

Examen - 26 de julio de 2024

Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural

Ingeniería Civil - Plan 2021

Grupo: Informática

UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

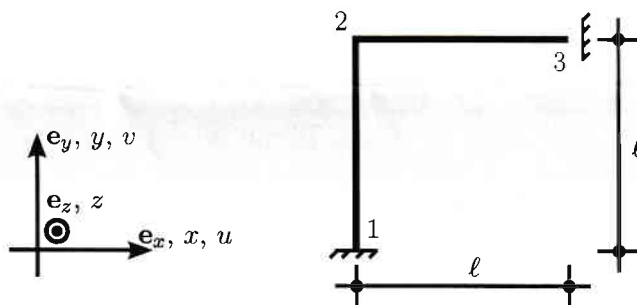
Examen de
Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural
26 de julio de 2024

Tabla de puntaje (sólo para el uso docente)

Ejercicio	1	2	3	Total
Puntos:	34	33	33	100
Resultado				

Aclaración: Todas las hojas entregadas deben estar separadas por ejercicio, numeradas y deben tener nombre, apellido y documento de identidad.

1. [34 puntos] Sea el pórtico de la figura donde todas las barras tienen largo ℓ , área transversal A , inercia I y módulo de Young E . El nodo 1 está empotrado y el nodo 3 está imposibilitado de girar y desplazarse en horizontal. En el nodo 2 se impone un giro pequeño θ_2 que se asume conocido (la dirección es según $\mathbf{e}_z$). En lo que sigue $R = A\ell^2/I$.



Solución En este problema los grados de libertad son todos los del nodo 2 y el desplazamiento vertical del nodo 3. Se consideran los elementos:

- Elemento 1: formado por los nodos 1 y 2, con lo cual $\alpha = 90^\circ$.
- Elemento 2: formado por los nodos 2 y 3, con lo cual $\alpha = 0^\circ$.

Definiendo $R = \frac{A\ell^2}{I}$ se tiene que la matriz de rigidez reducida es:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} 12 + R & 0 & 6\ell & 0 \\ 0 & 12 + R & 6\ell & -12 \\ 6\ell & 6\ell & 8\ell^2 & -6\ell \\ 0 & -12 & -6\ell & 12 \end{pmatrix}$$

Desarrollo Utilizando un elemento de Euler-Bernoulli de dos nodos por tramo, se pide:

- (a) [9 puntos] Obtener, en función de los parámetros del problema, los desplazamientos del nodo 2.

1/10

Solución El sistema reducido es:

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} 12+R & 0 & 6\ell & 0 \\ 0 & 12+R & 6\ell & -12 \\ 6\ell & 6\ell & 8\ell^2 & -6\ell \\ 0 & -12 & -6\ell & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con lo cual se puede simplificar a:

$$\begin{pmatrix} 12+R & 0 & 0 \\ 0 & 12+R & -12 \\ 0 & -12 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = -6\ell\theta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

del cual es fácil obtener que:

$$u_2 = -\frac{6\ell\theta_2}{12+R}, \quad v_2 = 0 \quad y \quad v_3 = \frac{\ell\theta_2}{2}$$

- (b) [7 puntos] Obtener el valor del momento que debería aplicarse en el nodo 2 para obtener la misma solución del problema.

Solución Del sistema reducido se obtiene que M_2 es:

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{EI}{\ell^3} (6\ell u_2 + 6\ell v_2 + 8\ell^2 \theta_2 - 6\ell v_3), \\ &= \frac{EI}{\ell^3} \left(-\frac{36\ell^2 \theta_2}{12+R} + 5\ell^2 \theta_2 \right), \\ &= \frac{EI\theta_2}{\ell} \left(\frac{24+5R}{12+R} \right). \end{aligned}$$

Múltiple opción Con lo obtenido en las partes anteriores, se pide:

- (a) [2 puntos] El desplazamiento vertical del nodo 3, v_3 , es:

☐ A $\ell\theta_2$
☐ B 0
 ☒ C $\frac{\ell\theta_2}{2}$
☐ D $-\ell\theta_2$

- (b) [6 puntos] La reacción vertical del nodo 1, $R_{y,1}$, es:

☒ A 0
 ☐ B $\frac{EI\theta_2}{\ell^2}$
☐ C $\frac{EI\theta_2}{\ell^2 R}$
☐ D $\frac{EI\theta_2}{\ell^2 (12+R)}$



Solución Del sistema global se obtiene que $R_{y,1}$ es:

$$R_{y,1} = \frac{EI}{\ell^3} (-R v_2) = 0$$

Verdadero / Falso:

- (a) [5 puntos] Las funciones de interpolación del elemento de barra de tres nodos son cuadráticas.

☒ Verdadero
 ☐ Falso

Solución El elemento de tres nodos de barra efectivamente tiene funciones de interpolación cuadráticas, ver Capítulo 2 de los apuntes del curso.

2/10

- (b) [5 puntos] El elemento de viga que se obtiene mediante la teoría de Timoshenko para vigas tiene un efecto no deseado llamado *efecto de bloqueo*.



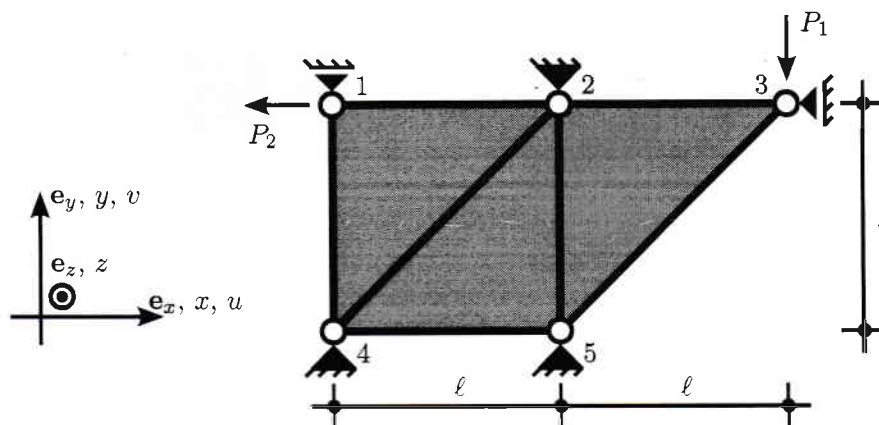
Verdadero



Falso

Solución En el elemento de vigas de Timoshenko efectivamente aparece el efecto de bloque, también conocido como *shear locking*, ver Capítulo 4 de los apuntes del curso.

2. [33 puntos] Considere la chapa que se muestra en la figura, de espesor t , módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν . Sobre la misma se encuentran aplicadas cargas P_1 y P_2 . Se asume estado plano de tensiones.



Solución En este problema los únicos grados de libertad son el desplazamiento horizontal del nodo 1 y el vertical del nodo 3. Dichos grados de libertad no están en interacción mediante un elemento con lo cual el sistema reducido será diagonal de 2×2 . Se consideran los elementos:

- Elemento 1: formado por los nodos 1, 4 y 2.
- Elemento 2: formado por los nodos 2, 4 y 5.
- Elemento 3: formado por los nodos 2, 5 y 3.

Por lo mencionado anteriormente solo es necesario obtener las entradas:

- (1, 1) del elemento 1: $\frac{t}{4A} \ell^2 (C_{11} + C_{33})$.
- (6, 6) del elemento 3: $\frac{t}{4A} \ell^2 C_{33}$.

Todos los elementos tienen área $A = \ell^2/2$, con lo anterior se tiene que el sistema reducido es:

$$\frac{t}{2} \begin{pmatrix} C_{11} + C_{33} & 0 \\ 0 & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} P_2 \\ P_1 \end{pmatrix},$$

de lo anterior es simple obtener la solución de los dos múltiple opción.

Múltiple opción: Utilizando elementos triangulares de tres nodos, se pide:

3/10

- (a) [9 puntos] El desplazamiento horizontal del nodo 1,
- u_1
- , es:

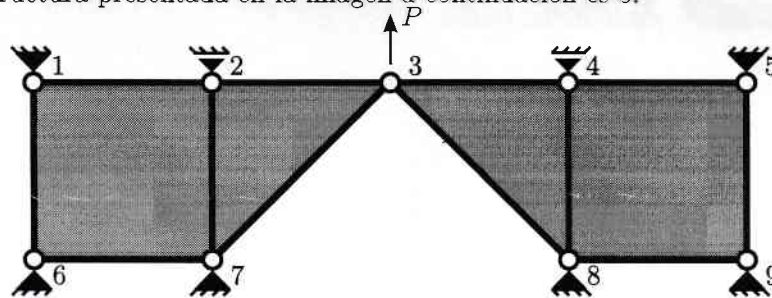
☐ A $-\frac{P_2}{2C_{11}}$
☒ B $-\frac{2P_2}{t(C_{11} + C_{33})}$
☐ C $-\frac{2P_2}{tC_{11}}$
☐ D $\frac{P_2}{tC_{11}}$

- (b) [9 puntos] El desplazamiento vertical del nodo 3,
- v_3
- , es:

☐ A $-\frac{2P_1}{3tC_{11}}$
☐ B $-\frac{2P_1}{2(C_{11} + C_{33})}$
☐ C $\frac{3P_1}{2t}$
☒ D $-\frac{2P_1}{tC_{33}}$

Verdadero / Falso:

- (a) [5 puntos] Considerando argumentos de simetría se observa que: el mínimo número de incógnitas cinemáticas a determinar para conocer el campo de desplazamientos de la estructura presentada en la imagen a continuación es 3.



☐ Verdadero
 ☒ Falso

Solución Sin considerar argumentos de simetría la estructura tiene 4 grados de libertad. La simetría que existe en esta estructura es según el eje vertical que pasa por el nodo tres, la cual divide a la estructura en dos, siendo el nodo 3 perteneciente a ambas estructuras. Por dicha simetría se tiene que los desplazamientos horizontales de los nodos dos y cuatro son opuestos, con lo cual se reduce en uno los grados de libertad. Por el mismo argumento el desplazamiento del nodo tres de una estructura y otra son opuestos, pero como además son el mismo nodo en la estructura total tienen que ser iguales y por tanto nulos, quitando un nuevo grado de libertad. En resumen se quitan 2 grados de libertad de los 4 iniciales, por tanto se tiene un total de 2 grados de libertad al utilizar argumentos de simetría.

- (b) [5 puntos] La matriz
- B**
- de derivadas de las funciones de interpolación para el elemento cuadrilátero bilineal de 4 nodos presenta todas sus entradas uniformes.

☐ Verdadero
 ☒ Falso

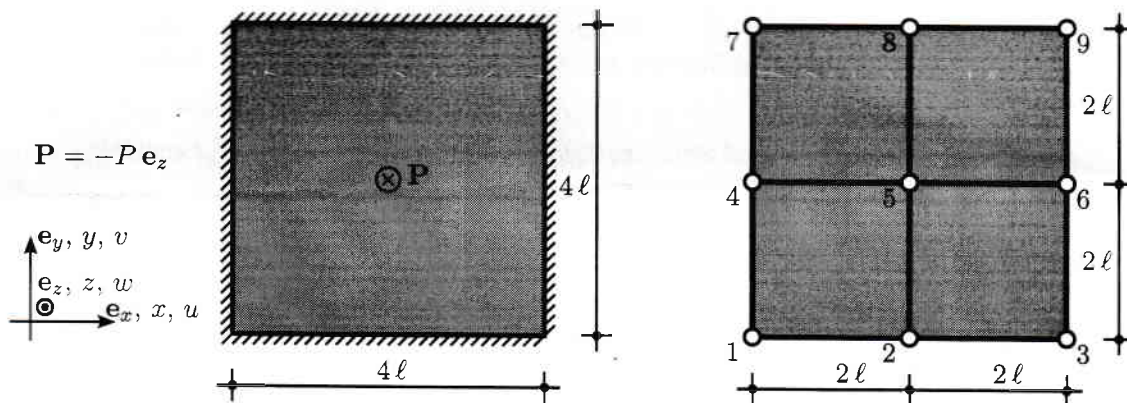
Solución Las funciones de interpolación de este elemento tienen el término xy , con lo cual la matriz **B**, que en este elemento son derivadas primeras de las funciones de interpolación, tiene términos lineales.

- (c) [5 puntos] Un campo de desplazamientos definido por la expresión
- $x^2 + y$
- podrá ser representado de manera exacta utilizando elementos triangulares de tres nodos CST.

☐ Verdadero
 ☒ Falso

Solución Los elementos triangulares de tres nodos tienen funciones lineales de interpolación del campo de desplazamiento, con lo cual no pueden representar de forma exacta un polinomio de grado 2.

3. [33 puntos] Considere la losa que se muestra en la figura, de espesor t , módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν . En el centro la misma se encuentra aplicada una carga $P = -P e_z$ tal como se presenta en la figura. Los 4 lados de la losa, de largo 4ℓ , están empotrados.



Desarrollo Utilizando 4 elementos de Kirchhoff cuadrados de tamaño $2\ell \times 2\ell$ como se muestra en la figura anterior, se pide:

- [5 puntos] Justificar que **sin considerar argumentos de simetría** la cantidad de grados de libertad es 3.
- [5 puntos] Justificar que **considerando argumentos de simetría** la cantidad de grados de libertad es 1.
- [5 puntos] Obtener el desplazamiento vertical del nodo 5, w_5 , en función de los parámetros del problema.
- [5 puntos] Obtener la reacción vertical en el nodo 1, $R_{z,1}$, en función de los parámetros del problema.
- [5 puntos] Obtener la reacción vertical en el nodo 2, $R_{z,2}$, en función de los parámetros del problema.

Solución a) A continuación se detalla el razonamiento de esta parte:

- Cada uno de los nodos tiene tres grados de libertad, con lo cual en principio se tienen $9 \times 3 = 27$ grados de libertad.
- Todos los nodos del borde están empotrados con lo cual el desplazamiento vertical de todos esos nodos es conocido de valor 0, con lo cual se tienen $27 - 8 = 19$ grados de libertad.
- Debido al empotramiento los giros θ_y de los nodos en los bordes "horizontales" son nulos; análogamente en los bordes "verticales" los giros θ_x son nulos, por tanto se reducen los grados de libertad a $19 - 6 - 6 = 7$.
- Dado que el desplazamiento en todo el borde es nulo los giros en las otras direcciones también lo son. Por ejemplo, en el borde "horizontal" que tiene a los nodos 1, 2 y 3 se tiene que $w(x, y_1) = 0$ para todo $x \in [x_1, x_3]$ con lo cual $\theta_x = \frac{\partial w(x, y_1)}{\partial x} = 0$ para todo $x \in [x_1, x_3]$ y por tanto conocido. Por lo anterior se obtiene que el giro θ_x del nodo 2 es conocido y con un razonamiento análogo son conocidos también los giros θ_y de los nodos 4 y 6, y el giro θ_x del nodo 8. En consecuencia se tiene que los grados de libertad se reducen a: $7 - 4 = 3$.

5/10

- Los únicos grados de libertad sin considerar argumentos de simetría son los del nodo 5.

b) De lo anterior se tiene que los grados de libertad sin considerar argumentos de simetría son 3, y todos ellos del nodo 5. Se definen los siguientes elementos:

- Elemento 1 al formado por los nodos 1, 2, 5 y 4.
- Elemento 2 al formado por los nodos 2, 3, 6 y 5.

Por continuidad se tiene que el giro en x del nodo 5 en el elemento 1, $\theta_{x,5}^1$, y el giro en x del nodo 5 en el elemento 2, $\theta_{x,5}^2$ son iguales: $\theta_{x,5}^1 = \theta_{x,5}^2$. Por simetría respecto al eje $x = x_2$ dichos giros tienen que ser opuestos: $\theta_{x,5}^1 = -\theta_{x,5}^2$. La única forma que se den las dos igualdades anteriores es que $\theta_{x,5}^1 = \theta_{x,5}^2 = 0$ y por consiguiente $\theta_{x,5} = 0$. Con un razonamiento análogo se obtiene que: $\theta_{y,5} = 0$. Por lo anterior es posible reducir en 2 la cantidad de grados de libertad, obteniendo así: $3 - 2 = 1$ grado de libertad.

c) Para esta parte o bien se pueden sumar las 4 componentes de cada una de las 4 matrices de rigidez o se puede dividir el problema en 4 elementos independientes donde cada uno de ellos tiene $1/4$ de la carga puntual P . De ambas formas se obtiene que:

$$D \left(\frac{6b}{6a^3} + \frac{6a}{6b^3} + \frac{\nu}{2ab} + \frac{21(1-\nu)}{30ab} \right) w_5 = -\frac{P}{4},$$

con lo cual sustituyendo que $a = b = \ell$ se tiene:

$$w_5 = -\frac{P \ell^2}{D} \frac{5}{2(27-2\nu)}.$$

d) La reacción vertical en el nodo 1 se obtiene como:

$$\begin{aligned} R_{z,1} &= D \left(-\frac{3b}{6a^3} - \frac{3a}{6b^3} + \frac{\nu}{2ab} + \frac{21(1-\nu)}{30ab} \right) w_5, \\ &= D \left(\frac{-3-2\nu}{10\ell^2} \right) w_5 \end{aligned}$$

con lo cual sustituyendo w_5 se tiene:

$$R_{z,1} = \frac{P}{4} \left(\frac{3+2\nu}{27-2\nu} \right).$$

e) La reacción vertical en el nodo 2 se puede obtener por equilibrio ya que por simetría $R_{z,3} = R_{z,7} = R_{z,9} = R_{z,1}$ y $R_{z,4} = R_{z,6} = R_{z,8} = R_{z,2}$ con lo cual:

$$4R_{z,1} + 4R_{z,2} - P = 0 \Rightarrow R_{z,2} = P \left(\frac{6-\nu}{27-2\nu} \right).$$

Otra opción es obtenerla utilizando la matriz de rigidez del elemento 1, teniendo en cuenta que aparece la mitad de la reacción en dicho sistema (por la simetría):

$$\begin{aligned} \frac{R_{z,2}}{2} &= D \left(\frac{3b}{6a^3} - \frac{6a}{6b^3} - \frac{\nu}{2ab} - \frac{21(1-\nu)}{30ab} \right) w_5, \\ &= D \left(\frac{-6+\nu}{5\ell^2} \right) w_5 \end{aligned}$$

con lo cual sustituyendo w_5 se tiene:

$$R_{z,2} = P \left(\frac{6-\nu}{27-2\nu} \right).$$





Múltiple opción:

- (a) [4 puntos] Si los lados de la losa fueran simplemente apoyados la cantidad de grados de libertad, sin considerar argumentos de simetría, es:

☐ A 2 ☒ B 7 ☐ C 5 ☐ D 4

- (b) [4 puntos] Si los lados de la losa fueran simplemente apoyados la cantidad de grados de libertad, considerando argumentos de simetría, es:

☒ A 2 ☐ B 7 ☐ C 5 ☐ D 4

Hoja de Fórmulas - 26 de julio de 2024

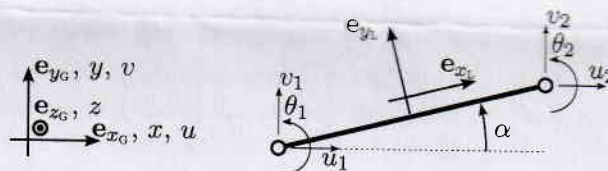
Examen de Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural

Ingeniería Civil - Plan 2021

Grupo: Informática

UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Matriz de rigidez en coordenadas globales del elemento de pórtico de Euler-Bernoulli de dos nodos.



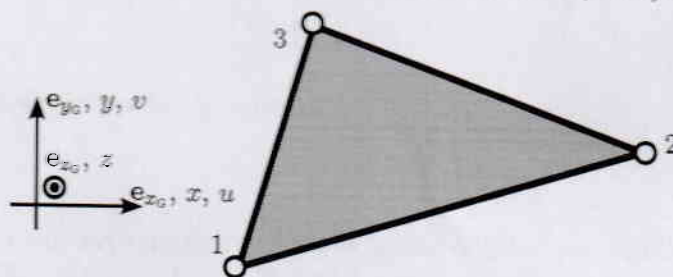
$$\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F} \quad \text{donde} \quad \mathbf{U}^e = (u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2)^T \quad \text{y}$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & -6\ell s & -K_1 & -K_2 & -6\ell s \\ & K_3 & 6\ell c & -K_2 & -K_3 & 6\ell c \\ & & 4\ell^2 & 6\ell s & -6\ell c & 2\ell^2 \\ \text{Simétrica} & & & K_1 & K_2 & 6\ell s \\ & & & & K_3 & -6\ell c \\ & & & & & 4\ell^2 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = \frac{A\ell^2}{I} c^2 + 12s^2, \quad K_2 = \left(\frac{A\ell^2}{I} - 12 \right) cs, \quad K_3 = \frac{A\ell^2}{I} s^2 + 12c^2,$$

siendo $s = \sin(\alpha)$ y $c = \cos(\alpha)$, con α el ángulo medido de coordenadas globales a locales en sentido antihorario.

Matriz de rigidez del elemento triangular de tres nodos (CST).



$$\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F} \quad \text{donde} \quad \mathbf{U}^e = (u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3)^T \quad \text{y}$$

$$\mathbf{K}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{ij} = \frac{t}{4A} \begin{pmatrix} b_i b_j C_{11} + c_i c_j C_{33} & b_i c_j C_{12} + c_i b_j C_{33} \\ c_i b_j C_{12} + b_i c_j C_{33} & c_i c_j C_{22} + b_i b_j C_{33} \end{pmatrix}.$$

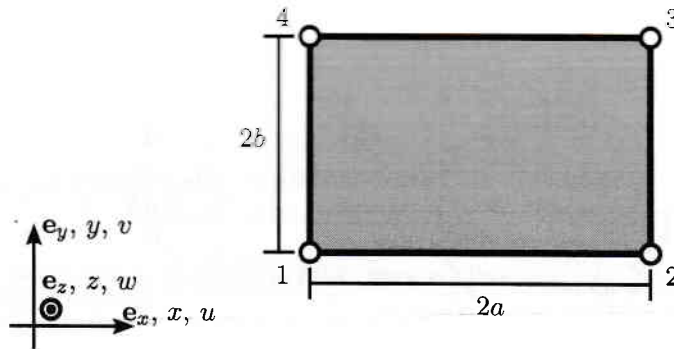
$$\mathbf{C} = \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\bar{\nu}}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \text{para EPT: } \bar{E} = E, & \bar{\nu} = \nu, \\ \text{para EPD: } \bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2}, & \bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}. \end{cases}$$

$$b_1 = y_2 - y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_1 = x_3 - x_2 \quad c_2 = x_1 - x_3 \quad c_3 = x_2 - x_1$$

8/10

Matriz de rigidez del elemento rectangular de losa de Kirchhoff.



$$K^e U^e = F \quad \text{con} \quad U^e = (w_1 \quad \theta_{x,1} \quad \theta_{y,1} \quad w_2 \quad \theta_{x,2} \quad \theta_{y,2} \quad w_3 \quad \theta_{x,3} \quad \theta_{y,3} \quad w_4 \quad \theta_{x,4} \quad \theta_{y,4})^T,$$

$$K^e = D (K_1 + K_2 + K_3 + K_4) \quad \text{donde} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu)} \quad y$$

$$K_1 = \frac{b}{6a^3} \begin{pmatrix} 6 & 6a & 0 & -6 & 6a & 0 & -3 & 3a & 0 & 3 & 3a & 0 \\ & 8a^2 & 0 & -6a & 4a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 & 3a & 4a^2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 6 & -6a & 0 & 3 & -3a & 0 & -3 & -3a & 0 \\ & & & & 8a^2 & 0 & -3a & 4a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 6 & -6a & 0 & -6 & -6a & 0 \\ & & & & & & & 8a^2 & 0 & 6a & 4a^2 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 6 & 6a & 0 \\ & & & & & & & & & & 8a^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \frac{a}{6b^3} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6b & 3 & 0 & 3b & -3 & 0 & 3b & -6 & 0 & 6b \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 8b^2 & 3b & 0 & 4b^2 & -3b & 0 & 2b^2 & -6b & 0 & 4b^2 \\ & & & 6 & 0 & 6b & -6 & 0 & 6b & -3 & 0 & 3b \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 8b^2 & -6b & 0 & 4b^2 & -3b & 0 & 2b^2 \\ & & & & & & 6 & 0 & -6b & 3 & 0 & -3b \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 8b^2 & -3b & 0 & 4b^2 \\ & & & & & & & & & 6 & 0 & -6b \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 8b^2 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \frac{\nu}{2ab}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & -1 & 0 & -b & 1 & 0 & 0 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 2ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2ab & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & -b & -1 & 0 & b & 0 & 2ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 1 & a & -b & 0 & -2ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$K_4 = \frac{(1-\nu)}{30ab}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 3a & 3b & -21 & 3a & -3b & 21 & -3a & -3b & -21 & -3a & 3b \\ 8a^2 & 0 & -3a & -2a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 & -3a & -8a^2 & 0 & 0 \\ 8b^2 & -3b & 0 & -8b^2 & 3b & 0 & 2b^2 & -3b & 0 & -2b^2 & 0 & 0 \\ 21 & -3a & 3b & -21 & 3a & 3b & 21 & 3a & -3b & 3b & 0 & 2b^2 \\ 8a^2 & 0 & 3a & -8a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 & 3b & 0 & 2b^2 & 0 \\ 8b^2 & -3b & 0 & -2b^2 & 3b & 0 & -8b^2 & 3b & 0 & -8b^2 & 0 & 0 \\ 21 & -3a & -3b & -21 & -3a & 3b & 21 & 3a & -3b & 8a^2 & 0 & 0 \\ 8a^2 & 0 & 3a & -2a^2 & 0 & 8b^2 & 3b & 0 & -8b^2 & 21 & 3a & -3b \\ 8b^2 & 3b & 0 & -8b^2 & 21 & 3a & -3b & 8a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Simétrica