

Examen - 10 de diciembre de 2024

Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (2380)

Ingeniería Civil - Plan 2021

Grupo: Informática



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

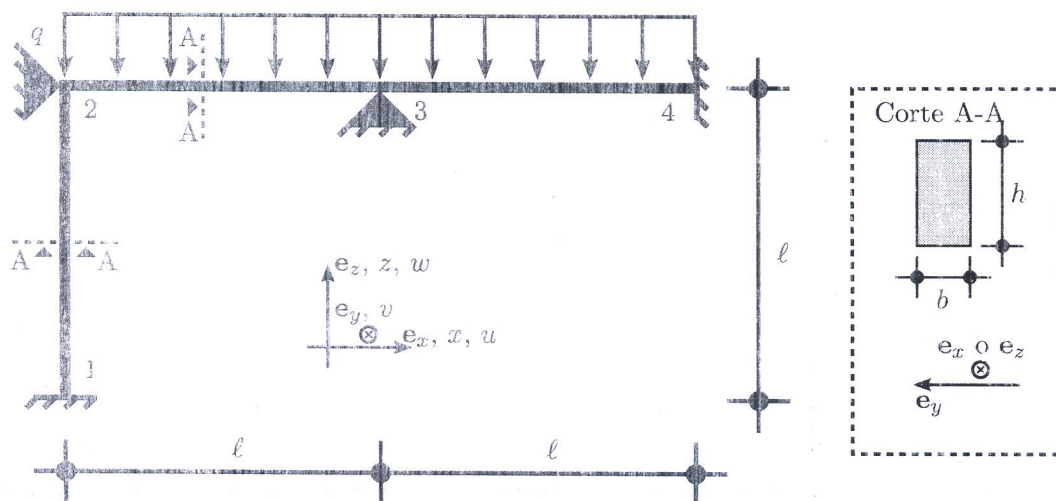
Examen de
Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (2380)
10 de diciembre de 2024

Tabla de puntaje (sólo para el uso docente)

Ejercicio	1	2	3	Total
Puntos:	38	31	31	100
Resultado				

Aclaración. Todas las hojas entregadas deben estar separadas por ejercicio, numeradas y deben tener nombre, apellido y documento de identidad. Respuestas incorrectas de verdadero/falso suman de forma negativa la mitad de los puntos que vale la pregunta y las preguntas múltiple opción suman -1 punto.

1. [38 puntos] Considere el pórtico que se muestra en la figura. Asuma que todos los tramos son de un material con módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν . Sobre el pórtico se encuentra aplicada una carga $-q e_z$ en los tramos 2-3 y 3-4. Los nodos 1 y 4 están empotrados, mientras que los nodos 2 y 3 solo tienen libre el giro. Considerar que $[q] = [N]/[m]$.



Desarrollo En todas las partes se debe utilizar un elemento de Euler-Bernoulli de dos nodos por tramo y el MEF para la resolución. *Sugerencia: utilizar $R = \frac{A \ell^2}{I}$ para la resolución.*

- (a) [5 puntos] Obtener y resolver el sistema de ecuaciones reducido para la estructura.

Solución El sistema reducido y la solución son:

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} 8\ell^2 & 2\ell^2 \\ 2\ell^2 & 8\ell^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = -\frac{q\ell}{2} \begin{pmatrix} \ell/6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{q\ell^3}{90EI} \text{ y } \theta_3 = \frac{q\ell^3}{360EI}$$

- (b) [5 puntos] Obtener la reacción, $\mathbf{R}_4 = (R_{x,4}, R_{z,4}, R_{\theta,4})^T$, en el empotramiento del nodo 4.



1/11

Solución De la ecuación del sistema global para el elemento 3-4 se tiene que las ecuaciones para obtener la reacción del nodo 4 son:

$$\mathbf{R}_4 = \begin{pmatrix} R_{x,1} \\ R_{z,1} \\ R_{\theta,1} \end{pmatrix} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} 0 \\ -6\ell \\ 2\ell^2 \end{pmatrix} \theta_3 + \frac{q\ell}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\ell/6 \end{pmatrix} = \frac{q\ell}{30} \begin{pmatrix} 0 \\ 29/2 \\ -7\ell/3 \end{pmatrix}.$$

- (c) [4 puntos] ¿Sería conveniente utilizar elementos de 3 nodos de Euler-Bernoulli en alguno de los tramos? ¿En cuáles si y en cuales no? Justifique su respuesta.

Solución De la teoría de Euler-Bernoulli, muchas veces conocida como teoría de vigas, se obtiene (para vigas con material y sección uniforme) la ecuación diferencial:

$$EI \frac{\partial^4 w_{EB}}{\partial x^4} = -q(x),$$

donde q es una carga perpendicular a la viga y opuesta al desplazamiento vertical w . De dicha ecuación se obtiene que si $q = 0$ entonces w_{EB} es cúbica, mientras que si $q \neq 0$ es uniforme se tiene que el desplazamiento w_{EB} es de orden 4. El elemento finito de Euler-Bernoulli de 2 nodos utiliza funciones de interpolación cúbicas para w con lo cual en el pilar 1-2 no es necesario utilizar una interpolación de mayor orden. En cambio para los tramos de viga 2-3 y 3-4 si es conveniente aumentar el orden de interpolación. El elemento de 3 nodos de Euler-Bernoulli utiliza funciones de interpolación de orden 5 con lo cual, en principio, es una aproximación adecuada para funciones de orden 4.

En conclusión: si, sería conveniente utilizar elementos de 3 nodos en los tramos 2-3 y 3-4. En el tramo 1-2 no es necesario.

- (d) [4 puntos] Escriba el desplazamiento vertical $w(x)$ para cualquier punto del elemento 2-3. Asumir como centro de coordenadas el nodo 1: $(x_1, y_1) = (0 \text{ m}, 0 \text{ m})$.

Solución El desplazamiento vertical del elemento 2-3 es:

$$w(\xi) = \theta_2 \bar{N}_{1,w}(\xi) \frac{\ell}{2} + \theta_3 \bar{N}_{2,w}(\xi) \frac{\ell}{2},$$

donde las funciones de interpolación $\bar{N}_{i,w}$ están descritas en la hoja de fórmulas. Además $\xi = 2x/\ell - 1$ con $x \in [0, \ell]$.

- (e) [5 puntos] Se refina la malla utilizada para la estructura de la figura antes presentada y se obtiene que el desplazamiento máximo de los tramos 2-3 y 3-4 es el doble del límite establecido. ¿Cuánto debe modificar el parámetro mecánico E para obtener el desplazamiento deseado?

Solución El valor de $w_{\min}$ es inversamente proporcional al módulo de Young de la estructura: $w_{\min} = M/E$. El nuevo módulo de Young E^* se relaciona como $w_{\min}^* = M/E^*$ donde al imponer que $w_{\min}^* = w_{\min}/2$ se tiene:

$$w_{\min}^* = \frac{M}{E^*} = \frac{w_{\min}}{2} = \frac{M}{2E} \Rightarrow E^* = 2E,$$

con lo cual se debe duplicar el módulo de Young.

Verdadero / Falso:

2/11



- (a) [3 puntos] Si $\ell \gg h$ es recomendable utilizar integración exacta si se quisieran emplear elementos de Timoshenko.

☐ Verdadero ☒ Falso

Solución Si $\ell \gg h$ la viga es esbelta con lo cual el efecto de bloqueo por cortante es importante si se utiliza el elemento de Timoshenko con integración exacta. Por lo anterior **no** es recomendable utilizar integración exacta y por tanto la expresión es falsa.

- (b) [3 puntos] Si se utilizan elementos de Timoshenko de 2 nodos por cada tramo se obtiene que el desplazamiento mínimo en el tramo 2-3-4 es: $w_{\min, T}^{2-3-4} < 0$.

☐ Verdadero ☒ Falso

Solución En el elemento de Timoshenko de dos nodos la interpolación de $w(x)$ es lineal. Todos los tramos del tramo 2-3-4 tiene ambos extremos con desplazamiento vertical nulo: $w_2 = w_3 = w_4 = 0$ m. Dado que el desplazamiento en cualquier punto se escribe como $w^{2-3}(x) = w_2 N_1(x) + w_3 N_2(x) = 0$ m y $w^{3-4}(x) = w_3 N_1(x) + w_4 N_2(x) = 0$ m y por tanto $w_{\min, T}^{2-3-4} = 0$ m y consecuentemente la expresión es falsa.

- (c) [3 puntos] Utilizando un elemento de Euler-Bernoulli de 2 nodos por barra al obtener las frecuencias de la estructura se obtienen 3 frecuencias.

☐ Verdadero ☒ Falso

Solución Por lo ya visto en la parte a) del desarrollo, el sistema reducido tiene tamaño 2×2 con lo cual se obtendrían dos frecuencias naturales y consecuentemente la expresión es falsa.

- (d) [3 puntos] Si la carga q fuera dinámica con frecuencia w_q debemos verificar que: $w_q \neq w_E$ para que no haya resonancia, siendo w_E cualquier frecuencia natural de la estructura.

☒ Verdadero ☐ Falso

Solución Efectivamente esto es lo que se debe verificar para que no exista resonancia.

- (e) [3 puntos] Si se utilizan 100 elementos de Euler-Bernoulli de 2 nodos por barra para estudiar el pandeo de la estructura no se obtendrá la solución exacta obtenida con las ecuaciones de Euler.

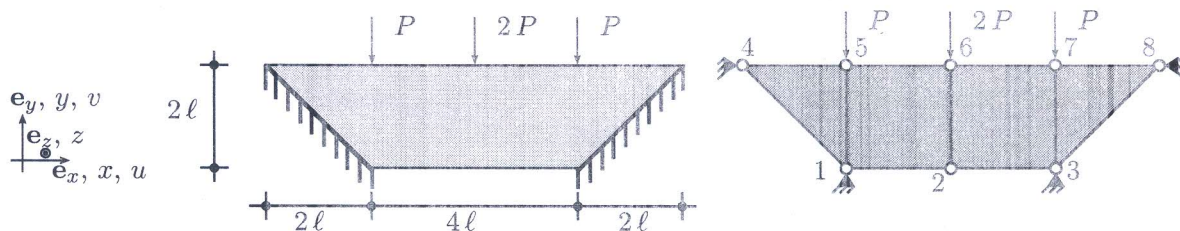
☐ Verdadero ☒ Falso

Solución La solución exacta obtenida con las ecuaciones de Euler es una combinación de cosenos y senos por tal motivo nunca podrá aproximarse de forma exacta con polinomios, por lo anterior la expresión es falsa.

2. [31 puntos] Se decide construir una viga como la de la figura. Sobre dicha viga descargan varias cargas puntuales y para un primer análisis bidimensional como el de la figura se asume que la dimensión en la dirección e_z es mucho menor que el de las otras direcciones. Para este estudio se considera libre la superficie superior (tramo 4-5-6-7-8) y la inferior (tramo 1-2-3), el resto es fijo en e_x y e_y . Asuma que el material de toda la viga tiene módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν . Los nodos 2 y 6 están a una distancia 2ℓ del nodo 1 en el eje e_x .

3/11





Solución Debido a que la dimensión en e_z es mucho menor que en las otras dos se puede asumir estado plano de tensiones (EPT).

Desarrollo

- (a) [3 puntos] Utilizando los elementos bidimensionales que se muestran en la figura, ¿cuál sería el tamaño del sistema reducido sin considerar la simetría del problema? ¿y considerando la simetría?

Solución Sin considerar simetría existen 4 nodos con dos grados de libertad libre (nodos 2, 5, 6 y 7) y todos los demás tienen sus grados de libertad restringidos. Por lo anterior el sistema es de tamaño 8×8 .

Si se considera la simetría del eje 2-6 se tiene que $u_5 = -u_7$ y $v_5 = v_7$. Además $u_2 = u_6 = 0$ ya que los nodos 2 y 6 están en el eje de simetría. Por todo lo anterior quedan únicamente 4 grados de libertad libres: v_2, u_5, v_5 y v_6 . De lo anterior se tiene que el sistema es de tamaño 4×4 .

- (b) [7 puntos] Considerando la simetría del problema se pide obtener el sistema reducido.

Solución Para obtener el sistema reducido se considera la mitad izquierda de la estructura imponiendo apoyos fijos según e_x para los nodos 2 y 6. Además en el nodo 6 actúa la mitad de la carga. El sistema de ecuaciones reducido es $\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$ donde:

$$\mathbf{K} = \frac{t}{12} \begin{pmatrix} 4(C_{22} + C_{33}) & 2(C_{33} - 2C_{22}) & 3(C_{12} - 2C_{33}) & -2(C_{22} + C_{33}) \\ & 4(C_{22} + C_{33}) & 3(C_{33} - C_{12}) & 2(C_{22} - 2C_{33}) \\ & & 10(C_{11} + C_{33}) & 3(C_{12} + C_{33}) \\ \text{Sim.} & & & 10(C_{22} + C_{33}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U} = (v_2 \ v_6 \ u_5 \ v_5)^T \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = (0 \ -P \ 0 \ -P)^T.$$

- (c) [5 puntos] Asuma como conocidas las incógnitas cinemáticas de la malla utilizada y obtenga la reacción, $\mathbf{R}_4 = (R_{x,4}, R_{y,4})^T$, del nodo 4.

Solución La reacción en el nodo 4 es:

$$\begin{pmatrix} R_{x,4} \\ R_{y,4} \end{pmatrix} = -\frac{t}{2} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{33} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_5 \\ v_5 \end{pmatrix}.$$

- (d) [4 puntos] Asuma como conocidas las incógnitas cinemáticas de la malla utilizada y obtenga la reacción vertical, $R_{y,1}$, del nodo 1.

4/11



Solución La reacción vertical en el nodo 1 se puede obtener por equilibrio vertical:

$$R_{y,1} + R_{y,4} = 2P \Rightarrow R_{y,1} = 2P - R_{y,4}.$$

Verdadero / Falso:

- (a) [4 puntos] Si en lugar de utilizar los elementos cuadriláteros de la figura se hubieran utilizado dos elementos triangulares por cada uno de esos elementos entonces la cantidad de grados de libertad no cambia.

☒ Verdadero ☐ Falso

Solución Si cada elemento cuadrilátero se cambia por dos triangulares los nodos seguirían siendo los mismos y por tanto no se modificaría la cantidad de grados de libertad, por tanto la expresión es verdadera.

- (b) [4 puntos] La matriz de derivadas de las funciones de interpolación (llamada **B**) para el elemento triangular de 3 nodos (CST) presenta todas sus entradas uniformes en el elemento.

☐ Verdadero ☒ Falso

Solución La matriz de derivadas de las funciones de interpolación, **B**, en el elemento bidimensional incluye únicamente derivadas primeras respecto a x e y . Las funciones de interpolación del elemento triangular de tres nodos son todas lineales de la forma $N(x, y) = a + bx + cy$ por tanto sus derivadas primeras son todas uniformes y consecuentemente todas las entradas de la matriz **B**. Por lo anterior la afirmación es verdadera.

- (c) [4 puntos] Asumiendo que el material es uniforme en el elemento se tiene que para la obtención de la matriz de rigidez de elementos cuadriláteros de 4 nodos de estado plano es necesario integrar términos x^3 e y^3 .

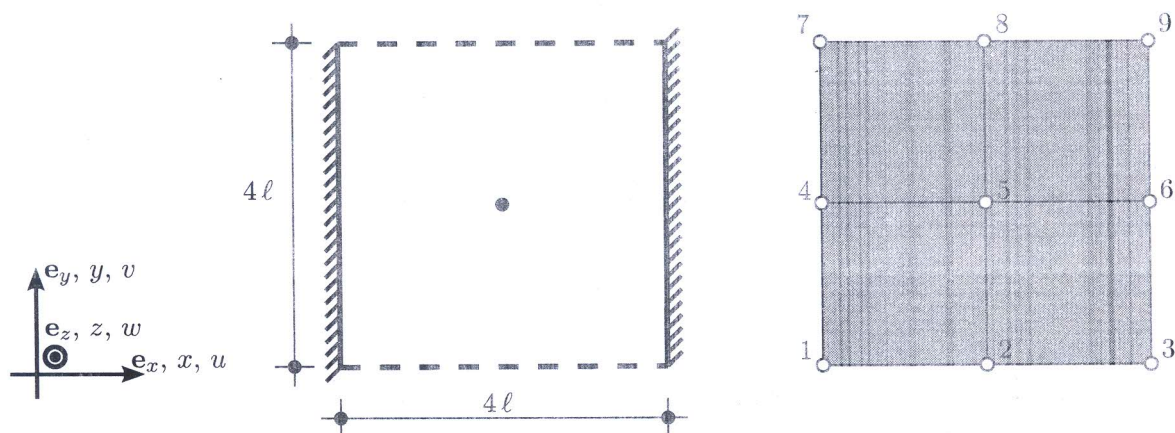
☐ Verdadero ☒ Falso

Solución Todas las funciones de interpolación de este elemento son de la forma $N(x, y) = a + bx + cy + dxy$ y por tanto la matriz **B** tendrá entradas lineales en x o y (ver solución del V/F anterior). La matriz de rigidez se obtiene como $\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV$ y por tanto, como el material es uniforme, en el integrando los términos de mayor orden son x^2 , xy e y^2 pero nunca los indicados en la expresión. Por lo anterior la expresión es falsa.

3. [31 puntos] Sea una losa cuyos lados miden $4\ell = 8\text{ m}$, ver figura. Asumir que el material es hiperelástico y uniforme cuyo módulo de Young es $E = 30\text{ GPa}$ y el coeficiente de Poisson es $\nu = 0.2$. Sobre la losa actúa únicamente una carga de superficie $\mathbf{q} = -q\mathbf{e}_z$, donde $q = 20\text{ kN/m}^2$. El espesor de la losa es uniforme $t = 0.20\text{ m}$. Los bordes 1-7 y 3-9 están empotrados, y los bordes 1-3 y 7-9 son libres. En el punto medio existe un pilar (nodo 5) que esta articulado e impone descenso nulo a la losa.



5/11



Desarrollo En todas las partes se debe utilizar el MEF y elementos de losa de Kirchhoff de 4 nodos.

- (a) [7 puntos] Obtener las incógnitas cinemáticas de la estructura de la figura.

Solución Por las condiciones de contorno se tiene que $w_i = 0$ m para $i = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ y $\theta_{x,i} = \theta_{y,i} = 0$ rad para $i = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$. Por la simetría con el eje 2-8 y por pertenecer los nodos 2, 5 y 8 a dicho eje se tiene que $\theta_{x,i} = 0$ m para $i = \{2, 5, 8\}$. Análogo a lo anterior se tiene que $\theta_{y,5} = 0$ m. De todo lo anterior las únicas incógnitas son w_2 y $\theta_{y,2}$ ya que por simetría $w_8 = w_2$ y $\theta_{y,8} = -\theta_{y,2}$.

El sistema reducido es:

$$\frac{Et^3}{360(1-\nu^2)\ell^2} \begin{pmatrix} 81-6\nu & 33\ell+12\ell\nu \\ \text{Sim.} & 48\ell^2-8\ell^2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ \theta_{y,2} \end{pmatrix} = -q\ell^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \ell/3 \end{pmatrix}$$

con lo cual imponiendo los valores numéricos se tiene:

$$w_2 = -6.51 \text{ mm} \quad \text{y} \quad \theta_{y,2} = 8.28 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

- (b) [6 puntos] Obtener las reacción según e_z en el pilar, $R_{z,5}$, de la figura.

Solución Con la ecuación del elemento 1-2-5-4 se puede obtener un cuarto de la reacción en el pilar:

$$\frac{R_{z,5}}{4} = \frac{Et^3}{120(1-\nu^2)\ell^2} \begin{pmatrix} -12+2\nu & -11\ell+\ell\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ \theta_{y,2} \end{pmatrix} + q\ell^2,$$

y por tanto:

$$R_{z,5} = 440.05 \text{ kN.}$$

- (c) [6 puntos] Obtener las reacción, $\mathbf{R}_1 = (R_{z,1}, R_{\theta_x,1}, R_{\theta_y,1})^T$, en el nodo 1.

Solución

$$\begin{pmatrix} R_{z,1} \\ R_{\theta_x,1} \\ R_{\theta_y,1} \end{pmatrix} = \frac{Et^3}{360(1-\nu^2)\ell^2} \begin{pmatrix} -36+6\nu & 12\ell-12\ell\nu \\ -33\ell+3\ell\nu & 0 \\ 12\ell-12\ell\nu & 12\ell^2+8\ell^2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ \theta_{y,2} \end{pmatrix} + q\ell^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \ell/3 \\ \ell/3 \end{pmatrix}$$

6/11



y sustituyendo se tiene

$$\begin{pmatrix} R_{z,1} \\ R_{\theta_x,1} \\ R_{\theta_y,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122.08 \text{ kN} \\ 126.56 \text{ kNm} \\ 39.46 \text{ kNm} \end{pmatrix}.$$

- (d) [4 puntos] ¿Qué tamaño tendría el sistema reducido si no existiera el pilar?

Solución Si no existiera el pilar únicamente se agregaría un grado de libertad, el vertical del nodo 5: w_5 . Con lo cual el sistema reducido es de 3×3 .

Verdadero / Falso:

- (a) [4 puntos] El elemento finito que se desprende de la teoría de losa de Reissner-Mindlin no tiene un efecto de bloqueo.

☐ Verdadero ☒ Falso

Solución Falso, ver apunte del curso.

- (b) [4 puntos] En la teoría de losa de Reissner-Mindlin no se considera la deformación por cortante.

☐ Verdadero ☒ Falso

Solución Falso, ver apunte del curso.

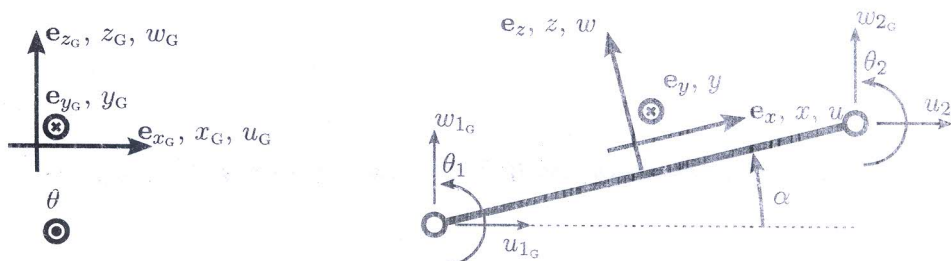


Hoja de fórmulas - Examen - 10 de diciembre de 2024
Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (2380)
Ingeniería Civil - Plan 2021 - Grupo: Informática



**Fórmulas para el Examen de
Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (2380)**
10 de diciembre de 2024

Elemento de pórtico 2D de Euler-Bernoulli de dos nodos.



El campo de desplazamientos $\mathbf{u}$ en coordenadas locales es:

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{1,u} & 0 & 0 & N_{2,u} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,w} & \bar{N}_{1,w} \frac{\ell}{2} & 0 & N_{2,w} & \bar{N}_{2,w} \frac{\ell}{2} \end{pmatrix} \mathbf{U}_L^{\oplus}$$

$$N_{1,u}(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_{1,w}(\xi) = \frac{1}{4}(2-3\xi+\xi^3), \quad \bar{N}_{1,w}(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi-\xi^2+\xi^3),$$

$$N_{2,u}(\xi) = \frac{1+\xi}{2}, \quad N_{2,w}(\xi) = \frac{1}{4}(2+3\xi-\xi^3), \quad \bar{N}_{2,w}(\xi) = \frac{1}{4}(-1-\xi+\xi^2+\xi^3).$$

El cambio de coordenadas y el sistema de ecuaciones en coordenadas globales es:

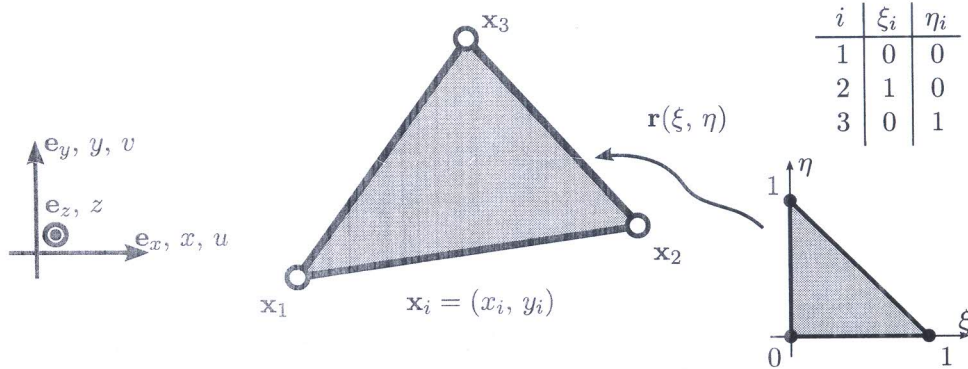
$$\mathbf{K}_G^{\oplus} \mathbf{U}_G^{\oplus} = \mathbf{F}_G^{\oplus} \quad \text{donde} \quad \mathbf{U}_G^{\oplus} = (u_{1G} \quad w_{1G} \quad \theta_1 \quad u_{2G} \quad w_{2G} \quad \theta_2)^T, \quad s = \sin(\alpha) \quad \text{y} \quad c = \cos(\alpha),$$

$$\mathbf{K}_G^{\oplus} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & -6\ell s & -K_1 & -K_2 & -6\ell s \\ K_3 & 6\ell c & -K_2 & -K_3 & 6\ell c & 0 \\ 4\ell^2 & 6\ell s & -6\ell c & 2\ell^2 & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & & K_1 & K_2 & -6\ell s \\ & & & K_3 & -6\ell c & 0 \\ & & & & 4\ell^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} K_1 &= \frac{A\ell^2}{I} c^2 + 12s^2, \\ K_2 &= \left(\frac{A\ell^2}{I} - 12 \right) cs, \\ K_3 &= \frac{A\ell^2}{I} s^2 + 12c^2. \end{aligned}$$

$$\mathbf{f} = f_z \mathbf{e}_{z_G}, \quad \mathbf{F}_{f,G}^{\oplus} = \frac{f_z \ell}{2} (-s \quad c \quad \ell/6 \quad -s \quad c \quad -\ell/6)^T \quad \text{donde} \quad [f_z] = [N]/[m].$$



Elemento triangular de tres nodos (CST).



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} \mathbf{U}^\circ, \quad N_i = \begin{pmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \end{pmatrix},$$

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad N_2(\xi, \eta) = \xi, \quad N_3(\xi, \eta) = \eta, \quad N_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y),$$

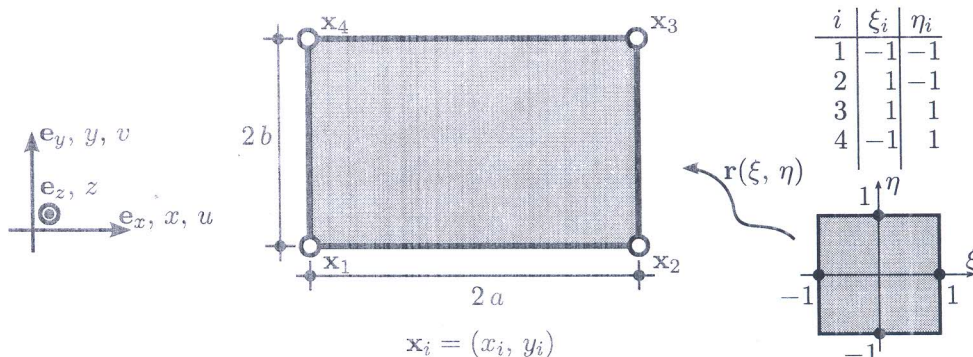
$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, & a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3, & a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \\ b_1 &= y_2 - y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, \\ c_1 &= x_3 - x_2, & c_2 &= x_1 - x_3, & c_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}^\circ \mathbf{U}^\circ = \mathbf{F}^\circ, \quad \mathbf{K}^\circ = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^\circ = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}^T,$$

donde $K_{ij} = \frac{t}{4A} \begin{pmatrix} b_i b_j C_{11} + c_i c_j C_{33} & b_i c_j C_{12} + c_i b_j C_{33} \\ c_i b_j C_{12} + b_i c_j C_{33} & c_i c_j C_{22} + b_i b_j C_{33} \end{pmatrix}$ y C_{ij} son las entradas de:

$$\mathbf{C} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \bar{\nu}}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \text{para EPT: } \bar{E} = E, & \bar{\nu} = \nu, \\ \text{para EPD: } \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}, & \bar{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu}. \end{cases}$$

Elemento rectangular de cuatro nodos.



$$\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$$

9/11



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{pmatrix} \mathbf{U}^\circ, \quad N_i = \begin{pmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5(x_1 + x_2) + a\xi \\ 0.5(y_1 + y_4) + b\eta \end{pmatrix},$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4\xi_i\eta_i} (\xi + \xi_i)(\eta + \eta_i), \quad \mathbf{U}^\circ = (u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4)^T.$$

$$\mathbf{K}^\circ \mathbf{U}^\circ = \mathbf{F}^\circ, \quad \mathbf{K}^\circ = \frac{t}{12A} \begin{pmatrix} 2a_{14} & a_{36} & d_{41} & b_{36} & -a_{14} & -a_{36} & d_{14} & b_{63} \\ - & 2a_{25} & b_{63} & d_{25} & -a_{36} & -a_{25} & b_{36} & d_{52} \\ - & - & 2a_{14} & -a_{36} & d_{14} & b_{36} & -a_{14} & a_{36} \\ - & - & - & 2a_{25} & b_{63} & d_{52} & a_{36} & -a_{25} \\ - & - & - & - & 2a_{14} & a_{36} & d_{41} & b_{36} \\ - & - & - & - & - & 2a_{25} & b_{63} & d_{25} \\ - & - & - & - & - & - & 2a_{14} & -a_{36} \\ - & - & - & - & - & - & - & 2a_{25} \end{pmatrix}$$

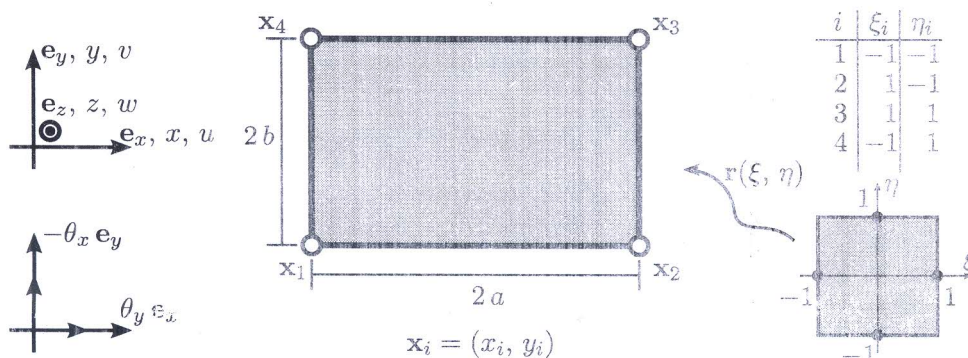
Sim.

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_i + a_j, & b_{ij} &= a_i - a_j, & d_{ij} &= a_i - 2a_j, \\ a_1 &= 8b^2 C_{11}, & a_2 &= 8a^2 C_{22}, & a_3 &= 3AC_{12}, \\ a_4 &= 8a^2 C_{33}, & a_5 &= 8b^2 C_{33}, & a_6 &= 3AC_{33} \end{aligned}$$

donde A es el área del elemento y C_{ij} son las entradas de:

$$\mathbf{C} = \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\bar{\nu}}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \text{para EPT: } \bar{E} = E, & \bar{\nu} = \nu, \\ \text{para EPD: } \bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2}, & \bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}. \end{cases}$$

Elemento rectangular de losa de Kirchhoff de 4 nodos (MZO).



$$w = \mathbf{N}_w \mathbf{U}^\circ, \quad \mathbf{N}_w = \begin{pmatrix} N_{w,1} & N_{w,2} & N_{w,3} & N_{w,4} \end{pmatrix}, \quad N_{w,i} = \begin{pmatrix} N_i & a\bar{N}_i & b\bar{\bar{N}}_i \end{pmatrix},$$

donde utilizando que $\mathbf{r}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5(x_1 + x_2) + a\xi \\ 0.5(y_1 + y_4) + b\eta \end{pmatrix}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \xi^2 - \eta^2), \\ \bar{N}_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{8} (\xi^2 - 1) (\xi + \xi_i) (1 + \eta_i \eta), \quad \bar{\bar{N}}_i(\xi, \eta) = \frac{1}{8} (\eta^2 - 1) (\eta + \eta_i) (1 + \xi_i \xi) \quad \text{y} \\ \mathbf{U}^\circ &= (w_1 \ \theta_{x,1} \ \theta_{y,1} \ w_2 \ \theta_{x,2} \ \theta_{y,2} \ w_3 \ \theta_{x,3} \ \theta_{y,3} \ w_4 \ \theta_{x,4} \ \theta_{y,4})^T. \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}^\circ \mathbf{U}^\circ = \mathbf{F}^\circ, \quad \mathbf{K}^\circ = D (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \quad \text{con} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)},$$

10/11



$$K_1 = \frac{b}{6a^3} \begin{pmatrix} 6 & 6a & 0 & -6 & 6a & 0 & -3 & 3a & 0 & 3 & 3a & 0 \\ & 8a^2 & 0 & -6a & 4a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 & 3a & 4a^2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 6 & -6a & 0 & 3 & -3a & 0 & -3 & -3a & 0 \\ & & & & 8a^2 & 0 & -3a & 4a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & 6 & -6a & 0 & -6 & -6a & 0 \\ & & & & & & & 8a^2 & 0 & 6a & 4a^2 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & & & 6 & 6a & 0 \\ & & & & & & & & & & 8a^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \frac{a}{6b^3} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6b & 3 & 0 & 3b & -3 & 0 & 3b & -6 & 0 & 6b \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 8b^2 & 3b & 0 & 4b^2 & -3b & 0 & 2b^2 & -6b & 0 & 4b^2 \\ \hline & & & 6 & 0 & 6b & -6 & 0 & 6b & -3 & 0 & 3b \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 8b^2 & -6b & 0 & 4b^2 & -3b & 0 & 2b^2 \\ \hline & & & & & 6 & 0 & -6b & 3 & 0 & -3b \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 8b^2 & -3b & 0 & 4b^2 \\ \hline & & & & & & & & 6 & 0 & -6b \\ & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 8b^2 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \frac{\nu}{2ab} \begin{pmatrix} 1 & a & b & -1 & 0 & -b & 1 & 0 & 0 & -1 & -a & 0 \\ & 0 & 2ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ & & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 1 & -a & b & -1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & -2ab & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & 1 & -a & -b & -1 & 0 & b \\ & & & & & & & 0 & 2ab & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & b & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & & & 1 & a & -b \\ & & & & & & & & & & 0 & -2ab \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_4 = \frac{(1-\nu)}{30ab} \begin{pmatrix} 21 & 3a & 3b & -21 & 3a & -3b & 21 & -3a & -3b & -21 & -3a & 3b \\ & 8a^2 & 0 & -3a & -2a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 & -3a & -8a^2 & 0 \\ & & 8b^2 & -3b & 0 & -8b^2 & 3b & 0 & 2b^2 & -3b & 0 & -2b^2 \\ \hline & & & 21 & -3a & 3b & -21 & 3a & 3b & 21 & 3a & -3b \\ & & & & 8a^2 & 0 & 3a & -8a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 \\ & & & & & 8b^2 & -3b & 0 & -2b^2 & 3b & 0 & 2b^2 \\ \hline & & & & & & 21 & -3a & -3b & -21 & -3a & 3b \\ & & & & & & & 8a^2 & 0 & 3a & -2a^2 & 0 \\ & & & & & & & & 8b^2 & 3b & 0 & -8b^2 \\ \hline & & & & & & & & & 21 & 3a & -3b \\ & & & & & & & & & & 8a^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 8b^2 \end{pmatrix}.$$

Si $f = f_z e_z$ es una carga de superficie se tiene que:

$$F_{f,L}^{\otimes} = ab f_z \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{3} & \frac{b}{3} & 1 & -\frac{a}{3} & \frac{b}{3} & 1 & -\frac{a}{3} & -\frac{b}{3} & 1 & \frac{a}{3} & -\frac{b}{3} \end{pmatrix}^T.$$

11/11

