

Prueba Parcial Teórica / Práctica de Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural

28 de Febrero de 2024

Examen teórico práctico

MCACE

28 de febrero de 2024

Duración:

Nombre: _____

CI: _____

- Este parcial contiene 4 páginas de letra (incluyendo esta hoja), 4 páginas de fórmulas y un total de 3 ejercicios.
- No se permite ir al baño en el transcurso de la prueba
- No se permite utilizar material, excepto calculadora NO programable
- Las preguntas múltiple opción tienen una única respuesta correcta.
- Para todos los ejercicios considerar las hipótesis de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones.
- En todos los ejercicios los elementos estructurales son homogéneos formados por un material elástico-lineal e isótropo.

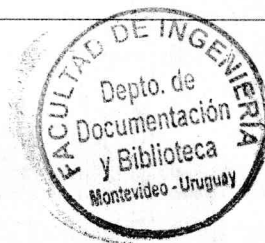
Tabla de puntajes (solo para uso docente)

Ejercicio	Puntaje
1	
2	
3	
Total	



Nombre: _____

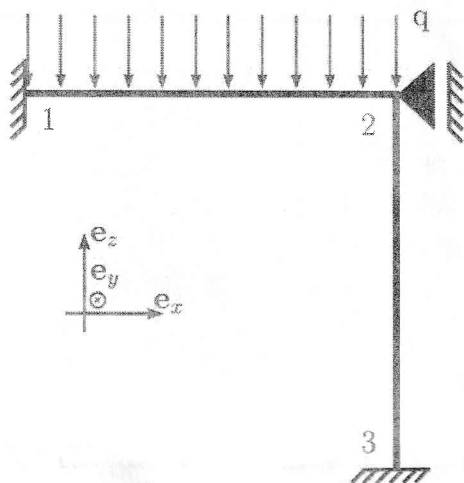
CI: _____



2/30

Ejercicio 1

Sea el pórtico de la figura donde todas las barras tienen largo L , área transversal Ω , inercia I y módulo de Young E . Sobre la barra superior actúa una carga uniforme por unidad de longitud q . Los nodos 1 y 3 están empotrados, el nodo 2 está imposibilitado de desplazarse en horizontal.



Utilizando un elemento de Euler-Bernoulli (EB) de 2 nodos por barra, se pide:

- 1) Obtener el giro y desplazamiento vertical del nodo 2.
- 2) Utilizando las expresiones del MEF obtener la reacción vertical en los nodos 1 y 3 en función de las incógnitas de la parte anterior.
- 3) Obtener el desplazamiento vertical de un punto en la barra 2-3 ubicado a una distancia $L/4$ del nodo 3.
- 4) Explique brevemente como es el elemento de viga de 3 nodos y 2 grados de libertad por nodo de Timoshenko. Plantee las condiciones que debe cumplir una de las funciones de interpolación (no obtenga la expresión de la función).

VERDADERO-FALSO

- 1) El desplazamiento vertical de la barra 1-2 es nulo si se utiliza un elemento de Timoshenko de 2 nodos por barra para resolver la estructura. **F**
- 2) Utilizando un elemento de EB de 2 nodos por barra al obtener las frecuencias de la estructura se obtienen 3 frecuencias. **F**
- 3) Al estudiar el pandeo de la estructura es necesario obtener la matriz geométrica cuyos términos se obtienen al integrar el producto de las funciones de interpolación del elemento. **F**

$$1) V_2 = -\frac{qL^4}{EI} \frac{7}{8(2R+15)}$$

$$2) \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} -12 & 6L \\ -R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \frac{qL}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta_2 = \frac{qL^3}{EI} \frac{(R-24)}{48(2R+15)}$$

$$R = \Omega L^2 / I$$

$$3) V(P) = \frac{1}{4} V_2$$

2/4

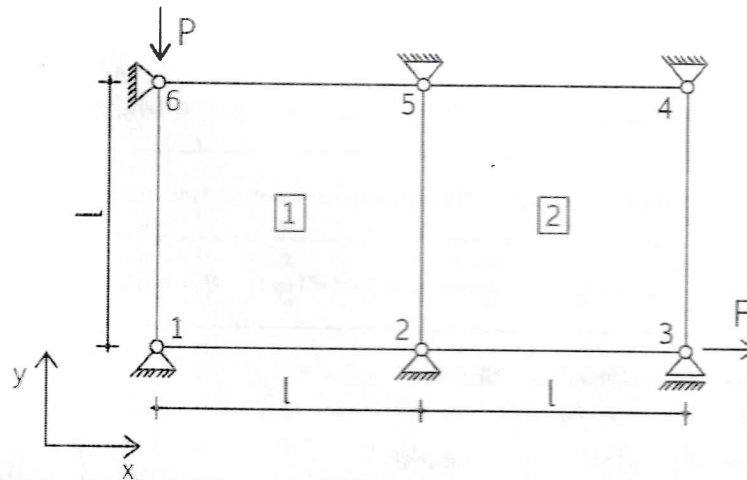
4) El elemento es análogo al de 2 nodos y 2 grados de libertad por elemento. En este caso las funciones de interpolación son algebraicas $N_i = a_i x^2 + b_i x + c_i$ y la flecha es $w = \sum_{i=1}^N N_i u_i$ y el giro: $\theta = \sum_{i=1}^N N_i \theta_i$

Nombre: _____

CI: _____

**Ejercicio 2**

Considere la chapa que se muestra en la figura, de espesor t , módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν . Sobre la misma se encuentran aplicadas una carga vertical P en el nodo 6 y una carga horizontal F en el nodo 3. Se asume estado plano de tensiones.

**MÚLTIPLE OPCIÓN**

1. Indique la expresión correcta para el desplazamiento horizontal del nodo 3:

- A: $\frac{-3F}{2D_1}$ • B: $\frac{3}{2t(D_1+D_3)}$ • C: $\frac{3F}{t(D_1+D_3)}$ • D: $\frac{7F}{t(D_1+D_2)}$

2. Indique el valor correcto para la reacción vertical en el nodo 6:

- A: P • B: $\frac{-5P}{2(D_1+D_3)}$ • C: $\frac{-3P}{2t}$ • D: $\frac{P+F}{4}$

VERDADERO / FALSO

- La matriz de derivadas de las funciones de forma B para el elemento triangular de 3 nodos CST presenta todas sus entradas constantes. **V**
- Al utilizar elementos cuadriláteros regulares de 4 nodos en estado plano se cuenta con 4 grados de libertad por nodo. **F**
- El tamaño de la matriz de rigidez K para el elemento triangular de 3 nodos CST es más grande que para el elemento cuadrilátero regular de 4 nodos en estado plano. **F**

Nombre: _____

CI: _____



Ejercicio 3

Parte 1: V-F:

Si se elige la opción equivocada resta un punto

Si no se elige, no suma ni resta

Si se elige la opción correcta suma dos puntos

	V	F
En teoría de Kirchhoff, la flecha cumple la siguiente igualdad $w(x, y, z) = w(x, y)$	X	
La matriz de rigidez de un elemento de Kirchhoff con cuatro nodos es de dimensiones 12x12	X	
La aproximación de la energía interna del elemento de Kirchhoff es: $U = u^T K \cdot u$		X
En teoría de Kirchhoff se considera $M_{xy}=0$		X
En teoría de Reissner se considera $\sigma_x = \text{lineal}$	X	
En teoría de Kirchhoff se considera $\tau_{xy}=0$		X
En teoría de Reissner se considera $\tau_{xz} = \text{uniforme}$	X	

Parte 2

Sea el elemento de losa de la figura, cuadrada de longitud 4.

Considerar todos sus lados empotrados.

Considerar una carga uniforme superficial $q=-1$

- Calcular la flecha en el punto Central.
- Considere una carga puntual en el centro de la losa igual al total de la carga de superficie integrada en el elemento, calcule la flecha del punto central.
- Calcule la relación entre la flecha encontrada en (a) con la flecha encontrada en (b)

$$a) w_q = 0.378 q$$

$$b) w_p = 0.0947 * 4^2 * q$$

$$c) \frac{w_p}{w_q} = 4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

E	10920
h	0.1
ν	0.3
a	4
b	4

1/4

4/8

Nombre: _____

CI: _____



Fórmulas:

Elemento de losa de Kirchhoff de 4 nodos

Para el elemento de dimensiones $2a \times 2b \times t$ se tiene:

$$K_e = D \cdot [K_1 + K_2 + K_3 + K_4]$$

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$K_1 = \frac{b}{6a^3} \begin{bmatrix} 6 & 6a & 0 & -6 & 6a & 0 & -3 & 3a & 0 & 3 & 3a & 0 \\ 6a & 8a^2 & 0 & -6a & 4a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 & 3a & 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6a & 0 & 6 & -6a & 0 & 3 & -3a & 0 & -3 & -3a & 0 \\ 6a & 4a^2 & 0 & -6a & 8a^2 & 0 & -3a & 4a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3a & 0 & 3 & -3a & 0 & 6 & -6a & 0 & -6 & -6a & 0 \\ 3a & 2a^2 & 0 & -3a & 4a^2 & 0 & -6a & 8a^2 & 0 & 6a & 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3a & 0 & -3 & 3a & 0 & -6 & 6a & 0 & 6 & 6a & 0 \\ 3a & 4a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 & -6a & 4a^2 & 0 & 6a & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{a}{6b^3} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6b & 3 & 0 & 3b & -3 & 0 & 3b & -6 & 0 & 6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6b & 0 & 8b^2 & 3b & 0 & 4b^2 & -3b & 0 & 2b^2 & -6b & 0 & 4b^2 \\ 3 & 0 & 3b & 6 & 0 & 6b & -6 & 0 & 6b & -3 & 0 & 3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3b & 0 & 4b^2 & 6b & 0 & 8b^2 & -6b & 0 & 4b^2 & -3b & 0 & 2b^2 \\ -3 & 0 & -3b & -6 & 0 & -6b & 6 & 0 & -6b & 3 & 0 & -3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3b & 0 & 2b^2 & 6b & 0 & 4b^2 & -6b & 0 & 8b^2 & -3b & 0 & 4b^2 \\ -6 & 0 & -6b & -3 & 0 & -3b & 3 & 0 & -3b & 6 & 0 & -6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6b & 0 & 4b^2 & 3b & 0 & 2b^2 & -3b & 0 & 4b^2 & -6b & 0 & 8b^2 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \frac{\nu}{2ab}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & -1 & 0 & -b & 1 & 0 & 0 & -1 & -a & 0 \\ a & 0 & 2ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ b & 2ab & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -b & 1 & -a & b & -1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & -2ab & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & b & -2ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & a & 0 & 1 & -a & -b & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 & 2ab & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 2ab & 0 & b & 0 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & b & 1 & a & -b \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & -2ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & -b & -2ab & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \frac{1-\nu}{30ab}$$

$$\begin{bmatrix} 21 & 3a & 3b & -21 & 3a & -3b & 21 & -3a & -3b & -21 & -3a & 3b \\ 3a & 8a^2 & 0 & -3a & -2a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 & -3a & -8a^2 & 0 \\ 3b & 0 & 8b^2 & -3b & 0 & -8b^2 & 3b & 0 & 2b^2 & -3b & 0 & -2b^2 \\ -21 & -3a & -3b & 21 & -3a & 3b & -21 & 3a & 3b & 21 & 3a & -3b \\ 3a & -2a^2 & 0 & -3a & 8a^2 & 0 & 3a & -8a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 \\ -3b & 0 & -8b^2 & 3b & 0 & 8b^2 & -3b & 0 & -2b^2 & 3b & 0 & 2b^2 \\ 21 & 3a & 3b & -21 & 3a & -3b & 21 & -3a & -3b & -21 & -3a & 3b \\ -3a & 2a^2 & 0 & 3a & -8a^2 & 0 & -3a & 8a^2 & 0 & 3a & -2a^2 & 0 \\ -3b & 0 & 2b^2 & 3b & 0 & -2b^2 & -3b & 0 & 8b^2 & 3b & 0 & -8b^2 \\ -21 & -3a & -3b & 21 & -3a & 3b & -21 & 3a & 3b & 21 & 3a & -3b \\ -3a & -8a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 & -3a & -2a^2 & 0 & 3a & 8a^2 & 0 \\ 3b & 0 & -2b^2 & -3b & 0 & 2b^2 & 3b & 0 & -8b^2 & -3b & 0 & 8b^2 \end{bmatrix}$$

Nombre: _____

CI: _____



Elemento de pórtico de Euler-Bernoulli de dos nodos

Una vez combinados los efectos de directa y flexión, la matriz de rigidez resultante en coordenadas globales resulta:

Matriz en coordenadas globales:

$$K_G = \frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} A & B & -6\ell s & -A & -B & -6\ell s \\ & C & 6\ell c & -B & -C & 6\ell c \\ & & 4\ell^2 & 6\ell s & -6\ell c & 2\ell^2 \\ & & & A & B & 6\ell s \\ & & & & C & -6\ell c \\ & & & & & 4\ell^2 \end{pmatrix}$$

la cual es simétrica, con

$$A = \frac{\Omega \ell^2}{I} c^2 + 12s^2, \quad B = \left(\frac{\Omega \ell^2}{I} - 12 \right) cs, \quad C = \frac{\Omega \ell^2}{I} s^2 + 12c^2.$$

siendo $s = \sin(\alpha)$ y $c = \cos(\alpha)$, con α el ángulo medido de coordenadas globales a locales en sentido antihorario.

Una carga uniformemente distribuida en el área superior de la viga $f = -q e_z$ tiene un vector de fuerzas equivalente:

$$F_f = -\frac{qb\ell}{12} [6, \ell, 6, -\ell]^T.$$

Estado plano de Tensiones:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} D_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} \\ D_2 &= \frac{\nu E}{1-\nu^2} \\ D_3 &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}$$

7/8

Nombre: _____

CI: _____



Elemento cuadrilátero regular de 4 nodos:

$$[K^e] = t(k_{ij})$$

Los términos k_{ij} se expresan en las ecuaciones que siguen:

$$k_{11} = \frac{bD_1}{3a} + \frac{aD_3}{3b}$$

$$k_{12} = \frac{D_2 + D_3}{4}$$

$$k_{13} = \frac{-bD_1}{3a} + \frac{aD_3}{6b}$$

$$k_{14} = \frac{D_2 - D_3}{4}$$

$$k_{15} = \frac{-bD_1}{6a} - \frac{aD_3}{6b}$$

$$k_{16} = -k_{12}$$

$$k_{17} = \frac{bD_1}{6a} - \frac{aD_3}{3b}$$

$$k_{18} = -k_{14}$$

$$k_{22} = \frac{aD_1}{3b} + \frac{bD_3}{3a}$$

$$k_{23} = -k_{14}$$

$$k_{24} = \frac{aD_1}{6b} - \frac{bD_3}{3a}$$

$$k_{25} = -k_{12}$$

$$k_{26} = \frac{-aD_1}{6b} - \frac{bD_3}{6a}$$

$$k_{28} = \frac{-aD_1}{3b} + \frac{bD_3}{6a}$$

$$k_{33} = k_{11}$$

$$k_{34} = -k_{12}$$

$$k_{35} = k_{17}$$

$$k_{36} = k_{14}$$

$$k_{37} = k_{15}$$

$$k_{38} = k_{12}$$

$$k_{44} = k_{22}$$

$$k_{45} = -k_{14}$$

$$k_{46} = k_{28}$$

$$k_{47} = k_{12}$$

$$k_{48} = k_{26}$$

$$k_{55} = k_{11}$$

$$k_{56} = k_{12}$$

$$k_{57} = k_{13}$$

$$k_{58} = k_{14}$$

$$k_{66} = k_{22}$$

$$k_{67} = -k_{14}$$

$$k_{68} = k_{24}$$

$$k_{77} = k_{11}$$

$$k_{78} = -k_{12}$$

$$k_{88} = k_{22}$$