

Examen - 25 de febrero de 2025

Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (2380)

Ingeniería Civil - Plan 2021

Grupo: Informática


 UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

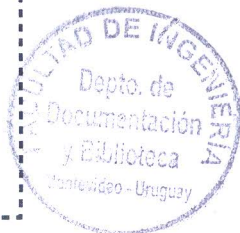
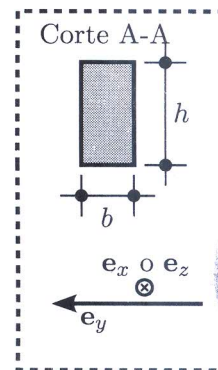
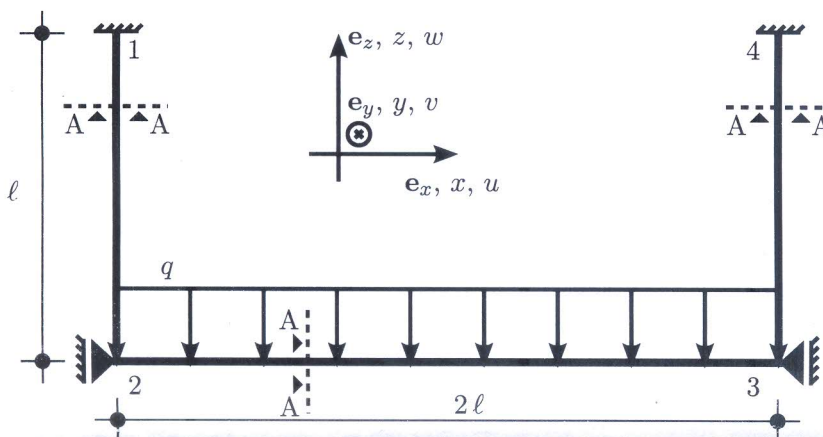
Examen de
Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (2380)
25 de febrero de 2025

Tabla de puntaje (sólo para el uso docente)

Ejercicio	1	2	3	Total
Puntos:	36	30	34	100
Resultado				

Aclaración: Todas las hojas entregadas deben estar separadas por ejercicio, numeradas y deben tener nombre, apellido y documento de identidad. Respuestas incorrectas de verdadero/falso suman de forma negativa la mitad de los puntos que vale la pregunta y las preguntas múltiple opción suman -1 punto.

1. [36 puntos] A un estudio de cálculo se le pide dimensionar un pórtico que sea capaz de sostener una carga $-q \mathbf{e}_z$ como se muestra en la figura. Asumir que todos los tramos son de un material con módulo de Young E , coeficiente de Poisson ν , área de la sección transversal A e inercia I . Los nodos 1 y 4 están empotrados, mientras que los nodos 2 y 3 solo tienen restringido el desplazamiento horizontal. Considerar que $[q] = [\text{N}]/[\text{m}]$.



Desarrollo En todas las partes se debe utilizar un elemento de Euler-Bernoulli de dos nodos por tramo y el MEF para la resolución. *Sugerencia: utilizar $R = \frac{A \ell^2}{I}$ para la resolución.*

- (a) [7 puntos] Obtener el sistema de ecuaciones reducido de tamaño 2×2 para la estructura. Los elementos en esta estructura son el 1-2, el 2-3 y el 3-4. *Sugerencia: definir $L = 2\ell$ y dejar todo en función de L .*

Solución En esta estructura las incógnitas, sin considerar la simetría, son w_2 , θ_2 , w_3 y θ_3 . Por la simetría se tiene que $w_3 = w_2$ y $\theta_3 = -\theta_2$. Definiendo $R = AL^2/I$ se tiene que el sistema sin considerar la simetría es:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 + 2R & 6L & -12 & 6L \\ & 12L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{Sim.} & & 12 + 2R & -6L \\ & & & 12L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = -\frac{qL}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ L/6 \\ 1 \\ -L/6 \end{pmatrix},$$

1/11

donde utilizando la simetría se tiene:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 2R & 0 \\ 0 & 10L^2 \\ 2R & 0 \\ 0 & -10L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = -\frac{qL}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ L/6 \\ 1 \\ -L/6 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que la cuarta ecuación es opuesta a la segunda y la tercera es igual a la primera, por tanto:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 2R & 0 \\ 0 & 10L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = -\frac{qL}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ L/6 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } R = \frac{AL^2}{I}.$$

- (b) [6 puntos] Obtener la reacción, $\mathbf{R}_4 = (R_{x,4}, R_{z,4}, R_{\theta,4})^T$, en el empotramiento del nodo 4. Asumir como conocidos los resultados de la parte anterior.

Solución De la ecuación del sistema global para el elemento 3-4 se tiene que las ecuaciones para obtener la reacción del nodo 4 son:

$$\mathbf{R}_4 = \begin{pmatrix} R_{x,4} \\ R_{z,4} \\ R_{\theta,4} \end{pmatrix} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} 0 & 6\ell \\ -R & 0 \\ 0 & 2\ell^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } R = \frac{A\ell^2}{I}.$$

- (c) [7 puntos] Suponga que se considera el peso propio $\mathbf{b} = -\rho g \mathbf{e}_z$. ¿Sería conveniente utilizar elementos de 3 nodos en alguno de los tramos? ¿En cuáles si y en cuáles no? Justifique su respuesta.

Solución De la teoría de Euler-Bernoulli, muchas veces conocida como teoría de vigas, se obtiene (para vigas con material y sección uniforme) la ecuación diferencial:

$$EI \frac{\partial^4 w_{EB}}{\partial x^4} = -q(x),$$

donde q es una carga perpendicular a la viga y opuesta al desplazamiento vertical w . De dicha ecuación se obtiene que si $q = 0$ entonces w_{EB} es cúbica, mientras que si $q \neq 0$ es uniforme se tiene que el desplazamiento w_{EB} es de orden 4. El elemento finito de Euler-Bernoulli de 2 nodos utiliza funciones de interpolación cúbicas para w . El peso propio se puede modelar como una carga uniforme, con lo cual para la viga 2-3 tiene un rol similar al de la carga allí aplicada y por tanto si es conveniente aumentar el orden de interpolación. El elemento de 3 nodos de Euler-Bernoulli utiliza funciones de interpolación de orden 5 con lo cual, en principio, es una aproximación adecuada para funciones de orden 4.

En los pilares la carga del peso propio no produce flexión, ya que actúa paralelo al eje del pilar, sin embargo si que afecta la solución que se obtiene del elemento de barra. El elemento de 2 nodos de Euler-Bernoulli utiliza interpolación lineal para el desplazamiento axial. Sin embargo, por la ecuación de Navier:

$$E\Omega \frac{\partial^2 u_{Navier}}{\partial x^2} + b(x) = 0,$$

sabemos que si la carga b no es nula el desplazamiento u_{Navier} no es lineal. En el caso de b uniforme (como el peso propio) se tiene que u_{Navier} es parabólica y por tanto es conveniente aumentar el orden de interpolación. El elemento de 3 nodos de Euler-Bernoulli utiliza interpolación cuadrática para el desplazamiento axial.

En conclusión: si, sería conveniente utilizar elementos de 3 nodos en todos los tramos.



- (d) [4 puntos] Escriba el desplazamiento vertical, según $\mathbf{e}_z$, para cualquier punto del elemento 1-2. Asumir como centro de coordenadas el nodo 1: $(x_1, z_1) = (0 \text{ m}, 0 \text{ m})$.

Solución El desplazamiento vertical del elemento 1-2 es:

$$w(y) = -\frac{z}{\ell} w_2, \quad \text{con } z \in [-\ell, 0].$$

Verdadero / Falso:

- (a) [4 puntos] Si $\ell \gg h$ es recomendable utilizar elementos de Timoshenko, sin importar el tipo de integración que se utilice.

☐ Verdadero ☒ Falso

Solución Si $\ell \gg h$ la viga es esbelta con lo cual el efecto de bloqueo por cortante es importante si se utiliza el elemento de Timoshenko con integración exacta. Por lo anterior **no** es recomendable utilizar integración exacta y por tanto la expresión es falsa.

- (b) [4 puntos] Usando un elemento de Euler-Bernoulli de 2 nodos por tramo y sin considerar la simetría del problema, se obtienen cuatro frecuencias al analizar la estructura.

☒ Verdadero ☐ Falso

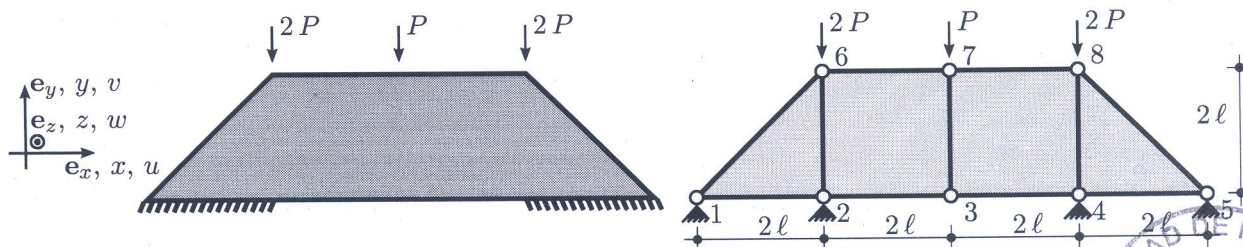
Solución Por lo ya visto en la parte a) del desarrollo, el sistema sin considerar la simetría es de 4×4 con lo cual se obtendrían cuatro frecuencias naturales y consecuentemente la expresión es verdadera.

- (c) [4 puntos] Suponga que la carga q depende del tiempo de forma lineal durante los primeros 2 minutos y luego es nula. Para que no haya resonancia debemos verificar que la carga máxima q no supere un cierto valor $q_{\text{máx}}$ a determinar.

☐ Verdadero ☒ Falso

Solución Esto no es lo que se debe verificar para que no exista resonancia. En particular para que exista resonancia la carga externa debe ser periódica.

2. [30 puntos] A efectos de realizar un primer dimensionado estructural de un puente se decide adoptar el esquema planteado en la figura. Se asume que el ancho del puente (según eje $\mathbf{e}_z$) es mucho mayor a las restantes dimensiones. Asuma que todo el puente es de material de módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν . En función de las características de la cimentación se consideran solamente apoyados los tramos inferiores entre nodos 1-2 y 4-5. El resto de los nodos no presentan restricciones de desplazamiento. Sobre el puente actúan cargas como se presenta en la figura.



3/11

Solución Debido a que la dimensión en e_z es mucho mayor que en las otras dos se puede asumir estado plano de deformaciones (EPD). Por lo anterior es necesario redefinir los parámetros materiales: $E = E/(1 - \nu^2)$ y $\nu = \nu/(1 - \nu)$.

Desarrollo

- (a) [5 puntos] Utilizando los elementos bidimensionales que se muestran en la figura, ¿cuál sería el tamaño del sistema reducido sin considerar la simetría del problema? ¿y considerando la simetría?

Solución Sin considerar simetría existen 4 nodos con dos grados de libertad libre (nodos 3, 6, 7 y 8) y todos los demás tienen sus grados de libertad restringidos. Por lo anterior el sistema es de tamaño 8×8 .

Si se considera la simetría del eje 3-7 se tiene que $u_6 = -u_8$ y $v_6 = v_8$. Además $u_3 = u_7 = 0$ m ya que los nodos 3 y 7 están en el eje de simetría. Por todo lo anterior quedan únicamente 4 grados de libertad libres: v_3, u_6, v_6 y v_7 . De lo anterior se tiene que el sistema es de tamaño 4×4 .

- (b) [8 puntos] Considerando la simetría del problema se pide obtener el sistema reducido.

Solución Para obtener el sistema reducido se considera la mitad izquierda de la estructura imponiendo apoyos fijos según e_x para los nodos 3 y 7. Además en el nodo 7 actúa la mitad de la carga. El sistema de ecuaciones reducido es $\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$ donde:

$$\mathbf{K} = \frac{t}{12} \begin{pmatrix} 4(C_{22} + C_{33}) & 3(C_{12} + C_{33}) & -2(C_{22} + C_{33}) & 2(C_{33} - 2C_{22}) \\ & 4C_{11} + 10C_{33} & -3(C_{12} + C_{33}) & 3(C_{33} - C_{12}) \\ & & 4C_{33} + 10C_{22} & 2(C_{22} - 2C_{33}) \\ \text{Sim.} & & & 4(C_{22} + C_{33}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U} = (v_3 \ u_6 \ v_6 \ v_7)^T \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = (0 \ 0 \ -2P \ -P/2)^T.$$

Otra forma de ordenar la solución es:

$$\mathbf{K} = \frac{t}{12} \begin{pmatrix} 4(C_{22} + C_{33}) & 2(C_{33} - 2C_{22}) & 3(C_{12} + C_{33}) & -2(C_{22} + C_{33}) \\ & 4(C_{22} + C_{33}) & 3(C_{33} - C_{12}) & 2(C_{22} - 2C_{33}) \\ & & 4C_{11} + 10C_{33} & -3(C_{12} + C_{33}) \\ \text{Sim.} & & & 4C_{33} + 10C_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U} = (v_3 \ v_7 \ u_6 \ v_6)^T \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = (0 \ -P/2 \ 0 \ -2P)^T.$$

- (c) [5 puntos] Asuma como conocidas las incógnitas cinemáticas de la malla utilizada y obtenga la reacción vertical, $R_{y,1}$, del nodo 1.

Solución La reacción vertical en el nodo 1 es:

$$R_{y,1} = -\frac{t C_{33} u_6}{2}.$$

4/11

Verdadero / Falso:

- (a) [4 puntos] Las deformaciones en el elemento cuadrilátero conformado por los nodos 2-3-7-6, obtenidas a partir de la matriz **B** que contiene las derivadas de las funciones de interpolación, son uniformes en todo el elemento.

☒ Falso ☐ Verdadero

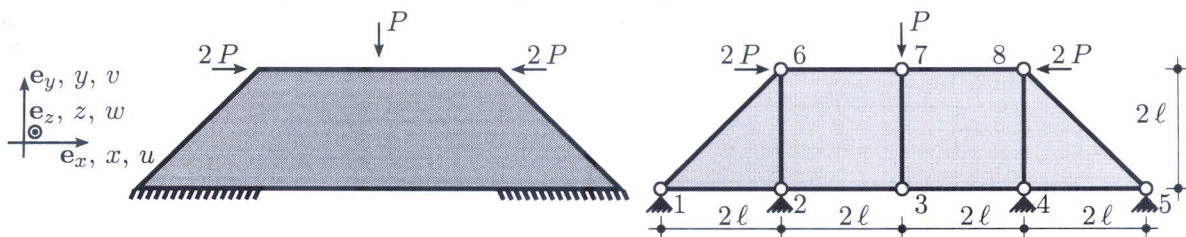
Solución En el elemento cuadrilátero de 4 nodos las funciones de interpolación son bilineales y por tanto las matriz **B** no es uniforme. Consecuentemente las deformaciones del elemento no son uniformes.

- (b) [4 puntos] En caso de eliminar el apoyo en ambos sentidos en el nodo 4, el mínimo número de grados de libertad a determinar para resolver el problema es 6.

☐ Falso ☐ Verdadero

Solución Al quitar el nodo 4 se pierde la simetría de la estructura y por tanto la cantidad mínima de grados de libertad a resolver es $5 \times 2 = 10$.

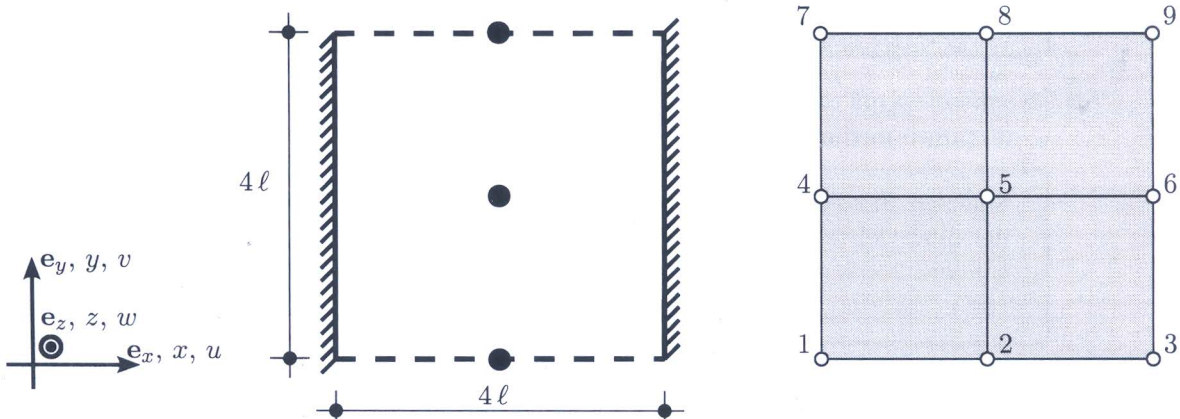
- (c) [4 puntos] Ante el siguiente esquema de apoyos y cargas la cantidad de grados de libertad a determinar es igual a la de la configuración original.



☐ Falso ☒ Verdadero

Solución Esta afirmación es verdadera ya que se mantiene la misma simetría que la configuración original.

3. [34 puntos] Sea una losa cuyos lados miden $4\ell = 8\text{ m}$, ver figura. Asumir que el material es hiperelástico y uniforme cuyo módulo de Young es $E = 30\text{ GPa}$ y el coeficiente de Poisson es $\nu = 0.2$. Sobre la losa actúa únicamente una carga de superficie $\mathbf{q} = -q\mathbf{e}_z$, donde $q = 20\text{ kN/m}^2$. El espesor de la losa es uniforme $t = 0.20\text{ m}$. Los bordes 1-7 y 3-9 están empotrados, y los bordes 1-3 y 7-9 son libres. En el eje 2-8 existen tres pilares (nodos 2, 5 y 8) que están articulados e imponen descenso nulo a la losa.



Desarrollo En todas las partes se debe utilizar el MEF y elementos de losa de Kirchhoff de 4 nodos.

- (a) [7 puntos] Obtener las incógnitas cinemáticas de la estructura de la figura.

Solución Por las condiciones de contorno se tiene que $w_i = 0$ m para $i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $\theta_{x,i} = \theta_{y,i} = 0$ rad para $i = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$. Por la simetría con el eje 2-8 y por pertenecer los nodos 2, 5 y 8 a dicho eje se tiene que $\theta_{x,i} = 0$ m para $i = \{2, 5, 8\}$. Análogo a lo anterior se tiene que $\theta_{y,5} = 0$ m. De todo lo anterior las únicas incógnitas es $\theta_{y,2}$ ya que por simetría y $\theta_{y,8} = -\theta_{y,2}$. El sistema reducido y la solución es:

$$\frac{Et^3(6-\nu)}{15(1-\nu^2)}\theta_{y,2} = -q\ell^3 \Rightarrow \theta_{y,2} = -1.66 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

- (b) [7 puntos] Obtener las reacción según e_z en el pilar 5: $R_{z,5}$.

Solución Con la ecuación del elemento 1-2-5-4 se puede obtener un cuarto de la reacción en el pilar:

$$\frac{R_{z,5}}{4} = \frac{Et^3(-11+\nu)}{120(1-\nu^2)\ell}\theta_{y,2} + q\ell^2,$$

y por tanto:

$$R_{z,5} = 394.48 \text{ kN.}$$

- (c) [7 puntos] Obtener la reacción, $\mathbf{R}_1 = (R_{z,1}, R_{\theta_{x,1}}, R_{\theta_{y,1}})^T$, en el nodo 1.

Solución

$$\begin{pmatrix} R_{z,1} \\ R_{\theta_{x,1}} \\ R_{\theta_{y,1}} \end{pmatrix} = \frac{Et^3}{90(1-\nu^2)\ell} \begin{pmatrix} 3-3\nu \\ 0 \\ 3\ell+2\ell\nu \end{pmatrix} \theta_{y,2} + q\ell^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \ell/3 \\ \ell/3 \end{pmatrix},$$

y sustituyendo se tiene

$$\begin{pmatrix} R_{z,1} \\ R_{\theta_{x,1}} \\ R_{\theta_{y,1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74.48 \text{ kN} \\ 53.33 \text{ kNm} \\ 37.70 \text{ kNm} \end{pmatrix}.$$

- (d) [5 puntos] ¿Qué tamaño tendría el sistema reducido si no existieran los pilares exteriores? (si el del punto medio de la losa).

Solución Si no existieran esos pilares se agregaría únicamente el desplazamiento vertical del pilar del nodo 2 (ya que $w_8 = w_2$ por simetría) y en conclusión el sistema es de tamaño 2×2 . Se considera válida la respuesta de que el sistema reducido es de 3×3 por agregar w_2 y w_8 sin considerar la simetría.

Verdadero / Falso:

6/11

- (a) [4 puntos] El elemento finito que se desprende de la teoría de losa de Reissner-Mindlin nunca tiene un efecto de bloqueo.

☐ Verdadero ☒ Falso

Solución Falso, ver apunte del curso.

- (b) [4 puntos] En la teoría de losa de Reissner-Mindlin se considera la deformación por cortante.

☒ Verdadero ☐ Falso

Solución Verdadero, ver apunte del curso.

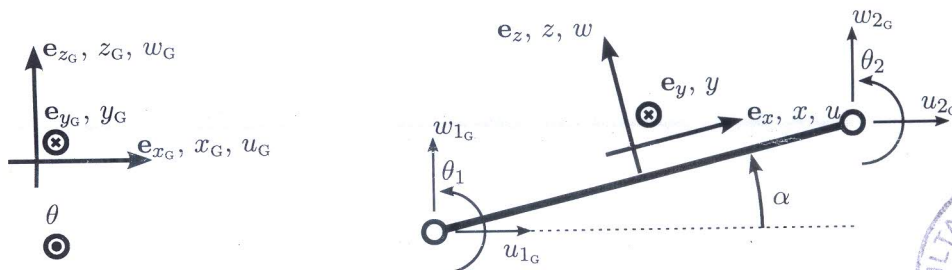


Hoja de fórmulas - Examen - 25 de febrero de 2025
 Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (2380)
 Ingeniería Civil - Plan 2021 - Grupo: Informática



Fórmulas para el Examen de
Métodos Computacionales Aplicados al Cálculo Estructural (2380)
 25 de febrero de 2025

Elemento de pórtico 2D de Euler-Bernoulli de dos nodos.



El campo de desplazamientos $\mathbf{u}$ en coordenadas locales es:

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{1,u} & 0 & 0 & N_{2,u} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,w} & \bar{N}_{1,w} \frac{\ell}{2} & 0 & N_{2,w} & \bar{N}_{2,w} \frac{\ell}{2} \end{pmatrix} \mathbf{U}_L^{\oplus},$$

$$N_{1,u}(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_{1,w}(\xi) = \frac{1}{4}(2-3\xi+\xi^3), \quad \bar{N}_{1,w}(\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi-\xi^2+\xi^3),$$

$$N_{2,u}(\xi) = \frac{1+\xi}{2}, \quad N_{2,w}(\xi) = \frac{1}{4}(2+3\xi-\xi^3), \quad \bar{N}_{2,w}(\xi) = \frac{1}{4}(-1-\xi+\xi^2+\xi^3).$$

El cambio de coordenadas y el sistema de ecuaciones en coordenadas globales es:

$$\mathbf{K}_G^{\oplus} \mathbf{U}_G^{\oplus} = \mathbf{F}_G^{\oplus} \quad \text{siendo} \quad \mathbf{U}_G^{\oplus} = (u_{1G} \quad w_{1G} \quad \theta_1 \quad u_{2G} \quad w_{2G} \quad \theta_2)^T,$$

$$\text{donde} \quad \mathbf{U}_G^{\oplus} = \mathbf{Q} \mathbf{U}_L^{\oplus} \quad \text{con} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_G^{\oplus} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & -6\ell s & -K_1 & -K_2 & -6\ell s \\ & K_3 & 6\ell c & -K_2 & -K_3 & 6\ell c \\ & & 4\ell^2 & 6\ell s & -6\ell c & 2\ell^2 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & & & K_1 & K_2 & -6\ell s \\ \text{Sim.} & & & & K_3 & -6\ell c \\ & & & & & 4\ell^2 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = \frac{A\ell^2}{I} c^2 + 12s^2,$$

$$K_2 = \left(\frac{A\ell^2}{I} - 12 \right) cs,$$

$$K_3 = \frac{A\ell^2}{I} s^2 + 12c^2,$$

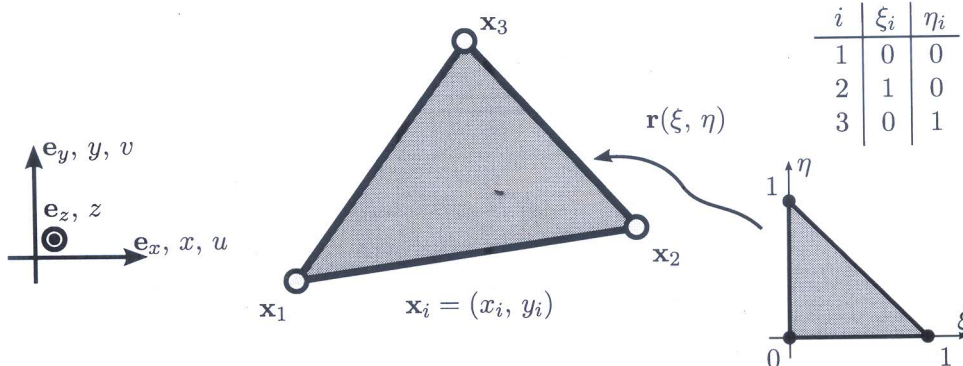
$$s = \sin(\alpha),$$

$$c = \cos(\alpha).$$

$$\mathbf{f} = f_z \mathbf{e}_{zG}, \quad \mathbf{F}_{f,G}^{\oplus} = \frac{f_z \ell}{2} (-s \quad c \quad \ell/6 \quad -s \quad c \quad -\ell/6)^T \quad \text{donde} \quad [f_z] = [N]/[m].$$

8/11

Elemento triangular de tres nodos (CST).



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} \mathbf{U}^e, \quad N_i = \begin{pmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \end{pmatrix},$$

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad N_2(\xi, \eta) = \xi, \quad N_3(\xi, \eta) = \eta, \quad N_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y),$$

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, & a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3, & a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \\ b_1 &= y_2 - y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, \\ c_1 &= x_3 - x_2, & c_2 &= x_1 - x_3, & c_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned}$$

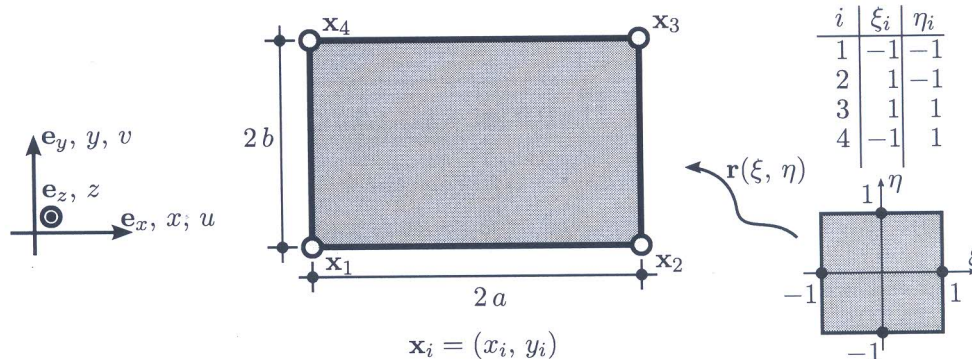


$$\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F}^e, \quad \mathbf{K}^e = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^e = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{pmatrix}^T,$$

donde $\mathbf{K}_{ij} = \frac{t}{4A} \begin{pmatrix} b_i b_j C_{11} + c_i c_j C_{33} & b_i c_j C_{12} + c_i b_j C_{33} \\ c_i b_j C_{12} + b_i c_j C_{33} & c_i c_j C_{22} + b_i b_j C_{33} \end{pmatrix}$ y C_{ij} son las entradas de:

$$\mathbf{C} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \bar{\nu}}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \text{para EPT: } \bar{E} = E, & \bar{\nu} = \nu, \\ \text{para EPD: } \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}, & \bar{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu}. \end{cases}$$

Elemento rectangular de cuatro nodos.



9/11

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4) U^{\oplus}, \quad N_i = \begin{pmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5(x_1 + x_2) + a\xi \\ 0.5(y_1 + y_4) + b\eta \end{pmatrix},$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4\xi_i \eta_i} (\xi + \xi_i)(\eta + \eta_i), \quad U^{\oplus} = (u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4)^T.$$

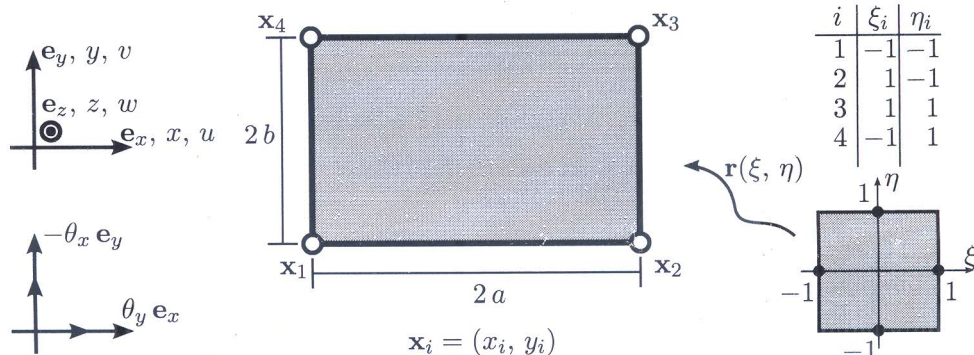
$$K^{\oplus} U^{\oplus} = F^{\oplus}, \quad K^{\oplus} = \frac{t}{12A} \begin{pmatrix} 2a_{14} & a_{36} & d_{41} & b_{36} & -a_{14} & -a_{36} & d_{14} & b_{63} \\ & 2a_{25} & b_{63} & d_{25} & -a_{36} & -a_{25} & b_{36} & d_{52} \\ \text{---} & & 2a_{14} & -a_{36} & d_{14} & b_{36} & -a_{14} & a_{36} \\ & & & 2a_{25} & b_{63} & d_{52} & a_{36} & -a_{25} \\ & & & & 2a_{14} & a_{36} & d_{41} & b_{36} \\ & & & & & 2a_{25} & b_{63} & d_{25} \\ \text{---} & & & & & & 2a_{14} & -a_{36} \\ \text{Sim.} & & & & & & & 2a_{25} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_i + a_j, & b_{ij} &= a_i - a_j, & d_{ij} &= a_i - 2a_j, \\ a_1 &= 8b^2 C_{11}, & a_2 &= 8a^2 C_{22}, & a_3 &= 3A C_{12}, \\ a_4 &= 8a^2 C_{33}, & a_5 &= 8b^2 C_{33}, & a_6 &= 3A C_{33} \end{aligned}$$

donde A es el área del elemento y C_{ij} son las entradas de:

$$C = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \bar{\nu}}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \text{para EPT: } \bar{E} = E, & \bar{\nu} = \nu, \\ \text{para EPD: } \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}, & \bar{\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu^2}. \end{cases}$$

Elemento rectangular de losa de Kirchhoff de 4 nodos (MZC).



$$w = N_w U^{\oplus}, \quad N_w = (N_{w,1} \ N_{w,2} \ N_{w,3} \ N_{w,4}), \quad N_{w,i} = \begin{pmatrix} N_i & a\bar{N}_i & b\bar{\bar{N}}_i \end{pmatrix},$$

donde utilizando que $\mathbf{r}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5(x_1 + x_2) + a\xi \\ 0.5(y_1 + y_4) + b\eta \end{pmatrix}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \xi^2 - \eta^2), \\ \bar{N}_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{8} (\xi^2 - 1) (\xi + \xi_i) (1 + \eta_i \eta), \quad \bar{\bar{N}}_i(\xi, \eta) = \frac{1}{8} (\eta^2 - 1) (\eta + \eta_i) (1 + \xi_i \xi) \quad \text{y} \\ U^{\oplus} &= (w_1 \ \theta_{x,1} \ \theta_{y,1} \ w_2 \ \theta_{x,2} \ \theta_{y,2} \ w_3 \ \theta_{x,3} \ \theta_{y,3} \ w_4 \ \theta_{x,4} \ \theta_{y,4})^T. \end{aligned}$$

$$K^{\oplus} U^{\oplus} = F^{\oplus}, \quad K^{\oplus} = D (K_1 + K_2 + K_3 + K_4) \quad \text{con} \quad D = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)},$$

$$K_1 = \frac{b}{6a^3} \begin{pmatrix} 6 & 6a & 0 & -6 & 6a & 0 & -3 & 3a & 0 & 3 & 3a & 0 \\ 8a^2 & 0 & -6a & 4a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 & 3a & 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 6 & -6a & 0 & 3 & -3a & 0 & -3 & -3a & 0 \\ & & 8a^2 & 0 & -3a & 4a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 6 & -6a & 0 & -6 & -6a & 0 \\ & & \text{Simétrica} & 8a^2 & 0 & 6a & 4a^2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 6 & 6a & 0 \\ & & & & 8a^2 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \frac{a}{6b^3} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6b & 3 & 0 & 3b & -3 & 0 & 3b & -6 & 0 & 6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8b^2 & 3b & 0 & 4b^2 & -3b & 0 & 2b^2 & -6b & 0 & 4b^2 \\ \hline & 6 & 0 & 6b & -6 & 0 & 6b & -3 & 0 & 3b \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 8b^2 & -6b & 0 & 4b^2 & -3b & 0 & 2b^2 \\ \hline & & 6 & 0 & -6b & 3 & 0 & -3b \\ & \text{Simétrica} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 8b^2 & -3b & 0 & 4b^2 \\ \hline & & & 6 & 0 & -6b \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 8b^2 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \frac{\nu}{2ab} \begin{pmatrix} 1 & a & b & -1 & 0 & -b & 1 & 0 & 0 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 2ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & -a & b & -1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -2ab & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 1 & -a & -b & -1 & 0 & b \\ & \text{Simétrica} & 0 & 2ab & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ \hline & & & 1 & a & -b \\ & & & 0 & -2ab \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_4 = \frac{(1-\nu)}{30ab} \begin{pmatrix} 21 & 3a & 3b & -21 & 3a & -3b & 21 & -3a & -3b & -21 & -3a & 3b \\ 8a^2 & 0 & -3a & -2a^2 & 0 & 3a & 2a^2 & 0 & -3a & -8a^2 & 0 \\ 8b^2 & -3b & 0 & -8b^2 & 3b & 0 & 2b^2 & -3b & 0 & -2b^2 \\ \hline & 21 & -3a & 3b & -21 & 3a & 3b & 21 & 3a & -3b \\ & 8a^2 & 0 & 3a & -8a^2 & 0 & -3a & 2a^2 & 0 \\ & 8b^2 & -3b & 0 & -2b^2 & 3b & 0 & 2b^2 \\ \hline & & 21 & -3a & -3b & -21 & -3a & 3b \\ & \text{Simétrica} & 8a^2 & 0 & 3a & -2a^2 & 0 \\ & & 8b^2 & 3b & 0 & -8b^2 \\ \hline & & & 21 & 3a & -3b \\ & & & 8a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $f = f_z e_z$ es una carga de superficie se tiene que:

$$F_{f,L}^{\otimes} = ab f_z \left(1 \quad \frac{a}{3} \quad \frac{b}{3} \quad 1 \quad -\frac{a}{3} \quad \frac{b}{3} \quad 1 \quad -\frac{a}{3} \quad -\frac{b}{3} \quad 1 \quad \frac{a}{3} \quad -\frac{b}{3} \right)^T.$$

11/11

