

Prueba Parcial Teórica / Práctica de Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural

6 de Febrero de 2024

Examen teórico práctico

MCACE

06 de febrero de 2024

Duración:

Nombre: _____

CI: _____

- Para la aprobación de este parcial se deberá resolver correctamente un ejercicio y medio como mínimo.
- Este parcial contiene 6 páginas de letra (incluyendo esta hoja), 4 páginas de fórmulas y un total de 3 ejercicios.
- No se permite ir al baño en el transcurso de la prueba
- No se permite utilizar material, excepto calculadora NO programable
- Las respuestas pueden escribirse o marcarse en la letra u en la hoja de desarrollo indistintamente
- Las preguntas múltiple opción tienen una única respuesta correcta.
- Para todos los ejercicios considerar las hipótesis de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones.
- En todos los ejercicios los elementos estructurales son homogéneos formados por un material elástico-lineal e isotrópico.

Tabla de puntajes (solo para uso docente)

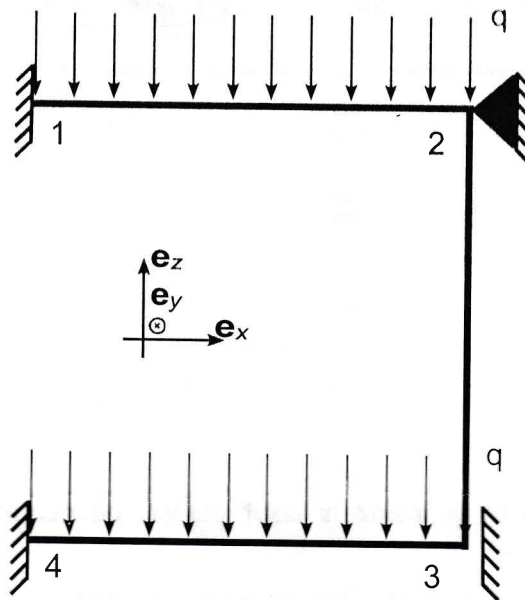
Ejercicio	Puntaje
1	
2	
3	
Total	





Ejercicio 1

Sea el pórtico de la figura donde todas las barras tienen largo L , área transversal Ω , inercia I y módulo de Young E . Sobre la barras superior e inferior actúa una carga uniforme por unidad de longitud q . Los nodos 1 y 4 están empotrados, el nodo 3 está imposibilitado de girar y desplazarse en horizontal, mientras que el nodo 2 no puede desplazarse verticalmente ni horizontalmente.



Utilizando un elemento de Euler-Bernoulli (EB) de 2 nodos por barra, se pide:

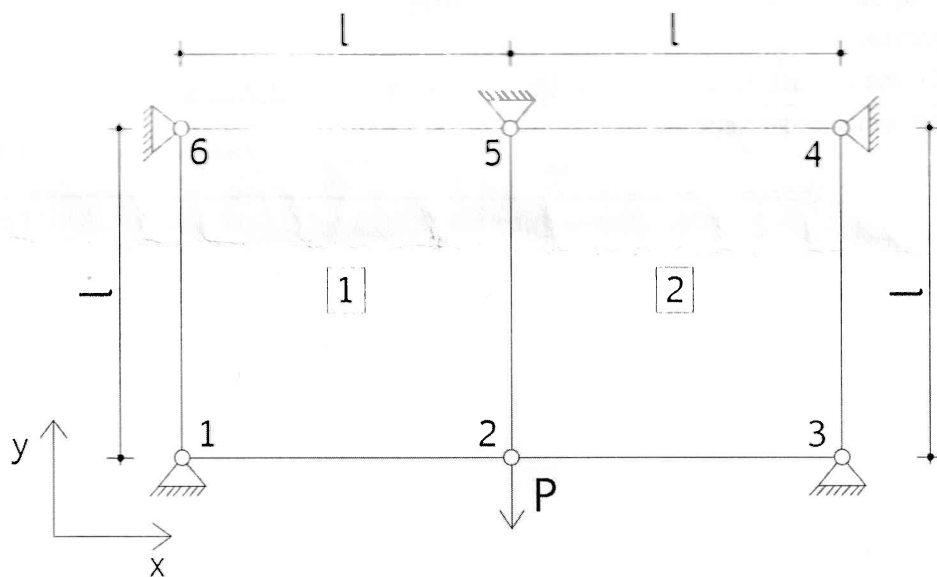
1. Obtener el giro del nodo 2 y el desplazamiento vertical del nodo 3.
2. Utilizando las expresiones del MEF obtener la reacción vertical en los nodos 1, 2 y 4 en función de las incógnitas de la parte anterior.
3. Obtener el desplazamiento de un punto en la barra 2-3 ubicado a una distancia $L/3$ del nodo 3.
4. Explique brevemente como es el elemento de 3 nodos y 1 grado de libertad por nodo de barras. Plantee las condiciones que debe cumplir una de las funciones de interpolación (no obtenga la expresión de la función). \item Obtener el giro del nodo 2 y el desplazamiento vertical del nodo 3.

**VERDADERO / FALSO**

1. El desplazamiento vertical de la barra 1-2 es nulo si se utiliza un elemento de Timoshenko de 2 nodos por barra para resolver la estructura.
2. Utilizando un elemento de EB de 2 nodos por barra al obtener las frecuencias de la estructura se obtienen 3 frecuencias.
3. Al estudiar el pandeo de la estructura es necesario obtener la matriz geométrica y dicha matriz debe ser obtenida con integración reducida para evitar el efecto de bloqueo.

Ejercicio 2

Considere la chapa que se muestra en la figura, de espesor t , módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν . Sobre la misma se encuentra una carga aplicada P . Se asume estado plano de tensiones.

**MÚLTIPLE OPCIÓN**

1. Indique la expresión correcta para el desplazamiento vertical del nodo 2:

- A: $\frac{-3P}{2}$
- ☒ B: $\frac{-3P}{2t(D_1+D_3)}$ **X**
- C: $\frac{-3P}{5(D_1+D_3)}$
- D: $\frac{-P}{t(D_1+D_2)}$

Nombre: _____

CI: _____

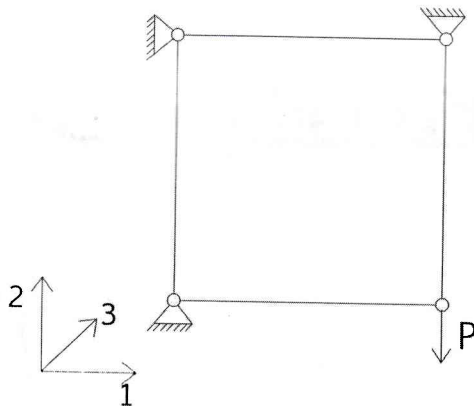


2. Indique el valor correcto para la reacción vertical en el nodo 6:

- A: $\frac{-P}{2}$
- B: $\frac{-5P}{2(D_1 + D_3)}$
- C: $\frac{-3P}{2t}$
- D: $\frac{P}{4}$ ☒

VERDADERO / FALSO

- F** 1. La matriz de derivadas de las funciones de forma B para el elemento cuadrilátero regular de 4 nodos en estado plano presenta todas sus entradas constantes en el elemento.
- V** 2. Dada una estructura como en la figura a continuación donde se asume estado plano de deformaciones se tiene $\epsilon_{33}=0$



- F** 3. Al utilizar elementos triangulares de 3 nodos CST en estado plano se cuenta con 1 grado de libertad por nodo.

Nombre: _____

CI: _____



Ejercicio 3

Múltiple opción y V-F:

Si se elige la opción equivocada resta un punto

Si no se elige, no suma ni resta

Si se elige la opción correcta suma dos puntos

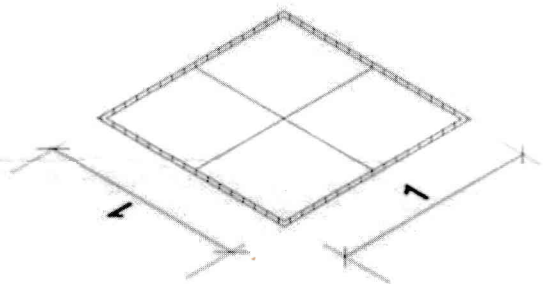
	V	F
En teoría de Kirchoff, la flecha cumple la siguiente igualdad $w(x,y) = w(x)$		F
La matriz de rigidez de un elemento de Kirchoff con cuatro nodos es de dimensiones 16x16		F
La aproximación de la energía interna del elemento de Kirchoff es : $U = \frac{1}{2} u^T K \cdot u$	V	
En teoría de Kirchoff se considera $\epsilon_z=0$	✓	
En teoría de Reissner se considera $\gamma_{xz}=0$		F
En teoría de Kirchoff se considera $\gamma_{yz}=0$	V	
En teoría de Reissner se considera $\epsilon_z=0$	V	

Parte 2

Sea el elemento de losa de la figura:

Considerar todos sus lados empotrados.

Considerar una carga uniforme superficial $q=-1$



Nombre: _____

CI: _____



Sea la losa de la figura	
Si la flecha central es igual a -20 mm para un E de 34 Gpa., en caso que el material sea de 20 Gpa (espesor y valor de ν se mantienen invariantes) la flecha es de:	(mm)
	-34.40
	-20.00
	-17.50
X	-11.76
	-12.45
Si la flecha central es igual a -20 mm para un espesor de 10 cm, en caso de que el espesor sea de 15 cm (se mantienen las constantes mecánicas iguales)	(mm)
	-67.50
X	-5.93
	-30.00
	-13.33
	-10.00
Si la flecha central es igual a -20 mm para un espesor de 15 cm, en caso de que el espesor sea de 10 cm (se mantienen las constantes mecánicas iguales)	(mm)
	-67.50
X	-5.93
	-30.00
	-13.33
	-10.00
El giro θ_x del punto central cuando $\nu=0$ es	rad
	$\emptyset$
X	2.10E-03
	-2.10E-03
	5.20E-03
	-5.20E-03
Si la flecha del punto central vale -20 mm con $\nu=0.25$, cuando $\nu=0.30$ vale	(mm)
	-19.41
X	-19.31
	-24.00
	-16.67
	-20.00

Nombre: _____



Fórmulas:

Elemento de losa de Kirchhoff de 4 nodos

Para el elemento de dimensiones $2a \times 2b \times t$ se tiene:

$$K_e = D \cdot [K_1 + K_2 + K_3 + K_4]$$

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$K_1 = \frac{b}{6a^3} \begin{bmatrix} 6 & 6a & 0 & -6 & 6a & 0 & -3 & 3a & 0 & 3 & 3a & 0 \\ 6a & 8a^2 & 0 & -6a & 4a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 & 3a & 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6a & 0 & 6 & -6a & 0 & 3 & -3a & 0 & -3 & -3a & 0 \\ 6a & 4a^2 & 0 & -6a & 8a^2 & 0 & -3a & 4a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3a & 0 & 3 & -3a & 0 & 6 & -6a & 0 & -6 & -6a & 0 \\ 3a & 2a^2 & 0 & -3a & 4a^2 & 0 & -6a & 8a^2 & 0 & 6a & 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3a & 0 & -3 & 3a & 0 & -6 & 6a & 0 & 6 & 6a & 0 \\ 3a & 4a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 & -6a & 4a^2 & 0 & 6a & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{a}{6b^3} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6b & 3 & 0 & 3b & -3 & 0 & 3b & -6 & 0 & 6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6b & 0 & 8b^2 & 3b & 0 & 4b^2 & -3b & 0 & 2b^2 & -6b & 0 & 4b^2 \\ 3 & 0 & 3b & 6 & 0 & 6b & -6 & 0 & 6b & -3 & 0 & 3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3b & 0 & 4b^2 & 6b & 0 & 8b^2 & -6b & 0 & 4b^2 & -3b & 0 & 2b^2 \\ -3 & 0 & -3b & -6 & 0 & -6b & 6 & 0 & -6b & 3 & 0 & -3b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3b & 0 & 2b^2 & 6b & 0 & 4b^2 & -6b & 0 & 8b^2 & -3b & 0 & 4b^2 \\ -6 & 0 & -6b & -3 & 0 & -3b & 3 & 0 & -3b & 6 & 0 & -6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6b & 0 & 4b^2 & 3b & 0 & 2b^2 & -3b & 0 & 4b^2 & -6b & 0 & 8b^2 \end{bmatrix}$$

Nombre: _____



$$K_3 = \frac{\nu}{2ab}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & -1 & 0 & -b & 1 & 0 & 0 & -1 & -a & 0 \\ a & 0 & 2ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ b & 2ab & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -b & 1 & -a & b & -1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & -2ab & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & b & -2ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & a & 0 & 1 & -a & -b & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & -a & 0 & 2ab & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 2ab & 0 & b & 0 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & b & 1 & a & -b \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & -2ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & -b & -2ab & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \frac{1-\nu}{30ab}$$

$$\begin{bmatrix} 21 & 3a & 3b & -21 & 3a & -3b & 21 & -3a & -3b & -21 & -3a & 3b \\ 3a & 8a^2 & 0 & -3a & -2a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 & -3a & -8a^2 & 0 \\ 3b & 0 & 8b^2 & -3b & 0 & -8b^2 & 3b & 0 & 2b^2 & -3b & 0 & -2b^2 \\ -21 & -3a & -3b & 21 & -3a & 3b & -21 & 3a & 3b & 21 & 3a & -3b \\ 3a & -2a^2 & 0 & -3a & 8a^2 & 0 & 3a & -8a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 \\ -3b & 0 & -8b^2 & 3b & 0 & 8b^2 & -3b & 0 & -2b^2 & 3b & 0 & 2b^2 \\ 21 & 3a & 3b & -21 & 3a & -3b & 21 & -3a & -3b & -21 & -3a & 3b \\ -3a & 2a^2 & 0 & 3a & -8a^2 & 0 & -3a & 8a^2 & 0 & 3a & -2a^2 & 0 \\ -3b & 0 & 2b^2 & 3b & 0 & -2b^2 & -3b & 0 & 8b^2 & 3b & 0 & -8b^2 \\ -21 & -3a & -3b & 21 & -3a & 3b & -21 & 3a & 3b & 21 & 3a & -3b \\ -3a & -8a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 & -3a & -2a^2 & 0 & 3a & 8a^2 & 0 \\ 3b & 0 & -2b^2 & -3b & 0 & 2b^2 & 3b & 0 & -8b^2 & -3b & 0 & 8b^2 \end{bmatrix}$$

8/12

Nombre: _____



Elemento de pórtico de Euler-Bernoulli de dos nodos

Una vez combinados los efectos de directa y flexión, la matriz de rigidez resultante en coordenadas globales resulta:

Matriz en coordenadas globales:

$$K_G = \frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} A & B & -6\ell s & -A & -B & -6\ell s \\ & C & 6\ell c & -B & -C & 6\ell c \\ & & 4\ell^2 & 6\ell s & -6\ell c & 2\ell^2 \\ & & & A & B & 6\ell s \\ & & & & C & -6\ell c \\ & & & & & 4\ell^2 \end{pmatrix}$$

la cual es simétrica, con

$$A = \frac{\Omega \ell^2}{I} c^2 + 12s^2, \quad B = \left(\frac{\Omega \ell^2}{I} - 12 \right) cs, \quad C = \frac{\Omega \ell^2}{I} s^2 + 12c^2.$$

siendo $s = \sin(\alpha)$ y $c = \cos(\alpha)$, con α el ángulo medido de coordenadas globales a locales en sentido antihorario.

Una carga uniformemente distribuida en el área superior de la viga $f = -q e_z$ tiene un vector de fuerzas equivalente:

$$F_f = -\frac{q b \ell}{12} [6, \ell, 6, -\ell]^T.$$

Estado plano de Tensiones:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$D_2 = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$$

$$D_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

9/12



Elemento cuadrilátero regular de 4 nodos:

$$[K^e] = t(k_{ij})$$

Los términos k_{ij} se expresan en las ecuaciones que siguen:

$$k_{11} = \frac{bD_1}{3a} + \frac{aD_3}{3b}$$

$$k_{12} = \frac{D_2 + D_3}{4}$$

$$k_{13} = \frac{-bD_1}{3a} + \frac{aD_3}{6b}$$

$$k_{14} = \frac{D_2 - D_3}{4}$$

$$k_{15} = \frac{-bD_1}{6a} - \frac{aD_3}{6b}$$

$$k_{16} = -k_{12}$$

$$k_{17} = \frac{bD_1}{6a} - \frac{aD_3}{3b}$$

$$k_{18} = -k_{14}$$

$$k_{22} = \frac{aD_1}{3b} + \frac{bD_3}{3a}$$

$$k_{23} = -k_{14}$$

$$k_{24} = \frac{aD_1}{6b} - \frac{bD_3}{3a}$$

$$k_{25} = -k_{12}$$

$$k_{26} = \frac{-aD_1}{6b} - \frac{bD_3}{6a}$$

$$k_{28} = \frac{-aD_1}{3b} + \frac{bD_3}{6a}$$

$$k_{33} = k_{11}$$

$$k_{34} = -k_{12}$$

$$k_{35} = k_{17}$$

$$k_{36} = k_{14}$$

$$k_{37} = k_{15}$$

$$k_{38} = k_{12}$$

$$k_{44} = k_{22}$$

$$k_{45} = -k_{14}$$

$$k_{46} = k_{28}$$

$$k_{47} = k_{12}$$

$$k_{48} = k_{26}$$

$$k_{55} = k_{11}$$

$$k_{56} = k_{12}$$

$$k_{57} = k_{13}$$

$$k_{58} = k_{14}$$

$$k_{66} = k_{22}$$

$$k_{67} = -k_{14}$$

$$k_{68} = k_{24}$$

$$k_{77} = k_{11}$$

$$k_{78} = -k_{12}$$

$$k_{88} = k_{22}$$

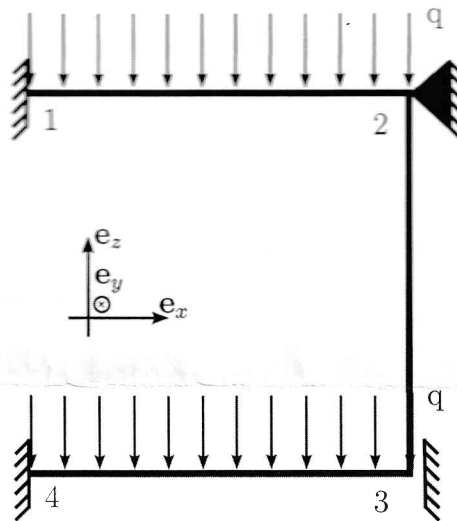
10/12



Ejercicio examen MCACE

Feb. 24-1

Sea el pórtico de la figura donde todas las barras tienen largo L , área transversal Ω , inercia I y módulo de Young E . Sobre la barras superior e inferior actúa una carga uniforme por unidad de longitud q . Los nodos 1 y 4 están empotrados, el nodo 3 está imposibilitado de girar y desplazarse en horizontal, mientras que el nodo 2 no puede desplazarse verticalmente ni horizontalmente.



Utilizando un elemento de Euler-Bernoulli (EB) de 2 nodos por barra, se pide:

1. Obtener el giro del nodo 2 y el desplazamiento vertical del nodo 3.

Solución: $\theta_2 = \frac{q L^3}{96 E I}$ y $v_3 = -\frac{q L^4}{2 E (12 I + \Omega L^2)}$, siendo $R = (\Omega L^2)/I$.

2. Utilizando las expresiones del MEF obtener la reacción vertical en los nodos 1, 2 y 4 en función de las incógnitas de la parte anterior.

Solución:
$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_4 \end{pmatrix} = \frac{E I}{L^3} \begin{pmatrix} 6 L & 0 \\ -6 L & -R \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \frac{q L}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Obtener el desplazamiento de un punto en la barra 2-3 ubicado a una distancia $L/3$ del nodo 3.

Solución: $v_P = \frac{2}{3} v_3$. $u_P = N_4 \left(\frac{L}{3} \right) \theta_2$

4. Explique brevemente como es el elemento de 3 nodos y 1 grado de libertad por nodo de barras. Plante las condiciones que debe cumplir una de las funciones de interpolación (no obtenga la expresión de la función).

Solución: El elemento es análogo al de 2 nodos con 1 grado de libertad, con la única diferencia que ahora hay 3 funciones de interpolación, cada una de segundo grado $N_i = a_i x^2 + b_i x + c_i$. Si el campo de desplazamientos u se obtiene como $u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$ donde u_i son los desplazamientos a

cada nodo del elemento se debe cumplir para N_1 que: $N_1(x_1) = 1$, $N_1(x_2) = N_1(x_3) = 0$ donde x_i es coordenada del nodo i en coordenadas locales.

VERDADERO-FALSO

1. El desplazamiento vertical de la barra 1-2 es nulo si se utiliza un elemento de Timoshenko de 2 nodos por barra para resolver la estructura.

Solución: VERDADERO. El desplazamiento será nulo ya que la flecha interpolada en este elemento dependerá solo de la flecha de los nodos 1 y 2 que por letra valen 0.

2. Utilizando un elemento de EB de 2 nodos por barra al obtener las frecuencias de la estructura se obtienen 3 frecuencias.

Solución: FALSO. Al resolver la estructura como se plantea en la letra se obtienen dos frecuencias.

3. Al estudiar el pandeo de la estructura es necesario obtener la matriz geométrica y dicha matriz debe ser obtenida con integración reducida para evitar el efecto de bloqueo.

Solución: FALSO. El efecto de bloqueo aparece en el elemento de Timoshenko. La matriz geométrica puede obtenerse de forma exacta sin utilizar integración reducida.



12/12