

# Sobre el teorema de Novikov: ciclos homológicos, medidas invariantes y componentes de Reeb

Curso CMAT/IMERL

Universidad de la República

Montevideo, septiembre-diciembre 2026

## Resumen del curso

Una de las contribuciones por las que Sergei P. Novikov recibió la Medalla Fields en 1970 es el célebre teorema por el que cualquier foliación por superficies de clase  $C^2$  sobre la esfera tridimensional  $S^3$  contiene una componente de Reeb, es decir, un toro sólido foliado de modo que el borde es una hoja y las hojas del interior son planos que se acumulan sobre el borde. Durante la II Guerra Mundial, Georges Reeb había construido la componente como pieza básica para obtener el primer ejemplo de foliación por superficies de la esfera  $S^3$ .

La demostración del teorema de Novikov tiene dos partes. En la primera se demuestra que la anulación del grupo fundamental de la esfera permite construir un *ciclo evanescente no trivial* (NTV), es decir, una familia uniparamétrica de ciclos tangentes a las hojas que en el instante inicial representa una clase de homotopía no trivial, mientras que las restantes clases de homotopía son triviales. La segunda parte de la demostración consiste en probar que un ciclo NTV vive en la frontera de una componente de Reeb.

Una década después, en otro célebre trabajo sobre ciclos, Dennis Sullivan sustituye los ciclos homotópicos de Novikov por ciclos homológicos, pero la extensión de los argumentos de Novikov depende de una condición adicional: las primitivas de ciclos homólogos a cero deben estar definidas mediante variedades 1-conexas.

El objetivo del curso es la extensión de los teoremas de Novikov y Sullivan a cualquier variedad compacta  $M$  de dimensión arbitraria  $n + 1$  dotada de una foliación  $\mathcal{F}$  de dimensión  $n$  y clase  $C^0$ . Para simplificar el problema, supondremos que ambas están orientadas. En tal caso

siempre existe una foliación  $\mathcal{T}$  de dimensión 1 y clase  $C^0$ , definida por un flujo completo  $\Phi$  y transversa a  $\mathcal{F}$ .

Nuestro objetivo es describir *cómo varían* las clases de homología de las hojas de  $\mathcal{F}$  cuando *nos movemos* de una hoja a las hojas próximas siguiendo las trayectorias de  $\Phi$ . Para ello, representamos:

- (i) cada clase de homología de una hoja  $L$  (o de un conjunto finito de hojas) por medio de una aplicación continua  $\theta : B \rightarrow L$  donde  $B$  es una variedad compacta orientada de dimensión  $(n - 1)$ ,
- (ii) cada primitiva de un ciclo homólogo a cero por medio de una aplicación continua  $\Theta : C \rightarrow L$  definida sobre una variedad compacta orientada  $C$  con borde  $\partial C = B$  tal que  $\partial\Theta = \Theta|_B = \theta$ ,
- (iii) la variación de la homología por medio de una familia uniparamétrica

$$\theta : B \times [0, 1] \rightarrow M$$

de aplicaciones  $\theta_t : B \rightarrow L_t$ , llamada *torre evanescente no trivial*, donde para cada  $t > 0$ , el ciclo  $\theta_t$  admite una primitiva  $\Theta_t : C_t \rightarrow L_t$  definida sobre una variedad compacta  $C_t$  con borde  $\partial C_t = B$ , pero sin embargo  $\theta_0$  no admite primitiva y su clase de homología no se anula.

Aunque podría pensarse que, tanto la variedad  $B$ , como las variedades  $C_t$  pueden tomarse siempre conexas, esto no es posible y representa una dificultad crucial en la extensión del teorema de Novikov. Si las primitivas pueden orientarse de modo coherente (de modo que la torre es *coherentemente orientada* o CO) o viven en hojas individuales (en cuyo caso la torre es *rígida*), entonces los ciclos NTV viven en el borde de subvariedades compactas saturadas, llamadas *componentes de Reeb generalizadas* (GRC), cuyo borde es unión finita de hojas compactas y cuyo interior está foliado por las fibras de una fibración localmente trivial sobre la circunferencia  $S^1$ .

Sin embargo, si las clases de homología se anulan en hojas diferentes, entonces surgen lo que llamaremos *componentes de Reeb lacunarias* (LRC), que pueden obtenerse a partir de GRCs y de torres que no son ni CO, ni rígidas, pero viven en ellas. Pero además hay torres de este tipo que son homológicamente degeneradas y viven en *laminaciones de Blanc* (i.e. laminaciones minimales dotadas de una medida de probabilidad invariante por holonomía y cuyas hojas tienen dos finales) o *torbellinos de Reeb* (i.e. suspensiones de una contracción del intervalo  $[0, 1)$ ).

A lo largo del curso daremos una prueba completa del teorema de Novikov para torres CO y torres rígidas. La demostración del teorema

de Novikov para torres arbitrarias sigue en discusión tras más de treinta años de trabajo en colaboración con Gilbert Hector y Paul A. Schweitzer.

### Trabajos citados en el resumen

Sergei P. Novikov, Topology of foliations. *Trans. Moscow Math. Soc.*, **14** (1965), 268–304.

Georges Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*. Actual. Sci. Ind. 1183, Hermann, Paris, 1952.

Dennis Sullivan, Cycles for the dynamical study of foliated and complex manifolds. *Invent. Math.*, **36** (1976), 225–255.

Emmanuel Blanc, Laminations minimales résiduellement à 2 bouts. *Comment. Math. Helv.*, **78** (2003), 845–864

## Programa

1. **Presentación: teorema de Novikov, versión de Sullivan y dimensión arbitraria.**  
Construcción de la componente de Reeb y esquema de la prueba del teorema clásico según Novikov y Sullivan. 1,5 horas
2. **Ciclos homológicos.**  
La homología singular como teoría de cobordismo y sus limitaciones. 1 hora
3. **Aplicaciones foliadas. Regularización. Estructura de los abiertos saturados.**  
Aplicaciones foliadas y bifoliadas. Teorema de regularización de aplicaciones foliadas. Teorema de estructura de abiertos saturados: pulpo de Dippolito y lema de trivialización de Hector. 1 hora
4. **Torres evanescentes.**  
Noción de torre NTV. Distintos tipos de torres. 0,5 horas
5. **Componentes de Reeb generalizadas: ejemplos.**  
Definición de GRC. Núcleo y alma de una GRC. Torre canónica de una GRC. Ejemplos de GRCs. 1 hora
6. **Enunciado del teorema de Novikov en el caso rígido.**  
Enunciado de los teoremas de clasificación de GRCs y torres NTV soportadas por GRCs. Enunciado de los teoremas de Novikov para torres CO y torres rígidas. 0,5 horas
7. **Estructura de las GRCs y torres NTV canónicas.**  
Demostración de los teoremas de clasificación de GRCs y sus torres CO o rígidas enunciados en el tema anterior. 1 hora
8. **Invariantes de torres WCL-NB: tamaño, ciclos de foliación, medidas invariantes.**  
Torres sin hoja compacta (WCL) y no acotadas (NB). Ciclos de foliación con signo asociados a torres WCL-NB. Interpretación en términos de medidas de Radon con signo. Torres homológicamente degeneradas (HD). El caso CO positivo. 1,5 horas
9. **Clasificación de torres WCL-NB.**  
Relación entre minimales y conjuntos límite asociados a torres WCL-NB. Torres degeneradas y torres de tipo propio. 1 hora

10. **Torres HV.**  
Definición de torre homológicamente evanescente (HV). La idea de Sullivan revisitada. 0,5 horas
11. **Torres regulares y torres IM. Teorema de Novikov para torres regulares IM-NB.**  
Torres inmersivas (IM). Transversales especiales. Reconstrucción de la GRC que envuelve a una torre IM-NB. 1 hora
12. **Teorema de Novikov homotópico.**  
Demostración del teorema de Novikov clásico. 0,5 horas
13. **Teorema de la hoja compacta para torres WCL-CO-NB.**  
Las torres WCL-CO-NB son HV-HND de tipo propio. 1 hora
14. **Teorema de Novikov CO.**  
Reconstrucción de la GRC que envuelve a una torre WCL-CO-NB especial. Las torres NTV de tipo propio son especiales. 1 hora
15. **Teorema de Novikov rígido.**  
Dominios envolventes. Reducción al caso CO. 0,5 horas
16. **Apuntes sobre el caso general.** Enunciados (provisionales). Ejemplos de torres que no son ni CO, ni rígidas en GRCs. Ejemplos de componentes de Reeb lacunarias (LRC). 1,5 horas

## **Sesiones**

1. Sesión inicial de hora y media (1)
2. Sesión de una hora (2)
3. Sesión de una hora (3)
4. Sesión de hora y media (4-5)
5. Sesión de una hora (6-7)
6. Sesión de hora y media (8)
7. Sesión de hora y media (9-10)
8. Sesión de hora y media (11)
9. Sesión de hora y media (12-13)
10. Sesión de una hora (14)
11. Sesión de una hora (15)
12. Sesión de hora y media (16)