

Examen - 10 de diciembre de 2025

Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (2380)

Ingeniería Civil - Plan 2021

Grupo: Informática

UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA

URUGUAY



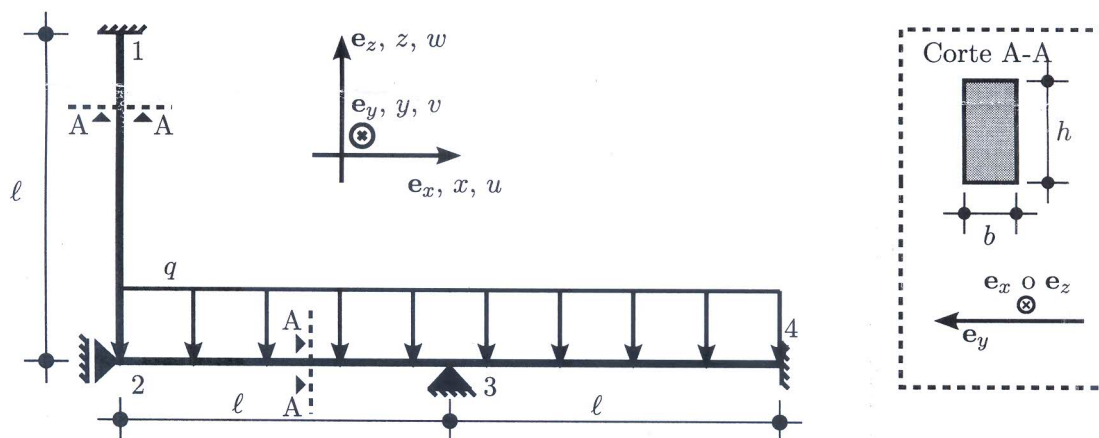
Examen de
Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (2380)
 10 de diciembre de 2025

Tabla de puntaje (sólo para el uso docente)

Ejercicio	1	2	3	Total
Puntos:	35	31	34	100
Resultado				

Aclaración: Todas las hojas entregadas deben estar separadas por ejercicio, numeradas y deben tener nombre, apellido y documento de identidad. Respuestas incorrectas de verdadero/falso suman de forma negativa la mitad de los puntos que vale la pregunta y las preguntas múltiple opción suman -1 punto.

1. [35 puntos] A un estudio de cálculo se le pide dimensionar un pórtico que sea capaz de sostener una carga $\mathbf{q} = -q \mathbf{e}_z$ como se muestra en la figura. Asumir que todos los tramos son de un material con módulo de Young E , coeficiente de Poisson ν , área de la sección transversal A e inercia I . Los nodos 1 y 4 están empotrados, mientras que el nodo 2 solo tiene restringido el desplazamiento horizontal y el nodo 3 solo tiene permitido el giro. Considerar que $[q] = [\text{N}]/[\text{m}]$.



Desarrollo En todas las partes se debe utilizar un elemento de Euler-Bernoulli de dos nodos por tramo y el MEF para la resolución. *Sugerencia: utilizar $R = \frac{A \ell^2}{I}$ para la resolución.*

- (a) [4 puntos] Obtener el sistema de ecuaciones reducido de tamaño 3×3 para la estructura. Los elementos en esta estructura son el 1-2, el 2-3 y el 3-4.

Solución Todos los desplazamientos nodales son nulos excepto las incógnitas w_2 , θ_2 y θ_3 . Definiendo $R = A \ell^2 / I$ se tiene que el sistema es:

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} 12 + R & 6\ell & 6\ell \\ & 8\ell^2 & 2\ell^2 \\ \text{Sim.} & & 8\ell^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = -\frac{q\ell}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \ell/6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) [4 puntos] Obtener la reacción, $\mathbf{R}_1 = (R_{x,1}, R_{z,1}, R_{\theta,1})^T$, en el empotramiento del nodo 1. Asumir como conocidos los resultados de la parte anterior.

Solución De la ecuación del sistema global para el elemento 1-2 se tiene que las ecuaciones para obtener la reacción del nodo 1 son:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} R_{x,1} \\ R_{z,1} \\ R_{\theta,1} \end{pmatrix} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} 0 & 6\ell \\ -R & 0 \\ 0 & 2\ell^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}.$$

- (c) [4 puntos] Obtener la reacción, $\mathbf{R}_4 = (R_{x,4}, R_{z,4}, R_{\theta,4})^T$, en el empotramiento del nodo 4. Asumir como conocidos los resultados de la parte anterior.

Solución De la ecuación del sistema global para el elemento 3-4 se tiene que las ecuaciones para obtener la reacción del nodo 4 son:

$$\mathbf{R}_4 = \begin{pmatrix} R_{x,4} \\ R_{z,4} \\ R_{\theta,4} \end{pmatrix} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} 0 \\ -6\ell \\ 2\ell^2 \end{pmatrix} \theta_3 + \frac{q\ell}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\ell/6 \end{pmatrix}.$$

- (d) [5 puntos] ¿Sería conveniente utilizar elementos de 3 nodos en alguno de los tramos? ¿En cuáles si y en cuáles no? Justifique su respuesta.

Solución De la teoría de Euler-Bernoulli, muchas veces conocida como teoría de vigas, se obtiene (para vigas con material y sección uniforme) la ecuación diferencial:

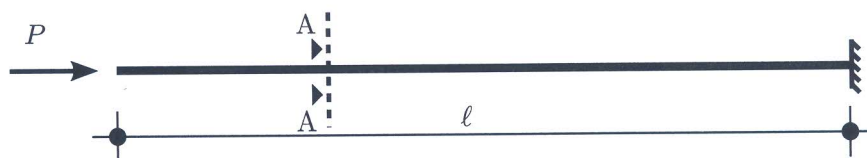
$$EI \frac{\partial^4 w_{EB}}{\partial x^4} = -q(x),$$

donde q es una carga perpendicular a la viga y opuesta al desplazamiento vertical w . De dicha ecuación se obtiene que si $q = 0$ entonces w_{EB} es cúbica, mientras que si $q \neq 0$ es uniforme se tiene que el desplazamiento w_{EB} es de orden 4. El elemento finito de Euler-Bernoulli de 2 nodos utiliza funciones de interpolación cúbicas para w . Por lo anterior para los tramos 2-3 y 3-4 si es conveniente aumentar el orden de interpolación. El elemento de 3 nodos de Euler-Bernoulli utiliza funciones de interpolación de orden 5 con lo cual, en principio, es una aproximación adecuada para funciones de orden 4.

En el pilar 1-2 no hay cargas externas aplicadas, únicamente se ve afectado por cargas puntuales en sus extremos. Por lo anterior no es necesario utilizar elementos de alto orden en ese tramo.

En conclusión: si, es conveniente utilizar elementos de 3 nodos en los tramos 2-3 y 3-4.

- (e) [6 puntos] Se pide obtener la carga crítica de pandeo de la mensula que se muestra en la figura siguiente utilizando un solo elemento de Euler-Bernoulli. Considere las mismas propiedades geométricas y materiales que en el pórtico de las partes anteriores. Aclarar que inercia se usa.



Solución La carga crítica se obtiene imponiendo que:

$$\det \left(\frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} 12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 \end{pmatrix} - \frac{P}{30\ell} \begin{pmatrix} 36 & 3\ell \\ 3\ell & 4\ell^2 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

por tanto:

$$3\ell^4 P^2 - 104EI\ell^2 P + 240E^2 I^2 = 0,$$

y consecuentemente:

$$P = \frac{4}{3} (13 \pm 2\sqrt{31}) \frac{EI}{\ell^2} \Rightarrow P_{\text{crit}} = \frac{4}{3} (13 - 2\sqrt{31}) \frac{EI_{\text{min}}}{\ell^2}.$$



Verdadero / Falso:

- (a) [4 puntos] No es posible estudiar el problema de pandeo de la mensula de la parte e) del desarrollo utilizando un elemento de Euler-Bernoulli de 3 nodos (interpolación polinómica de orden 5 del desplazamiento vertical).

☐ Verdadero ☒ Falso

Solución Si se pueden utilizar elementos de alto orden para resolver problemas de pandeo y por tanto la expresión es falsa.

- (b) [4 puntos] De utilizar dos elementos de Euler-Bernoulli de 2 nodos por tramo en el pórtico del desarrollo se obtienen doce frecuencias naturales al analizar la estructura.

☒ Verdadero ☐ Falso

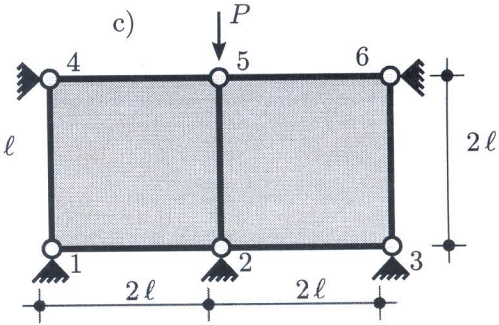
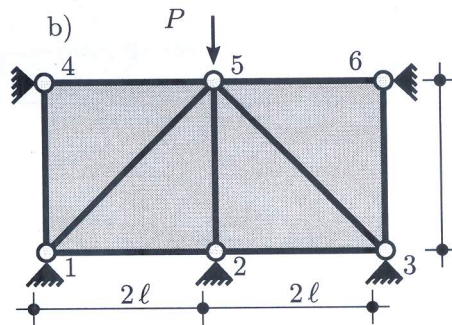
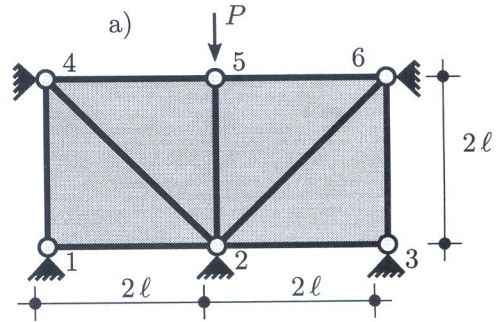
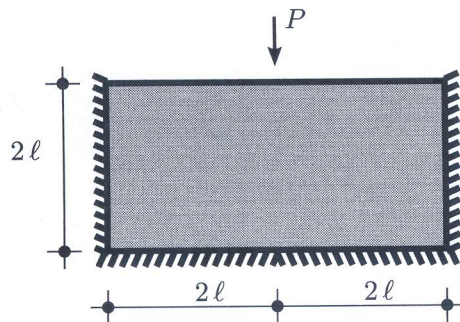
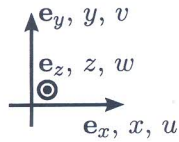
Solución Se obtiene una frecuencia natural por cada grado de libertad libre. Cada elemento aporta 3 grados de libertad por el nodo intermedio, esto es: 9 grados de libertad libres. Luego se deben sumar los 2 grados de libertad del nodo 2 y otro del nodo 3. En conclusión son $9 + 3 = 12$ grados de libertad libres y por tanto la afirmación es verdadera.

- (c) [4 puntos] Si tenemos cargas dinámicas cíclicas sobre una estructura es importante verificar que la frecuencia de dicha carga no sea igual a ninguna de las frecuencias naturales de la estructura para evitar el fenómeno de resonancia.

☒ Verdadero ☐ Falso

Solución La afirmación es verdadera, ver apunte del curso.

2. [31 puntos] A efectos de realizar un primer dimensionado estructural de una fundación se decide adoptar el esquema planteado en la figura. Se asume que la profundidad, t , de la fundación (según eje e_z) es uniforme y mucho mayor a las restantes dimensiones. Asuma que toda la fundación es de material de módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν . En función de las características de la cimentación se consideran apoyados los tramos entre nodos 4-1, 1-2, 2-3 y 3-6. El resto de los nodos no presentan restricciones de desplazamiento. Sobre la fundación actúa la carga P que se presenta en la figura.



Solución Debido a que la dimensión en e_z es mucho mayor que en las otras dos se puede asumir estado plano de deformaciones (EPD). Por lo anterior es necesario redefinir los parámetros materiales: $E = E/(1 - \nu^2)$ y $\nu = \nu/(1 - \nu)$.

Desarrollo

- (a) [4 puntos] Obtener los desplazamientos nodales de la estructura para la malla a) y la reacción en el nodo 1: $\mathbf{R}_1 = (R_{x,1}, R_{y,1})$.

Solución El único nodo que tiene desplazamientos no nulos es el nodo 5. Además por la simetría del eje 2-5 se tiene $u_5 = 0$ m. Se obtiene que el sistema de ecuaciones es:

$$\frac{t}{2} (C_{22} + C_{33}) v_5 = -\frac{P}{2} \Rightarrow v_5 = -\frac{P}{t(C_{22} + C_{33})}.$$

El desplazamiento de los nodos 1, 2 y 4 son nulos, por tal motivo la reacción del nodo 1 es: $\mathbf{R}_1 = (0, 0)$ N.

- (b) [6 puntos] Obtener los desplazamientos nodales de la estructura para la malla b) y la reacción en el nodo 1: $\mathbf{R}_1 = (R_{x,1}, R_{y,1})$. Comparar con la parte anterior.

Solución El único nodo que tiene desplazamientos no nulos es el nodo 5. Además por la simetría del eje 2-5 se tiene $u_5 = 0$ m. Se obtiene que el sistema de ecuaciones es:

$$t(C_{22} + C_{33}) v_5 = -\frac{P}{2} \Rightarrow v_5 = -\frac{P}{t(C_{22} + C_{33})},$$

donde se obtiene el mismo desplazamiento que en la parte anterior.
La reacción del nodo 1 es:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} R_{x,1} \\ R_{y,1} \end{pmatrix} = -\frac{t}{2} \begin{pmatrix} C_{12} + C_{33} \\ 0 \end{pmatrix} v_5,$$

donde no se obtiene el mismo resultado que en la parte anterior.

- (c) [4 puntos] Obtener los desplazamientos nodales de la estructura para la malla c) y la reacción en el nodo 1: $\mathbf{R}_1 = (R_{x,1}, R_{y,1})$. Comparar con las partes anteriores.

Solución El único nodo que tiene desplazamientos no nulos es el nodo 5. Además por la simetría del eje 2-5 se tiene $u_5 = 0$ m. Se obtiene que el sistema de ecuaciones es:

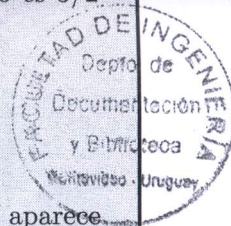
$$\frac{t}{3} (C_{22} + C_{33}) v_5 = -\frac{P}{2} \Rightarrow v_5 = -\frac{3P}{2t(C_{22} + C_{33})},$$

donde se obtiene un desplazamiento distinto al de la parte anterior, de hecho es $3/2$ veces lo que los desplazamientos de a) y b).

La reacción del nodo 1 es:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} R_{x,1} \\ R_{y,1} \end{pmatrix} = -\frac{t}{12} \begin{pmatrix} 3(C_{12} + C_{33}) \\ 2(C_{22} + C_{33}) \end{pmatrix} v_5,$$

donde no se obtiene el mismo resultado que en la parte anterior. Además aquí aparece una reacción en y .



- (d) [5 puntos] Se pide obtener el desplazamiento $\mathbf{u}_P = (u_P, v_P)$ para el punto P cuyas coordenadas son $(x_P, y_P) = (\ell, \ell)$ en todas las mallas. Considerar el centro de coordenadas en el nodo 1: $(x_1, y_1) = (0, 0)$ m.

Solución A continuación se describen los resultados para cada malla:

- a) En este caso los desplazamientos del elemento 1-2-4 son todos nulos por tanto como el nodo P es el punto medio del tramo 2-4 su desplazamiento es nulo. Se puede pensar también con el elemento 1-2-5 ya que el desplazamiento del nodo P podría depender de v_5 , sin embargo la función de interpolación de ese grado de libertad, N_5 , vale 0 en el tramo 2-4.
- b) Desde el elemento 1-2-5 se puede obtener el desplazamiento como:

$$v_P = \frac{1}{2} v_5 \quad y \quad u_P = 0 \text{ m},$$

donde lo último se puede obtener con la misma interpolación o se puede inferir que sucede porque todos los desplazamientos en x son nulos. El $1/2$ se puede obtener sin realizar cuentas ya que el punto que se busca está en el punto medio entre 1-5 y por tanto cada uno de los nodos 1 y 5 aportan $1/2$ cada uno solo que $v_1 = 0$ m por restricciones de apoyo.

- c) En este caso el punto donde se quiere evaluar es $(\xi, \eta) = (0, 0)$ para el elemento 1-2-5-4. Por tal motivo el desplazamiento se obtiene como

$$v_P = \frac{1}{4} (0 + 1) (0 + 1) v_5 = \frac{1}{4} v_5 \quad y \quad u_P = 0 \text{ m}.$$

Este caso también se podía pensar que como el punto P está en el centro del elemento entonces el desplazamiento allí se obtiene aportando $1/4$ cada uno de los nodos.

Verdadero / Falso:

- (a) [4 puntos] Las tensiones de la estructura en el elemento 1-2-4 utilizando la malla a) son nulas.

☒ Verdadero ☐ Falso

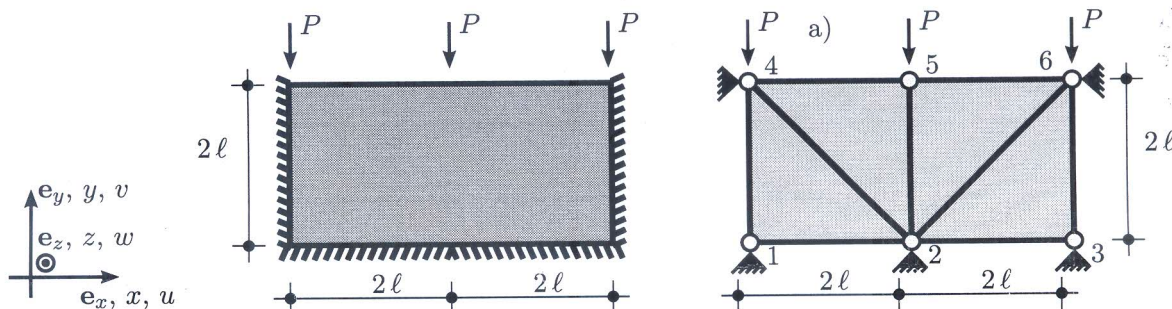
Solución Como todos los desplazamientos del elemento 1-2-4 son nulos entonces las deformaciones dentro del elemento son nulas, consecuentemente las tensiones son nulas y por tanto la afirmación es verdadera.

- (b) [4 puntos] En caso de eliminar el apoyo en ambos sentidos en el nodo 4, el mínimo número de grados de libertad a determinar para resolver el problema es 4 para todas las mallas presentadas.

☒ Verdadero ☐ Falso

Solución Al quitar el nodo 4 se pierde la simetría de la estructura y por tanto la cantidad mínima de grados de libertad a resolver es $2 + 2 = 4$.

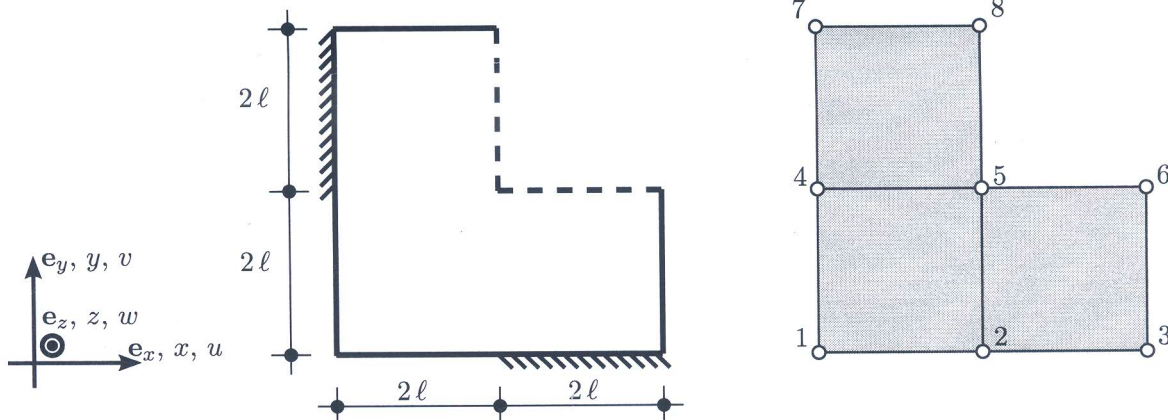
- (c) [4 puntos] De solicitar lo mismo que en la parte a) del desarrollo para el siguiente esquema de apoyos y cargas la solución sería la misma que la obtenida en esa parte del desarrollo.



☒ Verdadero ☐ Falso

Solución Las cargas en los nodos 4 y 6 no producen desplazamientos ni afectan las reacciones en el nodo 1. Por lo anterior la afirmación es verdadera.

3. [34 puntos] Sea una losa cuyos lados miden $\ell = 2\text{ m}$, ver figura. Asumir que el material es hiperelástico y uniforme cuyo módulo de Young es $E = 30\text{ GPa}$ y el coeficiente de Poisson es $\nu = 0.2$. Sobre la losa actúa únicamente una carga de superficie $\mathbf{q} = -q\mathbf{e}_z$, donde $q = 20\text{ kN/m}^2$. El espesor de la losa es uniforme $t = 0.20\text{ m}$. Los bordes 2-3 y 4-7 están empotrados, los bordes 1-2, 1-4, 3-6 y 7-8 están apoyados, y los bordes 5-6 y 5-8 son libres.



Desarrollo En todas las partes se debe utilizar el MEF y elementos de losa de Kirchhoff de 4 nodos.

- (a) [5 puntos] En lo que sigue se pide justificar su respuesta en cada caso. Para la estructura de la figura y la malla presentada se pide indicar:
- [1 punto] Los grados de libertad de la estructura sin considerar simetría ni las restricciones cinemáticas.
 - [1 punto] Los grados de libertad libres de la estructura sin considerar simetría pero si las restricciones cinemáticas.
 - [3 puntos] La cantidad mínima de grados de libertad libres considerando la simetría y las restricciones cinemáticas.

Solución i) La cantidad de grados de libertad total de la malla es $8 \cdot 3 = 24$.

ii) Se debe restar 3 grados de libertad por cada nodo que esta empotrado, por tanto: $24 - 4 \cdot 3 = 12$. Luego se deben restar los grados de libertad w_1 , w_6 y w_8 por estar restringidos por los apoyos, por tanto se tienen $12 - 3 = 9$. Por ser elementos de Kirchhoff se tiene que en los apoyos el giro paralelo al apoyo es nulo, esto es $\theta_t = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ rad donde t es la coordenada sobre el apoyo. Por lo anterior es posible decir que: $\theta_{x,1}$, $\theta_{y,1}$, $\theta_{y,6}$ y $\theta_{x,8}$ son nulos y consecuentemente la cantidad de grados de libertad libres es: $9 - 4 = 5$.

iii) Si dividimos la losa por el eje de simetría 1-5 se tiene que el giro $\theta_{x,6} = \theta_{y,8}$ y que $\theta_{x,5} = \theta_{y,5}$, consecuentemente los grados de libertad libres son: $5 - 2 = 3$. En resumen los grados de libertad libres son:

$$w_5, \theta_{x,5} \text{ y } \theta_{x,6},$$

donde los demás grados de libertad son nulos excepto por:

$$\theta_{y,5} = \theta_{x,5}, \text{ y } \theta_{y,8} = \theta_{x,6}.$$



- (b) [7 puntos] Obtener el sistema de ecuaciones reducido que permite obtener las incógnitas cinemáticas del problema de la estructura.

Solución Sin considerar las condiciones de simetría el sistema reducido es:

$$\mathbf{K} = \frac{D}{30\ell} \begin{pmatrix} -\frac{9(2\nu-27)}{\ell^2} & -\frac{3(4\nu+11)}{144-24\nu} & -\frac{3(4\nu+11)}{-30\nu} & -\frac{3(\nu-11)}{2\nu+18} & -\frac{3(\nu-11)}{\ell} \\ & \ell & \ell & \ell & 0 \\ & & 144-24\nu & 0 & 2\nu+18 \\ \text{Sim.} & & & 48-8\nu & 0 \\ & & & & 48-8\nu \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$, siendo

$$\mathbf{U} = (w_5 \quad \theta_{x,5} \quad \theta_{y,5} \quad \theta_{x,6} \quad \theta_{y,8})^T,$$

$$\mathbf{F} = -q\ell^2 (3 \quad -\ell/3 \quad -\ell/3 \quad -\ell/3 \quad -\ell/3)^T.$$

De considerar las restricciones de la simetría se obtiene un sistema reducido de 3×3 :

$$\frac{D}{30\ell} \begin{pmatrix} -\frac{9(2\nu-27)}{\ell} & -24\nu-66 & 66-6\nu \\ -12\nu-33 & -18\ell(3\nu-8) & 2\ell(\nu+9) \\ 33-3\nu & 2\ell(\nu+9) & -8\ell(\nu-6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_5 \\ \theta_{x,5} \\ \theta_{x,6} \end{pmatrix} = -q\ell^2 \begin{pmatrix} 3 \\ -\ell/3 \\ -\ell/3 \end{pmatrix}.$$

- (c) [5 puntos] Asumiendo conocida la solución de la parte anterior se pide obtener la reacción en el nodo 1: $\mathbf{R}_1 = (R_{z,1}, R_{\theta_{x,1}}, R_{\theta_{y,1}})^T$.

Solución Con la ecuación del elemento 1-2-5-4 se puede obtener un cuarto de la reacción en el pilar:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} R_{z,1} \\ R_{\theta_{x,1}} \\ R_{\theta_{y,1}} \end{pmatrix} = \frac{D}{30\ell} \begin{pmatrix} -\frac{6\nu+9}{\ell} & 3\nu+12 & 3\nu+12 \\ -3\nu-12 & -2\ell(\nu-6) & 0 \\ -3\nu-12 & 0 & -2\ell(\nu-6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_5 \\ \theta_{x,5} \\ \theta_{y,5} \end{pmatrix} + q\ell^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \ell/3 \\ \ell/3 \end{pmatrix},$$

y si se considera la restricción de simetría se tiene:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} R_{z,1} \\ R_{\theta_{x,1}} \\ R_{\theta_{y,1}} \end{pmatrix} = \frac{D}{30\ell} \begin{pmatrix} -\frac{6\nu+9}{\ell} & 6\nu+24 \\ -3\nu-12 & -2\ell(\nu-6) \\ -3\nu-12 & -2\ell(\nu-6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_5 \\ \theta_{x,5} \end{pmatrix} + q\ell^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \ell/3 \\ \ell/3 \end{pmatrix}$$

- (d) [5 puntos] ¿Qué tamaño tendría el sistema reducido si no existieran los bordes apoyados y fueran bordes libres?

Solución Si no existieran los bordes apoyados y fueran libres entonces los desplazamientos verticales w_1 , w_6 y w_8 no serían conocidos. Además no se tendría la restricción de giro por ser losa de Kirchhoff y $\theta_{x,1}$, $\theta_{y,1}$, $\theta_{y,6}$ y $\theta_{x,8}$ no serían conocidos. Nuevamente por la simetría según 1-5 se puede decir que $\theta_{y,1} = \theta_{x,1}$, $\theta_{y,5} = \theta_{x,5}$, $\theta_{x,8} = \theta_{y,6}$, $\theta_{y,8} = \theta_{x,6}$ y $w_8 = w_6$. De todo lo anterior la cantidad de grados de libertad libres serían: $24 - 4 \cdot 3 - 5 = 7$, siendo ellos:

$$w_1, \theta_{x,1}, w_5, \theta_{x,5}, w_6, \theta_{x,6} \text{ y } \theta_{y,6},$$

donde los demás grados de libertad son nulos excepto por:

$$\theta_{y,1} = \theta_{x,1}, \quad \theta_{y,5} = \theta_{x,5}, \quad \theta_{x,8} = \theta_{y,6}, \quad \theta_{y,8} = \theta_{x,6} \text{ y } w_8 = w_6.$$

Verdadero / Falso:

- (a) [4 puntos] De utilizar elementos de Kirchhoff en una losa cuya malla tiene n nodos donde se verifica que $w_i = 0 \text{ m } \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$, entonces el desplazamiento $w(x, y) = 0 \text{ m}$ para todo punto (x, y) de la losa.



Verdadero



Falso

Solución El desplazamiento w depende de los giros de la estructura por ser elementos de Kirchhoff, los cuales desconocemos como son, pudiendo ser no nulos. Por lo anterior la afirmación es falsa.

- (b) [4 puntos] El elemento finito que se desprende de la teoría de losa de Reissner-Mindlin tiene un efecto de bloqueo y por tal motivo se incluye el parámetro α en su formulación para modificar el cortante.

☐ Verdadero ☒ Falso

Solución Este elemento finito si tiene un efecto de bloqueo pero la utilización del parámetro α para modificar el cortante no tiene que ver con ese efecto, ver apunte del curso. De lo anterior la afirmación es falsa.

- (c) [4 puntos] Al igual que en la teoría de Kirchhoff, en la teoría de losa de Reissner-Mindlin no se considera la deformación por cortante.

☐ Verdadero ☒ Falso

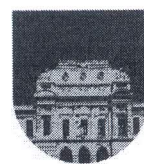
Solución En la teoría de losa de Reissner-Mindlin si se considera la deformación por cortante, ver apunte del curso. De lo anterior la afirmación es falsa.



Hoja de fórmulas - Examen - 10 de diciembre de 2025

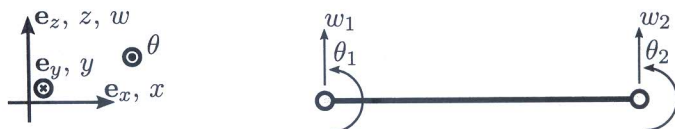
Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (2380)

Ingeniería Civil - Plan 2021 - Grupo: Informática

UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

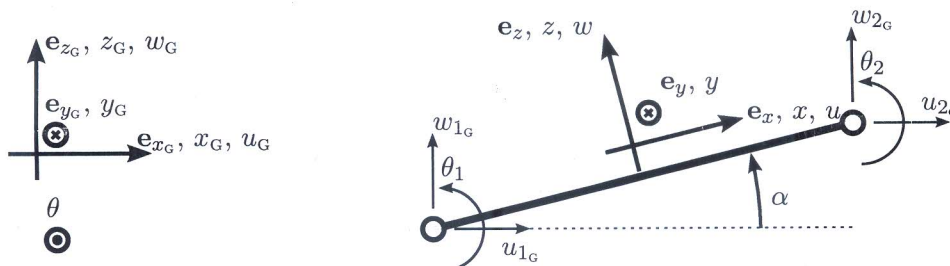
**Fórmulas para el Examen de
Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (2380)**
10 de diciembre de 2025

Elemento de viga de Euler-Bernoulli de dos nodos.



$$\mathbf{U}^{\oplus} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{\oplus} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ \text{---} & \text{---} & 12 & -6\ell \\ \text{Sim.} & & & 4\ell^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}^{\oplus} = \frac{1}{30\ell} \begin{pmatrix} 36 & 3\ell & -36 & 3\ell \\ & 4\ell^2 & -3\ell & -\ell^2 \\ \text{---} & \text{---} & 36 & -3\ell \\ \text{Sim.} & & & 4\ell^2 \end{pmatrix}$$

Elemento de pórtico 2D de Euler-Bernoulli de dos nodos.



El cambio de coordenadas y el sistema de ecuaciones en coordenadas globales es:

$$\mathbf{K}_G^{\oplus} \mathbf{U}_G^{\oplus} = \mathbf{F}_G^{\oplus} \quad \text{siendo} \quad \mathbf{U}_G^{\oplus} = (u_{1G} \ w_{1G} \ \theta_1 \ u_{2G} \ w_{2G} \ \theta_2)^T,$$

$$\text{donde} \quad \mathbf{U}_G^{\oplus} = \mathbf{Q} \mathbf{U}_L^{\oplus} \quad \text{con} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_G^{\oplus} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & -6\ell s & -K_1 & -K_2 & -6\ell s \\ & K_3 & 6\ell c & -K_2 & -K_3 & 6\ell c \\ & & 4\ell^2 & 6\ell s & -6\ell c & 2\ell^2 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & K_1 & K_2 & 6\ell s \\ \text{Sim.} & & & & K_3 & -6\ell c \\ & & & & & 4\ell^2 \end{pmatrix},$$

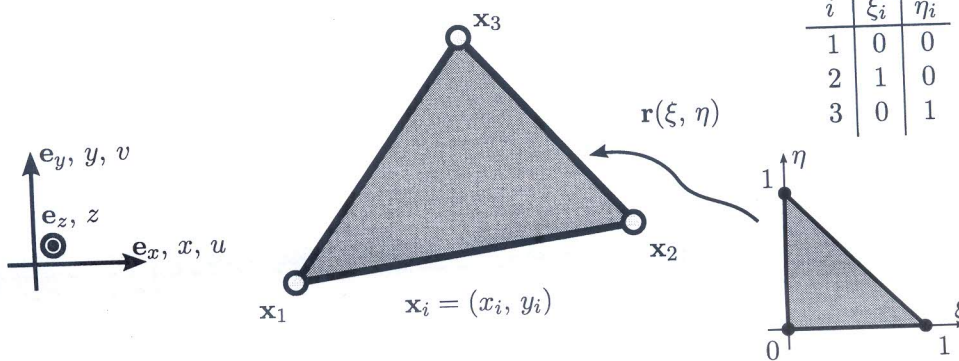
$$K_1 = \frac{A\ell^2}{I} c^2 + 12s^2, \quad K_2 = \left(\frac{A\ell^2}{I} - 12 \right) cs, \quad K_3 = \frac{A\ell^2}{I} s^2 + 12c^2,$$

$$s = \sin(\alpha), \quad c = \cos(\alpha).$$

$$\mathbf{f} = f_z \mathbf{e}_{zG}, \quad \mathbf{F}_{f,G}^{\oplus} = \frac{f_z \ell}{2} (-s \ c \ \ell/6 \ -s \ c \ -\ell/6)^T \quad \text{donde} \quad [f_z] = [\text{N}]/[\text{m}].$$

10/13

Elemento triangular de tres nodos (CST).



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} \mathbf{U}^\circ, \quad N_i = \begin{pmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \end{pmatrix},$$

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad N_2(\xi, \eta) = \xi, \quad N_3(\xi, \eta) = \eta, \quad N_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y),$$

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, & a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3, & a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \\ b_1 &= y_2 - y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, \\ c_1 &= x_3 - x_2, & c_2 &= x_1 - x_3, & c_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned}$$

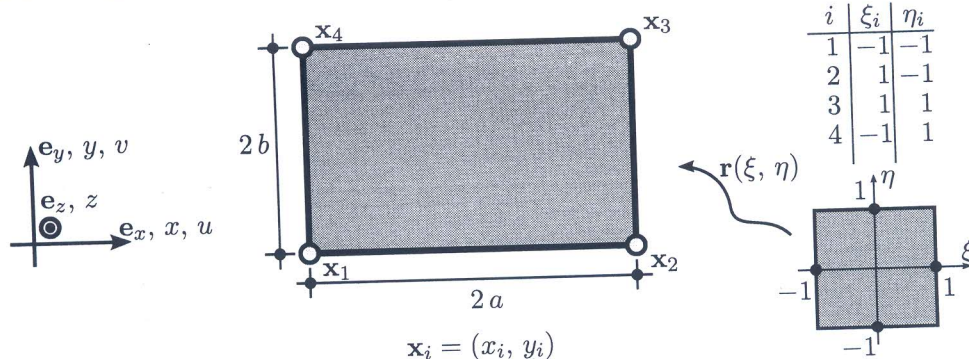


$$\mathbf{K}^\circ \mathbf{U}^\circ = \mathbf{F}^\circ, \quad \mathbf{K}^\circ = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^\circ = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}^T,$$

donde $\mathbf{K}_{ij} = \frac{t}{4A} \begin{pmatrix} b_i b_j C_{11} + c_i c_j C_{33} & b_i c_j C_{12} + c_i b_j C_{33} \\ c_i b_j C_{12} + b_i c_j C_{33} & c_i c_j C_{22} + b_i b_j C_{33} \end{pmatrix}$ y C_{ij} son las entradas de:

$$\mathbf{C} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \bar{\nu}}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \text{para EPT: } \bar{E} = E, & \bar{\nu} = \nu, \\ \text{para EPD: } \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}, & \bar{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu}. \end{cases}$$

Elemento rectangular de cuatro nodos.



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{pmatrix} \mathbf{U}^\oplus, \quad N_i = \begin{pmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 (x_1 + x_2) + a \xi \\ 0.5 (y_1 + y_4) + b \eta \end{pmatrix},$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4 \xi_i \eta_i} (\xi + \xi_i) (\eta + \eta_i), \quad \mathbf{U}^\oplus = (u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4)^T.$$

$$\mathbf{K}^\oplus \mathbf{U}^\oplus = \mathbf{F}^\oplus, \quad \mathbf{K}^\oplus = \frac{t}{12 A} \begin{pmatrix} 2a_{14} & a_{36} & d_{41} & b_{36} & -a_{14} & -a_{36} & d_{14} & b_{63} \\ & 2a_{25} & b_{63} & d_{25} & -a_{36} & -a_{25} & b_{36} & d_{52} \\ & & 2a_{14} & -a_{36} & d_{14} & b_{36} & -a_{14} & a_{36} \\ & & & 2a_{25} & b_{63} & d_{52} & a_{36} & -a_{25} \\ & & & & 2a_{14} & a_{36} & d_{41} & b_{36} \\ & & & & & 2a_{25} & b_{63} & d_{25} \\ & & \text{Sim.} & & & & 2a_{14} & -a_{36} \\ & & & & & & & 2a_{25} \end{pmatrix}$$

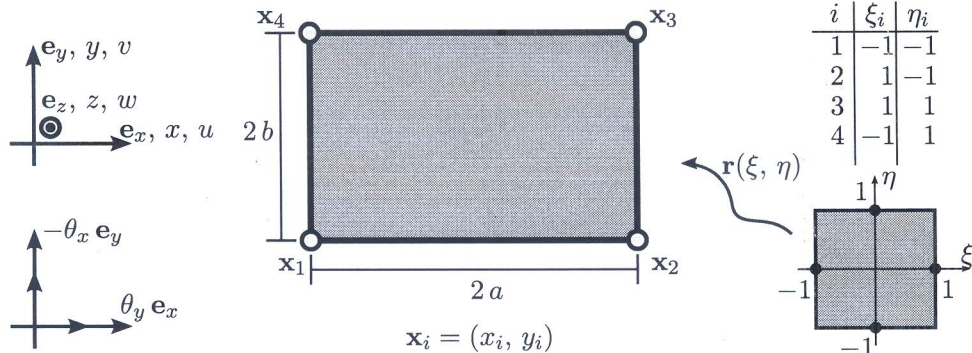
$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_i + a_j, & b_{ij} &= a_i - a_j, & d_{ij} &= a_i - 2a_j, \\ a_1 &= 8b^2 C_{11}, & a_2 &= 8a^2 C_{22}, & a_3 &= 3AC_{12}, \\ a_4 &= 8a^2 C_{33}, & a_5 &= 8b^2 C_{33}, & a_6 &= 3AC_{33} \end{aligned}$$



donde A es el área del elemento y C_{ij} son las entradas de:

$$\mathbf{C} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \bar{\nu}}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \text{para EPT: } \bar{E} = E, & \bar{\nu} = \nu, \\ \text{para EPD: } \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}, & \bar{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu^2}. \end{cases}$$

Elemento rectangular de losa de Kirchhoff de 4 nodos (MZC).



$$w = \mathbf{N}_w \mathbf{U}^\oplus, \quad \mathbf{N}_w = \begin{pmatrix} N_{w,1} & N_{w,2} & N_{w,3} & N_{w,4} \end{pmatrix}, \quad N_{w,i} = \begin{pmatrix} N_i & a \bar{N}_i & b \bar{\bar{N}}_i \end{pmatrix},$$

donde utilizando que $\mathbf{r}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 (x_1 + x_2) + a \xi \\ 0.5 (y_1 + y_4) + b \eta \end{pmatrix}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \xi^2 - \eta^2), \\ \bar{N}_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{8} (\xi^2 - 1) (\xi + \xi_i) (1 + \eta_i \eta), \quad \bar{\bar{N}}_i(\xi, \eta) = \frac{1}{8} (\eta^2 - 1) (\eta + \eta_i) (1 + \xi_i \xi) \quad y \\ \mathbf{U}^\oplus &= (w_1 \ \theta_{x,1} \ \theta_{y,1} \ w_2 \ \theta_{x,2} \ \theta_{y,2} \ w_3 \ \theta_{x,3} \ \theta_{y,3} \ w_4 \ \theta_{x,4} \ \theta_{y,4})^T. \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}^\oplus \mathbf{U}^\oplus = \mathbf{F}^\oplus, \quad \mathbf{K}^\oplus = D (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \quad \text{con} \quad D = \frac{E t^3}{12 (1 - \nu^2)},$$

12/13

$$K_1 = \frac{b}{6a^3} \begin{pmatrix} 6 & 6a & 0 & -6 & 6a & 0 & -3 & 3a & 0 & 3 & 3a & 0 \\ 8a^2 & 0 & -6a & 4a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 & 3a & 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 6 & -6a & 0 & 3 & -3a & 0 & -3 & -3a & 0 \\ & 8a^2 & 0 & -3a & 4a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & \text{Simétrica} & & 6 & -6a & 0 & -6 & -6a & 0 \\ & & & & 8a^2 & 0 & 6a & 4a^2 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & 6 & 6a & 0 \\ & & & & & 8a^2 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \frac{a}{6b^3} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6b & 3 & 0 & 3b & -3 & 0 & 3b & -6 & 0 & 6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8b^2 & 3b & 0 & 4b^2 & -3b & 0 & 2b^2 & -6b & 0 & 4b^2 & 0 \\ \hline & 6 & 0 & 6b & -6 & 0 & 6b & -3 & 0 & 3b \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 8b^2 & -6b & 0 & 4b^2 & -3b & 0 & 2b^2 \\ \hline & & \text{Simétrica} & & 6 & 0 & -6b & 3 & 0 & -3b \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 8b^2 & -3b & 0 & 4b^2 \\ \hline & & & & & 6 & 0 & -6b \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 8b^2 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \frac{\nu}{2ab} \begin{pmatrix} 1 & a & b & -1 & 0 & -b & 1 & 0 & 0 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 2ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & -a & b & -1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -2ab & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & \text{Simétrica} & & 1 & -a & -b & -1 & 0 & b \\ & & & & 0 & 2ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & 1 & a & -b \\ & & & & & 0 & -2ab \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_4 = \frac{(1-\nu)}{30ab} \begin{pmatrix} 21 & 3a & 3b & -21 & 3a & -3b & 21 & -3a & -3b & -21 & -3a & 3b \\ 8a^2 & 0 & -3a & -2a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 & -3a & -8a^2 & 0 \\ 8b^2 & -3b & 0 & -8b^2 & 3b & 0 & 2b^2 & -3b & 0 & -2b^2 \\ \hline & 21 & -3a & 3b & -21 & 3a & 3b & 21 & -3a & -3b \\ & 8a^2 & 0 & 3a & -8a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 \\ & 8b^2 & -3b & 0 & -2b^2 & 3b & 0 & 2b^2 \\ \hline & & \text{Simétrica} & & 21 & -3a & -3b & -21 & -3a & 3b \\ & & & & 8a^2 & 0 & 3a & -2a^2 & 0 \\ & & & & 8b^2 & 3b & 0 & -8b^2 \\ \hline & & & & & 21 & 3a & -3b \\ & & & & & 8a^2 & 0 \\ & & & & & 8b^2 \end{pmatrix}$$

Si $f = f_z e_z$ es una carga de superficie se tiene que:

$$F_{f,L}^{\odot} = ab f_z \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{3} & \frac{b}{3} & 1 & -\frac{a}{3} & \frac{b}{3} & 1 & -\frac{a}{3} & -\frac{b}{3} & 1 & \frac{a}{3} & -\frac{b}{3} \end{pmatrix}^T.$$

