A. Además π es inyectiva en un conjunto denso en M.

Ya se observó en la sección 2.4 que si $\mathcal{R}$ es un partición por cerrados cualquiera de M, aunque no sea de Markov, existe una función π sobreyectiva que puede demostrarse que es continua usando la misma prueba de la parte 2) del teorema anterior, tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & \sigma & & & \\ \pi^{-1}(M) & \mapsto & \pi^{-1}(M) & \subset & \{1,2,\ldots,m\}^{\mathbb{Z}} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi & & \\ M & \mapsto & M & & \\ & f & & & \end{array}$$

Además π es inyectiva en $M \setminus \cup_{j \in \mathbb{Z}} f^{-j} \partial \mathcal{R}$ que es denso en M.

En el caso que $\mathcal{R}$ sea además una partición de Markov se agrega que la semiconjugación tiene dominio en Σ_A. El subshift $\sigma|_{\Sigma_A}$ está definido en el subconjunto compacto de las sucesiones bi-infinitas que cumplen $A_{a_i a_{i+1}} = 1$.

Se llama dinámica simbólica a la dinámica del shift en Σ_A. La existencia de una partición de Markov en M para f asegura la existencia de la dinámica simbólica con la cual f es semiconjugada.

Finalmente se observa que en la definición de rectángulo, en la de partición de Markov y en la demostración del teorema de Sinai, no se utiliza la diferenciabilidad de f sino solo sus propiedades topológicas. Es por lo tanto aplicable a una clase más general que los difeomorfismos de Anosov: los homeomorfismos expansivos topológicamente estables.

Referencias bibliográficas

[1] R. Bowen: *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. Lecture Notes in Math. **470.** Springer-Verlag 1975

[2] J. Lewowicz: *Lyapunov functions and Topological Stability*. Journ. of Diff. Eq. **38** 1980

[3] J. Lewowicz: *Invariant manifolds for regular points*. Pacific Journ. of Math. **96** 1981

[4] Hirsch-Pugh: *Stable manifolds and hyperbolic sets*. Proc. Symp. in Pure Math. **14** 1970

[5] R. Bowen: *Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms*. Amer. Journ. of Math. **92** 1970

[6] Y. Sinai: *Construction of Markov partitions*. Funct. Anal. and its appl. **2** 1968