

**Prueba Parcial Teórica / Práctica de Métodos
Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural**
19 de Diciembre de 2023

Examen teórico práctico
MCACE
19 de setiembre de 2023
Duración:

Nombre: _____

CI: _____

- Para la aprobación de este parcial se deberá resolver correctamente un ejercicio y medio como mínimo.
- Este parcial contiene 6 páginas de letra (incluyendo esta hoja), 4 páginas de fórmulas y un total de 3 ejercicios.
- No se permite ir al baño en el transcurso de la prueba
- No se permite utilizar material, excepto calculadora NO programable
- Las respuestas pueden escribirse o marcarse en la letra u en la hoja de desarrollo indistintamente
- Las preguntas múltiple opción tienen una única respuesta correcta.
- Para todos los ejercicios considerar las hipótesis de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones.
- En todos los ejercicios los elementos estructurales son homogéneos formados por un material elástico-lineal e isótropo.



Tabla de puntajes (solo para uso docente)

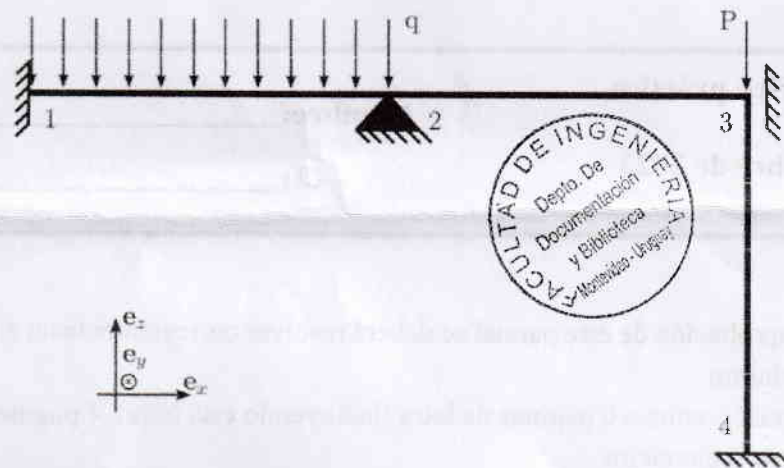
Ejercicio	Puntaje
1	
2	
3	
Total	

1/11

Nombre: _____ CI: _____

Ejercicio 1

Sea el pórtico de la figura donde las barras 1-2, 2-3 y 3-4 tienen largo L , área transversal Ω , inercia I y módulo de Young E . Sobre la barra 1-2 actúa una carga uniforme por unidad de longitud q y sobre el nodo 3 actúa una carga puntual P . Los nodos 1 y 4 están empotrados, el nodo 3 está imposibilitado de girar y desplazarse en horizontal, mientras que el nodo 2 no puede desplazarse verticalmente ni horizontalmente.



Utilizando ^{tres} dos elementos de Euler-Bernoulli (EB) de 2 nodos y que $qL = 16 P$, se pide:

1. Obtener el desplazamiento del nodo 3.
2. Obtener la reacción vertical en los nodos 1, 2 y 4.
3. Obtener el desplazamiento de un punto en la barra 3-4 ubicado a una distancia $L/3$ del nodo 3.
4. Explicar brevemente como es el elemento de 3 nodos y 2 grados de libertad por nodo de Euler-Bernoulli. Plantear las condiciones que debe cumplir una de las funciones de interpolación (no obtener la expresión de la función).

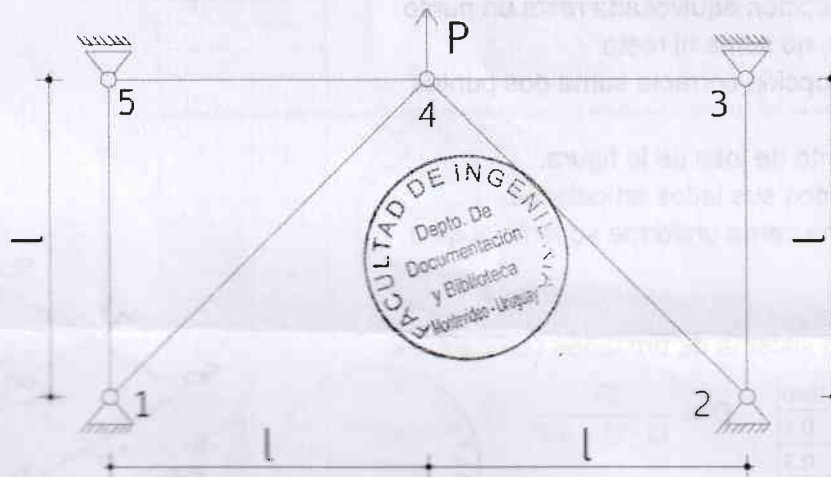
VERDADERO / FALSO

1. El desplazamiento vertical de la barra 1-2 no es nulo si se utiliza un elemento de Timoshenko de 2 nodos por barra para resolver la estructura.
2. Si la carga q fuera dinámica con frecuencia ω_F debemos verificar que: $\omega_E = \omega_F$ para que no haya resonancia, siendo ω_E la frecuencia natural mínima de la estructura.
3. Si se utilizan 100 elementos de Euler-Bernoulli de 2 nodos por barra para estudiar el pandeo de la estructura no se obtendrá la solución *exacta* obtenida con las ecuaciones de Euler.

2/11

Ejercicio 2

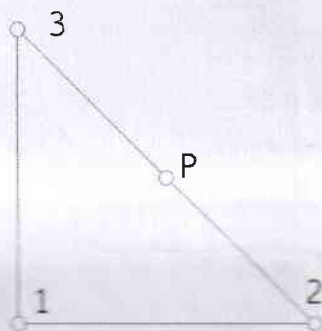
Considere la chapa que se muestra en la figura, de espesor t , módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν . Sobre la misma se encuentra una carga aplicada P . Se asume estado plano de tensiones.



1. Determine los desplazamientos incógnita del problema.
2. Determine la reacción vertical en el nodo 1.

VERDADERO / FALSO

1. El elemento triangular de 3 nodos CST permite representar de manera exacta desplazamientos hasta de orden 3 dentro del elemento.
2. Considere el elemento triangular de la siguiente figura:



La función de interpolación N_1 evaluada en el punto P es igual a 0.

3. Para la obtención de la matriz de rigidez de elementos cuadriláteros de 4 nodos de estado plano es necesario integrar términos x^3 e y^3 .

3/11

Nombre: _____

CI: _____

Ejercicio 3

Múltiple opción:

Si se elige la opción equivocada resta un punto

Si no se elige, no suma ni resta

Si se elige la opción correcta suma dos puntos

Sea el elemento de losa de la figura:

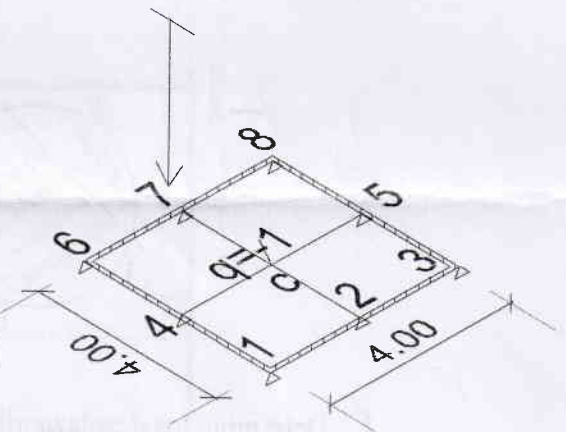
Considerar todos sus lados articulados.

Considerar una carga uniforme superficial $q=-1$

Considerar un sistema de unidades compatibles:

E	10920
h	0.1
v	0.3
a	4
b	4

$$D = \frac{Et^3}{12 \cdot (1 - \nu)^2}$$



4/11

Nombre: _____

CI: _____

Considerando un elemento MCZ de Kirchoff

a) Los grados de libertad de la matriz de rigidez sin restricciones son

	gl
3	
9	
12	
24	
27	

b) La función que aproxima el desplazamiento del punto medio, se determina con un polinomio de n parámetros

	n
3	
9	
12	
24	
27	



c) Los grados de libertad de la matriz de rigidez con restricciones son

	gl
3	
9	
12	
19	
27	

d) La flecha en el punto central es

	w
-2.4	
-3.6	
-4.2	
-1.25	
-0.625	

e) El giro θ_x en el punto central es

	θ_x
-1.08	
-1.06	
1.06	
0	
0.625	

f) El giro θ_y en el punto central es

	θ_y
-1.08	
-1.06	
1.06	
0	
0.625	

g) El giro θ_x en el punto 4

	θ_x
-1.08	
-1.06	
1.06	
0	
0.625	

h) El giro θ_y en el punto 4

	θ_y
-1.08	
-1.06	
1.08	
0	
0.625	

Nombre: _____

CI: _____

	V	F
En los elementos MCZ se aproxima el campo de desplazamientos por un polinomio incompleto de cuarto orden		
La matriz de rigidez de un elemento de Kirchhoff con cuatro nodos es de dimensiones 8x8		
La aproximación de la energía interna del elemento de Kirchhoff es : $U = K \cdot u$		
En teoría de Reissner, las secciones planas perpendiculares al eje de la losa permanecen planas después de la deformación		
En teoría de Reissner se desprecia la energía de deformación derivada de esfuerzos de corte		
En los elementos MCZ se obtiene exactamente el campo de desplazamientos por un polinomio incompleto de cuarto orden		
En teoría de Reissner, el cortante de secciones adyacentes es igual a cero		
En teoría de Kirchhoff si se obtienen las curvaturas como desplazamientos generalizados es posible obtener directamente los momentos como esfuerzos nodales		



6/11

sol

1. Matriz en coordenadas globales:

$$K_G = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} A & B & -6Ls & -A & -B & -6Ls \\ & C & 6Lc & -B & -C & 6Lc \\ & & 4L^2 & 6Ls & -6Lc & 2L^2 \\ & & & A & B & 6Ls \\ & & & & C & -6Lc \\ & & & & & 4L^2 \end{pmatrix}$$

la cual es simétrica, con

$$A = \frac{\Omega L^2}{I} c^2 + 12s^2, \quad B = \left(\frac{\Omega L^2}{I} - 12 \right) cs, \quad C = \frac{\Omega L^2}{I} s^2 + 12c^2.$$

siendo $s = \sin(\alpha)$ y $c = \cos(\alpha)$, con α el ángulo medido de coordenadas globales a locales en sentido antihorario. A continuación se utilizará que $R = (\Omega L^2)/I$.

Los elementos 1-2 y 3-4 tienen ángulo 0° , entonces: $c = 1$, $s = 0$, $A = R$, $B = 0$ y $C = 12$, por tanto:

$$K_{G,1-2} = K_{G,2-3} = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & -R & 0 & 0 \\ & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ & & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ & & & R & 0 & 0 \\ & & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{pmatrix}$$

Los elementos 2-3 y 3-5 tienen ángulo 270° entonces: $c = 0$, $s = -1$, $A = 12$, $B = 0$ y $C = R$, por tanto

$$K_{G,3-4} = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 6L & -12 & 0 & 6L \\ & R & 0 & 0 & -R & 0 \\ & & 4L^2 & -6L & 0 & 2L^2 \\ & & & 12 & 0 & -6L \\ & & & & R & 0 \\ & & & & & 4L^2 \end{pmatrix}$$

Por tanto el sistema reducido es:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 8L^2 & -6L \\ -6L & 12+R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{qL^2}{12} \\ -P \end{pmatrix}$$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 8L^2 & -6L \\ 0 & 30+4R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{4} - 4P \end{pmatrix}$$

obteniéndose que:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{qL^3}{96EI} \\ v_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. Para la reacciones verticales se tiene:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_4 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 6L & 0 \\ 0 & -12 \\ 0 & -R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \frac{qL}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{qL}{2} \begin{pmatrix} 9/8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

∴ $u_P = v_P = 0$

4. El elemento es análogo al de 2 nodos con dos grados de libertad, con la única diferencia que ahora hay 6 funciones de interpolación, cada una de quinto grado $N_i = a_i x^5 + b_i x^4 + c_i x^3 + d_i x^2 + e_i x + f_i$. Si el campo de desplazamientos w se obtiene como $w = N_1 w_1 + N_2 \theta_1 + N_3 w_2 + \dots$ donde w_i son los desplazamientos de cada nodo del elemento se debe cumplir para N_1 que: $N_1(x_1) = 1$, $N_1(x_2) = N_1(x_3) = 0$ y $N_1'(x_1) = N_1'(x_2) = N_1'(x_3) = 0$ donde x_i es la coordenada del nodo i en coordenadas locales y N_1' es la derivada respecto de x de la función N_1 .

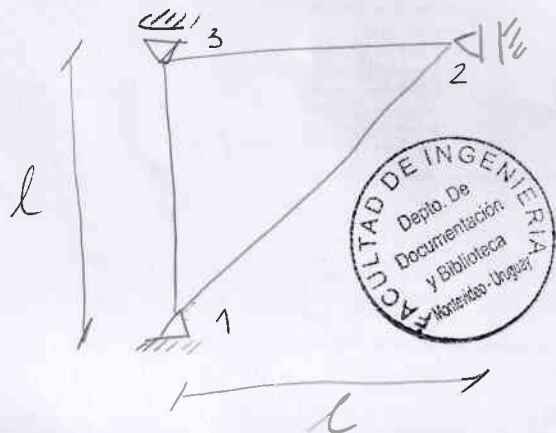
VERDADERO-FALSO

1. FALSO. El desplazamiento será nulo ya que la flecha interpolada en este elemento dependerá solo de la flecha de los nodos 1 y 2 que por letra valen 0.
2. FALSO. Al contrario, en tal caso habrá resonancia.
3. VERDADERO. Es verdad porque la solución *exacta* de Euler es una suma de senos y cosenos con lo cual nunca se podrá obtener la solución utilizando una cantidad finita de elementos (100 en este caso).

8/11



Examen Diciembre 2023
Solución Ejercicio 2



$$\begin{aligned} c_2 &= 0 \\ b_2 &= l \\ c_3 &= l \\ b_3 &= -l \\ b_1 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ c_1 &= -l \end{aligned}$$

1-

$$k_{44} = c_2^2 D_1 + b_2^2 D_3 = D_3 l^2$$

$$k_{45} = c_2 D_2 b_3 + b_2 D_3 c_3 = D_3 l^2$$

$$k_{55} = c_3^2 D_3 + b_3^2 D_1 = l^2 D_3 + l^2 D_1$$

$$\frac{2P}{4A} \begin{pmatrix} D_3 l^2 & D_3 l^2 \\ D_3 l^2 & D_1 l^2 + D_3 l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2A} D_3 l^2 u_2 + \frac{D_3 l^2 + D_1 l^2}{2A} u_3 = P$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{2AP}{D_3 l^2} - u_3$$

$$\frac{2P}{4A} \left[D_3 l^2 u_2 + (D_1 l^2 + D_3 l^2) u_3 \right] = 0$$

$$D_3 u_2 + (D_1 + D_3) u_3 = 0$$

$$D_3 \left(\frac{2AP}{D_3 l^2} - u_3 \right) + (D_1 + D_3) u_3 = 0$$

$$\frac{2AP}{l^2} + D_1 u_3 = 0 \Rightarrow \underline{u_3} = -\frac{2AP}{l^2 D_1}$$

$$\Rightarrow \underline{u_2} = \frac{2AP}{D_3 l^2} + \frac{2AP}{l^2 D_1} = \frac{2AP}{l^2} \left(\frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_1} \right)$$

9/11

2- $k_{14} = b_1 D_2 c_2 + c_1 D_3 b_2 = -D_3 l^2$

$$k_{15} = b_1 D_1 b_3 + c_1 D_3 c_3 = -D_3 l^2$$

$$k_{24} = c_1 D_1 c_2 + b_1 D_3 b_2 = 0$$

$$k_{25} = c_1 D_2 b_3 + b_1 D_3 c_3 = D_2 l^2$$

$$\Rightarrow D_2 l^2 \cdot \frac{-2 +}{4A} u_3 = V_1$$

$$\frac{2 D_2 l^2}{4A} \left(\frac{-2AP}{D_1} \right) = V_1$$



$$-\frac{D_2 P}{D_1} = V_1$$

VERDADERO / FALSO

1. Falso
2. Verdadero
3. Falso

10/11

Considerando un elemento MCZ de Kirchhoff

a)

Los grados de libertad de la matriz de rigidez sin restricciones son

	gl
3	
9	
12	
24	
27	x

b)

La función que aproxima el desplazamiento del punto medio, se determina con un polinomio de n parámetros

	n
3	
9	
12	x
24	
27	

c)

Los grados de libertad de la matriz de rigidez con restricciones son

	gl
3	
9	
12	
24	x
27	

d)

La flecha en el punto central es

	w
-2.4	
-5.6	
-4.2	
-1.25	x
-0.625	

e)

El giro θ_x en el punto central es

	θ_x
-1.08	
-1.06	
1.06	
0	x
0.625	

f)

El giro θ_y en el punto central es

	θ_y
-1.08	
-1.06	
1.06	
0	x
0.625	

g)

El giro θ_x en el punto 4

	θ_x
-1.08	x
-1.06	
1.06	
0	
0.625	

h)

El giro θ_y en el punto 4

	θ_y
-1.08	
-1.06	
1.08	x
0	
0.625	

Corregido

	w	θ_x
En los elementos MCZ se aproxima el campo de desplazamientos por un polinomio incompleto de cuarto orden	x	
La matriz de rigidez de un elemento de Kirchhoff con cuatro nodos es de dimensiones 8×8		x
La aproximación de la energía interna del elemento de Kirchhoff es: $U = K \cdot u$		x
En teoría de Reissner, las secciones planas perpendiculares al eje de la losa permanecen planas después de la deformación	x	
En teoría de Reissner se desprecia la energía de deformación derivada de esfuerzos de corte		x
En los elementos MCZ se obtiene exactamente el campo de desplazamientos por un polinomio incompleto de cuarto orden		x
En teoría de Reissner, el cortante de secciones adyacentes es igual a cero		x
En teoría de Kirchhoff si se obtienen las curvaturas como desplazamientos generalizados es posible obtener directamente los momentos como esfuerzos nodales	x	

77/77